Новое семейство стационарных осесимметричных вакуумов типа семейства Керра

Зафар Туракулов

15 июня 2024 г.

Аннотация

Получено новое трехпараментическое семейство стационарных осесимметричных вакуумных решений уравнения Эйнштейна, обладающих основными свойствами решений семейства Керра-НУТ. Также, как метриках Керра-НУТ, в нем полностью разделяются уравнения Гамильтона-Якоби и Клейна-Гордона и строится изотропная геодезическая тетрада. Это новое семейство решений почти полность. отлично от семейства Керра-НУТ, имея с ним общим только сферически симметричное решение Тауба-НУТ. Это новое семейство полностью состоит из пространственно-нечетных решений.

1 Введение

Важность построения аналитических решений фундаментальных уравнений физических теорий без каких-либо оговорок, считается очевидной, т.к. каждое такое решение задает точное представление соответствующего физического поля. Представлением гравитационного поля принято считать риманову метрику пространства-времени,заданную своими десятью компонентами, полученными в результате решения уравнения Эйнштейна. Более удобным, особенно в случае неортогональной системы координат, является представление геометрии пространства-времени изотропной геодезической или ортонормированной тетрадой, используемое в настоящей работе. С формальной точки зрения, десять функций координат, являющиеся решением уравнения Эйнштейна, называемые метрическими коэффциентами, составляют метрику, и, таким образом, искомое представление гравитационного поля, однако, в ОТО более важной является другая точка зрения, согласно которой цель состоит в том, чтобы получить не их, а геометрию пространства-времени, что налагает на получаемые решения некие дополнительные требования.

Метрические коэффициенты сами по себе дают довольно отдаленное представление о геометрии пространства-времени, которая для физиков выражается, прежде всего, в законах движения пробных частиц и распространения электромагнитных волн. Это означает, что геометрию пространства-времени можно задать только такими решениями, в которых разделяются уравнения Гамльтона-Якоби и Максвелла. Последнее означает, что оно допускает построение главных конгруэнций. Таким образом, если цель состоит не в том, чтобы получить какие-то десять функций, называемых метрическими коэффициетнами, а пригодную к использованию модель пространства-времени, то смысл имеет только построение решений, разделяющих уравнение Гамильтона-Якоби многое другое. Такие решения мы ниже называем интерпретируемыми.

В настоящее время трехпараметрическое семейство, известное как решение Керра-НУТ, считается наиболее общим в классе стационарных осесимметричных интерпретируемых вакуумных решений уравнения Эйнштейна. Мнение о его единственности было высказано в нашей работе [1], что возможно, остановило поиск новых решений такого рода. Однако в нашей же работе [2] было показано, как построить еще один класс подобных решений. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы построить.

2 Постановка задачи

Построению решения уравнения Эйнштейна всегда предшествуют рассуждения, в ходе которых смысл вводимых координат и предполагаемый вид решения. В рассматриваемом случае пространство-время обладает двухпараметрической группой симметрии, содержащей временные сдвиги и вращения в одном пространственном направлении. Наиболее удобными в таком пространстве-времени являются системы, в которых две из четырех координат являются параметрами преобразваний симметрии t как параметр временных сдвигов и φ как угол вращения. Значит, в общем случае в просранстве-времени вводится система координат $\{t, u, v, \varphi\}$, в которой смысл двух оставшихся координат в общих чертах ясен из следующих соображений.

Обычно предполагается, что искомое решение описывает гравитационное поле вне некоторого компактного объекта, служащего источником этого поля. Если так, то на больших расстояниях оно сферизуется и его естественно представлять в сферических координатах. В таком случае система $\{t, r, s, \varphi\}$ асимптотически приближается к обыной сферической, т.е., скажем, координата r становится радиальной, а координата s – какой-то функцией полярного угла. Однако все это ничего не говорит об аналитической форме искомых функций, в которых выражена искомая метрика. В этих условиях важные дополнительныые сведения можно извлечь из условия интерпретируемости.

Как было показано в нашей работе [1], наиболее общая метрика требуемого вида в координатах $\{t, r, s, \varphi\}$ представлена скалярными произведениями натуральных координатных ковекторов как

$$\langle \mathrm{d}t, \mathrm{d}t \rangle = \frac{F^2 U^{-2} - G^2 (aV)^{-2}}{F+G}, \ \langle \mathrm{d}t, \mathrm{d}\varphi \rangle = a \frac{U^{-2} F + (aV)^{-2} G}{F+G}, \qquad (1)$$
$$\langle \mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\varphi \rangle = \frac{a^2 U^{-2} - V^{-2}}{F+G}, \ \langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}r \rangle = -\frac{U^2}{F+G},$$
$$\langle \mathrm{d}s, \mathrm{d}s \rangle = -\frac{V^2}{F+G},$$

где функции F и U_a зависят только от координаты r, а функции G и V_a – только от координаты s. Эта форма метрики допускает построение изотропной геодезической тетрады и из нее – ортонормированной тетрады

$$\nu^0 = U\sigma(\mathrm{d}t + a^{-1} G \mathrm{d}\varphi), \ \nu^1 = (U\sigma)^{-1} \mathrm{d}r, \quad \sigma = (F+G)^{-1/2} \qquad (2)$$
$$\nu^2 = (V\sigma)^{-1} \mathrm{d}s, \ \nu^3 = V\sigma(-a \mathrm{d}t + F \mathrm{d}\varphi),$$

и задача состоит в том, чтобы найти второе семейство решений, не содержащихся в решении Керра-НУТ.

3 Решение Тауба-НУТ и второе решение

Вычисление компонент тензора Риччи в этой тетраде и приравнивание их к нулю, показало, что функции F и G являются полиномами второй степени, а если пространство-время асимптоиически плоско, то то их явный вид очевиден:

$$F = r^2 + a^2, \quad G = a^2(s^2 - 1).$$

Если положить

$$U^2 = r^2 - 2Mr + p, \ V^2 = -s^2 + 2Ns + q, \ F = r^2 + a^2, \quad G = a^2(s^2 - 1),$$

то все они обращаются в нуль при $p = a^2 q$. Поэтому общее решение имеет вид

$$U^2 = r^2 - 2Mr + ka^2, \ V^2 = -s^2 + 2Ns + k, \ F = r^2 + a^2, \ G = a^2(s^2 - 1) \quad (3)$$

где знак k ничем не задан. Значению $k = 0$ соответствует решение Тауба-НУТ и в растоящей работе оно рассматриваться не будет. Отметим только, что это решение составляет единственное пересечение семейств решений

Керра-НУТ и нового, представленного ниже. Будет рассмотрено только значение $k = -1$, которому соответствует второе решение. Оно задается тетрадой

$$\nu^0 = \sqrt{\frac{r^2 - 2Mr - a^2}{r^2 + a^2 s^2}}\,[\mathrm{d}t + a(s^2 - 1)\mathrm{d}\varphi],\ \nu^1 = \sqrt{\frac{r^2 + a^2 s^2}{r^2 - 2Mr - a^2}}\,\mathrm{d}r, \quad (4)$$
$$\nu^2 = \sqrt{\frac{r^2 + a^2 s^2}{-s^2 + 2Ns - 1}}\,\mathrm{d}s,\ \nu^3 = \sqrt{\frac{-s^2 + 2Ns - 1}{r^2 + a^2 s^2}}\,[-a\mathrm{d}t + (r^2 + a^2)\mathrm{d}\varphi].$$

Этими выражениями задано стационарное осесимметричное вакуумное решение уранения Эйнштейна, не содержащееся в семействе решений Керра-НУТ.

4 Заключение

Семейство стационарных осесимметричных вакуумных решений уравнения Эйнштейна, известных как решение Керра-НУТ, содержит как частный случай метрику плоского пространства-времени в координатах сплюснутого сфероида. При $N = 0$ пространство-время четно, что выражается в существовании экваториальной плоскости, делящей его на два идентичных полупространства. При $N \neq 0$ пространство-время нечетно и не допускает подобного деления, поскольку не обладает такой симметрией. Его асимметия полностью изменяет структуру пространства-времени. Оказывается, что нечетное пространство-время состоит из двух внешних областей, соединенных кротовой норой [?]. Эта кротовая нора находится под горизонтом событий и имеет внутреннюю геометрию вытянутой сфероподобной поверхности. Эта поверхность не делит пространство на внешнюю и внутреннюю части, потому что обе ее стороны внешние. При стремлении N к нулю она приближается по форме к сплюснутому сфероиду, и нетрудно показать, что она имеет несколько сплюснутую форму и при N отличных от нуля.

Существование сплющенных решений уравнения Эйнштейна наводило на мысль о возможном существовании вытянутых. Путь построения таких решений был указан в нашей работе [2], однако до сих пор он реализован не был. Оказалось, их построение полностью аналогично построению решений Керра-НУТ и оно приведено в настоящей работе. Что касается самих решений, то они существенно различны, хотя имеют одно в пересечение в виде решения Тауба-НУТ. В отличие от решений Керра-НУТ, это семейство решений полностью нечетно, т.е., в частности, не содержит метрику плоского пространства-времени как предельный частный случай, хотя к нему можно перейти последовательно положив равными нулю сначала k, а затем N. Свойства моделей пространства-времени, заданных полученными решениями, требуют отдельного исследования.

Список литературы

[1] Naresh Dadhich, Z. Ya . Turakulov . The most general axially symmetric electrovac spacetime admitting separable equations of motion arXiv:gr-qc /0112031

[2] Naresh Dadhich, Z. Ya . Turakulov . Gravitational field of a rotating gravitational dyon. arXiv:gr-qc /0104027

[3] Туракулов З. Я. 2024. Гравимагнитный заряд и структура пространства-времени. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3113030

[4] Туракулов З. Я. 2024. Симметрии и четность пространства-времени. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112986

Приложение. Кривизна пространства-времени

Для вычисления форм связности ${\omega_b}^a$ и кривизны ${\Omega_a}^b \equiv \frac{1}{2}{R_a}^b{}_{cd}$ в этой тетраде используются первое

$$\mathrm{d}\nu^a + {\omega_b}^a \wedge \nu^b = 0 \tag{5}$$

и второе

$$\frac{1}{2}{R_a}^b{}_{cd} \equiv {\Omega_a}^b = \mathrm{d}{\omega_a}^b + {\omega_c}^b \wedge {\omega_a}^c. \tag{6}$$

структурные уравнения Э.Картана. С учетом того, что $\sigma_r = -F'\sigma^3/2$ and $\sigma_s = -G'\sigma^3/2$ производная тетрады (2) равна :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\nu^0 = -\frac{(U)_r}{U\sigma}U\sigma\nu^0 \wedge \nu^1 - \frac{\sigma_s}{\sigma}V\sigma\nu^0 \wedge \nu^2 + \\
&+U\sigma a^{-1}G'V\sigma\nu^2 \wedge \sigma(aU^{-1}\nu^0 - V^{-1}\nu^3) = \\
&= -(U\sigma)_r\nu^0 \wedge \nu^1 - V\sigma_s\nu^0 \wedge \nu^2 - \\
&-VG'\sigma^3\nu^0 \wedge \nu^2 + 2a^{-1}U\sigma_s\nu^2 \wedge \nu^3 = \\
&= -(U\sigma)_r\nu^0 \wedge \nu^1 + V\sigma_s\nu^0 \wedge \nu^2 + 2a^{-1}U\sigma_s\nu^2 \wedge \nu^3.
\end{aligned}$$

Остальные вычисляются аналогично и в результате искомая производная тетрады равна

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\nu^0 = -(U\sigma)_r\nu^0 \wedge \nu^1 + V\sigma_s\nu^0 \wedge \nu^2 + 2a^{-1}U\sigma_s\nu^2 \wedge \nu^3,\ \mathrm{d}\nu^1 = V\sigma_s\nu^1 \wedge \nu^2 \\
&\mathrm{d}\nu^2 = -U\sigma_r\nu^1 \wedge \nu^2,\ \mathrm{d}\nu^3 = -2aV\sigma_r\nu^0 \wedge \nu^1 + (V\sigma)_s\nu^2 \wedge \nu^3 + U\sigma_r\nu^3 \wedge \nu^1.
\end{aligned}$$

Решение первого структурного уравнения (5) как системы алгебраических уравнений дает следующую форму связности:

$$
\begin{array}{ll}
{\omega_1}^0 = (U\sigma)_r\nu^0 - aV\sigma_r\nu^3 = {\omega_0}^1 & {\omega_1}^2 = V\sigma_s\nu^1 - U\sigma_r\nu^2 = -{\omega_2}^1 \\
{\omega_2}^0 = -V\sigma_s\nu^0 + a^{-1}U\sigma_s\nu^3 = {\omega_0}^2 & {\omega_2}^3 = -a^{-1}U\sigma_s\nu^0 + (V\sigma)_s\nu^3 = -{\omega_3}^2 \\
{\omega_3}^0 = -aV\sigma_r\nu^1 - a^{-1}U\sigma_s\nu^2 = {\omega_0}^3 & {\omega_3}^1 = -aV\sigma_r\nu^0 + U\sigma_r\nu^3 = -{\omega_3}^2.
\end{array}
$$

Теперь, для вычисления формы кривизны находим производную формы связности

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{d}{\omega_1}^0 & = & [-(U\sigma)_{rr}U\sigma - (U\sigma)_r^2 + 2(aV\sigma_r)^2]\nu^0\wedge\nu^1 - \\
& & -UV(\sigma_{rs}\sigma - \sigma_r\sigma_s)\nu^0\wedge\nu^2 + (...)\nu^2\wedge\nu^3 + aUV(\sigma_{rr}\sigma - \sigma_r^2)\nu^3\wedge\nu^1 \\
\mathrm{d}{\omega_2}^0 & = & [UV\sigma_{rs}\sigma + (U\sigma)_rV\sigma_s - 2UV\sigma_r\sigma_s]\nu^0\wedge\nu^1 + \\
& & +[(V\sigma_s)_sV\sigma - (V\sigma_s)^2]\nu^0\wedge\nu^2 + \\
& & +[-2a^{-1}UV\sigma_s^2 + a^{-1}UV\sigma_{ss}\sigma + a^{-1}U\sigma_s(V\sigma)_s]\nu^2\wedge\nu^3 + (...)\nu^3\wedge\nu^1 \\
\mathrm{d}{\omega_3}^0 & = & (...)\nu^1\wedge\nu^2,\ \mathrm{d}{\omega_1}^2 = [-(V\sigma_s)_sV\sigma - (U\sigma_r)_rU\sigma + (V\sigma_s)^2 + (U\sigma_r)^2]\nu^1\wedge\nu^2, \\
\mathrm{d}{\omega_2}^3 & = & (...)\nu^0\wedge\nu^1 + a^{-1}UV(\sigma_{ss}\sigma - \sigma_s^2)\nu^0\wedge\nu^2 + \\
& & +[(V\sigma)_{ss}V\sigma + (V\sigma)_s^2 - 2(a^{-1}U\sigma_s)^2]\nu^2\wedge\nu^3 - UV(\sigma_{rs}\sigma - \sigma_r\sigma_s)\nu^3\wedge\nu^1 \\
\mathrm{d}{\omega_3}^1 & = & (...)\nu^0\wedge\nu^1 + ... + (...)\nu^2\wedge\nu^3 + [(U\sigma_r)^2 - U\sigma(U\sigma_r)_r]\nu^3\wedge\nu^1.
\end{array}
$$

Внешние производные ее компонени равны

$$
\begin{array}{rcl}
{\omega_a}^0\wedge{\omega_1}^a & = & [(aV\sigma_r)^2 - (V\sigma_s)^2]\nu^0\wedge\nu^1 + 2UV\sigma_r\sigma_s\nu^0\wedge\nu^2 + \\
& & +(...)\nu^2\wedge\nu^3 + (a^{-1}UV\sigma_s^2 - aUV\sigma_r^2)\nu^3\wedge\nu^1 \\
{\omega_a}^0\wedge{\omega_2}^a & = & (...)\nu^0\wedge\nu^1 - [(U\sigma)_rU\sigma_r - (a^{-1}U\sigma_s)^2]\nu^0\wedge\nu^2 + \\
& & +[aUV\sigma_r^2 - a^{-1}U\sigma_s(V\sigma)_s]\nu^2\wedge\nu^3 + (...)\nu^3\wedge\nu^1 \\
{\omega_a}^0\wedge{\omega_3}^a & = & [(U\sigma)_rU\sigma_r - (aV\sigma_r)^2 + (V\sigma)_sV\sigma_s - (a^{-1}U\sigma_s)^2]\nu^0\wedge\nu^3 \\
{\omega_a}^2\wedge{\omega_1}^a & = & (...)\nu^0\wedge\nu^3 \\
{\omega_a}^3\wedge{\omega_2}^a & = & (...)\nu^0\wedge\nu^1 + (...)\nu^0\wedge\nu^2 + \\
& & +[(U\sigma_r)^2 - (a^{-1}U\sigma_s)^2]\nu^2\wedge\nu^3 + 2UV\sigma_r\sigma_s\nu^3\wedge\nu^1 \\
{\omega_a}^3\wedge{\omega_1}^a & = & (...)\nu^0\wedge\nu^1 + ... + (...)\nu^2\wedge\nu^3 + [(aV\sigma_r)^2 - (V\sigma)_sV\sigma_s]\nu^3\wedge\nu^1.
\end{array}
$$

Здесь вычисляются только те компоненты формы кривизны, которые дают вклад в тензор Риччи.

$$
\begin{aligned}
R_0{}^1{}_{01} &= -(U\sigma)_{rr}U\sigma - (U\sigma)_r^2 + 3(aV\sigma_r)^2 - (V\sigma_s)^2 \\
R_0{}^1{}_{02} &= R_2{}^3{}_{31} = -UV(\sigma_{rs}\sigma - 3\sigma_r\sigma_s) = 0 \\
R_0{}^1{}_{31} &= aUV(\sigma_{rr}\sigma - 2\sigma_r^2 + a^{-2}\sigma_s^2) \\
R_0{}^2{}_{02} &= (V\sigma_s)_s V\sigma - (V\sigma_s)^2 + (U\sigma)_r U\sigma_r - (a^{-1}U\sigma_s)^2 \\
R_0{}^2{}_{23} &= a^{-1}UV(\sigma_{ss}\sigma - 2\sigma_s^2 + a^2\sigma_r^2) \\
R_0{}^3{}_{03} &= (U\sigma)_r U\sigma_r - (aV\sigma_r)^2 + (V\sigma)_s V\sigma_s - (a^{-1}U\sigma_s)^2 \\
R_1{}^2{}_{12} &= -(V\sigma_s)_s V\sigma - (U\sigma_r)_r U\sigma + (V\sigma_s)^2 + (U\sigma_r)^2 \\
R_2{}^3{}_{23} &= (V\sigma)_{ss}V\sigma + (V\sigma)_s^2 - 3(a^{-1}U\sigma_s)^2 + (U\sigma_r)^2 \\
R_3{}^1{}_{31} &= -U\sigma(U\sigma_r)_r + (U^2 + a^2V^2)\sigma_r^2 - (V\sigma)_s V\sigma_s.
\end{aligned}
$$

Таким образом, единственной недиагональной компонентой тензора Риччи является

$$2R_{03} = -(aUV\sigma^4/2)(F'' - a^{-2}G'').$$