«Гармония планетных сфер»: наивная фантазия древних или реальное знание, пришедшее из глубины веков? Части 1-4.

Стародубский А. Е., Стародубский Г. Е.

Аннотация

Из глубокой древности пришло к нам учение о музыкальной «Гармонии планетных сфер». Кратко говоря, суть этого учения состоит в том, что Космос построен на основе пифагорейских музыкальных пропорций. Именно на поиск таких пропорций между средними расстояниями от планет до Солнца, великий Кеплер потратил большую часть своей жизни. До нас дошли не только красочные описания учения о «Гармонии сфер» но и 36 чисел, с помощью которых, по мнению древних, осуществлено гармоничное взаиморасположение планет и производится их движение. Сегодня в научном сообществе превалирует мнение, что учение о музыкальной «Гармонии планетных сфер» и поиски Кеплера этой «Гармонии» - это не более, чем наивные фантазии. Однако, в процессе нашего исследования обнаружено несколько удивительных результатов, которые говорят об обратном. Здесь приведём лишь два основных результата:

- оказалось, что 6 из, найденных в древности, 36-ти чисел с небольшими погрешностями совпадают с величинами больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна, выраженными в 10^{-3} *астрономических единиц. Причём, большой полуоси орбиты первой от Солнца планеты, Меркурия, с относительной погрешностью -0,78% соответствует первое и самое малое из 36-ти, пифагорейское число: 384; а большой полуоси орбиты Сатурна с относительной погрешностью -3,37% соответствует предпоследнее из 36-ти, пифагорейское число 9216. Удивительно, но древние конкретно указывали, что именно это, предпоследнее из 36-ти, число соответствует Сатурну;*

- найдены частоты 6-ти нот ($f_{\text{ми}^5}$; $f_{\text{фа}^4}$; $f_{\text{до}^4}$; $f_{\text{ми}^3}$; $f_{\text{соль}^1}$; $f_{\text{ля}}$*) пифагорейского звукоряда и показано, что целочисленные соотношения этих частот с небольшими погрешностями совпадают с соотношениями величин больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна (см. таблицы 8a, 8b и 8c). Т.е. оказалось, что Солнечная планетная система от Меркурия до Сатурна буквально «пронизана» пифагорейскими*

музыкальными пропорциями между величинами больших полуосей орбит планет!

Эти и другие результаты настоящего исследования указывают на высокую вероятность того, что идея о «Гармонии планетных сфер» вовсе не наивная фантазия древних, а реальное знание, пришедшее к нам из глубины веков.

В настоящей статье описана лишь часть обнаруженных нами следствий из идеи о «Гармонии планетных сфер». Продолжение следует.

Ключевые слова: *Гармония сфер, Пифагор, Кеплер, музыкальные пропорции, резонансы в Солнечной системе.*

Предисловие.

В первой части статьи содержится краткий исторический экскурс по теме эволюции взглядов на идею о «Гармонии планетных сфер» и поисков Кеплера этой музыкальной «Гармонии» в Солнечной системе. Показано, что взгляды на эту идею за обозримую историю человечества менялись от полного признания многими древними и средневековыми авторами до пренебрежения и насмешек в 18-21 веках. В заключении к историческому экскурсу отмечено, что пренебрежительное отношение к идее о «Гармонии планетных сфер» и к поискам Кеплера этой «Гармонии» до сих пор никак не поменялось, несмотря на то, что на сегодняшний день, обнаружен целый ряд пифагорейских музыкальных пропорций (2/1; 3/2; 4/3; 3/1) в соотношениях орбитальных характеристик планет и спутников Солнечной системы, а также в соотношениях орбитальных характеристик планет, вращающихся вокруг других звёзд.

Из древности к нам пришли не только красочные описания идеи о «Гармонии планетных сфер», но и 36 чисел, с помощью которых, по мнению пифагорейцев, «Бог разделил Душу Космоса» и которые определяют эту музыкальную «Гармонию». В приложении 1 показано, что все эти 36 чисел можно найти с помощью одной фразы из платоновского диалога «Тимей» (4 век до н.э.) и одной фразы из трактата Псевдо-Тимея Локрского (1 век до н.э.). На этом основании сделан вывод, что эти 36 чисел были известны людям более 2000 лет назад.

Во второй части статьи – описан удивительный результат нашего исследования: 6 из этих, найденных более 2000 лет назад, 36-ти чисел с небольшими погрешностями совпадают с величинами больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна, выраженными в 10^{-3} астрономических единиц. Причём:
- большой полуоси орбиты первой от Солнца планеты, Меркурия, с относительной погрешностью -0,78% соответствует первое и самое малое из тридцати шести, число: 384;
- большой полуоси орбиты Венеры с относительной погрешностью 0,83% соответствует пифагорейское число: 729;
- большой полуоси орбиты Земли с относительной погрешностью -2,8% соответствует пифагорейское число: 972;
- большой полуоси орбиты Марса с относительной погрешностью 0,79% соответствует пифагорейское число: 1536;
- большой полуоси орбиты Юпитера с относительной погрешностью -0,37% соответствует пифагорейское число: 5184;
- большой полуоси орбиты Сатурна с относительной погрешностью -3,37% соответствует предпоследнее из 36 пифагорейское число 9216. Удивительно, но древние откуда-то знали, что именно это предпоследнее число из ряда 36-ти чисел соответствует Сатурну!

В третьей части – показано, что все эти 36 чисел являются пропорционально увеличенными длинами струн монохорда для воспроизведения на нём соответствующих нот пифагорейского звукоряда.

В четвёртой части – найдены частоты 6-ти нот ($f_{ми^5}$; $f_{фа^4}$; $f_{до^4}$; $f_{ми^3}$; $f_{соль^1}$; $f_{ля}$) пифагорейского звукоряда и показано, что целочисленные соотношения этих частот с небольшими погрешностями совпадают с соотношениями величин больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна (см. таблицы 8a, 8b и 8c). Получается, что великий Кеплер вовсе не фантазировал, а был прав, когда искал взаимосвязь между пифагорейскими музыкальными пропорциями и соотношениями средних расстояний от Солнца до этих планет. Эта взаимосвязь реально существует – Солнечная планетная система от Меркурия до Сатурна буквально «пронизана» пифагорейскими музыкальными пропорциями между величинами больших полуосей орбит планет.

А для величин больших полуосей орбит трёх пар планет эти, найденные при работе над статьёй, музыкальные пропорции, из-за малой величины относительных погрешностей, можно назвать пифагорейскими музыкальными резонансами: для пары Меркурий:Юпитер – резонанс 2:27=2:3^3 с относительной погрешностью -0,43%; для пары Земля:Сатурн резонанс 27:256 = 3^3: 2^8 с относительной погрешностью 0,59% и для пары Венера:Марс удивительно точный резонанс 243:512 = 3^5: 2^9 с относительной погрешностью 0,025% (!) – ведь эта погрешность в 4 раза меньше одной тысячной.

1. Введение. Краткий исторический экскурс.

Из глубокой древности пришло к нам учение о «Гармонии планетных сфер». Часто это учение связывают с именем Пифагора (VI – V века до н.э.). Однако, вопрос об авторе учения остаётся открытым. Ямвлих, в частности, писал, что Пифагор получил свои первоначальные знания от египетских жрецов, а затем, общаясь с вавилонскими магами, он в совершенстве овладел «…наукой о числах, музыкой и другими предметами», [6, с.32]. В современных философских словарях также сообщается, что учение о «Гармонии сфер» ещё до Пифагора было распространено «в Др. Египте и Вавилоне, Индии и Китае», а затем «…пифагорейцы перенесли это учение на греческую почву», [13, с.122].

Об этом учении писали: Платон, Аристотель, Цицерон, Филон Александрийский, Плутарх, Ямвлих, Григорий Нисский, Амвросий, Боэций, Кассиодор, Фома Аквинский, Роберт Фладд и многие другие древние и средневековые авторы. Поискам этой «Гармонии» большую часть своей жизни посвятил великий Кеплер.

Древние авторы по-разному излагали учение о «Гармонии сфер». Некоторые из них писали, что планеты, прикрепленные к неким прозрачным сферам, при своём движении издают определенные музыкальные звуки, которые в совокупности воспроизводят сладчайшую мелодию. Другие же, например, Иоганн Кеплер, считали, что музыкальная гармония Космоса заключается в гармоничных соотношениях орбитальных характеристик планет и её надо воспринимать «не слухом, а разумом», [12, с.208]. Но все авторы, так или иначе, были согласны в том, что Космос построен на основе музыкальных пропорций. Почитаем, как наши предки представляли себе эту «Космическую музыкальную гармонию».

1.1. Древние авторы о «Гармонии планетных сфер».

«Исходя … из того, что скорости [звёзд], измеренные по расстояниям, относятся между собой так же, как тоны консонирующих интервалов (Simpfōniōn), они утверждают, что звучание, издаваемое звёздами при движении по кругу, образует гармонию», [1, с.323].

Аристотель (4 век до н.э.) о пифагорейцах.

«…зрение, возведенное светом ввысь и узревшее природу звёзд и согласованное их движение, упорядоченные круговращения… их стройные хороводы, упорядоченные по совершенным законам мусического искусства, — [зрение] стало доставлять душе несказанную радость и наслаждение…», [2, с.62].

Филон Александрийский (1 век до н.э. – 1 век н.э.).

«…Пифагор, Архит, Платон и прочие древние философы утверждали, что движение вселенной и светил слагается и совершается не без участия музыки, так как всё, по их словам, устроено богом согласно требованиям гармонии», [3, с.84].

Плутарх (1-2 века н.э.).

«…весь космос, по их мнению, устроен согласно гармонии, гармония же есть система трех консонансов — кварты, квинты и октавы… консонанс кварты является в виде отношения 4/3, квинты —3/2 и октавы —2/1…», [4, с.79].

Секст Эмпирик (2-ой век н.э.) о пифагорейцах.

«…октава выражается отношением 1:2, квинта — отношением 2:3, кварта — отношением 3:4. Они утверждали также, что вся Вселенная составлена согласно некоторому гармоническому отношению… Полагая, что расстояния движущихся вокруг центра тел пропорциональны, что одни из них движутся быстрей, другие — медленней и что движущиеся медленней издают при движении низкий звук, а движущиеся быстрей — высокий, [они заключали, что] эти звуки относятся между собой так же, как расстояния, и потому образуют гармоническое звучание…», [5, с.468-469].

Александр Афродисийский (2-3 века н.э.) о пифагорейцах.

«…Он один, по его словам, слышал и понимал всеобщую гармонию и созвучие сфер и движущихся по ним светил, которые издают пение более насыщенное и полнозвучное, чем любые смертные… и это движение слагается из их неодинаковых и разнообразных шумов, скоростей, величин и констелляций, которые расставлены в некой исключительно музыкальной пропорции…», [6, с.52].

Ямлих (3-4 века н.э.) о Пифагоре.

«…порядок мироздания есть некая музыкальная гармония, в великом многообразии своих проявлений подчиненная некоторому строю и ритму, приведенная в согласие сама с собой, себе самой созвучная и никогда не выходящая из этого созвучия… в микрокосме, т.е. в человеческой природе, проявляет себя вся музыка, которую можно наблюдать в мироздании…», [7, с.107-109].

Святой Григорий Нисский (4 век н.э.).

«…Столь быстрое движение таких огромных тел вообще не может не производить звучаний, особенно когда движения планет объединены таким согласованием, что ничто [другое] не может мыслиться столь [крепко] соединенным и столь [крепко] связанным…», [8, с.320].

Боэций (5-6 века н.э.).

«…само небо, вращаясь, подчиняется сладостной гармонии… все, что осуществляется по велению Творца в небесных и земных делах, не осуществляется без предусмотренного этой наукой [то есть музыкой]…», [9, с.147].

Кассиодор (5-6 века н.э.).

«… без музыки никакая дисциплина [наука] не может быть совершенной. Ничего не может быть без нее: ведь и сам мир, как утверждают, зиждется на известной гармонии звуков и само небо вращается под звуки гармонии…», [10, с.173].

Исидор из Севильи (6-7 века н.э.).

«…Из движения звёзд возникает некоторая гармония, т.е. согласованное звучание…», [11, с.303].

Учитель церкви, святой Фома Аквинский (13 век).

«…небесные движения есть не что иное, как ни на миг не прекращающаяся многоголосая музыка (воспринимаемая не слухом, а разумом)», [12, с.208].

Иоганн Кеплер (16-17 века н.э.).

До нас дошли не только красочные описания учения о «Гармонии сфер» но и 36 чисел, с помощью которых, по мнению древних, осуществлено гармоничное взаиморасположение планет и производится их движение. Более подробно эти числа мы разберём в следующих частях данной статьи. Здесь лишь отметим, что они представляют пропорционально увеличенные длины струн монохорда для воспроизведения некоторых нот пифагорейского звукоряда. Когда были найдены эти числа сегодня доподлинно неизвестно. Практически все эти числа можно обнаружить, например, в трактате Боэция (480-525 г.г. н.э.), [8, с.421-422]. Но, быстрее всего, все эти числа были найдены гораздо раньше - еще до нашей эры. В доказательство этому в Приложении 1 к настоящей статье показано, как, основываясь на одной фразе из диалога Платона «Тимей» (4 век до н.э.) и на одной фразе из трактата Псевдо-Тимея Локрского (вероятная датировка - 1 век до н.э., [14, с.127]) можно найти все эти 36 чисел.

Самое интересное, что, с одной стороны, древние авторы знали эти числа и были уверены, что именно они определяют «Гармонию планетных сфер», но, с другой стороны, эти авторы не знали каким характеристикам «планетных сфер» данные числа соответствуют. Плутарх, в частности, писал об этом: «…некоторые люди ищут вышеназванные [числа и отношения] в скоростях планетных сфер, другие — в расстояниях между ними, третьи—в величинах звезд; и те, которые представляются особенно точными, [полагают их] в диаметрах эпициклов…», [15, с.100].

Большинство древних авторов пыталось найти эти музыкальные пропорции в соотношениях планетных расстояний, но эти поиски не увенчались успехом.

1.2. 18-19 века: астрономы с пренебрежением относятся к идее о «Гармонии планетных сфер».

Эти неудачные поиски привели к тому, что в 18-19 веках астрономы с пренебрежением начали относиться к самой идее «Гармонии сфер». Гегель по этому поводу писал в своей истории философии: «…В известном отношении мы подвинулись дальше Пифагора; мы узнали от Кеплера законы, эксцентричность и соотношения расстояний и времен обращения, но математика до сих пор еще не в состоянии была указать закон поступательного движения, закон гармонии, определяющий эти расстояния. Эмпирические числа мы знаем точно; но все имеет вид случайности, а не необходимости… последовательного ряда, в котором был бы разум, астрономия еще не открыла в этих расстояниях; она относится пренебрежительно к попыткам дать такой правильный ряд, который, однако, очень важен, и мы не должны отказываться от попыток найти его…», [16, с.204].

1.3. 20-й век: астрономы смеются над идеей о «Гармонии сфер». Обнаружение «музыки сфер» в атомных спектрах. Дискуссия о резонансности Солнечной системы.

В 20-м веке пренебрежение к поиску музыкальных соотношений между элементами орбит планет сохранилось, а некоторые астрономы открыто смеялись над такими попытками. Наш выдающийся философ Алексей Федорович Лосев в своей книге «Античный космос и современная наука», изданной в 1927 году, анализируя философский смысл учения о «Гармонии сфер», с горечью писал: «…астрономы могут сколько угодно над ним смеяться…», [17, с.265].

Поэт Николай Заболоцкий описывал эту ситуацию с помощью следующих слов:

«…Я, как древний Коперник, разрушил

Пифагорово пенье светил

И в основе его обнаружил

Только лепет и музыку крыл», [18, с. 234].

Но, что интересно, в том же, 20-м веке неожиданно открыли «музыку сфер» в атомных спектрах. Альберт Эйнштейн и Леопольд Инфельд в своей книге «Эволюция физики» писали на эту тему: «…колеблющаяся струна имеет свой спектр, так же как и элемент, испускающий излучение. И, так же как и в случае спектра элемента, здесь разрешены лишь известные длины волн, все же другие запрещены.

Таким образом, мы открыли некоторое подобие между колебанием струны и атомом, испускающим излучение. Странно, как может существовать эта аналогия… Атом… ведет себя подобно маленькому акустическому инструменту, в котором создаются стоячие волны…», [19, с.529].

Один из отцов основателей квантовой механики, нобелевский лауреат Арнольд Зоммерфельд описывал это открытие следующими словами: «…То, что нам сегодня удается понять на языке спектров — это истинная музыка атомных сфер, созвучие целочисленных отношений, все возрастающие порядок и гармония…», [20, с.255].

Т.е., по сути, было обнаружено, что атомы того или иного элемента излучают фотоны лишь строго определённых частот, величины которых соотносятся между собой, как целые числа, причём, целый ряд этих отношений совпадает с отношением длин струн пифагорейского звукоряда!

При этом основатели квантовой механики были твёрдо уверены, что квантование и музыкальные пропорции свойственны лишь объектам микромира и не имеют никакого отношения к макрообъектам, а, тем более, к таким объектам, как Солнечная система. Тот же Арнольд Зоммерфельд, характеризуя поиски Кеплера музыкальных соотношений в Солнечной системе, писал: «…Большим сторонником мистики чисел был Иоганн Кеплер… он стремился связать орбиты планет с платоновскими телами; его зрелые немеркнущие творения также глубоко проникнуты пифагорейской идеей о гармонии мира. Вот Кеплеру бы дожить до современной квантовой теории! Он увидел бы осуществленной свою самую смелую юношескую мечту, но не в макрокосмосе небесных тел, а в микрокосмосе атома. Строение оболочки атома гораздо чудесней той космографии, которую представлял себе Кеплер…», [21, с.86].

А вот что по этому поводу писал в 20-м веке известный американский физик, участник манхэттенского проекта, Виктор Фредерик Вайскопф: «…пифагорейцы приписывали фундаментальное значение числам, выражающим отношения радиусов орбит, и значениям отношений периодов обращения различных небесных тел. Они рассматривали простые численные соотношения между соответствующими данными как самое существенное в системе. Для них эти соотношения воплощали "гармонию сфер"… Эта картина Солнечной системы оказалась нежизнеспособной… законы тяготения допускают много траекторий, по которым планета может обращаться вокруг Солнца; такой траекторией может быть любая орбита эллиптической формы. Те вполне конкретные орбиты, на которых были в действительности обнаружены наши планеты, нельзя определить с помощью основного закона движения… В этом смысле реально существующие формы орбит случайны. Небольшие изменения начальных условий привели бы к образованию других орбит…», [22, с.34].

Т.е. мысль В.Ф. Вайскопфа состояла в том, что, по законам классической механики, любая случайная эллиптическая орбита, на которую попала планета, является стационарной и зависит эта орбита лишь от начальных условий, существовавших во время образования Солнечной системы. Поэтому, согласно Вайскопфу, никаких гармонических соотношений элементов орбит планет и в принципе существовать не может; т.к. эти сегодняшние орбиты случайны и без внешних воздействий никак не изменяются со временем, а поэтому, мол, даже чисто теоретически, никак не могут быть связаны между собой каким-либо законом.

Однако, в том же 20-м веке появился целый ряд исследований, авторы которых приводили серьёзные аргументы в пользу того мнения, что орбиты планет в Солнечной Системе эволюционируют и без внешних воздействий. А результатом такой эволюции является синхронизация орбитальных характеристик планет, поэтому они вовсе не случайны, а подчиняются квантовым закономерностям. Один из пионеров этих исследований - наш выдающийся математик и механик Николай Гурьевич Четаев - ещё в 1929 году написал работу, в которой «приёмами классической механики», используя «принцип устойчивости действительных движений в небесной механике», вывел «уравнение дозволенных орбит» для макросистем. Это уравнение неожиданно оказалось практически полным аналогом основного уравнения квантовой механики – уравнения Шредингера, [23, с.248-249]. В этой своей работе Николай Гурьевич, в частности, писал:

«…Всякий раз, когда мы подходим к объяснению тех или иных явлений природы приемами классической механики, мы не должны забывать, что в действительности никакое явление не представлено в чистом виде. Сколь бы точно ни были определены действующие на материальную систему силы, всегда остаются неучтенными некоторые незначительные возмущения. Эти последние, сколь бы малы они ни были, влияют на движение материальной системы, в особенности, если движение неустойчиво. Общий характер сохраняют, таким образом, только устойчивые движения, и поэтому только они более или менее правильно описывают действительные движения.

Этот ясный принцип устойчивости действительных движений, блестяще зарекомендовавший себя во многих основных проблемах небесной механики, как я хочу сейчас показать, неожиданно дает картину почти квантовых явлений… Мы мыслим себе материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил в незначительном поле возмущения. Это последнее разрушает всякое движение, если только оно не является устойчивым и дозволенным. Таким образом сохраняются устойчивые, дозволенные движения…», [23, с.245-249].

Т. е. Четаев в этой статье приводит аргументы в пользу идеи о том, что во всех орбитальных системах любые даже незначительные силы, которые в связи с их «малостью» обычно не учитываются при построении математических моделей, тем не менее, цикл за циклом вносят очень малые изменения в орбиты тел и с течением времени, когда количество колебательных циклов становится значительным из-за накопительного эффекта эти малые силы так изменяют орбиты, что в системе «выживают» только устойчивые «дозволенные орбиты», уравнение для расчёта которых аналогично уравнению Шредингера – главному уравнению квантовой механики!

К подобным результатам в своих исследованиях пришёл ещё один наш выдающийся математик, Альберт Макарьевич Молчанов. Он обнаружил, «…что частоты планет имеют максимально возможный набор резонансных соотношений…», [24, с.5]. Под словами «Резонансные соотношения частот» в этой фразе имеется в виду то, что частоты обращения планет относятся друг к другу, как целые числа – именно такие отношения называются резонансными или целочисленными, или синхронизированными между собой. В выводах одной из своих статей 1966 года Альберт Макарьевич, в частности, писал: «…целочисленность, связываемая обычно с квантовой физикой, есть, вероятно, общее свойство достаточно старых систем. Просто квантовые системы для нас всегда старые, так как их масштаб времени обычно ничтожен, и мы “застаем” их уже проэволюционировавшими. Возможно, что именно поэтому целочисленность заставила обратить на себя внимание прежде всего в физике элементарных частиц и даже определила ее название — квантовая. Кратко основную идею можно сформулировать так: резонансность системы является следствием (и признаком) ее эволюционной зрелости…», [25, с.287].

Т.е., согласно А.М. Молчанову, резонансность свойственна любым колебательным системам микро- и макромира, прошедшим определённый этап эволюции. Атомы и другие «квантовые системы», в связи со своими малыми масштабами, проходят этот путь эволюции, по нашим меркам, практически мгновенно – ведь там за одну нашу секунду совершается множество миллиардов колебательных циклов, в течение которых частоты колебаний и другие параметры идеально синхронизируются между собой, поэтому мы застаём эти микросистемы всегда «проэволюционировавшими». Для макросистем, таких, например, как Солнечная, время эволюции растягивается на миллионы и миллиарды лет, в течение которых и происходит синхронизация орбитальных параметров.

В одной из своих работ 1961 года А.М. Молчанов высказал идею о возможности проведения численного эксперимента по интегрированию на вычислительных машинах эволюционных уравнений «для случая нескольких планет», [26, с.49].

В 1970 году в журнале «Nature» была опубликована статья Дж. Хилза, в которой были описаны результаты такого численного эксперимента интегрирования на ЭЦВМ (ЭЦВМ - Электронная Цифровая Вычислительная Машина - так раньше называли компьютеры). В этом эксперименте с помощью соответствующей системы дифференциальных уравнений изучалась эволюция орбитальных систем: «…Оказалось, что планеты при случайном начальном распределении относительно быстро (за время порядка 10^4 лет) эволюционируют к почти стационарным орбитам, для которых явно наблюдается соизмеримость средних движений, т.е. синхронизация…», [27, с.244].

Т.е. этот численный эксперимент полностью подтвердил выводы А.М. Молчанова и показал удивительный результат – планеты всего за 10 тысяч лет синхронизировали свои орбиты! А это приводит нас к следующему выводу: в Солнечной системе, возраст которой, по современным оценкам, составляет несколько миллиардов лет, орбиты планет за это время столь длительной эволюции могли идеально синхронизироваться между собой!

Вообще говоря, явление самосинхронизации взаимосвязанных колебательных систем известно в науке достаточно давно. Впервые такое явление описал ещё Христиан Гюйгенс более 300 лет назад. Он наблюдал самосинхронизацию фаз колебаний маятниковых часов, подвешенных на одной балке. Вот, что он писал по этому поводу: «…С этими часами было сделано следующее, чрезвычайно замечательное наблюдение. Двое таких часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились... Если искусственно нарушить это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится…», [28, с.30-31].

Т.е. в этом эксперименте Гюйгенса два маятника подвешенные на одной балке, без внешнего воздействия синхронизировали фазы своих колебаний через еле заметные движения балки, на которой они были подвешены. Сегодня в интернете можно найти множество видеороликов с демонстрацией аналогичных опытов – например, [29]-[30], где несколько метрономов, установленных на единой платформе, запущенных с разными фазами, за очень короткое время синхронизируют фазы своих колебаний без каких-либо внешних воздействий!

С момента описания Гюйгенсом явления самосинхронизации маятниковых часов было открыто множество аналогичных явлений в различных областях природы и техники. Вот что, в частности, по этому вопросу писал в 1981 году в своей монографии наш выдающийся математик и механик, основатель научной школы в области вибрационных процессов и машин, Илья Израилевич Блехман: «…Синхронизация — замечательное свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного движения, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас весьма слабые взаимные связи. Синхронизируются маятниковые часы, органные трубы, небесные тела, электрические, электромагнитные и квантовые генераторы, возбудители механических колебаний в вибрационных устройствах, лопатки турбомашин, сообщества клеток и других элементов живых организмов… Ярким примером синхронизации природных объектов являются замечательные целочисленные соотношения между средними угловыми скоростями вращений и обращений (орбитальных движений) небесных тел…», [31, с.2; 21].

В 1974 году один из последователей Четаева и Молчанова, Гулак Ю.К. писал в своей статье: «…Квантование, многие десятилетия считавшееся явлением сугубо атомного уровня, признанное чуждым представлениям классической физики, является непосредственным следствием последней и охватывает как микро-, так и макросистемы…», [32, с.113].

В 1980-м году известный советский астрофизик, Альберт Михайлович Чечельницкий в своей монографии, в частности, написал: «…Фундаментальные волновые уравнения в наиболее существенных чертах единообразно… описывают динамическую структуру элементарных объектов материи на различных уровнях её иерархии, в микро- и мегамире как структуру квантово-волновых динамических систем…», [34, с.237].

В 1985 году в Известиях Крымской Астрономической Обсерватории была опубликована статья нашего известного астронома, соавтора открытия 160-ти минутных глобальных пульсаций Солнца, Валерия Александровича Котова, и его коллеги из французского института астрофизики в Париже, Сержа Кучми. В этой статье была продемонстрирована взаимосвязь между планетными расстояниями и 160-ти минутным периодом пульсаций Солнца: оказалось, что длины орбит внутренних планет от Меркурия до пояса астероидов и большие полуоси орбит планет от Юпитера до Плутона с небольшими отклонениями квантуются, если представить, что в формировании Солнечной системы играла и продолжает играть роль некая волна длиной 19,24 астрономических единиц - эта величина длины волны получается при умножении периода глобальных 160-ти минутных пульсаций Солнца на скорость света, [36]!

В конце 20-го века научное сообщество признало целый ряд положений, о которых писали Н.Г. Четаев, А.М. Молчанов и их последователи. Вот что, в частности, об этом пишут в своей книге известные специалисты в области небесной механики К. Мюррей (Великобритания) и С.Дермотт (США):

«…В течение нескольких веков прогресс в понимании динамики Солнечной системы сдерживался — но не из-за недостатка в знании основных уравнений, описывающих движение тел, а из-за невозможности получить решения этих уравнений кроме как на очень коротких интервалах времени. С широким распространением компьютеров в 1970-х годах стало возможным проводить численные исследования динамической эволюции тел Солнечной системы на реалистичных шкалах времени…
Последняя революция в исследованиях динамики Солнечной системы произошла в 1980-х годах… Лишь в конце 20 века “новые методы небесной механики” были полностью восприняты исследователями динамики Солнечной системы…
Солнечная система эволюционирует на нескольких временных шкалах. Например, наблюдаемые в настоящее время орбиты планет и спутников могут существенно отличаться от тех, которые имели место 4.5 миллиарда лет назад, вскоре после образования Солнечной системы. Сейчас мы знаем, что действие взаимных возмущений и диссипативных сил может приводить к существенной эволюции орбит, и что эта эволюция продолжается и сегодня…», [37, с.37-38].
«..Солнечная система действительно является тонко структурированной совокупностью обращающихся тел… Здесь “работают” законы Ньютона, а тонким гравитационным эффектом, определяющим динамическую структуру нашей Солнечной системы, служит явление резонанса…», [37, с.28].

А вот, что, в частности, написал в своей статье 2008 года ранее цитируемый, Илья Израилевич Блехман: «…Квантование орбит, по крайней мере в макросистемах, тесно связано с явлением самосинхронизации… Явление самосинхронизации состоит в том, что несколько объектов, генерирующих колебания или вращения с различными частотами, при объединении в единую систему генерируют колебания или вращаются с одинаковой или кратными частотами**…»,** [38, с.3-5].

Таким образом, в конце 20-го века представление научного сообщества о динамике Солнечной системы кардинально поменялось: если до этого времени считалось, что орбиты планет случайны и никак не связаны между собой (см выше цитату из книги В.Ф. Вайскопфа), то в конце 20 века стало ясно, что Солнечная система – это «тонко структурированная совокупность обращающихся тел», динамическую структуру которой определяет явление резонанса! И если раньше считалось, что обнаруженные в процессе изучения Солнечной системы орбитальные резонансы – это некое случайное явление, то в конце 20 века стало ясно, что эти резонансы - есть закономерное следствие самосинхронизации орбитальных параметров планет в процессе эволюции Солнечной системы.

1.4. Некоторые примеры обнаруженных на сегодняшний момент резонансных соотношений в Солнечной системе. Большинство резонансов соответствует пифагорейским музыкальным пропорциям.

На сегодняшний момент в Солнечной системе найден целый ряд резонансных отношений между средними движениями планет и спутников. Наш известный астроном, заведующий отделом небесной механики и динамической астрономии Пулковской обсерватории, Иван Иванович Шевченко, в частности, пишет по этому поводу в своей статье 2010 года: «…Широко известны приблизительные орбитальные соизмеримости Юпитер—Сатурн (отношение средних движений ≈5/2), Сатурн—Уран (≈3/1), Уран—Нептун (≈2/1), резонанс Нептун—Плутон (3/2)…», [39, с.20]. Поясним слова из этой цитаты с помощью таблицы 1:

Таблица 1. Сравнение соотношений средних движений планет с соотношениями соответствующих целых чисел.

Пары Планет	Отношение средних движений планет*: $\omega_1 : \omega_2 = \frac{T_2}{T_1}$		Отношение соответствующих целых чисел		Относительная погрешность, %
	Обыкн. дробь	Десятич. дробь	Обыкн. дробь	Десят. дробь	
Юпитер, Сатурн	$\frac{29{,}45852}{11{,}86256}$	2,48332	$\frac{5}{2}$	2,5	$\frac{2{,}5 - 2{,}48332}{2{,}48332} 100\% = 0{,}67\%$
Сатурн, Уран	$\frac{84{,}013}{29{,}45852}$	2,85191	$\frac{3}{1}$	3,0	$\frac{3 - 2{,}85191}{2{,}85191} 100\% = 5{,}19\%$
Уран, Нептун	$\frac{164{,}795}{84{,}013}$	1,96154	$\frac{2}{1}$	2,0	$\frac{2 - 1{,}96154}{1{,}96154} 100\% = 1{,}96\%$
Нептун, Плутон	$\frac{248{,}602}{164{,}795}$	1,50855	$\frac{3}{2}$	1,5	$\frac{1{,}5 - 1{,}50855}{1{,}50855} 100\% = -0{,}57\%$

*Отношение средних движений планет определяется, как обратное отношение периодов обращения этих планет: $\omega_1 : \omega_2 = \frac{2\pi}{T_1} : \frac{2\pi}{T_2} = \frac{T_2}{T_1}$

Периоды обращения планет: $T_{Юп}$ = 11,86256 лет; $T_{Сат}$ = 29,45852 лет; $T_{Ур}$ = 84,013 лет; $T_{Неп}$ = 164,795 лет; $T_{Пл}$ = 248,602 лет, [40, с.502].

Пояснение к таблице 1: в этой цитате из статьи И.И. Шевченко говорится о соотношениях средних движений планет. Напомним, что средним движением (ω) тела (планеты или спутника) называется средняя угловая скорость движения этого тела по орбите вокруг центра притяжения:

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{360^{\circ}}{T}$; где

T – период обращения тела по орбите вокруг центра притяжения;

$2\pi = 360^{\circ}$ – полный угол, пробегаемый телом за один оборот.

Заметим, что отношение средних движений двух планет или спутников: ω_1 и ω_2 будет обратно пропорционально отношению их периодов обращения, т.к.:

$\omega_1 : \omega_2 = \frac{2\pi}{T_1} : \frac{2\pi}{T_2} = \frac{T_2}{T_1}$

В таблице 1 найдены реальные отношения средних движений пар планет, упомянутых в цитате И.И.Шевченко, и произведено сравнение (т.е. найдена относительная погрешность) этих реальных отношений с соотношением соответствующих целых чисел.

Эту таблицу можно прочитать следующим образом:

- соизмеримость средних движений Юпитера и Сатурна составляет 5/2 с относительной погрешностью: 0,67%;
- соизмеримость средних движений Сатурна и Урана составляет 3/1 с относительной погрешностью: 5,19%;
- соизмеримость средних движений Урана и Нептуна составляет 2/1 с относительной погрешностью: 1,96%;
- соизмеримость средних движений Нептуна и Плутона составляет 3/2 с относительной погрешностью: -0,57%. При этом, соизмеримость средних движений Нептуна и Плутона И.И.Шевченко называет резонансом, т.к. относительная погрешность очень мала – всего -0,57%.

А вот, что И.И. Шевченко пишет в той же статье о резонансах средних движений в спутниковых системах планет:

«…Если орбитальные частоты (как говорят небесные механики, средние движения) планет в планетной системе или спутников в спутниковой системе примерно соизмеримы, т.е. их отношение приблизительно равно отношению двух целых чисел, то система либо близка к орбитальному резонансу, либо находится в нем. В Солнечной системе многие спутники планет входят в резонансные или близкие к резонансным системы. Например, в системе Юпитера Ио и Европа, а также Европа и Ганимед находятся в резонансе средних движений 2/1. В системе Сатурна Мимас и Тефия, а также Энцелад и Диона пребывают в резонансе 2/1, Диона и Рея — вблизи резонанса 5/3, Титан и Гиперион — в резонансе 4/3.

В системе Урана все резонансы приблизительные: Миранда и Умбриэль движутся вблизи резонанса 3/1, Ариэль и Умбриэль — 5/3, Умбриэль и Титания — 2/1, Титания и Оберон — 3/2. Захваты спутниковых систем в орбитальные резонансы — закономерные этапы приливной эволюции этих небесномеханических систем…», [39, с.17].

Кроме того, в Солнечной системе обнаружен целый ряд спин-орбитальных резонансов. Вот что по этому поводу пишут в своей книге К. Мюррей и С.Дермотт: «…Наиболее очевидный пример спин-орбитального резонанса — это Луна, орбитальный период которой равен периоду ее вращения; поэтому Луна всегда повернута к Земле одной своей стороной. Большинство крупных естественных спутников в Солнечной системе находятся в спин-орбитальном резонансе 1:1... Однако возможны и другие спин-орбитальные состояния. Например, радиолокационные наблюдения Меркурия, проведенные Петтенджилом и Дайсом (1965), показали, что Меркурий находится в спин-орбитальном резонансе 3:2…», [37, с.28-29].

Т.е., когда говорят о спин-орбитальном резонансе 1:1, то это означает, что период вращения данного небесного тела вокруг своей оси равен орбитальному периоду обращения этого же тела. Так, например, для Луны её период вращения вокруг собственной оси равен периоду обращения вокруг Земли, поэтому она всегда повёрнута к Земле одной стороной.
Для Меркурия спин-орбитальный резонанс равен 3/2, т.к. он вращается вокруг своей оси с периодом: 58,65 суток, а орбитальный период обращения Меркурия вокруг Солнца составляет: 87,969 суток – соотношение этих двух периодов: 87,969/58,65 с достаточно высокой степенью точности составляет 3/2.
Заметим, что большинство вышеописанных резонансов в Солнечной системе совпадает с пифагорейскими музыкальными пропорциями! Ведь основными консонансами пифагорейского музыкального строя являются: консонанс 2/1 – это октава; консонанс 3/2 – это квинта; консонанс 4/3 – это кварта. А консонанс 3/1 – также пифагорейский – называется он дуодецима и состоит из двух интервалов квинты и октавы, т.е.: $3/1 = 3/2 \cdot 2/1$.

Мы пришли к интересному результату: средние угловые скорости целого ряда тел Солнечной системы относятся между собой, как тоны пифагорейских консонирующих интервалов - удивительно, но почти такими же словами пифагорейское учение о «Гармонии сфер» характеризовали некоторые древние и средневековые авторы (см. цитаты выше).

1.5. 21-й век: Обнаружены пифагорейские музыкальные пропорции в орбитальных характеристиках планет в системах других звёзд, но отношение к поискам Кеплера аналогичных соотношений в Солнечной системе никак не изменилось.

На сегодняшний день обнаружено несколько тысяч планетных систем возле других звёзд, [41]. Некоторые системы удивляют согласованностью орбитальных параметров планет. Так в 2010 году астрономы из США сообщили о том, что в системе красного карлика Gliese 876 три из четырёх планет вращаются в резонансе 4:2:1. Т.е. «…Периоды вращения этих тел, имеющих размеры, соответственно, примерно с Юпитер, Сатурн и Уран, относятся, как 4:2:1…», [42].

Но что означает резонанс периодов обращения трёх планет 4:2:1? Это означает, что период обращения самой дальней (из этих трёх) от звезды планеты в 2 раза больше периода находящейся посредине планеты и в 4 раза больше периода самой ближней к звезде планеты. Т.е. резонансная цепочка в парах выглядит так: 4/2; 2/1 – но эти соотношения есть не что иное, как музыкальные пропорции частот звуков в пифагорейских октавах!

В 2023 году было объявлено об обнаружении планетной системы из шести планет, вращающихся вокруг звезды HD110067: периоды обращения этих шести планет «…образуют резонансную цепочку в парах 3:2, 3:2, 4:3 и 4:3…», [43].

Иными словами, периоды обращения этих планет относятся между собой, как частоты звуков в пифагорейской квинте и кварте!

В 2018 году в Известиях Пулковской астрономической обсерватории была опубликована статья наших астрономов, в которой, в частности, были изложены результаты исследования 74-х резонансных планетных систем, обращающихся вокруг других звёзд, на предмет наиболее часто встречающихся в этих системах резонансных соотношений периодов планет: «…Наиболее часто встречающимися оказались резонансы типа 1:2 и 2:3 (17 и 18 систем соответственно), также распространены резонансы 3:4 и 3:5 (4 и 6 систем соответственно)…», [44, 151].

Т. е. это исследование показало, что в 39-ти (17+18+4=39) из 74-х резонансных планетных систем периоды обращения планет относятся друг к другу как частоты звуков в основных пифагорейских консонансах: октаве, квинте и кварте!

Несмотря на обнаружение целого ряда пифагорейских музыкальных соотношений в орбитальных характеристиках планет и спутников Солнечной системы и в планетных системах других звёзд, отношение научного сообщества к пифагорейскому учению о «Гармонии планетных сфер» и к поискам Кеплера этой «Гармонии» с 19-го века по сегодняшний день практически не изменилось:

- В опубликованной в Англии в 1898 году «Краткой истории астрономии» её автор Артур Берри писал, что значительная часть книги Кеплера “Гармония мира“: «…наполнена малоценными аналогиями между пропорциями солнечной системы и соотношением между различными музыкальными гаммами…», [45, с.264-265];

- В биографическом справочнике «Астрономы» 1977 г. издания поиски Кеплера гармоничных отношений между элементами орбит планет в его книге «Гармония мира» названы: «…фантастическими рассуждениями о связи между отношениями расстояний планет в Солнечной системе и музыкальными тонами ("музыка сфер")…», [46, с.115];

- В книге «Законы космоса» (2002 г.) идея Кеплера о том, «…что все небесные движения… проникнуты общей гармонией…» оценена как надуманная «концепция», [47, с.38];

- В одном из изданий 2015 года книга Кеплера «Гармония мира», за исключением сформулированного в ней «третьего из знаменитых законов», оценивается, как труд, «…который не представляет никакой ценности с точки зрения современной физики и астрономии», [48, с.35].

Таким образом, в отношении к пифагорейскому учению о «Гармонии планетных сфер» и к поискам Кеплера этой «Гармонии» существует некая двойственность:

- с одной стороны, на сегодняшний день, в научном сообществе есть полное согласие в том, что в процессе движения планет и спутников по своим орбитам происходит синхронизация их орбитальных параметров. Более того, обнаружен целый ряд пифагорейских музыкальных пропорций (2/1; 3/2; 4/3;

3/1) в соотношениях различных орбитальных параметров как в Солнечной системе, так и в планетных системах, вращающихся вокруг других звёзд;

- с другой стороны – поиски великого Кеплера, который 400 лет назад искал эти же пифагорейские музыкальные пропорции в орбитальных характеристиках планет Солнечной системы, мы называем «фантастическими рассуждениями», не представляющими «никакой ценности» для современной науки!?

2. Тридцать шесть пифагорейских чисел, которые, по мнению древних, определяют «Гармонию планетных сфер». Проверка этих чисел на соответствие величинам больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна.

От древних авторов к нам дошли не только красочные описания идеи о музыкальной «Гармонии планетных сфер», но и 36 чисел, которые, по их мнению, и определяют эту гармонию. Вот эти числа:

Таблица 2. Числа (и соответствующие им ноты), с помощью которых Бог, по мнению пифагорейцев, разделил душу Космоса и которые определяют «Гармонию планетных сфер» , [49, с.171-172], [50, с.196-197].

№	Числа	Ноты, соответствующие этим числам	№	Числа	Ноты, соответствующие этим числам
1	384	Mi	19	2187	Si^b (Си-бемоль)
2	432	Re	20	2304	La
3	486	Ut (До)	21	2592	Sol
4	512	Si	22	2916	Fa
5	576	La	23	3072	Mi
6	648	Sol	24	3456	Re
7	729	Fa	25	3888	Ut (До)
8	768	Mi	26	4374	Si^b (Си-бемоль)
9	864	Re	27	4608	La
10	972	Ut (До)	28	5184	Sol
11	1024	Si	29	5832	Fa
12	1152	La	30	6144	Mi
13	1296	Sol	31	6561	Mi^b (Ми-бемоль)
14	1458	Fa	32	6912	Re
15	1536	Mi	33	7776	Ut (До)
16	1728	Re	34	8748	Si^b (Си-бемоль)
17	1944	Ut (До)	35	9216	La
18	2048	Si	36	10368	Sol

Все эти числа были найдены ещё до нашей эры (см. прил. 1). Как уже отмечалось в первой части, древние были уверены, что именно эти числа определяют «Гармонию планетных сфер», поэтому они искали гармонические музыкальные пропорции среди различных характеристик планет и их орбит. Большинство древних авторов пыталось найти эти музыкальные пропорции в соотношениях планетных расстояний, но эти поиски по разным причинам не увенчались успехом.

Сегодня мы с достаточной точностью знаем устройство Солнечной системы и средние расстояния от планет до Солнца, поэтому нам гораздо легче, чем древним проверить, применимы ли эти 36 чисел для описания орбитальных характеристик планет.

Перед проверкой почитаем, что, в частности, по поводу древних трактовок этих 36 чисел писал в своей книге «История неба» французский астроном и известный популяризатор науки 19 века, Камиль Николя Фламарион: «…предположив радиус, или полудиаметр мира, разделенным на эти 36 чисел, получаем скалу Мировой Души, или её постепенно увеличивающееся количество сообразно музыкальным пропорциям. Остаётся только разместить по порядку небесные существа или тела на октавах или на квинтах, или на квартах и получится совершенный аккорд, как концерт всех частей вселенной…», [50, с. 197].

Т.е., согласно Фламариону, древние считали, что эти 36 чисел отражают музыкальные пропорции, с помощью которых разделён радиус мира, и что планеты размещены на определённых расстояниях от центра Мира, а соотношения расстояний планет от центра соответствуют этим музыкальным пропорциям. Иными словами, Фламарион пишет, что, по мнению древних, среди 36 чисел, с помощью которых разделён радиус Мира, для каждой из планет можно отыскать число, которое соответствует расстоянию от этой планеты до центра.

И ещё одна интересная информация от Фламариона, который сообщает, что, согласно древним: «…Сатурн находится непосредственно под 36-м тоном…», [50, с.198].

Т.е., согласно Фламариону, древние считали, что расстоянию от Сатурна (самой дальней из известных на тот момент планет) до центра системы соответствует предпоследнее из ряда 36 чисел, число под №35, т.е. число 9216 (см. табл.2).

Вооружившись этой дополнительной информацией от Фламариона, проверим эти 36 чисел на соответствие планетным расстояниям в гелиоцентрической системе отсчёта. Иными словами, в результате проверки мы должны узнать: можно ли из этого ряда 36-ти чисел найти числа соответствующие расстояниям до Солнца для всех планет, находящихся между Солнцем и Сатурном, при условии, что расстоянию от Солнца до Сатурна соответствует число 9216.

Проверку начнём с Меркурия, который является первой планетой от Солнца. Логично предположить, что самой близкой к Солнцу планете - Меркурию должно соответствовать первое (самое малое из 36) число – 384. Проверим это, сравнив отношение средних расстояний от Сатурна до Солнца ($\mathrm{L}_{\text{Сатурна}}$) и от Меркурия до Солнца ($\mathrm{L}_{\text{Меркурия}}$) с отношением соответствующего Сатурну числа 9216 к числу 384.

Как известно, средним расстоянием от планеты до Солнца является величина большой полуоси её орбиты. Большие полуоси орбит Сатурна и Меркурия, составляют соответственно:

$\mathrm{L}_{\text{Сатурна}}$ = 9,537070 а.е. и

$\mathrm{L}_{\text{Меркурия}}$ = 0,387099 а.е., [40, с.502], где

а.е. – астрономическая единица, равная величине большой полуоси орбиты Земли.

Теперь найдём отношения:

$\frac{\text{Число №35}}{\text{Число №1}} = \frac{9216}{384} = 24;$

$\frac{\text{Большая полуось орбиты Сатурна}}{\text{Большая полуось орбиты Меркурия}} = \frac{\mathrm{L}_{\text{Сатурна}}}{\mathrm{L}_{\text{Меркурия}}} = \frac{9{,}537070}{0{,}387099} \approx 24{,}64.$

Мы получили интересный результат: отношение числа 9216, которое древние приписывали Сатурну, к числу 384 - самому малому из 36 чисел очень близко к отношению величины большой полуоси орбиты Сатурна к величине большой полуоси орбиты самой близкой к Солнцу планеты - Меркурия!

Таким образом, мы можем сказать, что большой полуоси орбиты Меркурия среди 36-ти пифагорейских чисел соответствует число – 384. Для нахождения чисел, соответствующих большим полуосям орбит планет, находящихся между Меркурием и Сатурном, построим таблицу, в которую, среди прочих, занесём округлённые величины больших полуосей орбит планет, выраженные в 10^{-3} а.е. (см. столбец 3, таблицы 3) и наиболее близкие к этим величинам больших полуосей числа, выбранные из 36 пифагорейских чисел (см. столбец 4 таблицы 3). В столбце 5 таблицы 3 произведём сравнение соответствующих чисел из столбцов 3 и 4:

Таблица 3. Сравнение величин больших полуосей орбит планет с соответствующими этим величинам числами, выбранными из 36 пифагорейских чисел.

Плане-ты	Величины больших полуосей орбит планет, [40, с.502]		Соответствующие величинам больших полуосей орбит планет числа, выбранные из 36 пифагорейских чисел (см. табл.2)	Относительная погрешность, %
	а.е.	10^{-3} а.е.*		
1	2	3	4	5
Мерку-рий	0,387099	387	384	$\frac{384-387}{387}100\% = -0{,}78\%$
Венера	0,723332	723	729	$\frac{729-723}{723}100\% = 0{,}83\%$
Земля**	1,000	1000	972	$\frac{972-1000}{1000}100\% = -2{,}8\%$
Марс	1,523662	1524	1536	$\frac{1536-1524}{1524}100\% = 0{,}79\%$
Юпитер	5,203363	5203	5184	$\frac{5184-5203}{5203}100\% = -0{,}37\%$
Сатурн	9,537070	9537	9216	$\frac{9216-9537}{9537}100\% = -3{,}37\%$

*Округлённые значения величин больших полуосей планет, выраженные в 10^{-3} а.е.
**Величина большой полуоси Земли выраженная в 10^{-3} а.е. находится почти посредине между двумя пифагорейскими числами 972 и 1024. Здесь из этих двух чисел выбрано число 972, т.к. оно даёт меньшую погрешность при дальнейших вычислениях (см. часть 4).

Итак, расчёты показывают, что 6 из 36 чисел, которые, по мнению древних, определяют «Гармонию планетных сфер», с небольшими относительными погрешностями соответствуют величинам больших полуосей орбит планет Солнечной системы:

- большой полуоси орбиты первой от Солнца планеты, Меркурия, с относительной погрешностью -0,78% соответствует первое и самое малое из тридцати шести, число: 384;
- большой полуоси орбиты Венеры с относительной погрешностью 0,83% соответствует пифагорейское число: 729;
- большой полуоси орбиты Земли с относительной погрешностью -2,8% соответствует пифагорейское число: 972;
- большой полуоси орбиты Марса с относительной погрешностью 0,79% соответствует пифагорейское число: 1536;
- большой полуоси орбиты Юпитера с относительной погрешностью -0,37% соответствует пифагорейское число: 5184;
- большой полуоси орбиты Сатурна с относительной погрешностью -3,37% соответствует пифагорейское число 9216.

Древние откуда-то знали, что именно это предпоследнее число из ряда 36-ти чисел соответствует Сатурну!

Это очень удивительный результат - 6 пифагорейских чисел (см. столбец 4, табл.3) в целом более точно соответствуют величинам больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна, чем числа из известного закона планетных расстояний Тициуса-Боде.

Напомним, что все эти пифагорейские числа были известны древним ещё до нашей эры (см. Приложение 1), когда, по сегодняшним представлениям, наши предки не имели никаких знаний ни о больших полуосях орбит планет, ни, тем более, о соотношениях между ними. Причём древние писали, что эти 36 чисел определяют «Гармонию планетных сфер» и конкретно указывали, что число под №35, т.е. число 9216, соответствует местоположению Сатурна – так и оказалось: из всех 36 чисел, число 9216 наиболее близко к величине большой полуоси орбиты Сатурна, выраженной в 10^{-3} а.е. Кроме того, число 384 особо упоминается как первое в трактате Псевдо-Тимея Локрского (см. Приложение 1), и именно это число под №1, практически совпадает с величиной большой полуоси орбиты первой от Солнца планеты Меркурия, выраженной в 10^{-3} а.е.!

Все приведённые выше факты подводят нас к выводу о том, что эти близкие друг к другу значения величин больших полуосей орбит планет и найденных древними чисел – это, с высокой степенью вероятности, не случайные совпадения, а фрагменты реальных знаний, пришедших к нам из глубины веков.

Более того, эти, найденные более 2000 лет назад, числа интересны не только с точки зрения истории науки, но и с точки зрения современной астрономии – об этом в следующих частях настоящей статьи.

3. Пришедшие из древности 36 чисел означают пропорционально увеличенные длины струн монохорда для воспроизведения на нём соответствующих нот пифагорейского звукоряда.

Результаты, полученные в части 2 настоящей статьи дают нам стимул более подробно разобраться в том, что конкретно из пифагорейского звукоряда характеризуют 36 пифагорейских чисел: доли струны или частоты приписываемых им нот.

Для того, чтобы выяснить это, найдём соотношения чисел, обозначенных нотами Re, Mi^b, Mi, Fa, Sol, La, Si^b, Si (см. табл.2) к числам, обозначенным, как ноты Ut (До) и сопоставим эти соотношения с соответствующими отношениями долей струны в пифагоровом строе. Перед этой проверкой вспомним, как выглядит пифагоров строй в долях струны:

Таблица 4. Пифагоров строй, выраженный в долях струны.

Ноты	До	Ре♭	Ре	Ми♭	Ми	Фа	Соль♭	Соль	Ля♭	Ля	Си♭	Си	До
Доли стру-ны	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Интер-вальные коэфф.*	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	

* Для нахождения долей струны нот пифагорова строя используются два интервальных коэффициента 243:256 = $3^5 : 2^8$; и 2048:2187 = $2^{11} : 3^7$. Последовательно умножая на эти коэффициенты принятую за единицу долю струны для ноты “До” мы получим соответствующие доли струны для воспроизведения остальных нот пифагорейской октавы: например, чтобы найти долю струны для воспроизведения ноты Ре-бемоль надо долю струны ноты До той же октавы умножить на соответствующий интервальный коэффициент (см. строчку 3 таблицы): $1 \cdot \frac{243}{256} = \frac{243}{256}$. Для того, чтобы найти долю струны для воспроизведения следующей ноты Ре, надо только что полученный результат для ноты Ре-бемоль умножить на соответствующий интервальный коэффициент: $\frac{243}{256} \cdot \frac{2048}{2187} = \frac{8}{9}$. Так, последовательно умножая полученные результаты на соответствующие интервальные коэффициенты, мы получим значения долей струны для воспроизведения всех нот пифагорейской октавы.

Пифагоров строй в долях струны (строчка 2, табл. 4) показывает отношения длин струн для той или иной ноты октавы к принятой за единицу длине струны для ноты “До” той же октавы, поэтому:
- длина струны для воспроизведения, например, ноты “Ми” какой-либо октавы должна составлять 64/81 от длины струны для ноты “До” той же самой октавы (см. табл.4, строчку 2, столбец 6);
- а длина струны для воспроизведения, например, ноты “Фа” любой октавы должна составлять 3/4 от длины струны для ноты “До” той же самой октавы (см. табл.4, строчку 2, столбец 7);
– и так же для всех остальных нот, включая ноту “До” следующей более высокой октавы (см. табл.4, строчку 2, последний столбец), для которой соотношение длин струн должно составлять 1/2.

Теперь расположим 36 пифагорейских чисел по октавам с учётом найденных древними соответствующих этим числам нот (см. табл.2). Причём, октаву, в которую входит самое малое число: 384, будем считать самой высокой и по аналогии с нашей современной музыкальной системой, назовём её пятой пифагорейской октавой, тогда остальные числа расположатся по октавам так, как показано в таблице 5:

Таблица 5. Расположение 36 чисел по октавам с учётом найденных древними соответствующих этим числам нот и при условии, что октава, в которую входит самое малое число 384 – является самой высокой, т.е. пятой октавой.

Ноты	Октавы								
	Субк. октава	Контр-октава	Больш. октава	Малая октава	Первая октава	Вторая октава	Третья октава	Четвёрт. октава	Пятая октава
Ut (до)					7776	3888	1944	972	486
Re^{b}									
Re					6912	3456	1728	864	432
Mi^{b}					6561				
Mi					6144	3072	1536	768	384
Fa					5832	2916	1458	729	
Sol^{b}									
Sol				10368	5184	2592	1296	648	
La^{b}									
La				9216	4608	2304	1152	576	
Si^{b}				8748	4374	2187			
Si						2048	1024	512	

Теперь рассчитаем соотношения пифагорейских чисел из таблицы 5, обозначенных древними, как ноты Re, Mi^{b}, Mi, Fa, Sol, La, Si^{b}, Si, к числам соответствующих октав, обозначенным, как ноты Ut (До) и затем сравним результаты этих расчётов с соотношениями соответствующих длин струн пифагорова строя:

Таблица №6. Расчёт отношений чисел обозначенных нотами Re, Mi^b, Mi, Fa, Sol, La, Si^b, Si к числам соответствующих октав, обозначенным, как ноты Ut.

Соотношения чисел, соответствующих нотам:	Соотношения чисел, обозначенных нотами Re, Mi^b, Mi, Fa, Sol, La, Si^b, Si, к числам соответствующих октав, обозначенным, как нота Ut (До)					Величина отношений одинакова для всех октав
	Первая октава	Вторая октава	Третья октава	Четвёртая октава	Пятая октава	
Re:Ut (До)	6912:7776	3456:3888	1728:1944	864:972	432:486	8:9
Mi^b:Ut (До)	6561:7776					27:32
Mi:Ut (До)	6144:7776	3072:3888	1536:1944	768:972	384:486	64:81
Fa:Ut (До)	5832:7776	2916:3888	1458:1944	729:972		3:4
Sol:Ut (До)	5184:7776	2592:3888	1296:1944	648:972		2:3
La:Ut (До)	4608:7776	2304:3888	1152:1944	576:972		16:27
Si^b:Ut (До)	4374:7776	2187:3888				9:16
Si:Ut (До)		2048:3888	1024:1944	512:972		128:243

Итак, наш расчёт показал для каждой из октав следующие результаты:
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Ре” и “До” составляют 8:9;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Ми-бемоль” и “До” составляют 27:32;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Ми” и “До” составляют 64:81;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Фа” и “До” составляют 3:4;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Соль” и “До” составляют 2:3;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Ля” и “До” составляют 16:27;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Си-бемоль” и “До” составляют 9:16;
- соотношения чисел обозначенных, как ноты “Си”и “До” составляют 128:243;

Заметим, что величины отношений, найденных в таблице 5 в точности совпадают с соотношениями долей струн соответствующих нот пифагорова строя (см. строчку 2 табл.4), а это совпадение указывает на то, что

проверенные нами 33 числа означают пропорционально увеличенные длины струн монохорда для воспроизведения на нём соответствующих нот пифагорейского звукоряда.
Оставшиеся три числа, принадлежащие к малой октаве, также представляют длины струн монохорда для воспроизведения соответствующих нот малой октавы, т.к. они ровно в 2 раза больше соответствующих длин струн первой октавы: 10368:5184 = 2; 9216:4608 = 2; 8748:4374 = 2. Именно такие отношения должны существовать между длинами струн монохорда для одинаковых нот двух соседних октав: малой и первой.

Выводы к части 3.

Все 36 пифагорейских чисел, с помощью которых, по мнению древних, осуществлено гармоничное взаиморасположение планет и производится их движение - означают пропорционально увеличенные длины струн монохорда для воспроизведения на нём соответствующих нот пифагорейского звукоряда. Т.е., если мы настроим монохорд таким образом, что струна длиной 384 каких-либо единицы будет воспроизводить ноту “Ми” пятой октавы ($l_{\text{ми}^5} = 384$), то тогда для воспроизведения на этом же монохорде, например, ноты “Фа” четвёртой октавы нам понадобится струна длиной 729 тех же единиц ($l_{\text{фа}^4} = 729$), а для воспроизведения ноты “Ми” третьей октавы нам понадобится струна длиной 1536 тех же единиц ($l_{\text{ми}^3}$=1536) и такой же принцип для воспроизведения на этом же монохорде всех нот из таблицы 5.

4. Отношения величин больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна с небольшими погрешностями совпадают с отношениями частот нот пифагорейского звукоряда. Кеплер оказался прав!?

Как показано в части 1 настоящей статьи, великого Кеплера на протяжении последних веков критикуют, в частности, за то, что большую часть своей жизни он посвятил поискам музыкальных соотношений в характеристиках орбит планет. Эти поиски сегодня зачастую называют: «…фантастическими рассуждениями о связи между отношениями расстояний планет в Солнечной системе и музыкальными тонами…», [46, с.115].

Сейчас у нас появилась возможность проверить: так ли уж фантастичны были эти рассуждения Кеплера о связи соотношений музыкальных тонов и соотношений планетных расстояний. В части 2 статьи было показано, что 6 из 36 пифагорейских чисел с небольшими отклонениями равны величинам больших полуосей орбит планет, выраженным в 10^{-3} а.е. (см. табл. 3). Затем, в части 3 статьи, мы обнаружили, что все эти числа соответствуют пропорционально увеличенным длинам струн монохорда для воспроизведения соответствующих нот пифагорейского звукоряда и нашли соответствующие этим длинам струн пифагорейские ноты с разбивкой по октавам (см. табл.5). Теперь для нашей проверки того, насколько вышеупомянутые рассуждения Кеплера соответствуют реальности, необходимо найти пифагорейские частоты, соответствующие этим нотам и затем попытаться найти связь между соотношениями этих частот и величин больших полуосей орбит планет.

Как известно, частота основного тона f, издаваемого струной вычисляется по формуле:

$\mathrm{f} = \frac{k}{l}$ ………(1), где: $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\rho\cdot \mathrm{S}}}$;

F – сила натяжения струны; ρ – плотность материала струны; S – площадь поперечного сечения струны; l – длина звучащей части струны.

Заметим, что коэффициент *k* зависит от силы натяжения и физических свойств струны, поэтому, учитывая то, что пришедшие из древности 36 пифагорейских чисел обозначают пропорционально увеличенные длины струн монохорда (инструмента с одной струной), мы можем сказать, что, в нашем случае, для любых пар f и l, соответствующих той или иной ноте, этот коэффициент будет константой, поэтому из формулы (1) мы можем записать:

k = $l \cdot$ f = константа.

По аналогии с нашей музыкальной системой, возьмём за стандарт частоту ноты ля^1 (ля первой октавы) - $\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = 440$ Гц. Длине струны (l) для ноты ля^1 – в нашем случае соответствует пифагорейское число: $l_{\text{ля}^1}$ = 4608 – см. табл. 5. Тогда можно записать k = $l_{\text{ля}^1} \cdot \mathrm{f}_{\text{ля}^1}$ = 4608 · 440

Теперь, зная величину коэффициента k мы можем найти пифагорейские частоты для любых длин струн (l) монохорда из таблицы 5 по формуле:

$$\mathrm{f} = \frac{k}{l} = \frac{l_{\text{ля}1}}{l}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{4608}{l}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1}$$

Найдём пифагорейские частоты для 6 длин струн монохорда, соответствующих величинам больших полуосей орбит планет:

- большой полуоси Меркурия соответствует длина струны $l_{\text{ми}^5}$ = 384, а основная пифагорейская частота звучания этой струны составит:
$\mathrm{f}_{\text{ми}^5} = \frac{4608}{384}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = 12 \cdot \mathrm{f}_{\text{ля}^1} = 12 \cdot 440 = 5280$ Гц;

- большой полуоси Венеры соответствует длина струны $l_{\text{фа}^4}$ = 729, а основная пифагорейская частота звучания этой струны составит:
$\mathrm{f}_{\text{фа}^4} = \frac{4608}{729}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{512}{81} \cdot \mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{512}{81} \cdot 440 \approx 2781{,}23$ Гц;

- большой полуоси Земли соответствует длина струны $l_{\text{до}^4}$ = 972, а основная пифагорейская частота звучания этой струны составит:
$\mathrm{f}_{\text{до}^4} = \frac{4608}{972}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{128}{27} \cdot \mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{128}{27} \cdot 440 \approx 2085{,}93$ Гц;

- большой полуоси Марса соответствует длина струны $l_{\text{ми}^3}$ = 1536, а основная пифагорейская частота звучания этой струны составит:
$\mathrm{f}_{\text{ми}^3} = \frac{4608}{1536}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = 3 \cdot \mathrm{f}_{\text{ля}^1} = 3 \cdot 440 = 1320$ Гц;

- большой полуоси Юпитера соответствует длина струны $l_{\text{соль}^1}$= 5184, а основная пифагорейская частота звучания этой струны составит:
$\mathrm{f}_{\text{соль}^1} = \frac{4608}{5184}\,\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{8}{9} \cdot \mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{8}{9} \cdot 440 \approx 391{,}11$ Гц;

- большой полуоси Сатурна соответствует длина струны $l_{ля}$ = 9216, а основная пифагорейская частота звучания этой струны составит:

$f_{ля} = \frac{4608}{9216} f_{ля^1} = \frac{1}{2} \cdot f_{ля^1} = \frac{1}{2} \cdot 440$ = 220 Гц.

Занесём полученные данные в таблицу 7:

Таблица 7. Близкие к величинам больших полуосей планет длины струн пифагорейского звукоряда и соответствующие им ноты и частоты

<table>
<tr><td rowspan="3">Плане-ты</td><td colspan="2">Величины больших полуосей орбит планет, [40, с.502]</td><td colspan="4">Близкие к величинам больших полуосей планет длины струн пифагорейского звукоряда и соответствующие им ноты и частоты</td></tr>
<tr><td rowspan="2">а.е.</td><td rowspan="2">Округлён-ные значения, 10^{-3} а.е.</td><td rowspan="2">Длины струн*</td><td rowspan="2">Но-ты**</td><td colspan="2">Пифагорейские частоты нот***</td></tr>
<tr><td>В долях от частоты $f_{ля^1}$</td><td>В Герцах, при условии, что $f_{ля^1}$= 440 Гц</td></tr>
<tr><td>Мерку-рий</td><td>0,387099</td><td>387</td><td>$l_{ми^5}$ =384</td><td>$ми^5$</td><td>$12f_{ля^1}$</td><td>5280</td></tr>
<tr><td>Венера</td><td>0,723332</td><td>723</td><td>$l_{фа^4}$ = 729</td><td>$фа^4$</td><td>$\frac{512}{81} f_{ля^1}$</td><td>2781,23</td></tr>
<tr><td>Земля</td><td>1,000</td><td>1000</td><td>$l_{до^4}$ = 972</td><td>$до^4$</td><td>$\frac{128}{27} f_{ля^1}$</td><td>2085,93</td></tr>
<tr><td>Марс</td><td>1,523662</td><td>1524</td><td>$l_{ми^3}$ = 1536</td><td>$ми^3$</td><td>$3f_{ля^1}$</td><td>1320</td></tr>
<tr><td>Юпи-тер</td><td>5,203363</td><td>5203</td><td>$l_{соль^1}$ =5184</td><td>$соль^1$</td><td>$\frac{8}{9} f_{ля^1}$</td><td>391,11</td></tr>
<tr><td>Сатурн</td><td>9,537070</td><td>9537</td><td>$l_{ля}$ = 9216</td><td>ля</td><td>$\frac{1}{2} f_{ля^1}$</td><td>220</td></tr>
<tr><td colspan="7">*Близкие к величинам больших полуосей орбит планет длины струн монохорда для воспроизведения соответствующих нот пифагорейского звукоряда;
**Соответствующие длинам струн пифагорейские ноты (см. табл.5). Слоговое обозначение нот по Гельмгольцу.
*** Заметим, что пифагорейские частоты (см. последний столбец таблицы) очень близки по значению частотам соответствующих нот используемого сегодня равномерно темперированного строя.</td></tr>
</table>

В таблице 7 собраны все данные для расчёта соотношений больших полуосей орбит планет и сравнения этих соотношений с соответствующими соотношениями длин струн и частот пифагорейского звукоряда. Расчёт будем производить следующим образом: для каждой пары планет найдём соотношение величин больших полуосей орбит, затем найдём соответствующие соотношения длин струн и частот пифагорейского звукоряда, а, затем, найдём насколько расходятся эти соотношения – для этого вычислим относительную погрешность. Все результаты расчётов сведём в таблицу. Для примера, приведём здесь расчёты для первой пары планет, Меркурий-Венера:

- отношение больших полуосей этой пары планет составляет:

$\frac{\text{Большая полуось орбиты Меркурия}}{\text{Большая полуось орбиты Венеры}} = \frac{0{,}387099}{0{,}723332} \approx 0{,}53516;$

- теперь найдём соотношение соответствующих этим планетам длин струн пифагорейского звукоряда, см. столбец 4 таблицы 7:

$\frac{l_{\text{ми}^5}}{l_{\text{фа}^4}} = \frac{384}{729} = \frac{128}{243} \approx 0{,}52675;$

- теперь найдём соотношение частот, соответствующих этому соотношению длин струн. Как известно, соотношение частот любых нот (f_1 и f_2), сыгранных на одной струне обратно пропорционально соотношению длин соответствующих частей струны (l_1 и l_2), воспроизводящих эти ноты. Это вытекает из приведённой выше формулы (1). Ведь для любых двух частот, сыгранных на одной струне, как уже упоминалось выше, коэффициент k будет константой и поэтому для них можно записать:

$\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}_2} = \frac{k}{l_1} : \frac{k}{l_2} = \frac{l_2}{l_1}$, а отсюда, следует, что: $\frac{l_{\text{ми}^5}}{l_{\text{фа}^4}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}}{\mathrm{f}_{\text{ми}^5}}$.

Это равенство можно проверить. Из таблицы 7 (столбец 6) находим:

$\mathrm{f}_{\text{фа}^4} = \frac{512}{81}\mathrm{f}_{\text{ля}^1}$ и $\mathrm{f}_{\text{ми}^5} = 12\mathrm{f}_{\text{ля}^1}$; а отсюда : $\frac{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}}{\mathrm{f}_{\text{ми}^5}} = \frac{512}{81}\mathrm{f}_{\text{ля}^1} : 12\mathrm{f}_{\text{ля}^1} = \frac{512}{81 \cdot 12} = \frac{128}{243}$,

т.е. можно записать: $\frac{l_{\text{ми}^5}}{l_{\text{фа}^4}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}}{\mathrm{f}_{\text{ми}^5}} = \frac{128}{243} = \frac{2^7}{3^5} \approx 0{,}52675.$

Теперь найдём какую относительную погрешность составляет этот результат в сравнении с соотношением величин больших полуосей орбит Меркурия и Венеры:

$\frac{0,52675-0,53516}{0,53516}100\% \approx -1,57\%;$

Делаем вывод из нашего расчёта:

- соотношение длин струн $l_{\text{ми}^5}: l_{\text{фа}^4}$ для воспроизведения нот ми^5 и фа^4 пифагорейского звукоряда как и обратное ему соотношение пифагорейских частот этих же нот $f_{\text{фа}^4}: f_{\text{ми}^5}$ составляет величину 128:243 = $2^7: 3^5$. Этот результат с относительной погрешностью -1,57% совпадает с соотношением величин больших полуосей орбит Меркурия и Венеры.

Остальные аналогичные расчёты для всех планет от Меркурия до Сатурна сведены в таблицу 1-Пр2 (см. Приложение 2). Здесь лишь приведём окончательные результаты этих расчётов в трёх сводных таблицах 8а, 8b и 8c.

Таблица 8а. Соотношения частот нот пифагорейского звукоряда, близкие к соотношениям, соответствующих больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна.*

Планеты	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн
Меркурий	1:1	$\frac{f_{\text{фа}^4}}{f_{\text{ми}^5}}$	$\frac{f_{\text{до}^4}}{f_{\text{ми}^5}}$	$\frac{f_{\text{ми}^3}}{f_{\text{ми}^5}}$	$\frac{f_{\text{соль}^1}}{f_{\text{ми}^5}}$	$\frac{f_{\text{ля}}}{f_{\text{ми}^5}}$
Отн. погр. %		-1,57%	2,06%	-1,60%	-0,43%	2,65%
Венера	$\frac{f_{\text{ми}^5}}{f_{\text{фа}^4}}$	1:1	$\frac{f_{\text{до}^4}}{f_{\text{фа}^4}}$	$\frac{f_{\text{ми}^3}}{f_{\text{фа}^4}}$	$\frac{f_{\text{соль}^1}}{f_{\text{фа}^4}}$	$\frac{f_{\text{ля}}}{f_{\text{фа}^4}}$
Отн. погр. %	1,60%		3,69%	-0,025%	1,17%	4,30%
Земля	$\frac{f_{\text{ми}^5}}{f_{\text{до}^4}}$	$\frac{f_{\text{фа}^4}}{f_{\text{до}^4}}$	1:1	$\frac{f_{\text{ми}^3}}{f_{\text{до}^4}}$	$\frac{f_{\text{соль}^1}}{f_{\text{до}^4}}$	$\frac{f_{\text{ля}}}{f_{\text{до}^4}}$
Отн. погр. %	-2,02%	-3,56%		-3,58%	-2,44%	0,59%
Марс	$\frac{f_{\text{ми}^5}}{f_{\text{ми}^3}}$	$\frac{f_{\text{фа}^4}}{f_{\text{ми}^3}}$	$\frac{f_{\text{до}^4}}{f_{\text{ми}^3}}$	1:1	$\frac{f_{\text{соль}^1}}{f_{\text{ми}^3}}$	$\frac{f_{\text{ля}}}{f_{\text{ми}^3}}$
Отн. погр. %	1,62%	0,026%	3,71%		1,19%	4,33%
Юпитер	$\frac{f_{\text{ми}^5}}{f_{\text{соль}^1}}$	$\frac{f_{\text{фа}^4}}{f_{\text{соль}^1}}$	$\frac{f_{\text{до}^4}}{f_{\text{соль}^1}}$	$\frac{f_{\text{ми}^3}}{f_{\text{соль}^1}}$	1:1	$\frac{f_{\text{ля}}}{f_{\text{соль}^1}}$
Отн. погр. %	0,43%	-1,15%	2,50%	-1,17%		3,10%
Сатурн	$\frac{f_{\text{ми}^5}}{f_{\text{ля}}}$	$\frac{f_{\text{фа}^4}}{f_{\text{ля}}}$	$\frac{f_{\text{до}^4}}{f_{\text{ля}}}$	$\frac{f_{\text{ми}^3}}{f_{\text{ля}}}$	$\frac{f_{\text{соль}^1}}{f_{\text{ля}}}$	1:1
Отн. погр. %	-2,59%	-4,12%	-0,58%	-4,14%	-3,01%	

*Таблицы 8a, 8b и 8c. демонстрируют следующее утверждение: зная значения частот шести пифагорейских нот ($f_{ми^5}$; $f_{фа^4}$; $f_{до^4}$; $f_{ми^3}$; $f_{соль^1}$; $f_{ля}$), можно найти целочисленные соотношения очень близкие к соотношениям величин больших полуосей орбит любых пар планет от Меркурия до Сатурна. Теперь рассмотрим, как пользоваться таблицей 8a: найдём, например, ячейку таблицы на пересечении строчки «Венера» и столбца «Юпитер» - в этой ячейке записано соотношение: $\frac{f_{соль^1}}{f_{фа^4}}$, а внизу стоит число: 1,17%. Эти записи обозначают, что соотношение величин больших полуосей орбит планет Венеры и Юпитера с относительной погрешностью 1,17% совпадает с соотношением пифагорейских частот нот $\frac{f_{соль^1}}{f_{фа^4}}$ - это можно записать так:

$$\frac{\text{Большая полуось орбиты Венеры}}{\text{Большая полуось орбиты Юпитера}} \approx \frac{f_{соль^1}}{f_{фа^4}},$$ с погрешностью 1,17%.

Проверим это приблизительное равенство:

В таблице 7 (см.выше) найдём значения частот пифагорейских нот $соль^1$ и $фа^4$ в долях от частоты $f_{ля^1}$:

$f_{соль^1} = \frac{8}{9}\ f_{ля^1}$;

$f_{фа^4} = \frac{512}{81}\ f_{ля^1}$; отсюда найдём соотношение этих частот:

$$f_{соль^1} : f_{фа^4} = \frac{8}{9}\ f_{ля^1} : \frac{512}{81}\ f_{ля^1} = \frac{9}{64} = \frac{3^2}{2^6} \approx 0{,}14063$$

В той же таблице 7 (столбец 2) найдём величины больших полуосей орбит планет Венеры и Юпитера:
Большая полуось орбиты Венеры - $0{,}723332$ а. е.;

Большая полуось орбиты Юпитера - $5{,}203363$ а. е.

Теперь найдём соотношение величин больших полуосей орбит Венеры и Юпитера:

$$\frac{\text{Большая полуось орбиты Венеры}}{\text{Большая полуось орбиты Юпитера}} = \frac{0{,}723332 \text{ а.е.}}{5{,}203363 \text{ а.е.}} \approx 0{,}13901$$

Ну и, наконец, найдём относительную погрешность в %:

$$\frac{0{,}14063 - 0{,}13901}{0{,}13901} \cdot 100\% \approx 1{,}17\%$$

Так же можно проверить данные из любой другой ячейки таблицы 8а – как уже упоминалось выше, все эти расчёты приведены в таблице 1-Пр2 в Приложении 2.
В таблице 8b приведены те же музыкальные соотношения, только выражены они в виде соотношения целых чисел. Можно сказать, что эта таблица демонстрирует пифагорейские резонансы и близкие к резонансным целочисленные отношения величин больших полуосей орбит планет.
В таблице 8с приведены те же соотношения пифагорейских музыкальных частот, очень близкие к соотношениям соответствующих больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна, но выражены эти соотношения в степенях чисел 2 и 3.

Таблица 8b. Выраженные в целых числах соотношения частот нот пифагорейского звукоряда, близкие к соотношениям, соответствующих больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна.

Планеты	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн
Меркурий	1:1	$\frac{128}{243}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{24}$
Отн. погр. %		-1,57%	2,06%	-1,60%	-0,43%	2,65%
Венера	$\frac{243}{128}$	1:1	$\frac{3}{4}$	$\frac{243}{512}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{81}{1024}$
Отн. погр. %	1,60%		3,69%	-0,025%	1,17%	4,30%
Земля	$\frac{81}{32}$	$\frac{4}{3}$	1:1	$\frac{81}{128}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{27}{256}$
Отн. погр. %	-2,02%	-3,56%		-3,58%	-2,44%	0,59%
Марс	$\frac{4}{1}$	$\frac{512}{243}$	$\frac{128}{81}$	1:1	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{6}$
Отн. погр. %	1,62%	0,026%	3,71%		1,19%	4,33%
Юпитер	$\frac{27}{2}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{27}{8}$	1:1	$\frac{9}{16}$
Отн. погр. %	0,43%	-1,15%	2,50%	-1,17%		3,10%
Сатурн	$\frac{24}{1}$	$\frac{1024}{81}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{16}{9}$	1:1
Отн. погр. %	-2,59%	-4,12%	-0,58%	-4,14%	-3,01%	

Таблица 8с. Выраженные в степенях чисел 2 и 3 соотношения частот нот пифагорейского звукоряда, близкие к соотношениям, соответствующих больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна.

Планеты	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн
Меркурий	1:1	$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^5}{3^4}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3}$
Отн. погр. %		-1,57%	2,06%	-1,60%	-0,43%	2,65%
Венера	$\frac{3^5}{2^7}$	1:1	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{3^5}{2^9}$	$\frac{3^2}{2^6}$	$\frac{3^4}{2^{10}}$
Отн. погр. %	1,60%		3,69%	-0,025%	1,17%	4,30%
Земля	$\frac{3^4}{2^5}$	$\frac{2^2}{3}$	1:1	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3}{2^4}$	$\frac{3^3}{2^8}$
Отн. погр. %	-2,02%	-3,56%		-3,58%	-2,44%	0,59%
Марс	$\frac{2^2}{1}$	$\frac{2^9}{3^5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	1:1	$\frac{2^3}{3^3}$	$\frac{1}{2 \cdot 3}$
Отн. погр. %	1,62%	0,026%	3,71%		1,19%	4,33%
Юпитер	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^6}{3^2}$	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{3^3}{2^3}$	1:1	$\frac{3^2}{2^4}$
Отн. погр. %	0,43%	-1,15%	2,50%	-1,17%		3,10%
Сатурн	$\frac{2^3 \cdot 3}{1}$	$\frac{2^{10}}{3^4}$	$\frac{2^8}{3^3}$	$\frac{2 \cdot 3}{1}$	$\frac{2^4}{3^2}$	1:1
Отн. погр. %	-2,59%	-4,12%	-0,58%	-4,14%	-3,01%	

Выводы к четвёртой части:

В четвёртой части найдены частоты для 6 нот ($f_{ми^5}$; $f_{фа^4}$; $f_{до^4}$; $f_{ми^3}$; $f_{соль^1}$; $f_{ля}$) пифагорейского звукоряда и показано, что целочисленные соотношения этих частот с небольшими погрешностями совпадают с соотношениями величин больших полуосей орбит планет от Меркурия до Сатурна (см. таблицы 8a, 8b и 8c). Получается, что великий Кеплер вовсе не фантазировал, а был прав, когда искал взаимосвязь между пифагорейскими музыкальными пропорциями и соотношениями средних расстояний от Солнца до этих планет. Эта взаимосвязь реально существует – Солнечная планетная система от Меркурия до Сатурна с небольшими погрешностями буквально пронизана пифагорейскими музыкальными пропорциями между величинами больших полуосей орбит планет.

А для величин больших полуосей орбит трёх пар планет эти найденные музыкальные пропорции, из-за малой величины относительных погрешностей, можно назвать пифагорейскими музыкальными резонансами: для пары Меркурий:Юпитер – резонанс 2:27=2:3^3 с относительной погрешностью -0,43%; для пары Земля:Сатурн резонанс 27:256 = 3^3: 2^8 с относительной погрешностью 0,59% и для пары Венера:Марс удивительно точный резонанс 243:512 = 3^5: 2^9 с относительной погрешностью 0,025% (!) – ведь эта погрешность в 4 раза меньше одной тысячной.

Все эти результаты указывают на высокую вероятность того, что идея о «Гармонии планетных сфер» вовсе не наивная фантазия древних, а реальное знание, пришедшее к нам из глубины веков.

В настоящей статье описана лишь часть обнаруженных нами следствий из идеи о «Гармонии планетных сфер». Продолжение следует.

Приложение 1. Доказательство того, что 36 чисел, которые, по словам наших древних предков, определяют «Гармонию планетных сфер», пришли к нам из глубокой древности, т.е. были известны нашим предкам ещё до нашей эры.

Итак, используя две фразы: из диалога Платона «Тимей» и из трактата Псевдо-Тимея Локрского «О природе космоса и души», попробуем найти эти 36 чисел.

Фраза 1 из диалога Платона – «Тимей», написанного в 4 веке до н.э.:

Платон пишет, что создав смесь для Души Космоса, Бог разделил ее на нужное число частей, далее цитата из диалога Платона:

«…Делить же он начал следующим образом: прежде всего отнял от целого одну долю, затем вторую, вдвое большую, третью — в полтора раза больше второй и в три раза больше первой, четвертую — вдвое больше второй, пятую — втрое больше третьей, шестую — в восемь раз больше первой, а седьмую — больше первой в двадцать семь раз. После этого он стал заполнять образовавшиеся двойные и тройные промежутки, отсекая от той же смеси все новые доли и помещая их между прежними долями таким образом, чтобы в каждом промежутке было по два средних члена, из которых один превышал бы меньший из крайних членов на такую же его часть, на какую часть превышал бы его больший, а другой превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число. Благодаря этим скрепам возникли новые промежутки, по 3/2, 4/3 и 9/8, внутри прежних промежутков. Тогда он заполнил все промежутки по 4/3 промежутками по 9/8, оставляя от каждого промежутка частицу такой протяженности, чтобы числа, разделенные этими оставшимися промежутками, всякий раз относились друг к другу как 256 к 243. При этом смесь, от которой бог брал упомянутые доли, была истрачена до конца…», [51, с.437-438].

Фраза 2 из трактата Псевдо-Тимея Локрского «О природе космоса и души», написание которого наши ученые относят к концу 1 века до н.э., [14, с.127]. Вот что, в частности, написано в этом трактате о 36 числах, с помощью которых Бог разделил Душу Космоса, цитируем:

«….19. Отношения же внутри смеси все выражаются гармоническими числами. Эти отношения разделил он на части с целью научного познания, чтобы никто не оставался в неведении относительно того, из каких частей и при посредстве чего составлена душа…

21. Он отнял одну часть в качестве первой, состоящую из четырех единиц, восьми десятков и трех сотен. Если первое уже установлено, то двойную и тройную часть… из него рассчитать легче. Вместе с дополнительными и основными тонами в целом должно быть 36 членов, общее число должно составлять 114.695…», [52, с.131-132].

Итак, согласно Псевдо-Тимею Локрскому, Бог разделил Душу Космоса на 36 частей, причем:

- первая часть состоит из «четырех единиц, восьми десятков и трех сотен», т.е. соответствует числу 384;

- отношения внутри Души выражаются гармоническими числами;

- а сумма всех 36 чисел составляет: 114 695.

Начнем поиск 36 чисел с разбора фразы Платона из диалога «Тимей».

Разобьем эту фразу на фрагменты и, внимательно читая их, будем шаг за шагом находить числа, о которых повествует Платон:

Фрагмент 1 из фразы Платона: в нем говорится – о 7 числах, с помощью которых Бог разделил целое на доли, читаем:

«Делить же он начал следующим образом: прежде всего отнял от целого одну долю, затем вторую, вдвое большую, третью — в полтора раза больше второй и в три раза больше первой, четвертую — вдвое больше второй, пятую — втрое больше третьей, шестую — в восемь раз больше первой, а седьмую — больше первой в двадцать семь раз…», [51, с.437-438].

- Платон пишет, что вначале Бог отнял от целого одну долю – обозначим эту одну долю числом 1;

- далее Платон пишет, что затем Бог отнял от целого вторую долю, вдвое большую, чем первая, поэтому, соответственно, обозначим вторую долю числом 2;

- третья доля по Платону в полтора раза больше второй и в три раза больше первой: число, которое в полтора раза больше числа 2 и в три раза больше числа 1 - есть число 3;

- четвертая доля по Платону в 2 раза больше второй, т.е. четвертая доля выражается числом 4;

- пятая доля по Платону втрое больше, чем третья, т.е. составляет число 9;

- шестая доля, по Платону в 8 раз больше первой, т.е. составляет число 8;

- седьмая доля, по Платону в 27 раз больше первой, т.е., соответственно, составляет число 27.

Итак, из первого фрагмента мы получили следующие числа – запишем их:

1; 2; 3; 4; 9; 8; 27.

Теперь разбираем второй фрагмент из фразы Платона:

Фрагмент 2 из фразы Платона: в нем говорится о том, как Бог делил возникшие двойные и тройные промежутки, читаем:

«…После этого он стал заполнять образовавшиеся двойные и тройные промежутки, отсекая от той же смеси все новые доли и помещая их между прежними долями таким образом, чтобы в каждом промежутке было по два средних члена, из которых один превышал бы меньший из крайних членов на такую же его часть, на какую часть превышал бы его больший, а другой превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число. Благодаря этим скрепам возникли новые промежутки, по 3/2, 4/3 и 9/8, внутри прежних промежутков…», [51, с.438].

Платон сообщает, что после первого деления образовались двойные и тройные промежутки – найдем их среди этих семи чисел и запишем:

Двойные промежутки, т.е. такие промежутки, в которых крайние члены относятся друг к другу как один к двум:

1 – 2; 2 – 4; 4 – 8;

Тройные промежутки, т.е. такие промежутки, в которых крайние члены относятся друг к другу как один к трем:

1 – 3; 3 – 9; 9 – 27

Далее Платон пишет, что Бог продолжил деление этих образовавшихся двойных и тройных промежутков так, чтобы в каждом промежутке было по «…два средних члена, из которых один превышал бы меньший из крайних членов на такую же его часть, на какую часть превышал бы его больший, а другой превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число…», [51, с.438].

По сути, Платон в этом фрагменте сформулировал математическую задачу по поиску средних членов для двойных и тройных промежутков – решим её:

Итак, **ЗАДАЧКА от ПЛАТОНА**:

Дано:

- три двойных промежутка: 1 – 2; 2 – 4; 4 – 8;

- и три тройных промежутка: 1 - 3; 3 – 9; 9 – 27

Ставится задача: найти для каждого из этих промежутков по два средних члена, которые удовлетворяют следующим условиям:

- первый средний член превышает меньший из крайних членов на такую же его часть, на какую свою часть превышает его больший крайний член промежутка:

- второй средний член превышает меньший крайний член и уступает большему крайнему члену на одинаковое число.

РЕШЕНИЕ:

Вначале решим эту задачу в общем виде для всех промежутков, а затем найдем значения средних членов для каждого промежутка в отдельности:

- Обозначим меньшие крайние члены промежутков буквой: А, тогда, бо́льшие крайние члены промежутков можно записать в виде: m·A; назовём букву: m – интервальным коэффициентом, т.е. таким числом, на которое надо умножить меньший крайний член промежутка, чтобы получить больший крайний член. Понятно, что для двойных промежутков интервальный коэффициент: m=2, а для тройных промежутков - интервальный коэффициент: m=3;

- Обозначим первый средний член промежутков символом: C_1 и второй средний член – символом: C_2;

Тогда любой из промежутков со средними членами можно представить в виде:

$A – C_1 – C_2 – mA$

Теперь составим уравнение для поиска первого среднего члена - C_1:

Если внимательно прочитать условие Платона для первого среднего члена - C_1, то в этом условии Платон, по сути, пишет, что для всех двойных и тройных промежутков действует следующее правило: отношение разности чисел: (C_1-A) к числу A равно отношению разности чисел: (mA-C_1) к числу mA.

Записываем это условие Платона в виде уравнения:

$$\frac{C_1 - A}{A} = \frac{mA - C_1}{mA}$$

Решим это уравнение:

умножим обе части уравнения на mA и после сокращения получим:

$$m(C_1 - A) = mA - C_1;$$

$$mC_1 - mA - mA + C_1 = 0$$

$$C_1(m + 1) = 2\ mA$$

$$C_1 = \frac{2\ mA}{m + 1}$$

Теперь, подставляя в полученную формулу значение интервального коэффициента m для двойных и тройных промежутков, получим:

- для двойных промежутков, где m=2, средний член C_1 будет равен: $C_1 = \frac{4}{3}$A, где A – меньший крайний член промежутка;

- для тройных промежутков, где m=3, средний член C_1 будет равен: $C_1 = \frac{3}{2}$A, где A – меньший крайний член промежутка;

Теперь напишем уравнение для поиска второго среднего члена - C_2:

Согласно Платону, C_2 превышает A на такую же величину, на которую mA превышает C_2 – запишем это условие в виде уравнения:

$C_2 – A = mA - C_2$

Отсюда находим:

$2C_2 = (m+1)A$, а значит:

$C_2 = \frac{(m+1)A}{2}$

Подставляя в полученную формулу значение интервального коэффициента m для двойных и тройных промежутков, получим:

- для двойных промежутков, где m=2, средний член $C_2 = \frac{3}{2}A$;
- для тройных промежутков, где m=3, средний член $C_2 = 2A$;

Запишем решение задачи Платона в виде двух таблиц:

Таблица 1-Пр.1. Таблица двойных промежутков со средними членами.

Двойные промежутки без средних членов	Меньшие крайние члены промежутка, A	Первый средний член промежутка, $C_1 = \frac{4}{3}A$	Второй средний член промежутка, $C_2 = \frac{3}{2}A$	Двойные промежутки со средними членами
1-2	1	$\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$	$\frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$	$1 - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} - 2$
2-4	2	$\frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$	$\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$	$2 - \frac{8}{3} - 3 - 4$
4-8	4	$\frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$	$\frac{3}{2} \cdot 4 = 6$	$4 - \frac{16}{3} - 6 - 8$

Таблица 2-Пр.1. Таблица тройных промежутков со средними членами.

Тройные промежутки без средних членов	Меньшие крайние члены промежутка, A	Первый средний член промежутка, $C_1 = \frac{3}{2}A$	Второй средний член промежутка, $C_2 = 2A$	Тройные промежутки со средними членами
1-3	1	$\frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$	$2 \cdot 1 = 2$	$1 - \frac{3}{2} - 2 - 3$
3-9	3	$\frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 - \frac{9}{2} - 6 - 9$
9-27	9	$\frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{2}$	$2 \cdot 9 = 18$	$9 - \frac{27}{2} - 18 - 27$

В конце выделенного нами Фрагмента 2, Платон пишет, что после того, как в двойные и тройные промежутки были вставлены по два средних члена, «…возникли новые промежутки, по 3/2, 4/3 и 9/8, внутри прежних промежутков…», [51, с.438].

Т.е. Платон говорит здесь о том, что средние члены разбили двойные и тройные промежутки на новые более мелкие промежутки с интервальными коэффициентами по 3/2, 4/3 и 9/8. Наглядно эти слова Платона демонстрируют: таблица 3-Пр.1 и таблица 4-Пр.1. Столбцы с интервальными коэффициентами смещены в них относительно столбцов с крайними членами промежутков, чтобы продемонстрировать, что каждый следующий крайний член промежутка равен предыдущему члену, умноженному на соответствующий интервальный коэффициент:

Таблица 3-Пр.1. Новые промежутки по 4/3 и 9/8 внутри двойных промежутков после добавления в них средних членов*:

Крайние члены новых промежутков	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{8}{3}$	3	4	$\frac{16}{3}$	6	8
Интервальные коэффициенты	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	

*Таблица демонстрирует, что каждый последующий член промежутка равен предыдущему члену, умноженному на соответствующий интервальный коэффициент из числа тех коэффициентов, о которых пишет Платон:

$$1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2; \quad 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}; \quad \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} = 3; \quad 3 \cdot \frac{4}{3} = 4; \quad 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3};$$
$$\frac{16}{3} \cdot \frac{9}{8} = 6; \quad 6 \cdot \frac{4}{3} = 8;$$

Таблица 4-Пр.1. Новые промежутки по 3/2 и 4/3 внутри тройных промежутков после добавления в них средних членов*:

Крайние члены новых промежутков	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{9}{2}$	6	9	$\frac{27}{2}$	18	27
Интервальные коэффициенты	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	

*Таблица демонстрирует, что каждый последующий член промежутка равен предыдущему члену, умноженному на соответствующий интервальный коэффициент из числа тех коэффициентов, о которых пишет Платон:

$$1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2; \quad 2 \cdot \frac{3}{2} = 3; \quad 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}; \quad \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 6; \quad 6 \cdot \frac{3}{2} = 9; \quad 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2};$$
$$\frac{27}{2} \cdot \frac{4}{3} = 18; \quad 18 \cdot \frac{3}{2} = 27;$$

Фрагмент 3 из фразы Платона:

«…Тогда он заполнил все промежутки по 4/3 промежутками по 9/8, оставляя от каждого промежутка частицу такой протяженности, чтобы числа, разделенные этими оставшимися промежутками, всякий раз относились друг к другу как 256 к 243. При этом смесь, от которой бог брал упомянутые доли, была истрачена до конца…», [51, с.438].

В этом фрагменте Платон пишет, что все промежутки по 4/3, которые образовались после того, как Бог вставил по два средних члена в двойные и тройные промежутки, Бог заполнил новыми промежутками по 9/8 и после этого деления от каждого промежутка в 4/3, осталась часть, равная 256/243.

Для того, чтобы понять эту фразу Платона, заметим, что:

Произведение дробей: $\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{256}{243}$ после сокращения составит как раз - $\frac{4}{3}$

Т.е. Платон в этом фрагменте, по сути, говорит, что каждый промежуток по 4/3, образовавшийся после вставления средних членов, Бог ещё раз поделил на более мелкие промежутки: на два промежутка с интервальными коэффициентами по 9/8 и один промежуток с интервальным коэффициентом: 256/243.

Произведём расчёт новых промежутков по 9/8 и 256/243 внутри промежутков по 4/3, образовавшихся в двойных промежутках после добавления в них средних членов. Данные расчёта сведём в таблицу 5-Пр.1:

Таблица 5-Пр.1. Окончательный вид двойных промежутков после деления их на новые промежутки по 9/8 и 256/243.

Промежутки по 4/3 внутри двойных промежутков, после добавления в них средних членов (см. таблицу 3-Пр.1)	Расчет крайних членов промежутков по 9/8 и 256/243 внутри промежутков по 4/3	Вид промежутков по 4/3 после деления их на новые промежутки по 9/8 и 256/243
$1 - \frac{4}{3}$	$1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8};\ \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64};\ \frac{81}{64} \cdot \frac{256}{243} = \frac{4}{3}$	$1 - \frac{9}{8} - \frac{81}{64} - \frac{4}{3}$
$\frac{3}{2} - 2$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16};\ \frac{27}{16} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{128};\ \frac{243}{128} \cdot \frac{256}{243} = 2$	$\frac{3}{2} - \frac{27}{16} - \frac{243}{128} - 2$
$2 - \frac{8}{3}$	$2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4};\ \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{32};\ \frac{81}{32} \cdot \frac{256}{243} = \frac{8}{3}$	$2 - \frac{9}{4} - \frac{81}{32} - \frac{8}{3}$
3 - 4	$3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{8};\ \frac{27}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{64};\ \frac{243}{64} \cdot \frac{256}{243} = 4$	$3 - \frac{27}{8} - \frac{243}{64} - 4$
$4 - \frac{16}{3}$	$4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{2};\ \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{16};\ \frac{81}{16} \cdot \frac{256}{243} = \frac{16}{3}$	$4 - \frac{9}{2} - \frac{81}{16} - \frac{16}{3}$
6 - 8	$6 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{4};\ \frac{27}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{32};\ \frac{243}{32} \cdot \frac{256}{243} = 8$	$6 - \frac{27}{4} - \frac{243}{32} - 8$
Окончательный вид двойных промежутков после их деления по Платону $1 - \frac{9}{8} - \frac{81}{64} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} - \frac{27}{16} - \frac{243}{128} - 2 - \frac{9}{4} - \frac{81}{32} - \frac{8}{3} - 3 - \frac{27}{8} - \frac{243}{64} - 4 - \frac{9}{2} - \frac{81}{16} - \frac{16}{3} - 6 - \frac{27}{4} - \frac{243}{32} - 8$		

Итак, после деления двойных промежутков по Платону, получилось 22 числа - занесём все эти числа в столбец 2 сводной таблицы 8-Пр.1.

Теперь сделаем завершающие расчёты по тройным промежуткам. Напомним, что после добавления средних членов в тройные промежутки у нас образовалось шесть промежутков по 3/2 и три промежутка по 4/3 (см. табл. 4-Пр.1). Кроме того, заметим, что каждый промежуток по 3/2 состоит из одного промежутка с интервальным коэффициентом 4/3 и одного промежутка с интервальным коэффициентом 9/8, т.к.: $\frac{3}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}$

Поэтому, перед окончательным расчётом по тройным промежуткам, необходимо поделить промежутки по 3/2 на промежутки по 4/3 и 9/8. Результаты этого деления сведём в таблицу 6-Пр.1, а затем уже сделаем окончательный расчет по тройным промежуткам, поделив все промежутки по 4/3 в соответствии с фразой Платона, и сведём результаты этого деления в таблицу 7-Пр.1.

Таблица 6-Пр.1. Вид тройных промежутков после деления промежутков по 3/2 промежутками по 4/3 и 9/8.

Промежутки по 3/2 внутри тройных промежутков, после добавления в них средних членов (см. таблицу 4-Пр.1)	Расчет крайних членов промежутков по 4/3 и 9/8 внутри промежутков по 3/2	Вид промежутков по 3/2, после деления их на новые промежутки по 4/3 и 9/8
$1 - \frac{3}{2}$	$1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$	$1 - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}$
$2 - 3$	$2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$; $\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} = 3$;	$2 - \frac{8}{3} - 3$
$3 - \frac{9}{2}$	$3 \cdot \frac{4}{3} = 4$; $4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{2}$	$3 - 4 - \frac{9}{2}$
6 - 9	$6 \cdot \frac{4}{3} = 8$; $8 \cdot \frac{9}{8} = 9$	6 - 8 - 9
$9 - \frac{27}{2}$	$9 \cdot \frac{4}{3} = 12$; $12 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{2}$	$9 - 12 - \frac{27}{2}$
18 - 27	$18 \cdot \frac{4}{3} = 24$; $24 \cdot \frac{9}{8} = 27$	18 - 24 - 27

Итак, после деления тройных промежутков средними членами, получилось три промежутка по 4/3 и шесть промежутков по 3/2 (табл.4-Пр.1). Затем, после деления шести промежутков по 3/2 на промежутки по 4/3 и 9/8 (табл.6-Пр.1), получилось шесть промежутков по 4/3 и шесть промежутков по

9/8 – т.е. всего при делении тройных промежутков получилось 9 промежутков по 4/3 и 6 промежутков по 9/8. Согласно тексту Платона (см. Фрагмент 3), нам осталось поделить каждый из девяти промежутков по 4/3 на два промежутка по 9/8, и один промежуток по 256/243. Расчёты и результаты этого деления сведены в таблицу 7-Пр.1:

Таблица 7-Пр.1. Окончательный вид тройных промежутков после деления промежутков по 4/3 на промежутки по 9/8 и 256/243.

9 промежутков по 4/3, образовавшиеся внутри тройных промежутков	Расчет крайних членов, возникающих при делении промежутков по 4/3 на два промежутка по 9/8 и один промежуток по 256/243	Вид промежутков по 4/3 после деления их на новые промежутки по 9/8 и 256/243
$1 - \frac{4}{3}$	$1\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{8};\ \frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64};\ \frac{81}{64}\cdot\frac{256}{243}=\frac{4}{3}$	$1 - \frac{9}{8} - \frac{81}{64} - \frac{4}{3}$
$\frac{3}{2} - 2$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{8}=\frac{27}{16};\ \frac{27}{16}\cdot\frac{9}{8}=\frac{243}{128};\ \frac{243}{128}\cdot\frac{256}{243}=2$	$\frac{3}{2} - \frac{27}{16} - \frac{243}{128} - 2$
$2 - \frac{8}{3}$	$2\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{4};\ \frac{9}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{32};\ \frac{81}{32}\cdot\frac{256}{243}=\frac{8}{3}$	$2 - \frac{9}{4} - \frac{81}{32} - \frac{8}{3}$
3 - 4	$3\cdot\frac{9}{8}=\frac{27}{8};\ \frac{27}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{243}{64};\ \frac{243}{64}\cdot\frac{256}{243}=4$	$3 - \frac{27}{8} - \frac{243}{64} - 4$
$\frac{9}{2} - 6$	$\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{16};\ \frac{81}{16}\cdot\frac{9}{8}=\frac{729}{128};\ \frac{729}{128}\cdot\frac{256}{243}=6$	$\frac{9}{2} - \frac{81}{16} - \frac{729}{128} - 6$
6 – 8	$6\cdot\frac{9}{8}=\frac{27}{4};\ \frac{27}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{243}{32};\ \frac{243}{32}\cdot\frac{256}{243}=8$	$6 - \frac{27}{4} - \frac{243}{32} - 8$
9 -12	$9\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{8};\ \frac{81}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{729}{64};\ \frac{729}{64}\cdot\frac{256}{243}=12$	$9 - \frac{81}{8} - \frac{729}{64} - 12$
$\frac{27}{2} - 18$	$\frac{27}{2}\cdot\frac{9}{8}=\frac{243}{16};\ \frac{243}{16}\cdot\frac{9}{8}=\frac{2187}{128};\ \frac{2187}{128}\cdot\frac{256}{243}=18$	$\frac{27}{2} - \frac{243}{16} - \frac{2187}{128} - 18$
18 -24	$18\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{4};\ \frac{81}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{729}{32};\ \frac{729}{32}\cdot\frac{256}{243}=24$	$18 - \frac{81}{4} - \frac{729}{32} - 24$
Окончательный вид тройных промежутков после их деления по Платону: $1 - \frac{9}{8} - \frac{81}{64} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} - \frac{27}{16} - \frac{243}{128} - 2 - \frac{9}{4} - \frac{81}{32} - \frac{8}{3} - 3 - \frac{27}{8} - \frac{243}{64} - 4 - \frac{9}{2} - \frac{81}{16} - \frac{729}{128} - 6 - \frac{27}{4} - \frac{243}{32} - 8 -$ $- 9 - \frac{81}{8} - \frac{729}{64} - 12 - \frac{27}{2} - \frac{243}{16} - \frac{2187}{128} - 18 - \frac{81}{4} - \frac{729}{32} - 24 - 27$		

Сведём числа, полученные при делении двойных и тройных промежутков в таблицу 8-Пр.1, а затем дадим пояснения:

Таблица 8-Пр.1. Сводная таблица чисел, полученных после деления двойных и тройных промежутков по Платону.

№ строки	22 числа, полученные при делении двойных промежутков		34 числа, полученные при делении тройных промежутков		35 чисел, полученных при делении двойных и тройных промежутков	
	В дробях	· 384	В дробях	· 384	В дробях	· 384
1	1	384	1	384	1	384
2	9/8	432	9/8	432	9/8	432
3	81/64	486	81/64	486	81/64	486
4	4/3	512	4/3	512	4/3	512
5	3/2	576	3/2	576	3/2	576
6	27/16	648	27/16	648	27/16	648
7	243/128	729	243/128	729	243/128	729
8	2	768	2	768	2	768
9	9/4	864	9/4	864	9/4	864
10	81/32	972	81/32	972	81/32	972
11	8/3	1024	8/3	1024	8/3	1024
12	3	1152	3	1152	3	1152
13	27/8	1296	27/8	1296	27/8	1296
14	243/64	1458	243/64	1458	243/64	1458
15	4	1536	4	1536	4	1536
16	9/2	1728	9/2	1728	9/2	1728
17	81/16	1944	81/16	1944	81/16	1944
18	16/3	2048	729/128	2187	16/3	2048
19	6	2304	6	2304	729/128	2187
20	27/4	2592	27/4	2592	6	2304
21	243/32	2916	243/32	2916	27/4	2592
22	8	3072	8	3072	243/32	2916
23			9	3456	8	3072
24			81/8	3888	9	3456
25			729/64	4374	81/8	3888
26			12	4608	729/64	4374
27			27/2	5184	12	4608
28			243/16	5832	27/2	5184
29			2187/128	6561	243/16	5832
30			18	6912	2187/128	6561
31			81/4	7776	18	6912
32			729/32	8748	81/4	7776
33			24	9216	729/32	8748
34			27	10368	24	9216
35					27	10368

Пояснения к Таблице 8-Пр.1:

- во втором столбце записаны 22 числа, полученные при делении двойных промежутков, в соответствии с фразой Платона из его диалога «Тимей» (см. выше Фразу 1);

- в третьем столбце записаны те же 22 числа, пропорционально увеличенные в 384 раза, в соответствии с фразой из трактата Псевдо-Тимея Локрского (см. выше Фразу 2);

- в четвёртом столбце записаны 34 числа, полученные при делении тройных промежутков, в соответствии с фразой Платона из его диалога «Тимей» (см. выше Фразу 1);

- в пятом столбце записаны те же 34 числа, пропорционально увеличенные в 384 раза, в соответствии с фразой из трактата Псевдо-Тимея Локрского (см. выше Фразу 2);

- всего при делении двойных и тройных промежутков мы получили 22 + 34 = 56 чисел, но, что интересно, двадцать одно число, полученное при делении двойных промежутков, точно совпадает с двадцать одним числом, полученным при делении тройных промежутков; и лишь одно число, полученное при делении двойных промежутков, не совпадает с числами, полученными при делении тройных промежутков – это число в дробном выражении составляет: 16/3, а умноженное на 384 оно равно: 2048 (см. строку 18 таблицы, столбцы 2 и 3). Поэтому при делении двойных и тройных промежутков, мы суммарно получили только 35 чисел, не совпадающих друг с другом. Именно эти 35 чисел занесены в шестой столбец таблицы;

- в седьмой столбец записаны те же 35 чисел, пропорционально увеличенные в 384 раза, в соответствии с фразой из трактата Псевдо-Тимея Локрского (см. выше Фразу 2);

Теперь приступим к поиску 36-го числа.

Заметим, что если сложить все 35 чисел в седьмом столбце Таблицы 8-Пр.1, то их сумма составит число: 108 551, что даёт нам возможность найти 36-ое число. Ведь, согласно фразе из трактата Псевдо-Тимея Локрского (см. выше Фразу 2), сумма 36 чисел, с помощью которых Бог разделил Душу Космоса, должна составлять: 114 695.

Поэтому, для нахождения 36-го числа, нам осталось найти разность чисел:

114 695 – 108 551 = 6 144

Итак, мы получили 36-е число – это 6 144. Сверив эти 36 чисел с 36-ю пифагорейскими числами из трактатов 19-го века (см. таблицу 2 в части 2 статьи), мы получим их полное совпадение.

ВЫВОД из ПРИЛОЖЕНИЯ 1:

Таким образом, используя две фразы: одну из диалога Платона «Тимей» (4 век до н.э.), и вторую из трактата Псевдо-Тимея Локрского «О природе космоса и души» (1 век до н.э.), мы нашли 36 чисел, которые, по словам наших древних предков, определяют «Гармонию планетных сфер». А это значит то, что все эти 36 чисел были известны нашим предкам ещё до нашей эры.

Приложение 2. Расчёты к части 4.

Таблица 1-Пр2. Сравнение отношений величин больших полуосей планет и отношений соответствующих им длин струн и частот нот пифагорейского звукоряда.

Соотношения величин больших полуосей орбит планет	Отношения длин струн пифагорейского звукоряда, равное обратному отношению соответствующих им пифагорейских частот	Расчёт относительной погрешности, %
Меркурий:Венера $\frac{0{,}387099}{0{,}723332} = 0{,}53516$	$\frac{l_{ми^5}}{l_{фа^4}} = \frac{f_{фа^4}}{f_{ми^5}} = \frac{384}{729} = \frac{128}{243} = 0{,}52675$	$\frac{0{,}52675 - 0{,}53516}{0{,}53516} 100\% = -1{,}57\%$
Венера:Меркурий $\frac{0{,}723332}{0{,}387099} = 1{,}86860$	$\frac{l_{фа^4}}{l_{ми^5}} = \frac{f_{ми^5}}{f_{фа^4}} = \frac{729}{384} = \frac{243}{128} = 1{,}89844$	$\frac{1{,}89844 - 1{,}86860}{1{,}86860} 100\% = 1{,}60\%$
Меркурий:Земля $\frac{0{,}387099}{1} = 0{,}387099$	$\frac{l_{ми^5}}{l_{до^4}} = \frac{f_{до^4}}{f_{ми^5}} = \frac{384}{972} = \frac{32}{81} = 0{,}39506$	$\frac{0{,}39506 - 0{,}387099}{0{,}387099} 100\% = 2{,}06\%$
Земля:Меркурий $\frac{1}{0{,}387099} = 2{,}58332$	$\frac{l_{до^4}}{l_{ми^5}} = \frac{f_{ми^5}}{f_{до^4}} = \frac{972}{384} = \frac{81}{32} = 2{,}53125$	$\frac{2{,}53125 - 2{,}58332}{2{,}58332} 100\% = -2{,}02\%$
Меркурий:Марс $\frac{0{,}387099}{1{,}523662} = 0{,}25406$	$\frac{l_{ми^5}}{l_{ми^3}} = \frac{f_{ми^3}}{f_{ми^5}} = \frac{384}{1536} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{0{,}25 - 0{,}25406}{0{,}25406} 100\% = -1{,}60\%$
Марс:Меркурий $\frac{1{,}523662}{0{,}387099} = 3{,}93610$	$\frac{l_{ми^3}}{l_{ми^5}} = \frac{f_{ми^5}}{f_{ми^3}} = \frac{1536}{384} = \frac{4}{1} = 4$	$\frac{4 - 3{,}93610}{3{,}93610} 100\% = 1{,}62\%$

Продолжение таблицы 1-Пр2

Меркурий:Юпитер $\frac{0,387099}{5,203363} = 0,07439$	$\frac{l_{ми^5}}{l_{соль^1}} = \frac{f_{соль^1}}{f_{ми^5}} = \frac{384}{5184} = \frac{2}{27} = 0,07407$	$\frac{0,07407 - 0,07439}{0,07439} 100\% = -0,43\%$
Юпитер:Меркурий $\frac{5,203363}{0,387099} = 13,4419$	$\frac{l_{соль^1}}{l_{ми^5}} = \frac{f_{ми^5}}{f_{соль^1}} = \frac{5184}{384} = \frac{27}{2} = 13,5$	$\frac{13,5 - 13,4419}{13,4419} 100\% = 0,43\%$
Меркурий:Сатурн $\frac{0,387099}{9,537070} = 0,04059$	$\frac{l_{ми^5}}{l_{ля}} = \frac{f_{ля}}{f_{ми^5}} = \frac{384}{9216} = \frac{1}{24} = 0,041667$	$\frac{0,041667 - 0,04059}{0,04059} 100\% = 2,65\%$
Сатурн:Меркурий $\frac{9,537070}{0,387099} = 24,6373$	$\frac{l_{ля}}{l_{ми^5}} = \frac{f_{ми^5}}{f_{ля}} = \frac{9216}{384} = \frac{24}{1} = 24$	$\frac{24 - 24,6373}{24,6373} 100\% = -2,59\%$
Венера:Земля $\frac{0,723332}{1} = 0,723332$	$\frac{l_{фа^4}}{l_{до^4}} = \frac{f_{до^4}}{f_{фа^4}} = \frac{729}{972} = \frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{0,75 - 0,723332}{0,723332} 100\% = 3,69\%$
Земля:Венера $\frac{1}{0,723332} = 1,38249$	$\frac{l_{до^4}}{l_{фа^4}} = \frac{f_{фа^4}}{f_{до^4}} = \frac{972}{729} = \frac{4}{3} = 1,33333$	$\frac{1,33333 - 1,38249}{1,38249} 100\% = -3,56\%$
Венера:Марс $\frac{0,723332}{1,523662} = 0,47473$	$\frac{l_{фа^4}}{l_{ми^3}} = \frac{f_{ми^3}}{f_{фа^4}} = \frac{729}{1536} = \frac{243}{512} = 0,47461$	$\frac{0,47461 - 0,47473}{0,47473} 100\% = -0,025\%$
Марс:Венера $\frac{1,523662}{0,723332} = 2,10645$	$\frac{l_{ми^3}}{l_{фа^4}} = \frac{f_{фа^4}}{f_{ми^3}} = \frac{1536}{729} = \frac{512}{243} = 2,10700$	$\frac{2.107 - 2,10645}{2,10645} 100\% = 0,026\%$

Продолжение таблицы 1-Пр2

Венера:Юпитер $\frac{0{,}723332}{5{,}203363} = 0{,}13901$	$\frac{l_{\text{фа}^4}}{l_{\text{соль}^1}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{соль}^1}}{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}} = \frac{729}{5184} = \frac{9}{64} =$ $= 0{,}14063$	$\frac{0{,}14063 - 0{,}13901}{0{,}13901}100\% = 1{,}17\%$
Юпитер:Венера $\frac{5{,}203363}{0{,}723332} = 7{,}19360$	$\frac{l_{\text{соль}^1}}{l_{\text{фа}^4}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}}{\mathrm{f}_{\text{соль}^1}} = \frac{5184}{729} = \frac{64}{9} =$ $=7{,}11111$	$\frac{7{,}11111 - 7{,}1936}{7{,}1936}100\% = -1{,}15\%$
Венера:Сатурн $\frac{0{,}723332}{9{,}537070} = 0{,}07584$	$\frac{l_{\text{фа}^4}}{l_{\text{ля}}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{ля}}}{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}} = \frac{729}{9216} = \frac{81}{1024} =$ $= 0{,}07910$	$\frac{0{,}07910 - 0{,}07584}{0{,}07584}100\% = 4{,}30\%$
Сатурн:Венера $\frac{9{,}537070}{0{,}723332} = 13{,}1849$	$\frac{l_{\text{ля}}}{l_{\text{фа}^4}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{фа}^4}}{\mathrm{f}_{\text{ля}}} = \frac{9216}{729} = \frac{1024}{81} =$ $= 12{,}6420$	$\frac{12{,}6420 - 13{,}1849}{13{,}1849}100\% = -4{,}12\%$
Земля:Марс $\frac{1}{1{,}523662} = 0{,}65631$	$\frac{l_{\text{до}^4}}{l_{\text{ми}^3}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{ми}^3}}{\mathrm{f}_{\text{до}^4}} = \frac{972}{1536} = \frac{81}{128} =$ $=0{,}63281$	$\frac{0{,}63281 - 0{,}65631}{0{,}65631}100\% = -3{,}58\%$
Марс:Земля $\frac{1{,}523662}{1} = 1{,}52366$	$\frac{l_{\text{ми}^3}}{l_{\text{до}^4}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{до}^4}}{\mathrm{f}_{\text{ми}^3}} = \frac{1536}{972} = \frac{128}{81} =$ $=1{,}58025$	$\frac{1{,}58025 - 1{,}52366}{1{,}52366}100\% = 3{,}71\%$
Земля:Юпитер $\frac{1}{5{,}203363} = 0{,}19218$	$\frac{l_{\text{до}^4}}{l_{\text{соль}^1}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{соль}^1}}{\mathrm{f}_{\text{до}^4}} = \frac{972}{5184} = \frac{3}{16} =$ $=0{,}1875$	$\frac{0{,}1875 - 0{,}19218}{0{,}19218}100\% = -2{,}44\%$
Юпитер:Земля $\frac{5{,}203363}{1} = 5{,}20336$	$\frac{l_{\text{соль}^1}}{l_{\text{до}^4}} = \frac{\mathrm{f}_{\text{до}^4}}{\mathrm{f}_{\text{соль}^1}} = \frac{5184}{972} = \frac{16}{3} =$ $=5{,}33333$	$\frac{5{,}33333 - 5{,}20336}{5{,}20336}100\% = 2{,}50\%$

Продолжение таблицы 1-Пр2

Земля:Сатурн $\frac{1}{9{,}537070}$ = 0,10485	$\frac{l_{до^4}}{l_{ля}} = \frac{f_{ля}}{f_{до^4}} = \frac{972}{9216} = \frac{27}{256} =$ =0,10547	$\frac{0{,}10547 - 0{,}10485}{0{,}10485}100\% = 0{,}59\%$
Сатурн:Земля $\frac{9{,}537070}{1}$ = 9,53707	$\frac{l_{ля}}{l_{до^4}} = \frac{f_{до^4}}{f_{ля}} = \frac{9216}{972} = \frac{256}{27} =$ =9,48148	$\frac{9{,}48148 - 9{,}53707}{9{,}53707}100\% = -0{,}58\%$
Марс:Юпитер $\frac{1{,}523662}{5{,}203363}$ = 0,29282	$\frac{l_{ми^3}}{l_{соль^1}} = \frac{f_{соль^1}}{f_{ми^3}} = \frac{1536}{5184} = \frac{8}{27} =$ =0,29630	$\frac{0{,}2963 - 0{,}29282}{0{,}29282}100\% = 1{,}19\%$
Юпитер:Марс $\frac{5{,}203363}{1{,}523662}$ = 3,41504	$\frac{l_{соль^1}}{l_{ми^3}} = \frac{f_{ми^3}}{f_{соль^1}} = \frac{5184}{1536} = \frac{27}{8} =$ =3,375	$\frac{3{,}375 - 3{,}41504}{3{,}41504}100\% = -1{,}17\%$
Марс:Сатурн $\frac{1{,}523662}{9{,}537070}$ = 0,15976	$\frac{l_{ми^3}}{l_{ля}} = \frac{f_{ля}}{f_{ми^3}} = \frac{1536}{9216} = \frac{1}{6} =$ =0,16667	$\frac{0{,}16667 - 0{,}15976}{0{,}15976}100\% = 4{,}33\%$
Сатурн:Марс $\frac{9{,}537070}{1{,}523662}$ = 6,25931	$\frac{l_{ля}}{l_{ми^3}} = \frac{f_{ми^3}}{f_{ля}} = \frac{9216}{1536} = \frac{6}{1} = 6$	$\frac{6 - 6{,}25931}{6{,}25931}100\% = -4{,}14\%$
Юпитер:Сатурн $\frac{5{,}203363}{9{,}537070}$ = 0,54559	$\frac{l_{соль^1}}{l_{ля}} = \frac{f_{ля}}{f_{соль^1}} = \frac{5184}{9216} = \frac{9}{16} =$ =0,5625	$\frac{0{,}5625 - 0{,}54559}{0{,}54559}100\% = 3{,}10\%$
Сатурн:Юпитер $\frac{9{,}537070}{5{,}203363}$ = 1,83287	$\frac{l_{ля}}{l_{соль^1}} = \frac{f_{соль^1}}{f_{ля}} = \frac{9216}{5184} = \frac{16}{9} =$ =1,77778	$\frac{1{,}77778 - 1{,}83287}{1{,}83287}100\% = -3{,}01\%$

Литература

[1] – Аристотель. О небе. II. 9 // Аристотель. Сочинения. В 4-х т. Т. 3.— М.: Мысль, 1981, 613 с.

[2] – Филон Александрийский. Толкования Ветхого завета.– М.: Греко-латинский кабинет Ю. А. Шичалина, 2000, 456 с.

[3] – Плутарх. О музыке. Петербург, Государственное издательство. 1922.

[4] – Секст Эмпирик. Две книги против логиков. Книга 1.//Секст Эмпирик. Сочинения в двух томах. Т. 1. Вступит, статья и пер. с древнегреч. А. Ф. Лосева. М., «Мысль», 1975, 399 с.

[5] – Фрагменты ранних греческих философов. Часть 1. От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики. Изд. подг. А.В. Лебедев – М.: Наука, 1989, 576 с.

[6] – Ямвлих. О Пифагоровой жизни. Глава IV.18-19, Глава XV.65/ Пер. с древнегреч. И.Ю. Мельниковой. — М.: Алетейа, 2002. — 192 с.

[7] – Святой Григорий Нисский. Толкование к надписаниям псалмов [О музыке гармонии сфер] //В.П. Шестаков. Музыкальная эстетика западноевропейского средневековья и Возрождения. - М.: Музыка, 1966, 576с.

[8] – Боэций. О музыкальном установлении.// Герцман Е. В. Музыкальная боэциана. (Серия «История музыки: памятники и исследования»). Изд. 2. - СПб.: Невская Нота, 2010 - 504 с.

[9] – Кассиодор. Demusica 9. // Там же.

[10] – Исидор из Севильи. Этимология. Книга III, Глава XVII. О возможностях музыки. // В.П. Шестаков. Музыкальная эстетика западноевропейского средневековья и Возрождения". - М., Музыка, 1966, 576 с.

[11] – Фома Аквинский. «Expos. In IV libros Aristotelis de caelo et mundo»// Там же.

[12] – Данилов Ю.А., Смородинский Я.А. "Иоганн Кеплер: от "мистерии" до "гармонии". Успехи физических наук, том 109, с. 175–209 (1973).

[13] – Словарь античности. Пер. с нем. – М.: Прогресс, 1989, 704 с.

[14] – А.С. Афонасина. Трактат Тимея Локрского «О природе Космоса и души». // Журнал ΣΧΟΛΗ: Философское антиковедение и классическая традиция. Том 7, вып. 1, Новосибирск, НГУ, 2013 Vol. 7. 1 (2013), с. 110-129.

[15] – Плутарх. О рождении души по Тимею // Плутарх. Сочинения. Пер. с древнегреч. Т.Г.Сидаша.—СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008, с.45-107.

[16] – Гегель, Г.В.Ф. Лекции по истории философии. Книга 1 // Гегель, Г.В.Ф. Сочинения в 14 т. Т. 9.- Л.: Партийное издательство, 1932.

[17] – Лосев А.Ф. Античный космос и современная наука. // Лосев. А.Ф. Бытие — Имя — Космос: [сборник]. — М.: Мысль, 1993.

[18] – Заболоцкий Н. А. Поздняя весна (1948). // Заболоцкий Н. А. Собрание сочинений: В 3-х т. Том 1.— М.: Худож. лит., 1983.

[19] – Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. // А.Эйнштейн. Собрание научных трудов в 4-х томах. Том 4. – М.: Наука, 1967, с.357-543.

[20] – Паули В. Вклад Зоммерфельда в квантовую теорию.// Зоммерфельд А. Пути познания в физике. Сборник статей. М.: Наука, 1973, с.250-260.

[21] – Зоммерфельд А. Значение рентгеновских лучей для современного познания природы. // Там же, с.85-88.

[22] – Вайскопф В. Физика в двадцатом столетии. Пер. с англ. (США — Англия, 1972).- М.: Атомиздат, 1977, 272 с.

[23] – Четаев Н.Г. Об устойчивых траекториях динамики. // Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.- М.: Изд-во АН СССР, 1962. с. 245-249.

[24] – Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы : препринт / А. М. Молчанов ; АН СССР, НЦБИ, НИВЦ. – Пущино : НЦБИ АН СССР, 1974. – 19 с. http://iflorinsky.impb.ru/Molchanov/Preprints/Molchanov-1974.pdf

[25] – Молчанов А. М., Резонансы в многочастотных колебаниях, Докл. АН СССР, 1966, том 168, номер 2, с. 284–287.

[26] – Молчанов А.М. Об эволюции планетных систем // Проблемы движения искусственных небесных тел: Доклады на Конференции по общим и

прикладным вопросам теоретической астрономии, Москва, 20–25 нояб. 1961. М.: Изд. АН СССР, 1963. С. 42–49.

[27] – Hills J. G. Dynamic relaxation of planetary systems and Bod's law. - Nature, 1970, v. 225. // Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике.- М.: Наука, 1981, 352 с.

[28] – Гюйгенс Х. Маятниковые часы. Часть 1.// Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. Пер и прим. Проф. К, К. Баумгарта. - Л.: АН СССР, 1951.

[29] – Синхронизация метрономов https://www.youtube.com/watch?v=GrWAu3vpkc4

[30] – Резонанс. Синхронизация 32 метронома. Волшебство или физика? https://www.youtube.com/watch?v=Fba4zS3Rzz8

[31] – Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике.- М.: Наука, 1981, 352 с.

[32] – Гулак Ю.К. Статистическое квантование в микро- и макросистемах с притягивающим центром.// Некоторые вопросы физики космоса", сборник 2. - М.: ВАГО АН СССР, 1974, с.95-114.

[33] – Гулак Ю.К. О соизмеримостях (резонансах) в Солнечной системе. Астрономический журнал, том 57, вып.1, 1980 г., с.142-153.

[34] – Чечельницкий А.М. Экстремальность, устойчивость, резонансность в астродинамике и космонавтике. — М.: Машиностроение, 1980. — 312 с.

[35] – Чечельницкий А.М. Волновая структура, квантование и мегаспектроскопия Солнечной системы. //Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства, М., Машиностроение, 1986, с.56-76.

[36] – Котов В.А., Кучми С. О возможной связи закона планетных расстояний с явлением 160- минутной пульсации Солнца. // Известия Крымской астрофизической обсерватории: Сб. статей.- М.: Наука, 1985, т. 72, с.199-2008.

[37] – Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. под ред. И. И. Шевченко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 588 с.

[38] – И.И. Блехман. Загадки теории динамических систем: на границе механики, философии и теологии.// Вестник научно-технического развития. 2008, №3 (7), с.2-8. https://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=129

[39] – Шевченко И.И. Непредсказуемые орбиты//Природа. 2010. № 4, с. 12-21 https://priroda.ras.ru/pdf/2010-04.pdf

[40] – Э.В. Кононович, В.И. Мороз. Общий курс астрономии.- М., Едиториал УРСС, 2001, с.502.

[41] – Сайт NASA. https://exoplanets.nasa.gov/

[42] – Танец третьей планеты: Музыка сфер. https://www.techinsider.ru/science/10583-tanets-tretey-planety-muzyka-sfer/

[43] – Европейская миссия CHEOPS обнаружила редкую внесолнечную систему из шести планет. https://new-science.ru/evropejskaya-missiya-cheops-obnaruzhila-redkuju-vnesolnechnuju-sistemu-iz-shesti-planet/

[44] – Довгалев И.С., Мельников А.В., Смирнов Е.А., Шевченко И.И. Резонансные и хаотические экзопланетные системы: отождествление и каталогизация.//Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове № 225. Труды Всероссийской астрометрической конференции.- С-Пб.: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 2018, с.149-153. http://www.gaoran.ru/wp-content/uploads/2020/07/izv_225.pdf

[45] – Берри А. Краткая история астрономии. Пер. с англ. С.Г. Займовского.- М.: Типография Т-ва И.Д.Сытина, 1904.

[46] – Колчинский И.Г., Корсунь А.А., Родригес М.Г. Астрономы — биографический справочник.- Киев, «Наукова думка», 1977, 416 с.

[47] – Бердышев С. Законы космоса. – М.: РИПОЛ КЛАССИК, 2002. - 384 с.

[48] – Наука. Величайшие теории: Выпуск № 4: Танцы со звёздами. Кеплер. Движение планет. / Пер. с исп.- М.: Де Агостини, 2015, 160 с.

[49] – Works of Plato: A New and Literal Version, Chiefly from the Text of Stallbaum Vol. VI,London :H.G. Bohn, 1854, p.171-172.
https://archive.org/details/WorksOfPlatoV6/page/170/mode/2up
https://archive.org/details/WorksOfPlatoV6/page/172/mode/2up

[50] – К. Фламарион. История неба. Печатается по изданию С. Петербург 1875 год. – М.: «Золотой век», 1994, 449 с.

[51] - Платон. Тимей 35b – 36b. // Платон. Собрание сочинений в 4-х т. Том 3. М.: Мысль, 1994, с. 437-438.

[52] – Тимей Локрский. О природе космоса и души (19-21). // Журнал ΣΧΟΛΗ: Философское антиковедение и классическая традиция. Том 7, вып. 1, Новосибирск, НГУ, 2013 Vol. 7. 1 (2013), с. 129-139.