Мурадьянц Вагаршак Хачатурович ,
630079 г. Новосибирск – 79 ,
ул. Немировича – Данченко , д. 30/1,
кв. 31 . т. 89538850436 , 3012610 .

Решение проблемы P = NP .

(О графах с коалициями вершин и их изоморфизме)

В данной статье доказано, что не существует полиномиального алгоритма и полиномиальной P задачи для задачи изоморфизма графов. Как следствие, не существует полиномиального алгоритма и полиномиальной P задачи для любой задачи из класса NPC. В частности, не существует полиномиального алгоритма и полиномиальной P задачи для задачи коммивояжера.

It is proved in this article that there is no polynomial algorithm and no polynomial P problem for the graph isomorphism problem. As a consequence, there is no polynomial algorithm and no polynomial P problem for any problem from the NPC class. In particular, there is no polynomial algorithm and no polynomial P problem for the traveling salesman problem.

1.**Определения и обозначения**

↔ - тогда и только тогда , когда .

→ - если то .

$\vec{G}$(V,U) – обозначение ориентированного графа.

G(V,U) – обозначениенеориентированного графа без петель и кратных ребер ,где |V| = n , V – множество вершин,

U – множестворебер если граф неориентированный ,

U – множестводуг если граф ориентированный.

Степенью вершины называют число равноеколичеству ребер инцидентных данной вершине.Будем обозначать степень вершины Deg(v_i) , где i $\in 1\acute{,}n$и $v_i \in V$.

Определим функцию на множестве вершин графа.

Пусть дан граф G(V,U),$v_l,v_p \in V$, где $l,p \in \overline{1,n}$ и $l \neq p$.

$(v_l,v_p) \in U \to f ¿_l,v_p)$ ¿ 1, $(v_l,v_p) \overline{\in} U \to f ¿_l,v_p)$ ¿ 0.

Пусть$v_i,v_j,v_k \in V$, где$i,j,k \in \overline{1,n}$ и $i \neq j, j \neq k, i \neq k$.

Будем говорить , что v_i и v_j обладают равными связями с вершиной v_k если $f(v_i,v_k)$ ¿ $f ¿_j,v_k)$.

Пусть дан граф $\vec{G}$(V,U) , $v_i \in V$, где $i \in \overline{1,n}$. Если в вершине существует петля,

т.е. $(v_i,v_i) \in U$, то положим $f(v_i,v_i)$ ¿ 1. Т.е. $(v_i,v_i) \in U \to f ¿_i,v_i)$ ¿ 1 u

$(v_i,v_i) \overline{\in} U \to f(v_i,v_i)$ ¿ 0. Для $\forall v_l,v_p \in V$, где $l,p \in \overline{1,n}$ и $l \neq p$,

$(v_l,v_p) \in U$ & $(v_p,v_l) \overline{\in} U \to f(v_l,v_p)$ ¿ 1 ,

$(v_l,v_p) \overline{\in} U$ & $(v_p,v_l) \in U \to f(v_l,v_p) = -1$.

$(v_l,v_p) \in U$ & $(v_p,v_l) \in U \to f(v_l,v_p) = 2$,

$(v_l,v_p) \overline{\in} U$ & $(v_p,v_l) \overline{\in} U \to f(v_l,v_p) = 0$.

Пусть $v_i,v_j,v_k \in V$, где $i,j,k \in \overline{1,n}$ и $i \neq j, j \neq k, i \neq k$.Будем говорить ,что v_i и v_j обладают равными связями с вершиной v_k ,

если $f(v_i,v_k)$ ¿ $f ¿_j,v_k)$ и $f(v_i,v_i)$ ¿ $f ¿_j,v_j)$.

Если $f(v_l,v_p) = 0$, то будем говорить , что вершины v_l, v_pне связанные друг с другом .

Пусть даны две вершины разных графов . Двусторонняя стрелка помещенная между обозначениями этих вершин означает , что вершины поставлены в соответствие друг другу .

Пусть даны $\dot{G}_1(\dot{V}\ ,\dot{U})$, $\ddot{G}_2(\ddot{V}\ ,\ddot{U})$, $\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2} \in \dot{V}$, $\ddot{v}_{j1}, \ddot{v}_{j2} \in \ddot{V}$. Говорят , что взаимно - однозначное соответствие между вершинами $\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1}$,$\dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2}$ сохраняет смежность если
$(\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2}) \in \dot{U} \Leftrightarrow (\ddot{v}_{j1}, \ddot{v}_{j2}) \in \ddot{U}$.
Если графы ориентированные, т.е. $\vec{G}_1(\dot{V},\dot{U})$, $\vec{G}_2(\ddot{V},\ddot{U})$ и $\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2} \in \dot{V}$, $\ddot{v}_{j1}, \ddot{v}_{j2} \in \ddot{V}$. Говорят , что взаимно - однозначное соответствие между вершинами $\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1}$, $\dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2}$ сохраняет смежность , если
$((\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2}) \in \dot{U} \Leftrightarrow (\ddot{v}_{j1}, \ddot{v}_{j2}) \in \ddot{U})$ &
&$((\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i1}) \in \dot{U} \Leftrightarrow (\ddot{v}_{j1}, \ddot{v}_{j1}) \in \ddot{U})$ &
& $((\dot{v}_{i2}, \dot{v}_{i2}) \in \dot{U} \Leftrightarrow (\ddot{v}_{j2}, \ddot{v}_{j2}) \in \ddot{U})$ &
& $((\dot{v}_{i2}, \dot{v}_{i1}) \in \dot{U} \Leftrightarrow (\ddot{v}_{j2}, \ddot{v}_{j1}) \in \ddot{U})$.
Взаимно –однозначное соответствие между вершинами $\dot{V}$и$\ddot{V}$будем обозначать β или β($\dot{V}$,$\ddot{V}$) , или β($\dot{G}_1, \ddot{G}_2$) . Если графы ориентированные , то β($\vec{G}_1,\vec{G}_2$) .

Взаимно-однозначное соответствие между вершинами β($\dot{G}_1, \ddot{G}_2$) сохраняетсмежностьесли для $\forall \dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} \in$β($\dot{G}_1, \ddot{G}_2$) и $\forall \dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} \in$β($\dot{G}_1, \ddot{G}_2$) . Взаимно –однозначные соответствия $\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1}$,$\dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2}$сохраняют смежность .

Аналогично , взаимно – однозначное соответствие β($\vec{G}_1,\vec{G}_2$) сохраняет смежность , если для
$\forall \dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} \in$β($\vec{G}_1,\vec{G}_2$) и$\forall \dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} \in$β($\vec{G}_1,\vec{G}_{j2}$), взаимно-однозначные соответствия $\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1}$, $\dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2}$ сохраняют смежность .

Взаимно-однозначное соответствие между вершинами графов сохраняющее смежность будем обозначать $\bar{\beta}(\dot{G}_1, \ddot{G}_2)$.
Для ориентированных графов - $\bar{\beta}(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$. Взаимно-однозначное соответствие β($\dot{G}_1, \ddot{G}_2$) , которое сохраняет смежность , будем обозначать также равенством β($\dot{G}_1, \ddot{G}_2$) = $\bar{\beta}(\dot{G}_1, \ddot{G}_2)$. Для ориентированных графов – β($\vec{G}_1,\vec{G}_2$) = $\bar{\beta}(\vec{G}_1,\vec{G}_2)$.

Если $v_{ik} \leftrightarrow v_{jk} \in$β , то обозначать это будем равенством β($\dot{v}_{ik}$) = $\ddot{v}_{jk}$ илиβ($\ddot{v}_{jk}$) = $\dot{v}_{ik}$.

Взаимно-однозначное соответствие между подмножествами вершин $\dot{V}_i \in \dot{V}_1$, $\ddot{V}_j \in \ddot{V}_2$ будем обозначать β($\dot{V}_l$, $\ddot{V}_j$) .
Пусть даны $\dot{G}_1(\dot{V}\ ,\dot{U})$, $\ddot{G}_2(\ddot{V}\ ,\ddot{U})$, ¿$\dot{V}$|=n , |$\ddot{V}$|= n .

Говорят , что граф $\dot{G}_1(\dot{V},\dot{U})$ изоморфен графу $\ddot{G}_2(\ddot{V}\ ,\ddot{U})$ и обозначают

$\dot{G}_1(\dot{V}, \dot{U})$ $\ddot{G}_2(\ddot{V}, \ddot{U})$ если $\exists\overline{\beta}(\dot{G}_1, \ddot{G}_2)$. Аналогично для ориентированных графов , $\vec{G}_1$ $\vec{G}_2$ если $\exists\overline{\beta}(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$.

2. Родственные вершины графа и их свойства .

Определение 1. Пусть дан граф G(V,U), |V| = n . Две вершины $v_i, v_j \in V$, где $i,j \in \overline{1,n}$ и $i \neq j$, будем называть
родственными если они не связаны между собой ребром и обладают равными связями с любой отличной от них вершиной и обозначать $v_i \equiv v_j$. Т.е. $f(v_i,v_j)$ ¿0 и для $\forall v_k \in V$,
где $k \in \overline{1,n}$ и $k \neq i$, $k \neq j$, $f(v_i, v_k)$ ¿$f(v_j,v_k)$.

Утверждение 1. Даны графы ,$G_1(V_1, U_1)$ и $G_2(V_2, U_2)$, где
$|V_1| = n, |V_2|$ ¿n и G_1 G_2 . $\dot{G}_1(\dot{V}_1, \dot{U}_1)$, $\dot{G}_2(\dot{V}_2, \dot{U}_2)$ – подграфы соответственнографов G_1 и G_2 .
$\exists\overline{\beta}(G_1, G_2)$ и $\exists\ \beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2)$ такое , что $\beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2) \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$. Тогда
$\dot{G}_1$ $\dot{G}_2$ и $\beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2)$ сохраняет смежность ,т.е. $\beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2)$ ¿$\overline{\beta}(\dot{G}_1, \dot{G}_2)$.
Т.е. подграфы $\dot{G}_1, \dot{G}_2$ изоморфных графов G_1, G_2 построенные на вершинах , которые во взаимно-однозначном соответствии, сохраняющим смежность ,поставлены в соответствие друг другу являются изоморфными .

Доказательство .

Пусть $\dot{G}_1(\dot{V}_1, \dot{U}_1)$ и $\dot{G}_2(\dot{V}_2, \dot{U}_2)$ - подграфы соответственно графов $G_1(V_1,U_1)$ и $G_2(V_2, U_2)$, удовлетворяющие условию утверждения .
Т.е. $\dot{V}_1 = \{\dot{v}_{r1}, \dot{v}_{r2}, \ldots, \dot{v}_{rl}\}$,$\dot{V}_2 = \{\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2}, \ldots, \dot{v}_{il}\}$.
И взаимно-однозначное соответствие
$\beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2) = \{\dot{v}_{r1} \leftrightarrow \dot{v}_{i1}, \dot{v}_{r2} \leftrightarrow \dot{v}_{i2}, \ldots, \dot{v}_{rl} \leftrightarrow \dot{v}_{il}\}$ (1)
является подмножеством
$\overline{\beta}(G_1,G_2) = \{v_{i1} \leftrightarrow v_{j1}, v_{i2} \leftrightarrow v_{j2}, \ldots, v_{in} \leftrightarrow v_{jn}\}$ (2)
Т.е. $\beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2) \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$. (3)

Предположим противное $\beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2)$ не сохраняет смежность . Т.е.
$\exists \{\dot{v}_{rp} \leftrightarrow \dot{v}_{ip}, \dot{v}_{rq} \leftrightarrow \dot{v}_{iq}\} \in \beta(\dot{G}_1, \dot{G}_2)$ и
$f(\dot{v}_{rp}, \dot{v}_{rq}) \neq f(\dot{v}_{ip}, \dot{v}_{iq})$. (4)

С другой стороны из (3) следует $\dot{v}_{rp} \leftrightarrow \dot{v}_{ip}, \dot{v}_{rq} \leftrightarrow \dot{v}_{iq} \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$.
Следовательно$f(\dot{v}_{rp}, \dot{v}_{rq}) = f(\dot{v}_{ip}, \dot{v}_{iq})$. (5)
Но (5) противоречит (4) . Полученное противоречие доказывает

утверждение .

Утверждение 2 .Даны$G_1(V_1, U_1)$, $G_2(V_2, U_2)$, где $|V_1| = n$,$|V_2| = n$,

$V_1 = \{\dot v_1, \dot v_2, \dots, \dot v_n)$, $V_2 = \{\ddot v_1, \ddot v_2, \dots, \ddot v_n\}$. В G_1 и $G_2 \exists k$ родственных вершин $M_1 = \{\dot v_{i1}, \ddot v_{i2}, \dots, \ddot v_{ik}\}$, $M_2 = \{\ddot v_{j1}, \ddot v_{j2}, \dots, \ddot v_{jk}\}$. G_1 G_2 . Если $\exists \overline{\beta}_1(G_1, G_2)$, которое
содержит $\beta_1(M_1, M_2)$, то взяв в $\overline{\beta}_1(G_1, G_2)$ вместо $\beta_1(M_1, M_2)$ любое $\beta_2(M_1, M_2)$ отличное от $\beta_1(M_1, M_2)$ получим $\overline{\beta}_2(G_1, G_2)$.
Доказательство .

Из условия утверждения $\overline{\beta}_1(G_1, G_2) = \beta_1(M_1, M_2) \cup \beta_1(V_1 \setminus M_1, V_2 \setminus M_2)$. Подграфы $G_{11}(V_1 \setminus M_1, U_{11})$, $G_{22}(V_2 \setminus M_2, U_{22})$ графов G_1 и G_2 . Из утверждения 1 следует G_{11} G_{22} и $\overline{\beta}(G_{11}, G_{22}) = \overline{\beta}_1(V_1 \setminus M_1, V_2 \setminus M_2)$.

Пусть $\overline{\beta}_1(V_1 \setminus M_1, V_2 \setminus M_2) = \{\dot v_{ik+1} \leftrightarrow \ddot v_{jk+1}, \dot v_{ik+2} \leftrightarrow \ddot v_{jk+2}, \dots, \dot v_{in-k} \leftrightarrow \ddot v_{jn-k}\}$. (1)

Построим $\beta_2(G_1, G_2)$ присоединив к $\overline{\beta}_1(V_1 \setminus M_1, V_2 \setminus M_2)$ взаимно-однозначное соответствие вершин

$\beta_2(M_1, M_2) = \{\dot v_{p1} \leftrightarrow \ddot v_{l1}, \dot v_{p2} \leftrightarrow \ddot v_{l2}, \dots, \dot v_{pk} \leftrightarrow \ddot v_{lk}\}$. (2)

Докажем , что $\beta_2(G_1, G_2)$ сохраняет смежность , т.е. $\beta_2(G_1, G_2) = \overline{\beta}_2(G_1, G_2)$. Предположим противное $\exists \dot v_{pr} \leftrightarrow \ddot v_{lr}$, $r \in \overline{1,k}$, и $\exists \dot v_i \leftrightarrow \ddot v_j \in \beta_1(V_1 \setminus M_1, V_2 \setminus M_2)$ такие , что

$$f(\dot v_{pr}, \dot v_i) \neq f(\ddot v_{lr}, \ddot v_j) . \qquad (3)$$

С другой стороны возьмем $\forall \dot v_{iq} \leftrightarrow \ddot v_{jq} \in \beta_1(M_1, M_2)$, т.к.

$$f(\dot v_{iq}, \dot v_i) = f(\ddot v_{jq}, \ddot v_j) . \qquad (4)$$

M_1, M_2 – множества родственных вершин

$$f(\dot v_{iq}, \dot v_i) = f(\dot v_{pr}, \dot v_i) ,$$
$$f(\ddot v_{jq}, \ddot v_j) = f(\ddot v_{lr}, \ddot v_j) .$$

Отсюда и из (4) следует

$$f(\dot v_{pr}, \dot v_i) = f(\ddot v_{lr}, \ddot v_j) . \qquad (5)$$

Но (5) противоречит (3) , Следовательно предположение неверно . Родственные вершины не смежные . Следовательно для $\forall q \in \overline{1,k}$ и $\forall \mu \in \overline{1,k}$, где $q \neq \mu$, $\{\dot v_{pq} \leftrightarrow \ddot v_{lq}, \dot v_{p\mu} \leftrightarrow \ddot v_{l\mu}\} \in \beta_2$, справедливо равенство $f(\dot v_{pq}, \dot v_{p\mu}) = f(\ddot v_{lq}, \ddot v_{l\mu})$. Отсюда :

$\overline{\beta}_2(G_1, G_2) = \beta_1(V_1 \setminus M_1, V_2 \setminus M_2) \cup \beta_2(M_1, M_2)$.

Утверждение доказано .

Утверждение 3. Даныграфы $G_1(V_1, U_1)$, $G_2(V_2, U_2)$, где $|V_1|=n$, $|V_2|=n$. $M_1 = \{\dot v_{i1}, \dot v_{i2}, \dots, \dot v_{ir}\}$, $M_2 = \{\ddot v_{j1}, \ddot v_{j2}, \dots, \ddot v_{jk}\}$, $M_1 \in V_1$, $M_2 \in V_2$.
M_1, M_2 – родственные вершины соответственно графов G_1, G_2 .
Если G_1 G_2 и $\exists \overline{\beta}(G_1, G_2)$ такое, что $\dot v_i \leftrightarrow \ddot v_j \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$, где $\dot v_i \in$ M1 и

$\ddot{v}_j \in M_2$, то все остальные родственные вершины $M_1 \backslash \dot{v}_i$ и $M_2 \backslash \ddot{v}_j$будут поставлены в соответствие друг другу в $\overline{\beta}(G_1,G_2)$ и $|M_1|=|M_2|$, т.е. r = k .

Доказательство .

Пусть $\dot{v}_l \in M_1$, $\ddot{v}_j \in M_2$ и

$\overline{\beta}(G_1,G_2) = \{\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j , \dot{v}_{ip1} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl1} , \dot{v}_{ip2} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl2}, \ldots , \dot{v}_{ipn-1} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl-1}\}$.

Предположим противное . Не нарушая общности предположим , Что есть $\dot{v}_{ipq} \leftrightarrow \ddot{v}_{jlq} \in \overline{\beta}(G_1,G_2)$, где q $\in \overline{1,n-1}$, и $\dot{v}_{ipq} \equiv \dot{v}_i$, а $\ddot{v}_{jlq}$ и $\ddot{v}_j$ не родственные вершины . Следовательно $\exists \ddot{v}_{jlm}$, где m$\in \overline{1,n-1}$ и

$$f(\ddot{v}_j , \ddot{v}_{jlm}) \neq f(\ddot{v}_{jlq}, \ddot{v}_{jlm}) . \qquad (1)$$

С другой стороны $\dot{v}_{ipq} \leftrightarrow \ddot{v}_{jlq} \in \overline{\beta}(G_1,G_2)$ и $\dot{v}_{ipq} \equiv \dot{v}_i$. Отсюда и т.к. в $\overline{\beta ¿¿} G_1 ,G_2)$ существуют

$$\dot{v}_{ipm} \leftrightarrow \ddot{v}_{jlm} , \qquad (a)$$

$$\dot{v}_{ipq} \leftrightarrow \ddot{v}_{jlq} , \qquad (b)$$

$$\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \qquad (c)$$

Следует :

$$f(\dot{v}_i , \dot{v}_{ipm}) = f(\dot{v}_{ipq} , \dot{v}_{ipm}) , \qquad (2)$$

$$f(\dot{v}_i , \dot{v}_{ipm}) = f(\ddot{v}_j , \dot{v}_{ipm}) , \qquad (3)$$

$$f(\dot{v}_{ipq} , \dot{v}_{ipm}) = f(\ddot{v}_{jlq} , \ddot{v}_{jlm}) . \qquad (4)$$

Из (2) следует , что левые части равенств (3) и (4) рвны , а из (1) следует , что правые части равенств (3) и (4) не равны .

Полученное противоречие опровергает предположение .

Докажем , что $|M_1| = |M_2|$. Предположим противное . Не нарушая общности предположим , что $|M_1|$ $¿ \vee M_2|$ и $\exists \overline{\beta}(G_1,G_2)$, такое , что $\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \in \overline{\beta}(G_1,G_2)$, где $\dot{v}_i \in M_1$, $\ddot{v}_j \in M_2$.

Отсюда $\exists \dot{v}_r \leftrightarrow \ddot{v}_p \in \overline{\beta}(G_1 ,G_2)$, где $\dot{v}_r \in M_1$, $\ddot{v}_p \overline{\in} M_2$.

Как было показано выше такое предположение приводит к противоречию . Утверждение полностью доказано .

3. О графе пятью типами вершин . О V- графе . (О графе с коалициями .)

3.1. **Обозначения** .

Для удобства ведения рассуждений введем обозначения . Пусть даны два упорядоченных множества $M_1 = (a_1 ,a_2 ,a_3 ,a_4)$, $M_2 = (б_1 ,б_2 ,б_3 ,б_4)$. Взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств M_1 и M_2 , в котором поставлены в соответствие элементы занимающие равные позиции ,

будем обозначать $M_1 \leftrightarrow M_2$ или $(а_1, а_2, а_3, а_4) \leftrightarrow (б_1, б_2, б_3, б_4)$.
Т.е. $((а_1, а_2, а_3, а_4) \leftrightarrow (б_1, б_2, б_3, б_4)) \rightarrow (а_1 \leftrightarrow б_1, а_2 \leftrightarrow б_2, а_3 \leftrightarrow б_3$
$а_4 \leftrightarrow б_4)$. Отсюда справедливы соотношения
$(а_1, а_4) \leftrightarrow (б_1, б_4)$, $(а_2, а_3) \leftrightarrow (б_2, б_3)$ т.к. устанавливают одни и те же соответствия между элементами .

Если рассматривается любое взаимно-однозначное соответствие между элементами двух множеств M_1 и M_2 . Множества M_1 и M_2 обозначим как неупорядоченные: $M_1 = \{а_1, а_2, а_3, а_4\}$,
$M_2 = \{б_1, б_2, б_3, б_4\}$.

Т.е. $\{а_1, а_2, а_3, а_4\} \leftrightarrow \{б_1, б_2, б_3, б_4\}$ – любое взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств M_1 , M_2 .

Введем в рассмотрение графы специального вида . В указанных графах вершины разбиты на подмножества вершин . Каждое подмножество состоит из четырех вершин .

Каждая из четырех вершин обладает свойством отличном от свойств других трехвершин .

Это позволяет ввести понятие типа вершин . Таким образом , каждая четверка вершин
состоит из четырех типов вершин

Указанные четверки вершин будем называть **коалицией вершин** или **коалиционной вершиной**.

Главное свойство введенных в рассмотрение графов . Взаимно-однозначное соответствие между вершинами указанных графов , сохраняющее смежность , ставит во взаимно-однозначное соответствие **коалиционные вершины .**При этом , во взаимно-однозначное соответствие ставятся вершины одного типа.

Введенные в рассмотрение графы позволяют свести задачу изоморфизма ориентированных графов (графов Бержа) к задаче

изоморфизма неориентированных графов без петель и кратных ребер .И установить связь Р задачи (Р задача отвечает на вопрос существования решения : Да или Нет) с алгоритмом решения задачи изоморфизма графов без петель и кратных ребер .

3.2. Построение V – графа .

Определение 2 . Рассмотрим графическое изображение латинской буквы V . Оно состоит из двух отрезков прямой образующих угол . Изображение буквы Vпреобразуем в граф с тремя вершинами .

В вершину угла поместим первую вершину графа . В свободный конец левого отрезка поместим вторую вершину .
В свободный конец правого отрезка поместим третью вершину .
Вершину расположенную в вершине угла будем называть Вершиной типа **y** .
Вершину расположенную на свободным конце левого отрезка будем называть вершиной типа **x** .
Вершину расположенную на конце правого отрезка будем называть вершиной типа **z.**

Построенный граф преобразуем в граф с четырьмя вершинами .

Четвертую соединим ребром только с вершиной типа **x** .
Эту четвертую вершину будем называть вершиной типа **w.**

Построим граф ,который состоит из n построенных выше графов с четырьмя вершинами . Для этого , изображение построенного графа с четырьмя вершинами повторим n раз .

Обозначим и пронумеруем вершины . Буква обозначающая тип вершины является одновременно ее обозначением .

Пронумеруем вершины следующим образом .
Вершины принадлежащие одному и тому же изображению графа с четырьмя вершинами получат равные номера .

Каждому обозначению вершины присвоим индекс . Значение индекса равно номеру вершины . Вершины одинакового типа последовательно пронумеруем от 1 до n.

Вершины четырех типов образующие четверку вершин с одинаковыми номерами будем называть **коалицией вершин** или **одноименными вершинами**.

Обозначать коалицию вершин будем s_i , где значение i равно

номеру присвоенному вершинам образующим эту коалицию и называть коалицию вершин **коалиционной вершиной**.

Совокупность всех коалиционных вершин будем обозначать S .
В коалиционной вершине определим следующий порядок следования типов вершин :**w,x,z,y** .

Т.е. коалиционная вершина – упорядоченное множество содержащее четыре вершины . Таким образом .

$s_i = (w_i, x_i, z_i, y_i)$, где i $\in \overline{1,n}, S = \cup_1^n s_i$.

Вершины типа **z** свяжем между собой ребрами . Т.е. вершины типа **z**образуют полный граф .Введем в рассмотрение еще три родственные вершины .

Назовем их вершинами **p** типа . Множество вершин типа **p** обозначим $P = \{p_1, p_2, p_3\}$. Каждую вершину из P соединим ребром с каждой вершиной типа **z** .

Ребра в описанном выше графе будут в каждом графе содержащем одно и тоже число коалиционных вершин . Обозначим множество указанных ребер U_c .

В описанном графе могут быть ребра соединяющие вершины типа **x** с вершинами типа **z** . Обозначать множество этих ребер будем U_{xz} .Также , для вершин типа **w** могут быть введены родственные им вершины . Для вершины w_i множество родственных ей вершин будем обозначать W_i, где $i \in \overline{1,n}$.

U_i- множество ребер соединяющих вершины из W_i с вершиной x_i , где $i \in \overline{1,n}$.

Граф с пятью типами вершин **x,y,z,w,p**будем называтьV-графом и обозначать $V_{gr}((S, P, \cup_1^n W_i), (U_c, U_{xz}, \cup_1^n U_i))$, где $|S| = n$.

Если $|U_{xz}| = 0$, то V-граф будем называть не загруженным . Если $|U_{xz}| \neq 0$, то V-граф будем называть загруженным .

Количество коалиционных вершин$|S|$ будем называть размерностью V-графа и обозначать $R(V_{gr})$.

Если в V-граф добавлены вершины родственные одной из вершин типа **w** , то будем говорить , что указанная вершина помеченная или обладает меткой .

Множество вершин W_iродственных вершине w_i, где $i \in \overline{1,n}$,

будем называть меткой вершины w_i . $|W_i|$ - количество вершин родственных вершине w_i будем называть значением метки .

3.3. Свойства вершин V-графа .

Необходимые условия для вершин $\dot{v}_i \in \dot{V}$, где $i \in \overline{1,n}$, $\ddot{v}_j \in \ddot{V}$, $j \in \overline{1,n}$, чтобы$\exists \overline{\beta}(G_1(\dot{V}, \dot{U}), G_2(\ddot{V}, \ddot{U})) \ni \dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j$.

Утверждение 4. Пусть даны $G_1(\dot{V}, \dot{U})$, $G_2(\ddot{V}, \ddot{U})$, где $\dot{V} = \{\dot{v}_1, \dot{v}_2, \ldots, \dot{v}_n\}$, $\ddot{V} = \{\ddot{v}_1, \ddot{v}_2, \ldots, \ddot{v}_n\}$. Если $G_1(\dot{V}, \dot{U})$ $G_2(\ddot{V}, \ddot{U})$ и для вершин $\dot{v}_i \in \dot{V}$, $\ddot{v}_j \in \ddot{V}$ $\exists \overline{\beta}(G_1, G_2)$ такое , что $\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$.
Тогда степени указанных вершин равны .

Доказательство .

Предположим противное$Deg(\dot{v}_i) \neq Deg(\ddot{v}_j)$. Не нарушая общности положим $Deg(\dot{v}_i)$ ¿$Deg(\ddot{v}_j)$.

Пусть $\{\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2}, \ldots, \dot{v}_{ik}\} \in \dot{V}$ – вершины смежные с вершиной $\dot{v}_i$. Т.е. $Deg(\dot{v}_i) = k$.

С другой стороны для $\forall\ l \in \overline{1,k}$, $f(\dot{v}_i, \dot{v}_{il}) = 1$. Т.к. $\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$, то $\exists \ddot{v}_{jl} \in \ddot{V}$, такая , что $\dot{v}_{il} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl} \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$. Следовательно $f(\ddot{v}_j, \ddot{v}_{jl}) = 1$.

Отсюда $Deg(\ddot{v}_j) = k$, а по предположению $Deg(\dot{v}_i)$ ¿ $Deg(\ddot{v}_j)$, т.е. k¿k . Полученное противоречие доказывает утверждение .

Утверждение 5. Пусть даны $G_1(\dot{V}, \dot{U})$, где $|\dot{V}| = n$, $|\ddot{V} \vee$¿ $= n$. $\dot{v}_i \in \dot{V}$, $\ddot{v}_j \in \ddot{V}$ смежные с ними множества вершин соответственно $L_1 = \{\dot{v}_{i1}, \dot{v}_{i2}, \ldots, \dot{v}_{ik}\}$, $L_2 = \{\ddot{v}_{j1}, \ddot{v}_{j2}, \ldots, \ddot{v}_{jm}\}$ и соответствующие им множества степеней вершин $M_1 = \{Deg(\dot{v}_{i1}), Deg(\dot{v}_{i2}, \ldots, Deg(\dot{v}_{ik})\}$, $M_2 = \{Deg(\ddot{v}_{j1}), Deg(\ddot{v}_{j2}, \ldots, Deg(\ddot{v}_{jm})\}$.

Если G_1 G_2 и $\exists \overline{\beta}(G_1, G_2)$ такое , что $\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$, то $|M_1| = |M_2|$, т.е. m = k , множества степеней вершин M_1, M_2 , смежных соответственно с вершинами $\dot{v}_i$, $\ddot{v}_j$, равны между собой , т.е. $M_1 = M_2$.

Доказательство .

По условию утверждения G_1 G_2 и $\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$, отсюда и утверждения 4 следует $|M_1| = |M_2|$, т.е. k = m .

Предположим противное $M_1 \neq M_2$. Тогда любое взаимно-однозначное соответствие между вершинами из L_1 и L_2 поставит в соответствие друг другу $\dot{v}_{i\gamma} \in L_1$ и $\ddot{v}_{j\mu} \in L_2$, где $\gamma, \mu \in \overline{1,k}$, такие,что $Deg(\dot{v}_{i\gamma}) \neq Deg(\ddot{v}_{j\mu})$.Т.е. из предположения,что $\exists \overline{\beta}$ (G_1, G_2)

и $\dot{v}_i \leftrightarrow \ddot{v}_j \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$ следует , что $\exists \dot{v}_{i\gamma} \leftrightarrow \ddot{v}_{j\mu} \in \overline{\beta}(G_1, G_2)$ и $Deg(\dot{v}_{i\gamma}) \neq Deg(\ddot{v}_{j\mu})$. А это противоречит утверждению 4 . полученное противоречие доказывает утверждение .

Определение 3 . Пусть дан $V_{gr}((S, P, \cup_1^n W_i), (U_c, U_{xz}, \cup_1^n U_i))$,
$W_i = \{\dot{w}_{i1}, \dot{w}_{i2}, \ldots, \dot{w}_{ik1}\}$ – метка вершины w_i,
$W_j = \{w_{j1}, w_{j2}, \ldots, w_{jk2}\}$ – метка вершины w_j , где $w_i \in s_i$, $w_j \in s_j$,

$s_i, s_j \in S$. Будем говорить , что вершины w_i, w_j , где $i \neq j$, обладают разными метками если $k1 \neq k2$. Если $k1 = k2$ будем говорить , что вершины w_i , w_j обладают равными метками . Аналогично определяются метки если W_i , W_j принадлежат разным V-графам . $k_i = |W_i|$, $k_j = |W_j|$ будем называть значением метки .

Определение 4. Пусть дан $V_{gr}((S,P,\cup_1^n W_i),(U_c,U_{xz},\cup_1^n U_i))$. Будем говорить , что вершины V-графа помечены правильно если любые две помеченные вершины обладают разными метками .

Диапазоны значений степеней вершин каждого типа в V-графе .

Deg(**x**) – обозначение степени вершин типа **x** .
Deg(**y**) – обозначение степени вершин типа **y** .
Deg(**w**) – обозначение степени вершин типа **w** .
Deg(**z**) – обозначение степени вершин типа **z** .
Deg(**p**) – обозначение степени вершин типа **p** .

Дан $V_{gr}((S,P,\cup_1^n W_i),(U_c ,U_{xz} ,\cup_1^n U_i))$. Только вершины типа **x** смежные с одной или несколькими вершинами , которые обладают степенью равной 1 т.к. Deg(**w**) = 1 . Deg(**x**)= 2 если V-граф не загружен и вершины типа **w** не помечены . Deg(**y**) =2 всегда . Deg(**w**) = 1 всегда .Deg(**z**) = n + 3 если V-граф не загружен , т.к. вершины типа **z**соединены между собой ребрами , каждая из них смежная с одной вершиной типа **y** , каждая из них смежная с каждой из трех вершин типа **p**.

Deg(**z**) $\leq$ 2n + 3 если V-граф загружен , т.к. каждая вершина типа **z** может быть смежная с каждой вершиной типа **x** .

Deg(**p**) = n т.к. вершины типа **p** всегда смежные только с каждой вершиной типа **z** . Отсюда:

2$\leq$Deg(**x**) $\leq$n + 2 , если вершины типа **w** не помечены .

Deg(**y**) = 2 всегда .
Deg(**w**) = 1 всегда .
n + 3 $\leq$Deg(**z**) $\leq$ 2n + 3 .
Deg(**p**) = n .

Утверждение 6. Даны $V_{gr1}((\dot{S},\dot{P},\cup_1^n \dot{W}_i),(\dot{U}_c ,\dot{U}_{xz} ,\cup_1^n \dot{U}_i))$, $V_{gr2}((\ddot{S},\ddot{P},\cup_1^n \ddot{W}_i),(\ddot{U}_c ,\ddot{U}_{xz} ,\cup_1^n \ddot{U}_i))$. Если V_{gr1} V_{gr2} , то любое взаимно-однозначное соответствие между вершинами V_{gr1},V_{gr2} , сохраняющее смежность , ставит в соответствие друг другу вершины одного и того же типа .

Доказательство .

Пусть V_{gr1} V_{gr2} . Рассмотрим каждый тип вершин в отдельности .

1)Deg(**w**) = 1.Степень других типов вершин имеют степень больше 1.Отсюда и утверждения 4 следует $\exists\overline{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **w** поставлена в соответствие вершине другого типа .

2) 2≤Deg(**x**) ≤n + 2 . Вершина типа **x –** единственный тип вершин смежный с вершиной имеющей степень равную 1 . Отсюда и утверждения 5 следует , что $\exists\overline{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **x** поставлена в соответствие вершине другого типа .

3) Deg(**y**) = 2 . Вершина типа **y** не смежная с вершиной степенькоторой равна 1 . Отсюда и утверждения 5 следует , что $\exists\overline{\beta}$ (V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **y** поставлена в соответствие вершине типа **x** . Степени вершин типов **w,z,p** не могут быть равны Deg(**y**) . Отсюда и утверждения 4 следует , что $\exists\overline{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **y**

поставлена в соответствие вершине другого типа

4) n + 3 ≤Deg(**z**) ≤ 2n + 3 . Т.е. степень любой вершины типа **z** не может быть равна степени вершины другого типа . Отсюда и утверждения 4 следует , что $\exists\overline{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **z** поставлена в соответствие вершине другого типа .

5) Deg(**p**) = n . Вершина типа **p** не смежная с вершиной степень которой равна 1 . Отсюда и утверждения 5 следует, что $\exists\overline{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **p** поставлена в соответствие вершине типа **x .**

Степени вершин типов **w,z,y** не могут быть равны Deg(**p**) . Отсюда и утверждения 4 следует , что $\exists\overline{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) в котором вершина типа **p** поставлена в соответствие вершине другого типа .Утверждение полностью доказано .

Утверждение 7. Даны $V_{gr1}((\dot{S},\dot{P},\cup_1^n \dot{W}_i),(\dot{U}_c ,\dot{U}_{xz} ,\cup_1^n U_i))$, $V_{gr2}((\ddot{S},\ddot{P},\cup_1^n \ddot{W}_i)),((\ddot{U}_c ,\ddot{U}_{xz} ,\cup_1^n \ddot{U}_i))$, где $|\dot{S}| = n$, $|\ddot{S}| = n$, $|\dot{P}| = 3$,

$|\ddot{P}| = 3$.Если V_{gr1} V_{gr2} , то $\forall\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$ ставит одноименные вершины одногографа в соответствие одноименным вершинам другого .При этом в соответствие друг другу ставятся вершины одинаковоготипа .Т.е. $(V_{gr1}$ $V_{gr2}) \rightarrow (\forall\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2}) =$ $= \{\dot{s}_{i1}\leftrightarrow\ddot{s}_{j1},\dot{s}_{i2}\leftrightarrow\ddot{s}_{j2},\ldots,\dot{s}_{in}\leftrightarrow s_{jn}\}\cup\dot{P}\leftrightarrow\ddot{P})$.

Доказательство .

Из утверждения 6 следует , что $\forall\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$ ставит в соответствие друг другу вершины одинакового типа . Остается доказать , что если $\dot{s}_i\in\dot{S}$, $\ddot{s}_j\in\ddot{S}$, где $\dot{s}_i = \{\dot{w}_i,\dot{x}_i,\dot{z}_i,\dot{y}_i\}$, $\ddot{s}_j = \{\ddot{w}_j,\ddot{x}_j,\ddot{z}_j,\ddot{y}_j\}$, $i,j\in\overline{1,n}$ и хотя бы одно из соотношений $\dot{x}_i\leftrightarrow\ddot{x}_j$, $\dot{y}_i\leftrightarrow\ddot{y}_j$, $\dot{z}_i\leftrightarrow\ddot{z}_j$, $\dot{w}_i\leftrightarrow\ddot{w}_j$ принадлежит $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, то каждое из них принадлежит $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$.

Доказательство проведем в 4 этапа .

Для каждого соотношения докажем , что если оно принадлежит $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, то остальные три соотношения также принадлежат $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$.

1) Пусть $\dot{x}_i\leftrightarrow\ddot{x}_j\in\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, требуется доказать , что $\{\dot{y}_i\leftrightarrow\ddot{y}_j , \dot{z}_i\leftrightarrow\ddot{z}_j , \dot{w}_i\leftrightarrow\ddot{w}_j\}\in\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$. Предположим противное $\dot{x}_l\leftrightarrow\ddot{x}_j\in\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, а хотя бы одно из соотношений : $\dot{y}_i\leftrightarrow\ddot{y}_j$, $\dot{z}_i\leftrightarrow\ddot{z}_j$, $\dot{w}_i\leftrightarrow\ddot{w}_j$ не принадлежит $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$.

а) Пусть $\exists$ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\dot{x}_i\leftrightarrow\ddot{x}_j\in\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, но $\dot{w}_i\leftrightarrow\ddot{w}_j\overline{\in}\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$. Т.е. $\dot{x}_i\leftrightarrow\ddot{x}_j\in\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, $\overline{\beta}(\dot{w}_i)\neq\ddot{w}_j$, $\overline{\beta}(\dot{w}_i)$ ¿ $\ddot{w}_{j1}$,где $j\neq j_1$. Отсюда $f(\dot{x}_i,\dot{w}_i)$¿ $f(\ddot{x}_j,\ddot{w}_{j1})$. С другой стороны $f(\dot{x}_i,\dot{w}_i)\neq 0$, а $f(\ddot{x}_j,\ddot{w}_{j1})$ ¿ 0 , т.к. любая вершина типа **x** смежная только с одноименной вершиной типа **w** . Следовательно $f(\dot{x}_i,\dot{w}_i)\neq f(\ddot{x}_j,\ddot{w}_{j1})$. Полученное противоречие опровергает предположение .

б) Пусть $\exists$ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\overline{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_j$, но $\overline{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_{j1}$, где $i\neq j1$.

Отсюда : $f(\dot{x}_i,\dot{y}_i)$ ¿ $f(\ddot{x}_j,\ddot{y}_{j1})$. С другой стороны вершина типа **x** смежная только с одноименной вершиной типа **y** . Следовательно $f(\dot{x}_i,\dot{y}_i)\neq 0$, а $f(\ddot{x}_j,\ddot{y}_{j1})$ ¿ 0 , т.е. $f(\dot{x}_i,\dot{y}_i)\neq f(\ddot{x}_j,\ddot{y}_{j1})$. Полученное противоречие опровергает предположение .

в) Пусть $\exists$ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\overline{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_j$, но $\overline{\beta}(\dot{z}_i)$ ¿ $\ddot{z}_{j1}$, где $j\neq j1$. Из пункта б следует $\overline{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_j$. Отсюда $f(\dot{y}_i,\dot{z}_i)$ ¿ $f(\ddot{y}_j,\ddot{z}_{j1})$. С другой стороны, т.к. $\ddot{y}_j$ смежная только с одноименной вершиной типа **z** , $f(\dot{y}_i,\dot{z}_i)\neq 0$, $f(\ddot{y}_j,\ddot{z}_{j1})$ ¿ 0 , т.е. $f(\dot{y}_i,\dot{z}_i)\neq f(\ddot{y}_j,\ddot{z}_{j1})$.

Полученное противоречие опровергает предположение .

2) Пусть $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) , требуется доказать , что $\{\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j$, $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j$, $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j\} \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) .Предположим противное $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) , а хотя бы одно из соотношений $\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j$, $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j$, $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j$ не принадлежит $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2})

а) Пусть $\exists$ такое $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) , что $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) но $\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j \overline{\in}$ $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) . Т.е. $\bar{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_j$, $\bar{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_{j1}$, где j ≠ j1 . Отсюда f($\dot{y}_i$,$\dot{x}_i$) ¿ f($\ddot{y}_j$,$\ddot{x}_{j1}$) . С другой стороны , f($\dot{y}_i$,$\dot{x}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{y}_j$,$\ddot{x}_{j1}$) ¿ 0 , т.к. любая вершина типа **y** смежная только с одноименной вершиной типа **x**.Следовательно f($\dot{y}_i$,$\dot{x}_i$)≠f($\ddot{y}_j$,$\ddot{x}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

б) Пусть $\exists$ такое $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) , что $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) , но $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j \overline{\in} \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) . Т.е. $\bar{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_j$, $\bar{\beta}(\dot{z}_i)$ ¿ $\ddot{z}_{j1}$, где j ≠ j_1 . Отсюда f($\dot{y}_i$,$\dot{z}_i$) ¿f($\ddot{y}_j$,$\ddot{z}_{j1}$) . С другой стороны f($\dot{y}_i$,$\dot{z}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{y}_j$,$\ddot{z}_{j1}$) ¿ 0 . т.к. любая вершина типа **y** смежная только с одной вершиной типа **z** . Следовательно f($\dot{y}_i$,$\dot{z}_i$) ≠f($\ddot{y}_j$,$\ddot{z}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

в) Пусть $\exists$ такое $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) , что $\bar{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_j$, но $\bar{\beta}(\dot{w}_i)$ ¿ $\ddot{w}_{j1}$, где j≠j1 , т.е. $\bar{\beta}(\dot{w}_i)$ ≠ $\ddot{w}_j$. но в этом случае из пункта а следует $\bar{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_j$.Отсюда f($\dot{x}_i$,$\dot{w}_i$) ¿ f($\ddot{x}_j$,$\ddot{w}_{j1}$) . С другой стороны , т.к. вершина типа **x**смежная только с одноименной вершиной типа **w** , f($\dot{x}_i$,$\dot{w}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{x}_j$,$\ddot{w}_{j1}$) ¿ 0 . Следовательно f($\dot{x}_i$,$\dot{w}_i$) ≠f($\ddot{x}_j$,$\ddot{w}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

3) Пусть $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) , требуется доказать , что $\{\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j$, $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j$, $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j\} \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) . Предположим противное

$\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j \in \bar{\beta}$($V_{g1}$,$V_{gr2}$) , а хотя бы одно из соотношений $\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j$, $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j$, $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j$ не принадлежит $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) .

а) Пусть $\exists$ такое $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) , что $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) , но $\dot{x}_I \leftrightarrow \ddot{x}_j \overline{\in} \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) . Т.е. $\bar{\beta}(\dot{w}_i)$ ¿ $\ddot{w}_j$, $\bar{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_{j1}$, где j ≠ j1 . Отсюда f($\dot{w}_i$,$\dot{x}_i$) ¿ f($\ddot{w}_j$,$\ddot{x}_{j1}$) . С другой стороны f($\dot{w}_i$,$\dot{x}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{w}_j$,$\ddot{x}_{j1}$) ¿ 0 т.к. любая вершина типа **w** смежная только с одноименной вершиной типа **x** . Следовательноf($\dot{w}_i$,$\dot{x}_i$) ≠f($\ddot{w}_j$,$\ddot{x}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

б) Пусть $\exists$ такое $\bar{\beta}$(V_{gr1},V_{gr2}) , что $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j \in \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) , но $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j \overline{\in} \bar{\beta}$($V_{gr1}$,$V_{gr2}$) . Т.е. $\bar{\beta}(\dot{w}_i)$ ¿ $\ddot{w}_j$, $\bar{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_{j1}$, где j1 ≠ j . Тогда из

пункта а следует $\overline{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_j$. Отсюда f($\dot{x}_i,\dot{y}_i$) ¿ f($\ddot{x}_j,\ddot{y}_{j1}$) . С другой стороны , т.к. вершина типа **x** смежная только с одноименной вершиной типа **y** , f($\dot{x}_i,\dot{y}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{x}_j,\ddot{y}_{j1}$) ¿ 0 . Следовательно
f($\dot{x}_i,\dot{y}_i$) ≠ f($\ddot{x}_j,\ddot{y}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

в) Пусть ∃ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, но $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$. Т.е. $\overline{\beta}(\dot{w}_i)$ ¿ $\ddot{w}_j$, $\overline{\beta}(\dot{z}_i)$ ¿ $\ddot{z}_{j1}$, где j1 ≠ j . Отсюда и пункта б следует $\overline{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_j$. Отсюда f($\dot{y}_i,\dot{z}_i$) ¿ f($\ddot{y}_j,\ddot{z}_{j1}$) .
С другой стороны , т.к. вершина типа **y** смежная только с одноименной вершиной типа **z** , f($\dot{y}_i,\dot{z}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{y}_j,\ddot{z}_{j1}$) ¿ 0 .
Следовательно f($\dot{y}_i,\dot{z}_i$) ≠f($\ddot{y}_j,\ddot{z}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

4) Пусть $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, требуется доказать , что $\{\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j ,\ \dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j ,\ \dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j\} \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$. Предположим противное $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, а хотя бы одно из соотношений $\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j$, $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j$, $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j$ не принадлежит $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$.

а) Пусть ∃ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, но $\dot{y}_i \leftrightarrow \ddot{y}_j \,\overline{\in}\, \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$.Т.е. $\overline{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_{j1}$, $\overline{\beta}(\dot{z}_i)$ ¿ $\ddot{z}_j$, где j1 ≠ j . Отсюда f($\dot{z}_i,\dot{y}_i$) ¿ f($\ddot{z}_j,\ddot{y}_{j1}$) . С другой стороны f($\dot{z}_i,\dot{y}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{z}_j,\ddot{y}_{j1}$) ¿ 0 , т.к. любая вершина типа **z** смежная только с одноименной вершиной типа **y** . Следовательно f($\dot{z}_i,\dot{y}_i$) ≠ f($\ddot{z}_j,\ddot{y}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

б) Пусть ∃ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\dot{z}_l \leftrightarrow \ddot{z}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, но

$\dot{x}_i \leftrightarrow \ddot{x}_j \,\overline{\in}\, \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$. Т.е. $\overline{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_{j1}$, $\overline{\beta}(\dot{z}_i)$ ¿ $\ddot{z}_j$, где j1 ≠ j . Отсюда и пункта а следует $\overline{\beta}(\dot{y}_i)$ ¿ $\ddot{y}_j$. Следовательно f($\dot{y}_i,\dot{x}_i$) ¿ f($\ddot{y}_j,\ddot{x}_{j1}$) .
С другой стороны f($\dot{y}_i,\dot{x}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{y}_j,\ddot{x}_{j1}$) ¿ 0 , т.к. вершина типа **y** смежная только с одноименной вершиной типа **x** . Следовательно
f($\dot{y}_i,\dot{x}_i$) ≠ f($\ddot{y}_j,\ddot{x}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение .

в) Пусть ∃ такое $\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, что $\dot{z}_i \leftrightarrow \ddot{z}_j \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$, но $\dot{w}_i \leftrightarrow \ddot{w}_j \,\overline{\in}\, \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$. Т.е. $\overline{\beta}(\dot{z}_i)$ ¿ $\ddot{z}_j$, $\overline{\beta}(\dot{w}_i)$ ¿ $\ddot{w}_{j1}$, где j1 ≠ j . Отсюда и пункта б следует $\overline{\beta}(\dot{x}_i)$ ¿ $\ddot{x}_j$. Отсюда f($\dot{x}_i,\dot{w}_i$) ¿ f($\ddot{x}_j,\ddot{w}_{j1}$) . С другой стороны f($\dot{x}_i,\dot{w}_i$) ≠ 0 , f($\ddot{x}_j,\ddot{w}_{j1}$) ¿ 0 , т.к. любая вершина типа **x** смежная только с одноименной вершиной типа **w** .Следовательно
f($\dot{x}_i,\dot{w}_i$) ≠ f($\ddot{x}_j,\ddot{w}_{j1}$) . Полученное противоречие опровергает предположение . Утверждение полностью доказано .

4. Погружение ориентированного графа (графа Бержа) В неориентированный без петель и кратных ребер V-граф .

Определение 5 .Пусть даны не нагруженный $V_{gr}((S,P,\cup_1^n W_i),(U_c,U_{xz},\cup_1^n U_i))$ с размерностью $R(V_{gr})$ ¿n и ориентированный граф $\vec{G}_1(V_1,U_1)$, где $|V_1|$ ¿n . ∀ вершине $v_i \in V_1$, где $i \in \overline{1,n}$, с номером i поставим в соответствие две одноименные вершины $x_i \in s_i$, $z_i \in s_i$, с тем же номером i , где $i \in \overline{1,n}$ и $s_i \in S$. Вершину графа $\vec{G}_1$ с номером i и вершины $(w_i,x_i,z_i,y_i) \in S$ V-графа с теми же номерами i будем называть одноименными . Дополним V_{gr} ребрами так чтобы выполнялись следующие условия . Для ∀ $v_i,v_j \in V$, где $i,j \in \overline{1,n}$, если v_i обладает петлей , то одноименные с ней вершины в V_{gr} x_i и z_i соединим ребром , если v_j обладает петлей , то одноименные с ней вершины в V_{gr} x_j и z_j соединим ребром . Если ∃ дуга идущая из v_i в v_j , т.е. $(v_i,v_j) \in U_1$, то в V_{gr} одноименные с ними вершины x_i и z_j соединим ребром . Если ∃ дуга идущая из v_j в v_i , т.е. $(v_j,v_i) \in U_1$, то в V_{gr} одноименные с ними вершины z_i и x_j соединим ребром . Т.е. для ∀ $i,j \in \overline{1,n}$ и $i \neq j$ справедливы соотношения :

$$(v_i,v_j) \in U_1 \leftrightarrow (x_i,z_j) \in U_{xz} ,$$

$$(v_j,v_i) \in U_1 \leftrightarrow (x_j,z_i) \in U_{xz} ,$$
$$(v_i,v_i) \in U_1 \leftrightarrow (x_i,z_i) \in U_{xz} ,$$
$$(v_j,v_j) \in U_1 \leftrightarrow (x_j,z_j) \in U_{xz} .$$

Дополненный таким образом ребрами V-граф будем называть образом графа $\vec{G}_1(V_1,U_1)$ или представлением ориентированного графа $\vec{G}_1(V_1,U_1)$ в виде неориентированного без петель и кратных ребер или загрузкой ориентированного графа в V-граф и обозначать $V_{gr}[\vec{G}_1(V_1,U_1)]$.

Таким образом дополненный ребрами V-граф будем также называть погружением ориентированного графа в неориентированный граф без петель и кратных ребер .

5. О не существовании полиномиальной P задачи и полиномиального алгоритма для задачи изоморфизма графов.

Утверждение 8. Пусть даны ориентированные графы $\vec{G}_1(V_1,U_1)$, $\vec{G}_2(V_2,U_2)$, где $|V_1| = n$, $|V_2| = n$. Соответствующие им образы $V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1),((\dot{S},\dot{P},\cup_1^n \dot{W}_i),(\dot{U}_c,\dot{U}_{xz},\cup_1^n \dot{U}_i))]$, $V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2),((\ddot{S},\ddot{P},\cup_1^n \ddot{W}_i),(\ddot{U}_c,\ddot{U}_{xz},\cup_1^n \ddot{U}_i))]$, где $R(V_{gr1}) = n$ и $R(V_{gr2}) = n$. Ориентированные графы $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ изоморфные тогда и только тогда когда их образы $V_{gr1}[\vec{G}_1]$, $V_{gr2}[\vec{G}_2]$ изоморфные . Если взаимно однозначное соответствие между вершинами $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ сохраняет смежность , то взаимно однозначное соответствие между одноименными с ними коалиционными вершинами V-графов $V_{gr1}[\vec{G}_1]$, $V_{gr2}[\vec{G}_2]$ тоже сохраняет смежность . И наоборот , если взаимно однозначное соответствие между коалиционными вершинами $V_{gr1}[\vec{G}_1]$, $V_{gr2}[\vec{G}_2]$ сохраняет смежность , то взаимно однозначное соответствие между одноименными с ними вершинами графов $\vec{G}_1(V_1,U_1)$, $\vec{G}_2(V_2,U_2)$ сохраняет смежность . Т.е.

$\vec{G}_1 \ \vec{G}_2 \Leftrightarrow V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1)] \qquad V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2)]$,

$(\{\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} ,\dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} , \dots , \dot{v}_{in} \leftrightarrow \ddot{v}_{jn}\} = \overline{\beta}(\vec{G}_1,\vec{G}_2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\{\dot{s}_{i1} \leftrightarrow \ddot{s}_{j1} , \dot{s}_{i2} \leftrightarrow \ddot{s}_{j2} , \dots , \dot{s}_{in} \leftrightarrow \ddot{s}_{jn}\} \in \overline{\beta}(V_{gr1}[\vec{G}_1],V_{gr2}[\vec{G}_2])$, где

$\{\dot{s}_{i1},\dot{s}_{i2}, \dots ,\dot{s}_{in}\} = \dot{S}$, $\{\ddot{s}_{j1},\ddot{s}_{j2}, \dots ,\ddot{s}_{jn}\} = \ddot{S}$,

$\{\dot{v}_{i1},\dot{v}_{i2}, \dots ,\dot{v}_{in}\} = V_1$, $\{\ddot{v}_{j1},\ddot{v}_{j2}, \dots ,\ddot{v}_{jn}\} = V_2$.

Доказательство .

Достаточность .

Дано $V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1)] \ V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2)]$. Требуется доказать , что $\vec{G}_1(V_1,U_1) \ \vec{G}_2(V_2,U_2)$ и если $\overline{\beta}(V_{gr1}[\vec{G}_1],V_{gr2}[\vec{G}_2]) \ni (\{\dot{s}_{i1} \leftrightarrow \ddot{s}_{j1},\dot{s}_{i2} \leftrightarrow \ddot{s}_{j2} , \dots , \dot{s}_{in} \leftrightarrow \ddot{s}_{jn}\}$, то $\{\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} , \dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} , \dots , \dot{v}_{in} \leftrightarrow \ddot{v}_{jn}\} = \overline{\beta}(\vec{G}_1(V_1,U_1),\vec{G}_2(V_2,U_2))$.

Из $V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1)] \ V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2)]$ и утверждения 7 следует , что $\forall \overline{\beta}(V_{gr1}[\vec{G}_1],V_{gr2}[\vec{G}_2]) = \{\dot{s}_{i1} \leftrightarrow \ddot{s}_{j1} , \dot{s}_{i2} \leftrightarrow \ddot{s}_{j2} , \dots , \dot{s}_{in} \leftrightarrow \ddot{s}_{jn}\} \cup \dot{P} \leftrightarrow \ddot{P}$.Отсюда, пусть

$(\dot{w}_{i1},\dot{x}_{i1},\dot{y}_{i1},\dot{z}_{i1}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{j1},\ddot{x}_{j1},\ddot{y}_{j1},\ddot{z}_{j1})$,

$(\dot{w}_{i2},\dot{x}_{i2},\dot{y}_{i2},\dot{z}_{i2}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{j2},\ddot{x}_{j2},\ddot{y}_{j2},\ddot{z}_{j2})$,

…

$(\dot{w}_{in},\dot{x}_{in},\dot{y}_{in},\dot{z}_{in}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{jn},\ddot{x}_{jn},\ddot{y}_{jn},\ddot{z}_{jn})$,

$\{\dot{P}_1,\dot{P}_2,\dot{P}_3\} \leftrightarrow \{\ddot{P}_1,\ddot{P}_2,\ddot{P}_3\}$

взаимно однозначное соответствие между вершинами $V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1)]$, $V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2)]$ сохраняющее смежность . Следовательно для $\forall$ k,l $\in \overline{1,n}$, где $k \neq l$,

$\dot{x}_{ik} \leftrightarrow \ddot{x}_{jk}$, $\dot{z}_{ik} \leftrightarrow \ddot{z}_{jk}$,

$\dot{x}_{il} \leftrightarrow \ddot{x}_{jl}$, $\dot{z}_{il} \leftrightarrow \ddot{z}_{jl}$, сохраняют смежность . Отсюда

$$f(\dot{x}_{ik},\dot{z}_{ik}) = f(\ddot{x}_{jk},\ddot{z}_{jk}) , \qquad (1)$$

$$f(\dot{x}_{ik},\dot{x}_{il}) = 0 , f(\ddot{x}_{jk},\ddot{x}_{jl}) = 0 ,$$

т.к. вершины типа **x** не смежные .

$$f(\dot{x}_{ik},\dot{z}_{il}) = f(\ddot{x}_{jk},\ddot{z}_{jl}) , \qquad (2)$$

$$f(\dot{z}_{ik},\dot{x}_{il}) = f(\ddot{z}_{jk},\ddot{x}_{jl}) , \qquad (3)$$

$$f(\dot{z}_{ik},\dot{z}_{il}) = f(\ddot{z}_{jk},\ddot{z}_{jl}) ,$$

$$f(\dot{x}_{il},\dot{z}_{il}) = f(\ddot{x}_{jl},\ddot{z}_{jl}) , \qquad (4)$$

С другой стороны $\dot{v}_{ik}$, $\dot{v}_{il}$ графа $\vec{G}_1(V_1,U_1)]$ и $\ddot{v}_{jk}$, $\ddot{v}_{jl}$ графа $\vec{G}_2(V_2,U_2)$ одноименные вершины соответственно с $\dot{x}_{ik},\dot{z}_{ik};\dot{x}_{il},\dot{z}_{il}$и$\ddot{x}_{jk},\ddot{z}_{jk}$; $\ddot{x}_{jl},\ddot{z}_{jl}$.

Рассмотрим соотношения

$$\dot{v}_{ik} \leftrightarrow \ddot{v}_{jk} , \qquad (5)$$

$$\dot{v}_{il} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl} . \qquad (6)$$

Из соотношения 1 и загрузки графов V_{gr1} и V_{gr2} следует

$$f(\dot{v}_{ik},\dot{v}_{ik}) = f(\ddot{v}_{jk},\ddot{v}_{jk}) .$$

Из соотношений 2 , 3 и загрузки графов V_{gr1} и V_{gr2} следует

$$f(\dot{v}_{ik},\dot{v}_{il}) = f(\ddot{v}_{jk},\ddot{v}_{jl}) .$$

Из соотношения 4 и загрузки графов V_{gr1} и V_{gr2} следует

$$f(\dot{v}_{il},\dot{v}_{il}) = f(\ddot{v}_{jl},\ddot{v}_{jl}) .$$

Отсюда следует , что соотношения 5 , 6 сохраняют смежность .
В силу произвольного выбора $\dot{x}_{ik},\dot{z}_{ik};\dot{x}_{il},\dot{z}_{il}$ и $\ddot{x}_{jk},\ddot{z}_{jk}$; $\ddot{x}_{jl},\ddot{z}_{jl}$
Следует , что

$\bar{\beta}(\vec{G}_1(V_1,U_1),\vec{G}_2(V_2,U_2)) = \{\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} , \dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} , \ldots , \dot{v}_{in} \leftrightarrow \ddot{v}_{jn}\}$.

Т.е. $\vec{G}_1(V_1,U_1)$ $\vec{G}_2(V_2,U_2)$. Достаточность доказана .

Необходимость .

Дано $\vec{G}_1(V_1,U_1)$ $\vec{G}_2(V_2,U_2)$ требуется доказать , что $V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1)]$ $V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2)]$ и если $\bar{\beta}(\vec{G}_1(V_1,U_1),\vec{G}_2(V_2,U_2)) =$
$= \{\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} , \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} , \ldots , \dot{v}_{in} \leftrightarrow \ddot{v}_{jn}\}$, то
$\{\dot{s}_{i1} \leftrightarrow \ddot{s}_{j1},\dot{s}_{i2} \leftrightarrow \ddot{s}_{j2} , \ldots , \dot{s}_{in} \leftrightarrow \ddot{s}_{jn}\} \in \bar{\beta}(V_{gr1}[\vec{G}_1(V_1,U_1)], V_{gr2}[\vec{G}_2(V_2,U_2)])$.

Пусть $\bar{\beta}(\vec{G}_1(V_1,U_1),\vec{G}_2(V_2,U_2)) = \{\dot{v}_{i1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1} , \dot{v}_{i2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2} , \ldots , \dot{v}_{in} \leftrightarrow \ddot{v}_{jn}\}$,
где $\dot{v}_{ik} \in V_1$ для $\forall$ k$\in \overline{1,n}$ и $\ddot{v}_{jk} \in V_2$ для $\forall$ k $\in \overline{1,n}$. Возьмем
$\forall$ r,l $\in \overline{1,n}$, r$\neq$l .

$$\dot{v}_{ir} \leftrightarrow \ddot{v}_{jr} , \qquad (8)$$

$$\dot{v}_{il} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl} \, . \qquad (9)$$

Тогда
$$f(\dot{v}_{ir},\dot{v}_{il}) = f(\ddot{v}_{jr},\ddot{v}_{jl}) \, , \qquad (10)$$
$$f(\dot{v}_{ir},\dot{v}_{ir}) = f(\ddot{v}_{jr},\ddot{v}_{jr}) \, ,$$
$$f(\dot{v}_{il},\dot{v}_{il}) = f(\ddot{v}_{jl},\ddot{v}_{jl}) \, .$$

Из 10 и т.к. V_{gr1} , V_{gr2} являются образами соответственно графов $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$следует

$$f(\dot{x}_{ir},\dot{z}_{il}) = f(\ddot{x}_{jr},\ddot{z}_{jl}) \, , \qquad (11)$$
$$f(\dot{x}_{il},\dot{z}_{ir}) = f(\ddot{x}_{jl},\ddot{z}_{jr}) \, , \qquad (12)$$
$$f(\dot{x}_{ir},\dot{z}_{ir}) = f(\ddot{x}_{jr},\ddot{z}_{jr}) \, , \qquad (13)$$
$$f(\dot{x}_{il},\dot{z}_{il}) = f(\ddot{x}_{jl},\ddot{z}_{jl}) \, . \qquad (14)$$

В V-графе вершины типа **x** не связаны между собой ребрами , а вершины типа **z**связаны между собой ребрами . Отсюда

$$f(\dot{x}_{ir},\dot{x}_{il}) = f(\ddot{x}_{jr},\ddot{x}_{jl}) \qquad (15)$$
$$f(\dot{z}_{ir},\dot{z}_{il}) = f(\ddot{z}_{jr},\ddot{z}_{jl}) \, . \qquad (16)$$

Из 11,12,13,14,15,16 следует

$$\dot{x}_{ir} \leftrightarrow \ddot{x}_{jr} \, , \; \dot{z}_{il} \leftrightarrow \ddot{z}_{jl} \, , \qquad (17)$$

$$\dot{x}_{il} \leftrightarrow \ddot{x}_{jl} \, , \; \dot{z}_{ir} \leftrightarrow \ddot{z}_{jr} \, , \qquad (18)$$

сохраняют смежность .

С другой стороны .

Вершина $\dot{w}_{ir}$– смежная только с $\dot{x}_{ir}$.

Вершина $\ddot{w}_{jr}$ – смежная только с $\ddot{x}_{jr}$.

Вершина $\dot{w}_{il}$– смежная только с $\dot{x}_{il}$.

Вершина $\ddot{w}_{jl}$ – смежная только с $\ddot{x}_{jl}$.

Отсюда

$$\dot{w}_{ir} \leftrightarrow \ddot{w}_{jr} \, , \; \dot{w}_{il} \leftrightarrow \ddot{w}_{jl} \qquad (19)$$

совместно с соотношениями 17,18 сохраняют смежность .

Следовательно соотношения

$$(\dot{w}_{ir},\dot{x}_{ir},\dot{z}_{ir}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{jr},\ddot{x}_{jr},\ddot{z}_{jr}) \, , \qquad (20)$$
$$(\dot{w}_{il},\dot{x}_{il},\dot{z}_{il}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{jl},\ddot{x}_{jl},\ddot{z}_{jl}) \qquad (21)$$

сохраняют смежность .

Вершины типа **y** смежные только с одноименными вершинами типа **x**и **z** . Отсюда

$$\dot{y}_{ir} \leftrightarrow \ddot{y}_{jr} \, , \; \dot{y}_{il} \leftrightarrow \ddot{y}_{jl}$$

совместно с соотношениями 20 , 21 сохраняют смежность .

Следовательно

$$(\dot{w}_{ir},\dot{x}_{ir},\dot{y}_{ir},\dot{z}_{ir}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{jr},\ddot{x}_{jr},\ddot{y}_{jr},\ddot{z}_{jr}) \, ,$$

$(\dot{w}_{il},\dot{x}_{il},\dot{y}_{il},\dot{z}_{il}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{jl},\ddot{x}_{jl},\ddot{y}_{jl},\ddot{z}_{jl})$

сохраняют смежность .

Вершины поставленные в соответствие друг другу взяты из 1 произвольно . Следовательно , взаимно однозначное соответствие между коалиционными вершинами V_{gr1} , V_{gr2} построенное из 1 заменой вершин из $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ на одноименные с ними коалиционными вершинами из V_{gr1} , V_{gr2} сохраняет смежность .

Т.е. $\dot{v}_{ir} \leftrightarrow \ddot{v}_{jr}$, где $r \in \overline{1,n}$, заменяется на $\dot{s}_{ir} \leftrightarrow \ddot{s}_{jr}$, а $\dot{v}_{il} \leftrightarrow \ddot{v}_{jl}$,

где $l \in \overline{1,n}$, заменяется на $\dot{s}_{il} \leftrightarrow \ddot{s}_{jl}$.

Вершины типа **p**смежные только с каждой вершиной типа **z** V-графа . Следовательно любое взаимно однозначное соответствие между вершинами типа **p** графов V_{gr1} , V_{gr2}и указанное взаимнооднозначное соответствие между их коалиционными вершинами сохраняют смежность .

Т.е. V_{gr1} V_{gr2} . Утверждение доказано .

Обозначения .

Пустьданы $V_{gr1}((S_1,P_1,\cup_1^n \dot{W}_i),(\dot{U}_c,\dot{U}_{xz},\cup_1^n U_i))$, $V_{gr2}((S_2,P_2,\cup_1^n \ddot{W}_i),(\ddot{U}_c,\ddot{U}_{xz},\cup_1^n \ddot{U}_i))$, где $S_1 = \cup_1^n(\dot{w}_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)$,

$S_2 = \cup_1^n(\ddot{w}_j,\ddot{x}_j,\ddot{y}_j,\ddot{z}_j)$.

Пометим вершины $\dot{w}_l, \ddot{w}_r$, $|\dot{W}_l| = |\ddot{W}_r|$ и $|\dot{W}_l| \neq \vee \dot{W}_k|$, для $\forall k \in \overline{1,n}$, где $k \neq l$, и $|\ddot{W}_r| \neq |\ddot{W}_k|$, для $\forall$ $k \in \overline{1,n}$, где $k \neq r$.

Помеченные вершины будем обозначать $(\dot{w}_l)$, $(\ddot{w}_r)$. V-графы в которых пометили m вершин будем обозначать $V_{gr}(m)$.

Взаимно однозначное соответствие между вершинами $V_{gr1}(m)$, $V_{gr2}(m)$ будем обозначать β_m .

Утверждение 9 . Пусть даны нагруженные V-графы в которых Правильно помечены m −1 вершин , где $m \in \overline{1,n}$.

$V_{gr1}[(m-1),((S_1,P_1,\cup_1^n \dot{W}_i),(\dot{U}_c,\dot{U}_{xz},\cup_1^n \dot{U}_i))]$

$V_{gr2}[(m-1),((S_2,P_2,\cup_1^n \ddot{W}_j),(\ddot{U}_c,\ddot{U}_{xz},\cup_1^n \ddot{U}_j))]$, где $S_1 = \cup_1^n \dot{s}_i$,

$\dot{s}_i = (\dot{w}_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)$, $S_2 = \cup_1^n \ddot{s}_j$, $\ddot{s}_j = (\ddot{w}_j,\ddot{x}_j,\ddot{y}_j,\ddot{z}_j)$.

Вершины $\dot{w}_l \in \dot{s}_l$ и $\ddot{w}_r \in \ddot{s}_r$, где $l,r \in \overline{1,n}$, пометим правильными метками которые равны между собой .

Если $V_{gr1}(m-1)$ $V_{gr2}(m-1)$, то

$\exists \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}[(m-1),V_{gr2}[(m-1)) \ni \dot{w}_l \leftrightarrow \ddot{w}_r$тогда и только тогда , когда $\text{¿}_l) \leftrightarrow ($ $\ddot{w}_r) \in \overline{\beta}_m(V_{gr1}(m) ,V_{gr2}(m))$, где

$\overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m)) = \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \cup \{\dot{W}_l \leftrightarrow \ddot{W}_r\}$.
Т.е. $V_{gr1}(m-1)$ $V_{gr2}(m-1) \to ¿_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \ni$
$\ni \dot{w}_l \leftrightarrow \ddot{w}_r) \Leftrightarrow (¿_l) \leftrightarrow (\ddot{w}_r) \in \overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m)))]$, где
$\overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m)) = \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \cup \{\dot{W}_l \leftrightarrow \ddot{W}_r\}$.

Доказательство .

Необходимость .

Дано : $V_{gr1}(m-1)$ $V_{gr2}(m-1)$ и $\exists \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \ni$
$\ni \dot{w}_l \leftrightarrow \ddot{w}_r$. Требуется доказать , что
$¿_l) \leftrightarrow (\ddot{w}_r) \in \overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m))$, где $\overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m)) =$
$= \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \cup \{\dot{W}_l \leftrightarrow \ddot{W}_r\}$.
Из утверждения 3 и условия данного утверждения следует доказательство.

Достаточность .

Дано : $\overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m)) = \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \cup \{\dot{W}_l \leftrightarrow \ddot{W}_r\}$

Требуется доказать , что
$\dot{w}_l \leftrightarrow \ddot{w}_r \in \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1))$.
Из утверждения 3 и условия нашего утверждениеследует
$\{\dot{W}_l \leftrightarrow \ddot{W}_r\} \in \overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m))$, где
$\overline{\beta}_m(V_{gr1}(m), V_{gr2}(m)) = \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1)) \cup \{\dot{W}_l \leftrightarrow \ddot{W}_r\}$,
следует $\dot{w}_l \leftrightarrow \ddot{w}_r \in \overline{\beta}_{m-1}(V_{gr1}(m-1), V_{gr2}(m-1))$. Утверждение доказано .

Утверждение 10 . Для задачи изоморфизма графов без петель и кратных ребер :
а) не существует полиномиального алгоритма решения ,
б) не существует полиномиальной **Р** задачи .

Доказательство .

а)Пусть даны ориентированные графы (графы Бержа) $\vec{G}_1(\dot{V}_1, \dot{U}_1)$ и $\vec{G}_2(\ddot{V}_2, \ddot{U}_2)$, где $|\dot{V}_1| = n$, $|\ddot{V}_2| = n$. Соответствующие им образы
$V_{gr1}[\vec{G}_1(\dot{V}_1, \dot{U}_1), ((\dot{S}, \dot{P}, \cup_1^n \dot{W}_i), (\dot{U}_c, \dot{U}_{xz}, \cup_1^n \dot{U}_i))]$,
$V_{gr2}[\vec{G}_2(\ddot{V}_2, \ddot{U}_2), ((\ddot{S}, \ddot{P}, \cup_1^n \ddot{W}_i), (\ddot{U}_c, \ddot{U}_{xz}, \cup_1^n \ddot{U}_i))]$.
Предположим противное . Существует полиномиальный алгоритм вычисления изоморфизма графов без петель и кратных ребер .
Вычислим $\overline{\beta}(V_{gr1}¿_1), V_{gr2}(\vec{G}_2))$. Из утверждения 7 следует
$\overline{\beta}(V_{gr1}¿_1), V_{gr2}(\vec{G}_2)) \ni \cup_1^n((\dot{w}_{ik}, \dot{x}_{ik}, \dot{y}_{ik}, \dot{z}_{ik}) \leftrightarrow (\ddot{w}_{jk}, \ddot{x}_{jk}, \ddot{y}_{jk}, \ddot{z}_{jk}))$.
Отсюда и утверждения 8 следует $\overline{\beta}(\vec{G}_1, \vec{G}_2) = \cup_1^n(\dot{v}_{ik} \leftrightarrow \ddot{v}_{jk})$. Т.е. из нашего предположения следует , чтосуществует

полиномиальный алгоритм для задачи изоморфизма графов Бержа . А это противоречит утверждению доказанному С.В. Яблонским [1] , что существуют графы Бержа для которых не существует полиномиального алгоритма вычисления их изоморфизма . Полученное противоречие доказывает пункт **а** утверждения .

б) Предположим противное . Существует полиномиальная **P** задача для задачи изоморфизма графов без петель и кратных ребер .

Начнем помечать правильными метками вершины типа **w** графов V_{gr1},V_{gr2} .Рассмотрим последовательно пронумерованный

ряд вершин $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \ldots, \dot{w}_n$ графа V_{gr1} .

Для вершины $\dot{w}_1$ присвоим метку $k_1 = |\dot{W}_1|$, где $|\dot{W}_1| = 1$.

В графе V_{gr2} вычислим вершину $\ddot{w}_{j1}$ такую , что после присвоения ей метки $k_{j1} = |\ddot{W}_{j1}|$, где $|\ddot{W}_{j1}| = 1$, **P** задача установит , что $V_{gr1}(1)$ $\qquad$ $V_{gr2}(1)$. В этом случае из утверждений 3 и 2 следует , что

$\exists\overline{\beta}(V_{gr1}(1),V_{gr2}(1))$ такое , что

$\{\dot{W}_1 \leftrightarrow \ddot{W}_{J1}, \dot{w}_1 \leftrightarrow \ddot{w}_{j1}\} \in \overline{\beta}(V_{gr1}(1),V_{gr2}(1))$.

Для вершины $\dot{w}_2$ графа $V_{gr1}(1)$ присвоим метку со значением $k_2 = |\dot{W}_2|$, где $|\dot{W}_2| = 2$. В графе $V_{gr2}(1)$ вычислим вершину $\ddot{w}_{j2}$ такую , что после присвоения ей метки $k_{j2} = |\ddot{W}_{j2}|$, где $|\ddot{W}_{j2}| = 2$, **P** задача установит $V_{gr1}(2)$ $\qquad$ $V_{gr2}(2)$. В этом случае из утверждений

3 и 2 следует $\exists\overline{\beta}(V_{gr1}(2),V_{gr2}(2))$ такое , что

$\{\dot{W}_1 \leftrightarrow \ddot{W}_{J1}, \dot{w}_1 \leftrightarrow \ddot{w}_{j1}, \dot{W}_2 \leftrightarrow \ddot{W}_{J2}, \dot{w}_2 \leftrightarrow \ddot{w}_{j2}\} \in \overline{\beta}(V_{gr1}(2),V_{gr2}(2))$.

Продолжим указанный процесс . Для каждой вершины из множества $\{\dot{w}_1, \dot{w}_2, \ldots, \dot{w}_n\}$ вычислим соответствующие им вершины $\{\ddot{w}_{j1}, \ddot{w}_{j2}, \ddot{w}_{j3}, \ldots, \ddot{w}_{jn}\}$. Т.е. вычислим

$$\overline{\beta}(V_{gr1}(n),V_{gr2}(n)) \ni \{ \dot{W}_1 \leftrightarrow \ddot{W}_{j1}, \dot{w}_1 \leftrightarrow \ddot{w}_{j1}, \dot{W}_2 \leftrightarrow \ddot{W}_{j2}, \dot{w}_2 \leftrightarrow \ddot{w}_{j2}, \ldots, \dot{W}_n \leftrightarrow \ddot{W}_{jn}, \dot{w}_n \leftrightarrow \ddot{w}_{jn} \} . \qquad (22)$$

Графы V_{gr1},V_{gr2} являются подграфами соответственно графов $V_{gr1}(n)$,$V_{gr2}(n)$. Из 22 следует

$\beta(V_{gr1},V_{gr2}) = \overline{\beta}(V_{gr1}(n),V_{gr2}(n)) \setminus \{ \dot{W}_1 \leftrightarrow \ddot{W}_{j1}, \dot{W}_2 \leftrightarrow \ddot{W}_{j2}, \ldots,$

$\dot{W}_{n} \leftrightarrow \ddot{W}_{jn}\}$. Из утверждения 1 следует V_{gr1} V_{gr2} и $\beta(V_{gr1},V_{gr2})$ сохраняет смежность т.е. $\beta(V_{gr1},V_{gr2}) = \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$ и
$\{\dot{w}_{1} \leftrightarrow \ddot{w}_{j1},\ \dot{w}_{2} \leftrightarrow \ddot{w}_{j2},\ \ldots ,\dot{w}_{n} \leftrightarrow \ddot{w}_{jn}\} \in \overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2})$.
Отсюда и утверждения 7 следует
$\overline{\beta}(V_{gr1},V_{gr2}) =\{\dot{s}_{1} \leftrightarrow \ddot{s}_{j1},\dot{s}_{2} \leftrightarrow \ddot{s}_{j2}\ , \ldots ,\ \dot{s}_{n} \leftrightarrow \ddot{s}_{jn}\} \cup \{\dot{P} \leftrightarrow \ddot{P}\}$. Отсюда
и утверждения 8 следует
$\{\dot{v}_{1} \leftrightarrow \ddot{v}_{j1}\ ,\ \dot{v}_{2} \leftrightarrow \ddot{v}_{j2}\ , \ldots ,\ \dot{v}_{n} \leftrightarrow \ddot{v}_{n}\} = \overline{\beta}(\vec{G}_1,\vec{G}_2)$. Т.е. применили **n** раз полиномиальную **P** задачу и
вычислили изоморфизм графов Бержа . Получили противоречие .
С.В. Яблонский [1] доказал , что существуют ориентированные графы для которых не существует полиномиального алгоритма вычисления их изоморфизма . Следовательно наше предположение неверно . Не существует полиномиальной **P**

задачи для задачи изоморфизма графов без петель и кратных ребер .

Утверждение 11 . Для **NP** задач принадлежащих классу **NPC** не существует полиномиальных **P** задач и полиномиальных алгоритмов решения .

Доказательство .

Полиномиальное решение любой задачи из класса **NPC** дает полиномиальный алгоритм для решения каждой задачи принадлежащей классу **NPC** .

Задача изоморфизма графов является частным случаем задачи изоморфизма подграфу принадлежащей классу **NPC** . Отсюда
а) если существует полиномиальная **P** задача хотя бы для одной задачи из класса **NPC**, то существует полиномиальная **P** задача для задачи изоморфизма графов ,
б) если существует полиномиальный алгоритм решения хотя бы для одной из задач класса **NPC** , то существует полиномиальный алгоритм решения задачи изоморфизма графов .

Отсюда и утверждения 10 следует , что для любой задачи класса **NPC** не существует полиномиальной **P** задачи и не существует полиномиального алгоритма решения .

Литература .

1. С.В. Яблонский .
“Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем//Проблемы кибернетики . М., 1959. с. 75 - 121 “