О сплюснутых и вытянутых черных дырах

Зафар Туракулов

12 августа 2024 г.

Аннотация

Исследованы формы горизонтов событий в геометриях, заданных решениями Керра-НУТ и новыми решениями, представленными в нашей работе [2]. Показано, что эти поверхности не обладают симметрией относительно своего экватора. Горизонты в пространстве-времени Керра-НУТ сплюснуты или вытянуты в направлении полюсов, а в пространстве-времени, заданном нашими решениями, могут быть только вытянутыми. Ни в том, ни в другом не сущестсвуют ни экваториальная плоскость ни симметрия относительно нее.

1 Введение

Теоретические описания астрофизического объекта предполагает построение его гравитационного поля во всем пространстве, и, таким образом, модели пространства-времени как целого. Обычно оно делится на внутреннюю и внешнюю области как на области, занятую и не занятую материей объекта. Построенную модель предполагается сравнивать с наблюдениями, что выдвигает определенные требования к геометрическим свойствам пространства-времени во внешней области. А именно, они должны допускать описание распространениея электромагнитных волн хотя бы в приближении геометрической оптики, что означает, что необходима полная разделяемость уравнения Гамильтона-Якоби. Все это диктует определенный подход к построению моделей, согласно которому начинать необходимо с внешней области, т.е. выбора вакуумного решения уравнения Эйнштейна. Наиболее широких классов решений таких решений два. Это семейство решений Керра-НУТ [1] и другое трехпараметрическое семейство, представленное в нашей недавней работе [2].

До сих пор считалось, что существование сплюснутых решение Керра-НУТ естественно, поскольку сплюснутость всегда выступает как следствие вращения, тогда как никаких физических причин для существования вытянутых решений нет. С другой стороны, без вытянутых теория была бы неполна, и, как оказалось, они действительно существуют. Теперь, когда и те и другие получены и представлены в явном виде, актульным становится сравнительное исследование геометрических свойств соответствующих моделей пространства-времени. Такое исследование составляет цель настоящей работы.

2 Определение полярного угла и асимптотика решений

Оба семейства решений представимы в единой форме:

$$\nu^0 = \sqrt{\frac{r^2 - 2Mr \pm a^2}{r^2 + a^2 s^2}}\,[\mathrm{d}t + a(s^2 - 1)\mathrm{d}\varphi],\ \nu^1 = \sqrt{\frac{r^2 + a^2 s^2}{r^2 - 2Mr \pm a^2}}\,\mathrm{d}r, \quad (1)$$

$$\nu^2 = \sqrt{\frac{r^2 + a^2 s^2}{-s^2 + 2Ns \pm 1}}\,\mathrm{d}s,\ \nu^3 = \sqrt{\frac{-s^2 + 2Ns \pm 1}{r^2 + a^2 s^2}}\,[-a\mathrm{d}t + (r^2 + a^2)\mathrm{d}\varphi],$$

где семейству Керра-НУТ соответствует знак "+", а нашему семейству решений – знак "-". Оба решения наиболее интересны, когда M и a – величины одного порядка, т.к. в противном случае одна из них теряет свое значение. Тем самым устанавливается смысл понятия очень больших r. Так, при очень больших значениях этой координаты, при которых геометрия пространства-времени становится плоской, все координаты обретают определенный смысл как время t, сферический радиус r, какая-то функция полярного угла s и азимутальный угол φ. При r того же порядка, что и эти постоянные, видны свойства модели пространства-времени, заданной данным решением.

В обоих решениях радиальная координатах пробегает всю числовую ось. Если ограничить область значений координаты r нулем, поверхность $r = 0$ окажется границей пространства. Поскольку пространство границы иметь не может, область значений координаты r также неограничена, так что она пробегает всю числовую ось. Область значений координаты r разделена на три части, границами которых являются корни полинома $r^2 - 2Mr \pm a^2$. Им соответствуют два горизонта событий, а интервал между ними – кротовой норе. Полупрямым от корня до плюс или минум бесконечности соответствуют две внешние оласти, в которых пространство-время имеет противоположные свойства, а именно, в одной из них наблюдается притяжение к горизонту, в другой – отталкивание от него, поэтому физической является только одна из них и ниже рассматривается только она. Ограничившись рассмотрением только физических внешних областей в обоих решениях, определяем области значений радиальной координаты неравенством

$$r \geq M + \sqrt{M^2 \mp a^2}. \quad (2)$$

Область значений полярной координаты s заключена между корнями полинома $-s^2+2Ns\pm 1$ т.е. $N-\sqrt{N^2\pm 1}\leq s\leq N+\sqrt{N^2\pm 1}$. Ее удобно заменить переменной θ, определенной как

$$v=\int\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{-s^2+2Ns\pm 1}}, \tag{3}$$

так что $s-N=\sqrt{N^2\pm 1}$ и

$$-s^2+2Ns\pm 1=(N^2\pm 1)\sin^2 v.$$

Если теперь взять поверхность $t=\mathrm{const}$, $r=\mathrm{const}$ при очень большом r то оказывается, что на ней задано поле ко-базисов

$$\nu^2=r\mathrm{d}v,\quad \nu^3=\sqrt{N^2\pm 1}\sin v\mathrm{d}\varphi,$$

показывающих, что она представляет собой обычную сферу, на которой введены полярные координаты $\{\theta,\varphi\}$, но мера азимутального угла отличается от стандартной постоянным множителем $\sqrt{N^2\pm 1}$. Стандартный азимутальный угол ψ можно ввести с помощью замены $\psi=\sqrt{N^2\pm 1}\phi$. В случае наших решений N может быть только больше единицы.

Проведем аналогичную замену координат r и t, взяв интеграл

$$u=\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-2mr\pm a^2}}=\mathrm{arccosh}\frac{r-M}{\sqrt{M^2\pm a^2}}$$

в предположении, что $M>a$. Теперь все четыре кординаты заменены новыми переменными, т.е. система $\{t,r,s,\varphi\}$ заменена системой $\{\tau,u,v,\psi\}$, где

$$\tau=\sqrt{M^2\pm a^2}\,t,\quad u=\mathrm{arccosh}\frac{r-M}{\sqrt{M^2\pm a^2}}\geq 0 \tag{4}$$

$$(5)$$

$$v=\arccos\frac{s-N}{\sqrt{N^2\mp 1}},\quad \psi=\sqrt{N^2\pm 1}\varphi.$$

Поскольку в этой координата u принимает только неотрицательные значения, она отражает только внешнюю область, начинающуюся от горизонта событий $u=0$. В этой системе старые координаты r и s рассматриваются как функции новых u и v соответственно:

$$r(u)=M+\sqrt{M^2\pm a^2}\sinh u,\quad s(v)=N+\sqrt{N^2\mp 1}\sin v, \tag{6}$$

и тетрада (1) получает следующее выражение:

$$\nu^0 = \frac{\sinh u}{\sqrt{r^2+a^2s^2}}\left(\mathrm{d}\tau + \sqrt{\frac{M^2\pm a^2}{N^2\mp 1}}\,(s^2+1)\mathrm{d}\psi\right), \tag{7}$$

$$\nu^1 = \sqrt{r^2+a^2s^2}\,\mathrm{d}u, \quad \nu^2 = \sqrt{r^2+a^2s^2}\,\mathrm{d}v,$$

$$\nu^3 = \frac{\sin v}{\sqrt{r^2+a^2s^2}}\left(-\sqrt{\frac{N^2\mp 1}{M^2\pm a^2}}\,a\mathrm{d}\tau + (r^2+a^2)\mathrm{d}\psi\right). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь форму горизонта событий моделях пространства-времени, соответствующим обоим решениям.

3 Форма горизонта событий

Горизонт событий в рассматриваемых моделях пространства-времени задан как координатная поверхность $\tau = \mathrm{const}$, $u = 0$. На ней заданы система координат $\{v, \varphi\}$ и ортонормированный ко-репер $\{\nu^2, \nu^3\}$, взятый при этих значениях координат

$$\nu^2 = \sqrt{r^2+a^2s^2}\,\mathrm{d}v, \quad \nu^3 = \frac{(r^2+a^2)\sin v}{\sqrt{r^2+a^2s^2}}\,\mathrm{d}\psi,$$

при которых входящие в него выражения принимют вид

$$r^2+a^2 = M^2+a^2, \quad r^2+a^2s^2 = M^2+a^2\left(N+\sqrt{N^2\mp 1}\,\sin v\right)^2,$$

где верхний знак соответствует нашему решению, а нижний – решению Керра-НУТ.

Этого достаточно для исследования ее формы и сравнения форм, которые имеет горизонт событий в пространстве-времени Керра-НУТ и в простанстве-времени, заданном нашими решениями. В обоих случаях поверхность горизонта осесимметрична, но не обладает симметрией относительно переворота $v \to \pi - v$, т.е. ее условно северная и южная половины различны по форме. Ниже будет рассмотрена другая характеристика этих поверхностей – соотношения длин меридиана $\varphi = \mathrm{const}$ и экватора $v = \pi/2$.

В пространстве-времени Керра-НУТ постоянная N может принимать любые значения, и при всех ее значениях выше единицы выполняется неравенство $r^2+a^2s^2 > r^2+a^2$. В нем длина меридиана μ выражается через эллиптический интеграл

$$\mu = \int_0^\pi \mathrm{d}v\sqrt{M^2+a^2\left(N+\sqrt{N^2+1}\right)^2},$$

тогда как половина длины экватора $\epsilon/2$ равна $\pi\sqrt{M^2+a^2}$. При таких значениях $\mu > \epsilon/2$, и, таким образом длина меридиана больше, чем длина полоуэкватора. Следовательно, горизонт событий вытянут вдоль оси симметрии. Однако при малых N, в особенности, при $N = 0$, наоборот, почти для всех v выполняется противоположное неравенство: $r^2 + a^2s^2 < r^2 + a^2$ и, как следствие, горизонт событий сплюснут вдоль оси. Таким образом, с ростом постоянной N сплюснутость горизонта убывает и сменяется вытянутостью. При больших N горизонт вытянутый. В наших решениях N всегда больше единицы, поэтому $r^2+a^2s^2 > r^2+a^2$ при любом значении v, и, как следствие, меридиан всегда длиннее полуэкватора. Действительно, длина меридиана равна

$$\mu = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}v\sqrt{r^2+a^2s^2} > \pi\frac{r^2+a^2}{r^2+a^2s^2} = \frac{1}{2}\epsilon.$$

Следовательно, в пространстве-времени, заданном нашими решениями, горизонт событий всегда вытянут вдоль оси.

4 Асимметрия

Характерной чертой четного пространства-времени является наличие в нем экваториальной плоскости, проходящей через экваторы поверхностей постоянных t $s = N$ и делящей пространство $t = \mathrm{const}$ на две идентичные части. Идентичность условно северного и условно южного полупространств отражает симметрию пространства времени относительно этой плоскости. Покажем теперь, что в рассматриваемом случае при $N \neq 0$ простраство-время этой симметрией не обладает. Для этого достаточно показать, что ей не обладает горизонт событий. Для того, чтобы показать асимметрию горизонта, покажем, что дуги меридиана на нем от одного полюса до экватора и от экватора до другого полюса имеют разную длину.

Эти длины выражаются интегралами, которые удобнее сравнивать в переменной s. Она на полюсах принимает крайние значения $N \pm \sqrt{N^2-1}$, а на экваторе она равна s. Поэтому разность сравниваемых длин равна

$$\Delta l = \int\limits_{N-\sqrt{N^2-1}}^{N} \mathrm{d}s\sqrt{\frac{r^2+a^2s^2}{-s^2+2Ns-1}} - \int\limits_{N}^{N+\sqrt{N^2-1}} \mathrm{d}s\sqrt{\frac{r^2+a^2s^2}{-s^2+2Ns-1}}.$$

Заменив переменную интегрирования $z = s - N$, получаем простое выражение

$$\Delta l = \int\limits_0^{\sqrt{N^2-1}} \mathrm{d}z\sqrt{\frac{r^2+a^2(N-z)^2}{N^2-1-z^2}} - \int\limits_0^{\sqrt{N^2-1}} \mathrm{d}z\sqrt{\frac{r^2+a^2(N+z)^2}{N^2-1-z^2}},$$

очевидно отличное от нуля. Таким образом, длины полумеридианов и вместе с ними внутренние геометрические свойства является условно северного и южного полушарий различны. Следовательно, условно северная и южная части этих поверхностей имеют разную форму. Нетрудно показать, что геометрические свойства северного и южного полупространств также различны.

На поверхности $t = \mathrm{const}$, $s = N$ от исходной системы координат остается система полярных координат $\{r, \varphi\}$, а ее геометрия задана ко-репером $\{\nu^1, \nu^3\}$:

$$\nu^1 = \sqrt{\frac{r^2 + a^2N^2}{r^2 - 2Mr - a^2}}\,\mathrm{d}r, \quad \nu^3 = \sqrt{\frac{N^2 - 1}{r^2 + a^2N^2}}\,(r^2 + a^2)\mathrm{d}\varphi.$$

. В нем удобно заменить радиальную координату r расстоянием от начала

$$R = \int \mathrm{d}r \sqrt{\frac{r^2 + a^2N^2}{r^2 - 2Mr - a^2}}.$$

На плоскости расстояние от начала равно коэффициенту при $\mathrm{d}\varphi$ в ковекторе ν^3 На рассматриваемой поверхностЬ оно явно отличается от этого коэффициента, следовательно, она отличается от плоскости. Иными словами, поверхность, проходящая через экваторы координатных поверхностей постоянного r не есть плоскость и, таким образом, в пространстве-времени, заданном тетрадой (1), экваториальная плоскость не существует. Этот факт представляет собой выражение нарушения пространственной четности.

5 Заключение

Постоянная N играет в нашем решении ту же роль, что и решении Керра-НУТ, т.е. представляет гравимагнитный заряд как часть источника поля. Как было показано в нашей работе [3], присутствие этой части влечет нарушение четности, а в данном случае, поскольку источник вращается, оно выражается в нарушении симметрии относительно экваториальной плоскости. В частности эта симметрия нарушена у координатных поверхностей $r = \mathrm{const}$. Поверхность, проходящая через экваторы этих поверхностей тоже существует, она тоже делит пространство на какие-то две части, но ее внутренняя геометрия отличается от геометрии плоскости.

Новое вакуумное решение уравнения Эйнштейна, полученное нами, во многом аналогично решению Керра-НУТ, что поставило задачу их сравнения и, прежде всего, изучения свойств моделей пространства-времени, заданных обоими решениями. Решения различаются только в одном знаке в одном из выражений. Возможность прямого сравнения геометрических свойств этих многообразий дают, формы горизонтов событий. Формы этих поверхностей восстанавливаются из их внутренней геометрии. Они осесимметричны, на них введены полярные координаты $\{v/\varphi\}$ и вместе ними – семейства параллелей $v = \mathrm{const}$ и меридианов $\varphi = \mathrm{const}$. Параллель нибольшей длины $v = \pi/2$ мы условно назвали экватором. Сравнение длин дуг меридианов от экватора до полюсов показало, что при $N \neq 0$ эти поверхности асимметричны относительно своих экваторов. При $N \neq 0$ поверхности, проходящие через экваторы поверхностей $u = \mathrm{const}$ не являются плоскостями, так что в этом случае понятие экваториальной плоскости не имеет смысла. В зависимости от зачения параметра N, горизонты событий могут быть сплюснутыми или вытянутыми в направлении полюсов. Их сплюснутость или вытянутость определяется из сравнения длин меридианов и полуэкваторов. Оказалось, что в пространстве-времени Керра-НУТ при $N < 1$ горизонт событий сплюснутый, но с ростом этого параметра сплюснутость убывает и при $N > 1$ он становится вытянутым, а в пространстве-времени, заданном нашими решениями, он может быть только вытянутым.

Список литературы

[1] Naresh Dadhich, Z. Ya . Turakulov . Gravitational field of a rotating gravitational dyon. arXiv:gr-qc /0104027

[2] Туракулов З. Я. 2024. Новое семейство стационарных осесимметричных вакуумов типа семейства Керра. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3113077

[3] Туракулов З. Я. 2024. Симметрии и четность пространства-времени. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112986