ПРИМЕР ДВУХ РАЗНЫХ МАКСИМИЗИРУЮЩИХ СПЕКТР МАТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С НЕРАВНЫМ ЧИСЛОМ ОДНОИМЕННЫХ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

В. С. КОЗЯКИН

Аннотация. Недавно J. Bochi и P. Laskawiec построили пример множества матриц $\{A, B\}$, обладающего двумя различными (с точностью до циклических перестановок сомножителей) произведениями матриц $AABABB$ и $BBABAA$, максимизирующими спектр. В настоящей работе выделяется класс матричных множеств, обладающих тем свойством, что наличие в них хотя бы одного матричного произведения с нечетным числом сомножителей, максимизирующего спектр, автоматически влечет существование еще одного матричного произведения, максимизирующего спектр. При этом, в дополнение к примеру Bochi–Laskawiec'а, количество одноименных сомножителей (сомножителей вида A или B) в этих произведениях матриц оказывается различным. Работоспособность предложенного подхода подтверждается построением примера множества 2×2 матриц $\{A, B\}$, для которого произведения матриц, максимизирующими спектр, имеют вид BAA и BBA.

1. Введение

Пусть $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ — набор m вещественных $d \times d$ матриц и $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^d$. С каждым конечным набором символов

$$\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\} \in \{1, \ldots, m\}^n, \qquad n \geq 1,$$

свяжем матрицу

$$A_{\boldsymbol{\nu}} = A_{\nu_n} \cdots A_{\nu_2} A_{\nu_1}, \tag{1.1}$$

и определим две числовые величины:

$$\rho(\mathscr{A}) = \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n(\mathscr{A}), \qquad \bar{\rho}(\mathscr{A}) = \varlimsup_{n\to\infty} \bar{\rho}_n(\mathscr{A}), \tag{1.2}$$

где

$$\rho_n(\mathscr{A}) = \max_{\boldsymbol{\nu}\in\{1,\ldots,m\}^n} \|A_{\boldsymbol{\nu}}\|^{1/n}, \qquad \bar{\rho}_n(\mathscr{A}) = \max_{\boldsymbol{\nu}\in\{1,\ldots,m\}^n} \rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{1/n},$$

а $\rho(A_{\boldsymbol{\nu}})$ обозначает спектральный радиус матрицы $A_{\boldsymbol{\nu}}$.

Первый предел в (1.2), не зависящий на самом деле от выбора нормы $\|\cdot\|$, был введен в работе [20], а второй несколько позднее в работе [9]. Обе величины в (1.2) являются аналогами известной формулы Гельфанда [2] для спектрального радиуса матрицы, и поэтому первая из них была названа *совместным*, а вторая *обобщенным спектральным радиусом* набора матриц $\mathscr{A}$. Для ограниченных наборов матриц $\mathscr{A}$ величины $\rho(\mathscr{A})$ и $\bar{\rho}(\mathscr{A})$ совпадают друг с другом [4, 8] и при этом

$$\bar{\rho}_n(\mathscr{A}) \leq \bar{\rho}(\mathscr{A}) = \rho(\mathscr{A}) \leq \rho_n(\mathscr{A}), \qquad \forall\ n. \tag{1.3}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A18; Secondary 15A60, 65F15.

Ключевые слова и фразы. Обобщенный спектральный радиус, максимизирующие спектр произведения матриц, различное число одноименных сомножителей, JSR Toolbox.

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта “Создание и развитие лабораторий по приоритетным направлениям МФТИ”.

Традиционно возможность явного вычисления обобщенного спектрального радиуса связывается с выполнением так называемой *гипотезы о конечности*, предполагающей, что второй предел (1.2), определяющий обобщенный спектральный радиус $\bar{\rho}_n(\mathscr{A})$, всегда достигается при некотором конечном значении n, т.е. самое левое неравенство в (1.3) при некотором n превращается в равенство. Эта гипотеза была выдвинута в [16], но впоследствии опровергнута [7]. Позднее появились альтернативные контрпримеры [5, 14]. Впервые "явный" контрпример к гипотезе о конечности был построен в [12], а общие методы построения такого рода контрпримеров позднее были разработаны в [13, 18].

Несмотря на то, что гипотеза о конечности была опровергнута в общем случае, вопрос о том, выполняется ли она для некоторых конкретных наборов матриц, остается актуальным. В последнее время в этом направлении был получен ряд существенных результатов [6, 17, 22].

Определение 1.1. Пусть $A_{\boldsymbol{\nu}}$ — произведение вида (1.1) с n матричными сомножителями из множества $\mathscr{A}$. Следуя [11], мы скажем, что $A_{\boldsymbol{\nu}}$ является для множества матриц $\mathscr{A}$ *матричным произведением, максимизирующим спектр*,[1] если

$$\bar{\rho}(\mathscr{A}) = \rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{\frac{1}{n}}.$$

При определении матричных произведений, максимизирующих спектр, часто добавляют также требование, чтобы матрица $A_{\boldsymbol{\nu}}$ не являлась степенью никакого другого (более короткого) матричного произведения, максимизирующего спектр. В данной работе мы этого не требуем.

Доказать, что некоторое матричное произведение $A_{\boldsymbol{\nu}}$ вида (1.1) максимизирует спектр, как правило, достаточно непросто. Здесь может помочь следующее рассуждение: пусть нам удалось найти такую векторную норму $\|\cdot\|$, в которой для каждой матрицы $A_i \in \mathscr{A}$ выполняется неравенство

$$\|A_i x\| \le \rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{\frac{1}{n}} \|x\|, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

Тогда в силу определения совместного спектрального радиуса будет выполняться неравенство $\rho(\mathscr{A}) \le \rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{\frac{1}{n}}$, откуда в силу (1.3) следует, что

$$\rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{\frac{1}{n}} \le \bar{\rho}(\mathscr{A}) = \rho(\mathscr{A}) \le \rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{\frac{1}{n}}.$$

Таким образом, $\rho(A_{\boldsymbol{\nu}})^{\frac{1}{n}} = \bar{\rho}(\mathscr{A})$, откуда следует, что $A_{\boldsymbol{\nu}} = A_{\nu_n} \cdots A_{\nu_2} A_{\nu_1}$ является матричным произведением, максимизирующим спектр. При этом неравенство (1.4) примет следующий вид:

$$\|A_i x\| \le \bar{\rho}(\mathscr{A}) \|x\|, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.5}$$

Норму, в которой выполняется неравенство (1.5), называют *экстремальной* для множества матриц $\mathscr{A}$. Этот термин впервые появился, по-видимому, в [3], а подход к анализу скорости роста матичных произведений, использующий экстремальные нормы в качество основного инструмента, был предложен в [1] и получил широкое распространение в многочисленных работах, среди которых выделим [23]. Более детальную информацию о скорости роста норм матричных произведений удается получить, в том случае, когда для нормы $\|\cdot\|$ при некотором ρ выполняется тождество

$$\max\{\|A_0 x\|, \|A_1 x\|, \ldots, \|A_{m-1} x\|\} \equiv \rho \|x\|. \tag{1.6}$$

Норму, удовлетворяющую условию (1.6), принято называть *нормой Барабанова*, отвечающей набору матриц $\mathscr{A}$. В [1, теорема 2] показано, что такая норма

[1]Более точно следовало бы писать "матричным произведением, на котором достигается обобщенный спектральный радиус множества матриц $\mathscr{A}$", но мы вынуждены использовать столь "корявый" перевод установившегося английского термина "spectrum maximizing product".

существует для “почти всех” множеств матриц $\mathscr{A}$, но, к сожалению, она определяется как результат некоторой вычислительно неконструктивной предельной процедуры. При этом тождество (1.6) может выполняться тогда и только тогда, когда $\rho = \rho(\mathscr{A})$, и поэтому в силу (1.3) всякая норма Барабанова является экстремальной.

Побудительным мотивом для настоящей работы послужила статья [6], в которой был построен пример множества матриц $\{A, B\}$, обладающего двумя различными (с точностью до циклических перестановок сомножителей) произведениями матриц $AABABB$ и $BBABAA$, максимизирующими спектр. Ниже мы предлагаем другой способ построения матричных множеств, для которых количество матричных произведений с нечетным числом сомножителей, максимизирующих спектр, если таковые существуют, автоматически оказывается не меньшим двух. При этом, в дополнение к примеру из [6], количество одноименных сомножителей (сомножителей A или B) в этих произведениях матриц оказывается различным.

При обращении к вопросу о существовании матричных произведений, максимизирующих спектр, мы воспользуемся идеей из [19] (предложенной и используемой там, но явно не формулируемой авторами) о том, что сама структура множества матриц может существенно способствовать ответу на этот вопрос. Напомним, что в [19, Proposition 18] рассматривались так называемые “симметричные” наборы матриц $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, обладающие тем свойством, что вместе с каждой матрицей A_i данному набору принадлежит и транспонированная матрица A_i^{t}. Этого (симметричности) оказалось достаточно для того, чтобы евклидова норма оказалась экстремальной нормой для данного семейства матриц, а обобщенный спектральный радиус достигался на одном из матричных произведений вида $A_i^{\mathsf{t}} A_i$.

В разделе 2 (теорема 2.4 и следствие 2.5) мы изложим детали реализации соответствующей идеи лишь в том объеме, который будет достаточен для построения в разделе 3 примера множества матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$, для которого произведения матриц, максимизирующих спектр, имеют вид BAA и BBA (с точностью до циклических перестановок сомножителей). Доказательство того, что в этом примере матричные произведения $A_{\boldsymbol{\nu}} = BAA$ или $A_{\boldsymbol{\nu}} = BBA$ максимизируют спектр будет проведено путем построения подходящей нормы $\|\cdot\|$, в которой эти матричные произведения удовлетворяют неравенству (1.4).

2. Основной результат

Начнем с определения ключевого понятия в данном разделе.

Определение 2.1. Набор вещественных матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$, $A \neq B$, будет называться *τ-перестановочным*, если найдется отображение $\tau : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}$, осуществляющее преобразование подобия (т.е. $\tau(X) := S^{-1} X S$) или “транспозиционного подобия” (т.е. $\tau(X) := S^{-1} X^{\mathsf{t}} S$), такое, что

$$\tau(A) = B, \quad \tau(B) = A.$$

В этом определении матрица S, естественно, предполагается невырожденной, причем всегда можно считать, что $\det S = 1$. Очевидно, набор матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ может быть τ-перестановочным только в том случае, когда матрицы A и B *изоспектральны*, т.е. их спектры совпадают:

$$\sigma(A) = \sigma(B).$$

Если в определении 2.1 взять в качестве τ отображение $\tau(X) := X^{\mathsf{t}}$, то набор матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ окажется так называемым “симметричным”; такого рода множества матриц, как мы уже упоминали, были введены и исследованы в [19, Proposition 18].

Мы не останавливаемся на детальном анализе условий, чтобы некоторое множество матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ оказалось τ-перестановочным при некотором преобразовании τ. Отметим лишь, что отображение τ, определяемое равенством $\tau(X) := S^{-1}XS$, *мультипликативно*, т.е.

$$\tau(X_k X_{k-1} \cdots X_1) = \tau(X_k)\tau(X_{k-1}) \cdots \tau(X_1).$$

Если же τ определяется равенством $\tau(X) := S^{-1}X^{\mathtt{t}}S$, то оно оказывается *антимультипликативным*, т.е.

$$\tau(X_k X_{k-1} \cdots X_1) = \tau(X_1) \cdots \tau(X_{k-1})\tau(X_k).$$

Далее мы основное внимание уделим матричным множествам, состоящим из пары вещественных матриц A и B размерности 2×2, детерминанты которых равны 1. Причем нам будет удобно ограничиться рассмотрением либо матриц "поворота с растяжением-сжатием вдоль координатных осей" (см. пример 2.2), либо матриц более "экзотического" вида, которые также могут трактоваться как матрицы поворота с растяжением-сжатием вдоль координатных осей, но при этом дополнительно имеют нулевой верхне-диагональный элемент (см. пример 2.3).

Пример 2.2. Пусть имеется пара матриц

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{\varkappa}\sin\varphi \\ \varkappa\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varkappa\sin\varphi \\ \frac{1}{\varkappa}\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

зависящих от параметров $\varphi \neq 0, \pi$ и $\varkappa > 1$. Тогда множество матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ становится τ-перестановочным, если взять в качестве τ следующее отображение подобия:

$$\tau(X) = S^{-1}XS, \quad \text{где} \quad X \in \mathscr{A}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

□

Пример 2.3. Пусть имеется пара матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varkappa} \\ \varkappa & 2\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa \\ \frac{1}{\varkappa} & 2\cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

зависящих от параметров $\varphi \neq 0, \pi$ и $\varkappa > 1$. Тогда множество матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ становится τ-перестановочым, если взять в качестве τ следующее отображение транспозиционного подобия:

$$\tau(X) = S^{-1}X^{\mathtt{t}}S, \quad \text{где} \quad X \in \mathscr{A}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

□

Причина, по которой мы уделяем особое внимание классу τ-перестановочных множеств матриц, объясняется следующей теоремой.

Теорема 2.4. *Пусть набор матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ является τ-перестановочным при некотором отображении τ. Тогда для каждого произведения матриц*

$$M = M_k M_{k-1} \cdots M_1, \qquad M_i \in \mathscr{A} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.5}$$

спектр матрицы $\tau(M)$ совпадает со спектром матрицы M.

Если при этом число сомножителей M_i в (2.5) нечетно, то матрицы M и $\tau(M)$ имеют различное число сомножителей вида A (а также вида B), и потому оказываются различными с точностью до циклических перестановок сомножителей.

Доказательство. Обозначим через $\sigma(X)$ спектр квадратной матрицы X. Если матрица X является произведением матриц

$$X = X_k X_{k-1} \cdots X_1, \qquad X_i \in \mathscr{A} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.6}$$

то через $\#_A(X)$ будем обозначать количество сомножителей X_i вида A в произведении (2.6), а через $\#_B(X)$ — количество сомножителей X_i вида B в (2.6).

Рассмотрим сначала случай, когда отображение τ определяется равенством $\tau(X) := S^{-1}XS$ с некоторой невырожденной матрицей S. В этом случае, отображение τ является мультипликативным, и поэтому для матрицы M из условия теоремы имеет место равенство

$$\tau(M) = \tau(M_k)\tau(M_{k-1}) \cdots \tau(M_1). \tag{2.7}$$

При этом $\sigma(M) = \sigma(\tau(M))$, а значит, спектральные радиусы матриц M и $\tau(M)$ также совпадают. Поскольку обе матрицы M и $\tau(M)$ представляются произведениями с одинаковым числом матричных сомножителей из множества $\mathscr{A}$, причем матрица M по условию теоремы максимизирует спектр, то этим же свойством обладает и матрица $\tau(M)$.

Наконец, заметим, что по определению отображение τ, при его применении, меняет местами матрицы A и B. Тогда

$$\#_A(\tau(M)) = \#_B(M), \quad \#_B(\tau(M)) = \#_A(M).$$

При нечетном числе сомножителей M_i в (2.5) в этом случае $\#_B(M) \neq \#_A(M)$, а значит

$$\#_A(\tau(M)) = \#_B(M) \neq \#_A(M).$$

Следовательно, матрицы M и $\tau(M)$ оказываются различными в том смысле, что ни одна из них не является циклической перестановкой сомножителей другой. Теорема доказана для случая, когда отображение τ определяется равенством $\tau(X) := S^{-1}XS$.

Доказательство теоремы в случае, когда отображение τ определяется равенством $\tau(X) := S^{-1}X^{\mathsf{t}}S$ с некоторой невырожденной матрицей S, практически дословно повторяет предыдущие рассуждения. Отличия заключаются лишь в том, что в этом случае несколько аккуратнее необходимо доказывать равенство спектров матриц M и $\tau(M)$:

$$\sigma(\tau(M)) = \sigma(S^{-1}M^{\mathsf{t}}S) = \sigma(M^{\mathsf{t}}) = \sigma(M).$$

А также, поскольку в данном случае τ является отображением “транспозиционного подобия”, а значит антимультипликативным, то имеет место следующее представление

$$\tau(M) = \tau(M_1) \cdots \tau(M_{k-1})\tau(M_k),$$

отличающееся от (2.7) обратным порядком следования сомножителей.

Указанные изменения не влияют на приведенное для первого случая доказательство теоремы, поэтому и в этом случае теорему можно считать доказанной. □

Отдельно сформулируем не требующее специального доказательства следствие из теоремы 2.4, относящееся к произведениям матриц, максимизирующим спектр.

Следствие 2.5. *Пусть в условиях теоремы* 2.4 *произведение матриц* (2.5) *максимизирует спектр и при этом состоит из нечетного числа сомножителей Тогда матрица $\tau(M)$ является отличным от M (с точностью до циклических перестановок сомножителей) произведением матриц, также максимизирующим спектр, причем матрицы M и $\tau(M)$ имеют различное число одноименных сомножителей — сомножителей вида A (а также вида B).*

Пример 2.6. Пусть $\mathscr{A} = \{A, B\}$ — τ-перестановочное множество матриц из примеров 2.2 или 2.3. Пусть уже доказано, что для этого множества матриц произведение матриц BAA (а значит и его циклические перестановки ABA и AAB) при некоторых значениях параметров $\varkappa$ и φ является максимизирующим спектр. В этом случае по теореме 2.5 матричные произведения BBA, ABB и BAB также максимизируют спектр, причем все они отличаются от матричного произведения BAA и его циклических перестановок. $\square$

Отметим, что следствие 2.5 носит условный характер — оно не устанавливает для множества $\mathscr{A}$ существование матричных произведений, максимизирующих спектр, а лишь указывает условия в терминах свойств множества $\mathscr{A}$, при которых матричные произведения, максимизирующие спектр, неединственны. Доказательство же существования для множества $\mathscr{A}$ матричных произведений, максимизирующих спектр, является отдельной задачей, которая может быть решена по схеме, изложенной во введении, путем построения нормы $\|\cdot\|$, удовлетворяющей неравенству (1.4).

Особый интерес для нас будут представлять множества матриц (2.1) и (2.3) при значении параметра $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Такой, казалось бы, достаточно странный и неожиданный выбор параметра φ объясняется тем, что численное моделирование дало основание полагать (но не доказало!), что именно при таком значении параметра φ множества матриц (2.1) и (2.3) могут обладать при некоторых $\varkappa > 1$ произведениями матриц длины 3, максимизирующими спектр. Более того, далее мы ограничимся детальным анализом только набора матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ с матрицами (2.3), которые при $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ принимают следующий простой вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varkappa} \\ \varkappa & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa \\ \frac{1}{\varkappa} & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

существенно упрощающий в дальнейших рассмотрениях символические манипуляции с этими матрицами.

3. Основной пример

В этом разделе мы рассматриваем набор матриц $\mathscr{A} = \{A, B\}$ из примера 2.3, являющийся τ-перестановочным относительно отображения τ вида (2.4). Как было отмечено во введении, такое отображение τ является антимультипликативным, и поэтому

$$\tau(BAA) = \tau(A)\tau(A)\tau(B) = BBA.$$

Тогда по теореме 2.4 произведения матриц BAA и BBA изоспектральны: $\sigma(BAA) = \sigma(BBA)$. Так как при этом матрица BAA изоспектральна произведениям ее циклических перестановок AAB и ABA, а матрица BBA изоспектральна произведениям ее циклических перестановок ABB и BAB, то все тройные произведения матриц A и B, отличные от произведений AAA и BBB, также изоспектральны:

$$\sigma(BAA) = \sigma(AAB) = \sigma(ABA) = \sigma(BBA) = \sigma(ABB) = \sigma(BAB).$$

В этом случае аналогичные равенства выполняются также для спектральных радиусов указанных матриц:

$$\lambda := \rho(BAA) = \rho(AAB) = \rho(ABA) = \rho(BBA) = \rho(ABB) = \rho(BAB).$$

Далее мы будем предполагать, что в равенствах (2.3), определяющих матрицы A и B в примере 2.3, величина φ определяется равенством $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. В этом случае матрицы A и B принимают вид (2.8) и, как нетрудно подсчитать,

$$BAA = \begin{pmatrix} \varkappa^2 & 0 \\ \varkappa - \frac{1}{\varkappa} & \frac{1}{\varkappa^2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(BAA) = 1,\ \operatorname{tr}(BAA) = \varkappa^2 + \frac{1}{\varkappa^2}.$$

Тогда λ является максимальным решением характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(BAA)\lambda + \det(BAA) = 0,$$

откуда

$$\lambda = \varkappa^2. \tag{3.1}$$

Наша цель — показать в оставшейся части этого раздела, что в этом случае обобщенный спектральный радиус $\bar{\rho}(\mathscr{A})$ набора матриц (2.8) выражается равенством

$$\bar{\rho}(\mathscr{A}) = \lambda^{1/3},$$

а произведения матриц BAA и BBA с матрицами A и B вида (2.8) максимизируют спектр. Чтобы этого добиться, мы, согласно схеме, изложенной во введении, покажем, что для набора матриц $\mathscr{A}$ с матрицами (2.8) может быть найдена такая норма $\|\cdot\|$, в которой выполняются неравенства

$$\|Ax\|, \|Bx\| \le \lambda^{1/3}\|x\|, \qquad \forall\ x. \tag{3.2}$$

Технически проще это будет делать не для набора матриц $\mathscr{A}$, а для "нормированного" набора матриц $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{A}, \tilde{B}\}$, где

$$\tilde{A} = \frac{1}{\lambda^{1/3}} A, \qquad \tilde{B} = \frac{1}{\lambda^{1/3}} B. \tag{3.3}$$

В терминах матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ условие (3.2) примет вид

$$\|\tilde{A}x\|, \|\tilde{B}x\| \le \|x\|, \qquad \forall\ x. \tag{3.4}$$

Кроме того, поскольку для матриц A и B из набора (2.8) имеют место равенства $AAA = BBB = I$ (именно для того, чтобы обеспечить выполнение этих равенств величина, величина φ выбиралась равной $\frac{2\pi}{3}$), то

$$\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{B}\tilde{B} = \frac{1}{\lambda} I \quad \Longrightarrow \quad \rho(\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}) = \rho(\tilde{B}\tilde{B}\tilde{B}) = \frac{1}{\lambda}, \tag{3.5}$$

а остальные тройные произведения матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ будут иметь простое максимальное собственное значение 1, а значит будут иметь единичный спектральный радиус:

$$\rho(\tilde{B}\tilde{A}\tilde{A}) = \rho(\tilde{A}\tilde{A}\tilde{B}) = \rho(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}) = \rho(\tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}) = \rho(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{B}) = \rho(\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}) = 1.$$

3.1. **Конструкция экстремальной нормы.** Требуемую в (3.4) норму $\|\cdot\|$ мы определим путем задания границы

$$S = \{x : \|x\| = 1\}$$

ее единичного шара. При этом, следуя идеям, развитым в [10,21], множество S будет искаться в виде сбалансированного (центрально симметричного) выпуклого двенадцатиугольника, вершины которого $v_1, v_2, \ldots, v_{12}$ совпадают с подходящим образом масштабированными плюс-минус собственными векторами матриц

$$\tilde{B}\tilde{A}\tilde{A}, \quad \tilde{A}\tilde{A}\tilde{B}, \quad \tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}, \quad \tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}, \quad \tilde{A}\tilde{B}\tilde{B}, \quad \tilde{B}\tilde{A}\tilde{B},$$

отвечающими единичному собственному значению этих матриц.

Чтобы уточнить процедуру "масштабирования" упомянутых собственных векторов, выбираемых в качестве вершин многоугольника S, напомним, что

для матриц A и B из набора (2.8) величина λ выражается через $\varkappa$ равенством (3.1). При этом собственные вектора v и w матриц $\tilde{B}\tilde{A}\tilde{A}$ и $\tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}$, соответственно, отвечающие собственному значению 1, имеют, как нетрудно проверить, вид
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\varkappa}{1+\varkappa^2} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
т.е.
$$v = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{A}v, \quad w = \tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}w. \tag{3.6}$$

В качестве первых двух вершин конструируемого двенадцатиугольника S возьмем точки
$$v_1 = \mu v, \quad v_2 = w,$$
где $\mu > 0$ — подлежащий дальнейшему определению “параметр масштабирования”, а затем добавим к вершинам конструируемого двенадцатиугольника точки
$$-v_1, \quad \pm\tilde{A}v_1, \quad \pm\tilde{A}\tilde{A}v_1, \qquad -v_2, \quad \pm\tilde{A}v_2, \quad \pm\tilde{B}\tilde{A}v_2.$$
По построению, точки $\pm v_1$, $\pm\tilde{A}v_1$, $\pm\tilde{A}\tilde{A}v_1$ являются собственными векторами матрицы $\tilde{B}\tilde{A}\tilde{A}$ и циклических перестановок ее сомножителей $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}$ и $\tilde{A}\tilde{A}\tilde{B}$, а точки $\pm v_2$, $\pm\tilde{A}v_2$, $\pm\tilde{B}\tilde{A}v_2$ являются собственными векторами матрицы $\tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}$ и циклических перестановок ее сомножителей $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{B}$ и $\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}$.

Введем следующие обозначения для полученных 12-и точек:
$$v_1 = \mu v, \;\; v_2 = w, \;\;\; v_3 = -\tilde{A}v_1, \;\; v_4 = -\tilde{A}v_2, \;\; v_5 = -\tilde{A}v_3, \;\; v_6 = -\tilde{B}v_4, \tag{3.7}$$
$$v_7 = -v_1, \, v_8 = -v_2, \, v_9 = -v_3, \quad v_{10} = -v_4, \quad v_{11} = -v_5, \quad v_{12} = -v_6, \tag{3.8}$$
а также для их образов при отображении $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:
$$a_1 = \tilde{A}v_i, \quad b_i = \tilde{B}v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 12. \tag{3.9}$$

Наконец, обозначим через S двенадцатиугольник с вершинами v_i. Отметим, что вершины многоугольника S распадаются на четыре группы точек, циклически переходящих друг в друга при применении подходящих матриц $\tilde{A}$ или $\tilde{B}$:
$$v_1 \xrightarrow{\tilde{A}} v_9 \xrightarrow{\tilde{A}} v_5 \xrightarrow{\tilde{B}} v_1, \quad v_7 \xrightarrow{\tilde{A}} v_3 \xrightarrow{\tilde{A}} v_{11} \xrightarrow{\tilde{B}} v_7,$$
$$v_2 \xrightarrow{\tilde{A}} v_{10} \xrightarrow{\tilde{B}} v_6 \xrightarrow{\tilde{B}} v_2, \quad v_8 \xrightarrow{\tilde{A}} v_4 \xrightarrow{\tilde{B}} v_{12} \xrightarrow{\tilde{B}} v_8.$$

Замечание 3.1. Достаточно странный, на первый взгляд, способ выбора точек v_i при определении многоугольника S объясняется тем, что в примерах построения многоугольника S для случая $\varkappa = 1.331$ и некоторых случайным образом выбранных значений μ, приведенных на рис. 1, именно такой выбор точек v_i обеспечил их перечисление в порядке возрастания индексов при обходе вершин многоугольника S по часовой стрелке вокруг начала координат. □

Далее нам будет удобно выразить определения точек v_i, a_i и b_i с индексами $i = 1, \ldots, 6$, как функции векторов v и w:
$$\left.\begin{aligned}
&v_1 = \mu v, && a_1 = \tilde{A}v_1 = v_9, && b_1 = \tilde{B}v_1 = \mu\tilde{B}v,\\
&v_2 = w, && a_2 = \tilde{A}v_2 = v_{10}, && b_2 = \tilde{B}v_2 = \frac{1}{\lambda}v_{10},\\
&v_3 = -\tilde{A}v_1, && a_3 = \tilde{A}v_3 = v_{11}, && b_3 = \tilde{B}v_3 = -\mu\tilde{B}\tilde{A}v,\\
&v_4 = -\tilde{A}v_2, && a_4 = \tilde{A}v_4 = -\tilde{A}\tilde{A}w, && b_4 = \tilde{B}v_4 = v_{12},\\
&v_5 = -\tilde{A}v_3, && a_5 = \tilde{A}v_5 = \frac{1}{\lambda}v_1, && b_5 = \tilde{B}v_5 = v_1,\\
&v_6 = -\tilde{B}v_4, && a_6 = \tilde{A}v_6 = \tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}w, && b_6 = \tilde{B}v_6 = v_2.
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Выражения для $v_1, \dots, v_6$ в (3.10) вытекают из их определения, а выражения для $a_1, a_2, a_3, a_5, b_2, b_4, b_5$ и b_6 — из приводимых ниже цепочек равенств, которые в свою очередь следуют из соотношений (3.5) и (3.6):

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tilde{A}v_1 = -v_3 = v_9,\\
a_2 &= \tilde{A}v_2 = -v_4 = v_{10},\\
a_3 &= \tilde{A}v_3 = -v_5 = v_{11},\\
a_5 &= \tilde{A}v_5 = -\tilde{A}\tilde{A}v_3 = \tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}v_1 = \frac{1}{\lambda}v_1,\\
b_2 &= \tilde{B}v_2 = \tilde{B}\tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}v_2 = \frac{1}{\lambda}\tilde{A}v_2 = -\frac{1}{\lambda}v_4 = \frac{1}{\lambda}v_{10},\\
b_4 &= \tilde{B}v_4 = -v_6 = v_{12},\\
b_5 &= \tilde{B}v_5 = -\tilde{B}\tilde{A}v_3 = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{A}v_1 = v_1,\\
b_6 &= \tilde{B}v_6 = -\tilde{B}\tilde{B}v_4 = \tilde{B}\tilde{B}\tilde{A}v_2 = v_2.
\end{aligned}$$

Замечание 3.2. Соотношения (3.10) не зависят от конкретного вида матриц A и B или выбора собственных векторов v и w матриц BAA и BBA. Для их выполнения важно лишь, чтобы выполнялись соотношения (3.5). ☐

Замечание 3.3. Во всех наших построениях мы далее используем параметр $\varkappa = 1.331 = 1.1^3$. Такой выбор параметра $\varkappa$ не является обязательным; он обусловлен лишь тем, что согласно (2.8) и (3.3) в этом случае как матрицы A и B, так матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ оказываются рациональными, что приятно само по себе. ☐

Замечание 3.4. Заметим, что лучи, выпущенные из начала координат и проходящие через вершины v_i, не "склеиваются" ни при каких $\varkappa > 1$ и $\mu > 0$. Отсюда следует, что на самом деле циклический порядок следования точек v_i остается одним и тем же при произвольном выборе параметров $\varkappa > 1$ и $\mu > 0$, используемых при построении многоугольника S. Обозначим через

$$L(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = tx,\ t \in \mathbb{R}\}$$

прямую, проходящую через начало координат и точку $x \neq 0$.

Отметим сначала, что для ненулевых точек x и y справедливо следующее условие "несовпадения прямых $L(x)$ и $L(y)$":

$$L(x) \cap L(y) = \{0\} \quad \iff \quad (x, Ty) \neq 0,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, а T — матрица поворота на угол $\frac{\pi}{2}$, определяемая равенством (3.12).

Несложные, но достаточно громоздкие подсчеты показывают, что при $\varkappa > 1$, $\mu > 0$ и $\lambda = \varkappa^2$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&(v_1, Tv_2) = \frac{\varkappa\mu}{\varkappa^2+1} \neq 0, && (v_1, Tv_3) = \frac{\varkappa^{1/3}(\varkappa^4+\varkappa^2+1)\mu^2}{(\varkappa^2+1)^2} \neq 0,\\
&(v_1, Tv_4) = \varkappa^{1/3}\mu \neq 0, && (v_1, Tv_5) = \frac{(\varkappa^4+\varkappa^2+1)\mu^2}{\varkappa^{1/3}(\varkappa^2+1)^2} \neq 0,\\
&(v_1, Tv_6) = \frac{\mu}{\varkappa^{1/3}(\varkappa^2+1)} \neq 0, && (v_2, Tv_3) = \frac{\varkappa^{7/3}\mu}{\varkappa^2+1} \neq 0,\\
&(v_2, Tv_4) = \varkappa^{1/3} \neq 0, && (v_2, Tv_5) = \frac{\mu}{\varkappa^{1/3}} \neq 0,\\
&(v_2, Tv_6) = \frac{1}{\varkappa^{1/3}} \neq 0, && (v_3, Tv_4) = \frac{\mu}{\varkappa^{1/3}(\varkappa^2+1)} \neq 0,
\end{aligned}$$

$$(v_3,Tv_5)=\frac{(\varkappa^4+\varkappa^2+1)\mu^2}{\varkappa(\varkappa^2+1)^2}\neq 0,\qquad (v_3,Tv_6)=\frac{(\varkappa^4+1)\mu}{\varkappa(\varkappa^2+1)}\neq 0,$$
$$(v_4,Tv_5)=\frac{\varkappa\mu}{\varkappa^2+1}\neq 0,\qquad (v_4,Tv_6)=\varkappa\neq 0,$$
$$(v_5,Tv_6)=\frac{\varkappa^{7/3}\mu}{\varkappa^2+1}\neq 0.$$

В силу последних соотношений
$$L(v_i)\cap L(v_j)=\{0\}\qquad \text{при}\quad i,j=1,2,\dots,6,\ i\neq j.$$
А поскольку $v_{i+6}=-v_i$ при $i=1,2,\dots,6$, то предыдущие соотношения показывают, что точки $v_1,v_2,\dots,v_{12}$ на самом деле порождают лишь 6 прямых, $L_1,L_2,\dots,L_6$, которые при этом различны при всех $\varkappa>1$ и $\mu>0$. □

Замечание 3.5. На рисунке 1 приведен пример построения двенадцатиугольников S для $\varkappa=1.331$ и более-менее случайного значения параметра μ. Этот пример оказался "неудачными" с точки зрения желания построить норму, требуемую в (3.4), и демонстрируют типичные трудности, возникающие при построении такой нормы. Так, построенный двенадцатиугольник S не является выпуклым, и потому не может быть границей единичного шара ни для какой нормы. В некоторых случаях (например, при $\varkappa=1.331$ и $\mu=1.36$) многоугольник S может оказаться выпуклым, но при этом тем не менее не будет выполнено соотношение $\tilde{A}S\subseteq S$ или $\tilde{B}S\subseteq S$. □

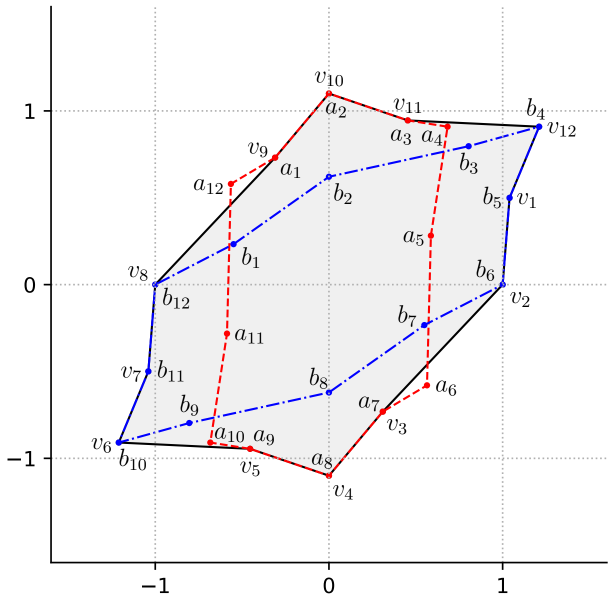

Рис. 1. Многоугольник S (черная сплошная линия, серый фон) и его образы $\tilde{A}S$ (красная штриховая линия) и $\tilde{B}S$ (синяя штрих-пунктирная линия); $\varkappa=1.331$ и $\mu=1.04$

3.2. **Выбор параметра масштабирования.** Как следует из замечания 3.5, для того, чтобы многоугольник S превратился из "кандидата в единичную сферу" некоторой нормы в настоящую единичную сферу нормы, требуемой в (3.4), необходимо подобрать параметр масштабирования μ таким образом, чтобы выполнялись следующие требования:

(i) многоугольник S должен быть выпуклым;

(ii) должны выполняться включения $a_i = \tilde{A}v_i \subseteq S$, $b_i = \tilde{B}v_i \subseteq S$ при $i = 1, 2, \ldots, 12$ или, что равносильно в силу сбалансированности многоугольника S, — включения $a_i, b_i \in S$ при $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Замечание 3.6. Условие (i) на самом деле является избыточным и не требует проверки. Действительно, предположим, что для многоугольника S с вершинами v_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$, выполнено условие (ii), но он при этом не является выпуклым. Взяв тогда выпуклую оболочку $\tilde{S} = \operatorname{co} S$ многоугольника S, получим, что для $\tilde{S}$ будут уже выполнены оба условия (i) и (ii), а как следствие — и включения $\tilde{A}\tilde{S} \subseteq \tilde{S}$, $\tilde{B}\tilde{S} \subseteq \tilde{S}$. □

Учитывая это замечание, для завершения построения нормы, требуемой в (3.4), нам достаточно доказать только существование такого параметра μ, который обеспечивал бы выполнение условия (ii). Эта задача облегчается тем, что в силу (3.10) включения

$$a_1, a_2, a_3, a_5 \in S, \quad b_2, b_4, b_5, b_6 \in S$$

выполняются автоматически при всех значениях $\varkappa > 1$ и $\mu > 0$. Поэтому за счет выбора параметра μ нам нужно обеспечить лишь выполнение 4-х "неочевидных" включений $a_4, a_6, b_1, b_3 \in S$, которые нам удобнее заменить на равносильные (в силу равенства $b_1 = -b_7$) включения:

$$a_4, a_6, b_3, b_7 \in S. \tag{3.11}$$

При этом задача еще более конкретизируется, если заметить, что включения (3.11) выполняются тогда и только тогда, когда каждая из точек $z = a_4, a_6, b_3, b_7$ принадлежит одному из треугольников

$$\triangle xy0 := \{sx + ty : \ s, t \geq 0, \ s + t \leq 1\}$$

с вершинами $x, y, 0$, где $x = v_i, y = v_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 12$ (считая, что $v_{13} = v_1$), см. рис. 1.

Проверку принадлежности некоторой точки z треугольнику $\triangle xy0$ нам будет удобно выполнять в два шага — сначала проверить принадлежность точки z сектору

$$S(x, y) := \{sx + ty : \ s, t \geq 0\},$$

содержащему треугольник $\triangle xy0$, а уже затем проверить, что при условии $z \in S(x, y)$ рассматриваемая точка принадлежит треугольнику $\triangle xy0$. Соответствующие условия приведем в лемме 3.7 в удобном для дальнейшего применения виде. Но сначала напомним, что сектор $S(x, y)$ не вырождается в луч, а треугольник $\triangle xy0$ — в точку или отрезок прямой линии, тогда и только тогда, когда вектора x и y линейно независимы, что равносильно неравенству

$$(x, Ty) \neq 0, \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

а $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Лемма 3.7. *Пусть имеется тройка точек $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, для первых двух из которых, x и y, выполнено условие* (3.12). *Тогда $z \in S(x, y)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия*

$$s(x, y, z) := \frac{(z, Ty)}{(x, Ty)} \geq 0, \quad t(x, y, z) := \frac{(z, Tx)}{(y, Tx)} \geq 0. \tag{3.13}$$

А при выполнении условий (3.13) *включение $z \in \triangle xy0$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$h(x, y, z) := \frac{(y - x, Tz)}{(y, Tx)} \leq 1. \tag{3.14}$$

Доказательство. Вектора x и y при выполнении условия "невырождения сектора" (3.12) линейно независимы и, следовательно, образуют базис в $\mathbb{R}^2$. В этом случае вектор z однозначно представим в виде

$$z = sx + ty, \qquad s, t \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

причем $z \in S(x, y)$ тогда и только тогда, когда

$$s \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{3.16}$$

и при этом $z \in \triangle xy0$, когда дополнительно к (3.16) выполняется условие

$$s + t \leq 1. \tag{3.17}$$

Домножая скалярно справа равенство (3.15) сначала на Ty, а затем на Tx, и учитывая, что в полученных выражениях $(y, Ty) = (x, Tx) = 0$, а в силу (3.12) $(y, Tx) = -(x, Ty) \neq 0$, получаем, что величины s, t и $s + t$ определяются равенствами

$$s = s(x, y, z), \quad t = t(x, y, z), \quad s + t = h(x, y, z).$$

Отсюда в силу (3.16) и (3.17) следуют соотношения (3.13) и (3.14), соответственно. Лемма доказана. □

Доказательство выполнения включений (3.11) при некотором $\mu > 0$ начнем с замечания, что эти включения могут выполняться тогда и только тогда, когда каждая из точек a_4, a_6, b_3, b_7 принадлежит некоторому треугольнику $\triangle xy0$ с соседними вершинами $x = v_i, y = v_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 12$ (считая, что $v_{13} = v_1$). Чтобы не проверять все 12 вариантов пар соседних вершин для каждой из точек a_4, a_6, b_3, b_7, мы обратимся к рис. 1, который подсказывает, что по крайней мере при $\varkappa = 1.331$ треугольники, которым могут принадлежать точки a_4, a_6, b_3, b_7 таковы: $\triangle v_2 v_3 0$ и $\triangle v_{11} v_{12} 0$.

Как отмечено в замечании 3.4, для пар вершин v_2, v_3 и v_{11}, v_{12} выполняются условия (3.12):

$$(v_2, Tv_3) = (v_{11}, Tv_{12}) = \frac{\varkappa^{7/3}\mu}{\varkappa^2 + 1} \neq 0, \qquad \forall\, \varkappa > 1, \mu > 0,$$

что дает возможность для дальнейшего исследования использовать лемму 3.7.

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
s(v_{11}, v_{12}, a_4) &= \frac{\varkappa^4 - 1}{\varkappa^4 \mu} > 0, & t(v_{11}, v_{12}, a_4) &= \frac{1}{\varkappa^4} > 0,\\
s(v_2, v_3, a_6) &= \frac{1}{\varkappa^4} > 0, & t(v_2, v_3, a_6) &= \frac{\varkappa^4 - 1}{\varkappa^{10/3}\mu} > 0,\\
s(v_{11}, v_{12}, b_3) &= \frac{1}{\varkappa^4} > 0, & t(v_{11}, v_{12}, b_3) &= \frac{(\varkappa^6 - 1)\mu}{\varkappa^4(\varkappa^2 + 1)} > 0,\\
s(v_2, v_3, b_7) &= \frac{(\varkappa^6 - 1)\mu}{\varkappa^{14/3}(\varkappa^2 + 1)} > 0, & t(v_2, v_3, b_3) &= \frac{1}{\varkappa^4} > 0,
\end{aligned}$$

причем эти неравенства верны не только при $\varkappa = 1.331$, а и при всех $\varkappa > 1$ и $\mu > 0$. В этом случае в силу первого утверждения леммы 3.7 имеют место включения

$$a_4, b_3 \in S(v_{11}, v_{12}), \quad a_6, b_7 \in S(v_2, v_3),$$

причем эти включения также верны всех $\varkappa > 1$ и $\mu > 0$, что исключает возможность принадлежности точек a_4, a_6, b_3, b_7 каким либо другим секторам, а тем самым избавляет нас от необходимости проверки всех 12 вариантов условий (3.12) для каждой из точек a_4, a_6, b_3, b_7.

Нам осталось только теперь выписать условия (3.14) из леммы 3.7 для всех вариантов полученных вершин v и точек a и b:

$$h(v_{11}, v_{12}, a_4) = \frac{\varkappa^4 + \mu - 1}{\varkappa^4 \mu} \le 1 \qquad \Leftrightarrow \quad \mu \ge \mu_0(\varkappa) := 1,$$

$$h(v_2, v_3, a_6) = \frac{\varkappa^{2/3}(\varkappa^4 - 1) + \mu}{\varkappa^4 \mu} \le 1 \qquad \Leftrightarrow \quad \mu \ge \mu_1(\varkappa) := \varkappa^{2/3},$$

$$h(v_{11}, v_{12}, b_3) = \frac{(\varkappa^6 - 1)\mu + \varkappa^2 + 1}{\varkappa^4(\varkappa^2 + 1)} \le 1 \qquad \Leftrightarrow \quad \mu \le \mu_2(\varkappa) := \frac{(\varkappa^2 + 1)^2}{\varkappa^4 + \varkappa^2 + 1},$$

$$h(v_2, v_3, b_7) = \frac{(\varkappa^6 - 1)\mu + \varkappa^{2/3}(\varkappa^2 + 1)}{\varkappa^{14/3}(\varkappa^2 + 1)} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \le \mu_3(\varkappa) := \frac{\varkappa^{2/3}(\varkappa^2 + 1)^2}{\varkappa^4 + \varkappa^2 + 1}.$$

Здесь в левом столбце выписаны условия (3.14) из леммы 3.7, а в правом их переформулировки в терминах параметра $\mu > 0$. Как легко видеть,

$$\mu_0(\varkappa) < \mu_1(\varkappa), \quad \mu_2(\varkappa) < \mu_3(\varkappa), \qquad \forall\ \varkappa > 1,$$

и поэтому μ на самом деле должно удовлетворять всего двум неравенствам:

$$\mu_1(\varkappa) \le \mu \le \mu_2(\varkappa), \quad \text{где} \quad \varkappa > 1. \tag{3.18}$$

Отметим теперь, что неравенство $\mu_1(\varkappa) \le \mu_2(\varkappa)$ выполняется только при

$$\varkappa \in (1, \varkappa_{\max}], \tag{3.19}$$

где величина $\varkappa_{\max}$ однозначно определяется из уравнения $\mu_1(\varkappa) = \mu_2(\varkappa)$ и ее приближенное значение таково: $\varkappa_{\max} \approx 1.447892$. Поэтому неравенства (3.18) можно удовлетворить за счет выбора μ только для тех значений $\varkappa$, которые удовлетворяют включению (3.19).

В частности, для $\varkappa = 1.331$ мы имеем следующие численные соотношения:

$$\mu_0 = 1 < \mu_1 = 1.21 \le \mu \le \mu_2 \approx 1.299757 < \mu_3 \approx 1.572706, \tag{3.20}$$

а соответствующее множество S и его образы $\tilde{A}S$ и $\tilde{B}S$ изображены на рис. 2.

Замечание 3.8. Как отмечалось в замечании 3.6, доказывать выпуклость многоугольника S нет необходимости. Тем не менее, для полноты изложения покажем все же, что при значениях параметров $\varkappa$ и μ, удовлетворяющих соотношениям (3.18) и (3.19), множество S на самом деле выпукло, см. рис. 2.

Учитывая последовательный циклический порядок следования вершин v_i многоугольника S, для доказательства выпуклости этого многоугольника достаточно показать, что каждая из вершин v_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$, не принадлежит внутренности треугольника $\triangle v_{i-1}v_{i+1}0$. Как обычно, в силу сбалансированности (центральной симметричности) многоугольника S достаточно рассмотреть только случай, когда лишь только каждая из вершин v_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, не принадлежит внутренности треугольника $\triangle v_{i-1}v_{i+1}0$, где считается, что при $i = 1$ вершина v_{i-1} совпадает с вершиной v_{12}. В силу леммы 3.7 соответствующие условия “не принадлежности” равносильны неравенствам

$$h(v_{i-1}, v_{i+1}, v_i) \ge 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Выпишем соответствующие условия, а также их переформулировки в терминах параметра μ:

$$h(v_{12}, v_2, v_1) = \frac{(\varkappa^{4/3} + 1)\mu}{\varkappa^2 + 1} \ge 1 \qquad \Leftrightarrow \quad \mu \ge \omega_1(\varkappa) := \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa^{4/3} + 1},$$

$$h(v_1, v_3, v_2) = \frac{(\varkappa^2 + 1)(\varkappa^2 + \varkappa^{2/3})}{(\varkappa^4 + \varkappa^2 + 1)\mu} \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \le \omega_2(\varkappa) := \frac{(\varkappa^2 + 1)(\varkappa^2 + \varkappa^{2/3})}{\varkappa^4 + \varkappa^2 + 1},$$

$$h(v_2, v_4, v_3) = \frac{(\varkappa^{8/3} + 1)\mu}{\varkappa^{2/3}(\varkappa^2 + 1)} \ge 1 \qquad \Leftrightarrow \quad \mu \ge \omega_3(\varkappa) := \frac{\varkappa^{2/3}(\varkappa^2 + 1)}{\varkappa^{8/3} + 1},$$

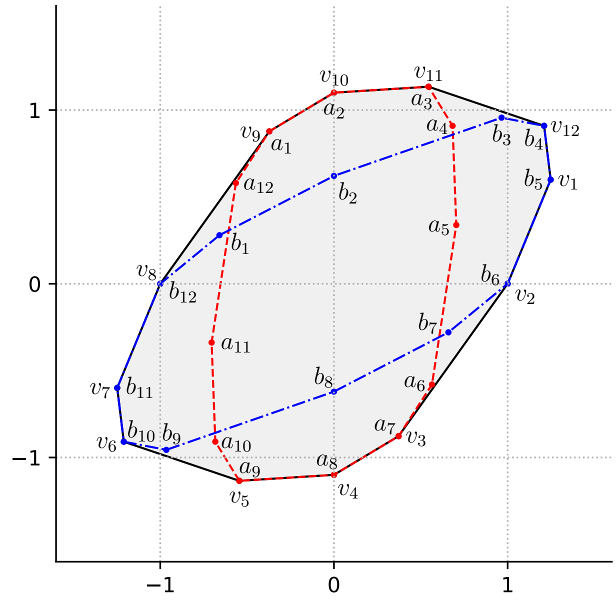

Рис. 2. Многоугольник S (черная сплошная линия, серый фон) и его образы $\tilde{A}S$ (красная штриховая линия) и $\tilde{B}S$ (синяя штрих-пунктирная линия); $\varkappa = 1.331$, $\mu = 1.25$

$$
\begin{aligned}
h(v_3,v_5,v_4) &= \frac{(\varkappa^2+1)(\varkappa^2+\varkappa^{2/3})}{(\varkappa^4+\varkappa^2+1)\mu} \ge 1 &&\Leftrightarrow \quad \mu \le \omega_4(\varkappa) := \frac{(\varkappa^2+1)(\varkappa^2+\varkappa^{2/3})}{\varkappa^4+\varkappa^2+1},\\
h(v_4,v_6,v_5) &= \frac{(\varkappa^{4/3}+1)\mu}{\varkappa^2+1} \ge 1 &&\Leftrightarrow \quad \mu \ge \omega_5(\varkappa) := \frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^{4/3}+1},\\
h(v_5,v_7,v_6) &= \frac{(\varkappa^2+1)(\varkappa^{8/3}+1)}{(\varkappa^4+\varkappa^2+1)\mu} \ge 1 &&\Leftrightarrow \quad \mu \le \omega_6(\varkappa) := \frac{(\varkappa^2+1)(\varkappa^{8/3}+1)}{\varkappa^4+\varkappa^2+1}.
\end{aligned}
$$

Несложно проверить, что при всех $\varkappa > 1$ и $\mu > 0$ выполняются неравенства

$$\omega_3(\varkappa) \le \omega_1(\varkappa) = \omega_5(\varkappa) \le \mu_1(\varkappa), \quad \mu_2(\varkappa) \le \omega_2(\varkappa) = \omega_4(\varkappa) \le \omega_6(\varkappa).$$

Тогда при значениях параметров $\varkappa$ и μ, удовлетворяющих соотношениям (3.18) и (3.19), выполняются также неравенства

$$\omega_3(\varkappa) \le \omega_1(\varkappa) = \omega_5(\varkappa) \le \mu_1(\varkappa) \le \mu \le \mu_2(\varkappa) \le \omega_2(\varkappa) = \omega_4(\varkappa) \le \omega_6(\varkappa)$$

и, следовательно, при этих значениях параметров $\varkappa$ и μ многоугольник S выпуклый. □

Суммируем результат наших построений в следующей теореме.

Теорема 3.9. *Пусть* $\mathscr{A} = \{A, B\}$ *— множество матриц, определяемое равенствами* (2.8)*, а* S *— многоугольник с вершинами* v_i*,* $i = 1, 2, \ldots, 12$*, определяемыми соотношениями* (3.7) *и* (3.8)*. Тогда при значениях параметров* $\varkappa$ *и* μ*, удовлетворяющих соотношениям* (3.18) *и* (3.19)*, имеют место включения* $a_i = \tilde{A}v_i \subseteq S$*,* $b_i = \tilde{B}v_i \subseteq S$ *при* $i = 1, 2, \ldots, 12$ *и, следовательно, множество матриц* $\mathscr{A}$ *обладает нормой с единичным шаром* S*, требуемой в* (3.4)*.*

4. Замечания и комментарии

Замечание 4.1. Казалось бы, для построения требуемой в (3.4) нормы, было естественно воспользоваться численной реализацией так называемого “polytope algorithm” [10, 21], который позволяет производить, по утверждению авторов, точное вычисление совместных спектральных характеристик матриц и определять, является ли то или иное матричное произведение максимизирующим спектр.

Наша попытка использовать для этой цели пакет `JSR Toolbox` [21] оказалась, к сожалению, неудачной: выяснилось, что версия этого пакета, размещенная в MATLAB® Central, устарела и несовместима с релизами MATLAB® R2023a и более поздними из-за изменения в этих релизах формата и параметров обращения к процедуре `linprog` из `Optimization Toolbox`.

После нашей самодеятельной “коррекции” обращения к процедуре `linprog` в скрипте `jsr_norm_balancedRealPolytope.m`[2] функциональность `JSR Toolbox` с формальной точки зрения была восстановлена. Однако, не будучи уверенными, что наше вмешательство не повлияло на корректность работы соответствующего алгоритма, мы при построении примера в разделе 3 решили отказаться от применения численных методов и предпочли использовать вместо них аналитический подход.

Тем не менее, стоит отметить, что для набора матриц из примера 2.3 многоугольник S, вычисленный с помощью `JSR Toolbox`, совпал с многоугольником S, построенным в разделе 3 при $\mu = \mu_2$, т.е. при максимально допустимом согласно (3.20) значении параметра μ. □

Замечание 4.2. Использованная в разделе 3 для матриц из примера 2.3 схема построения нормы, требуемой в (3.4), оказалась работоспособной и при анализе матричных произведений с матрицами из примера 2.2. Отличие заключалось только в том, что более привычная форма задания матриц поворота (2.2) оказалась менее приспособленной для символических манипуляций в “ручном режиме” из-за появления множества квадратичных радикалов в промежуточных вычислениях. Тем не менее, и в этом случае с помощью программы Wolfram Mathematica® все необходимые преобразования удалось довести до конца. Оказалось, что в этом случае норма, требуемая в (3.4), существует при

$$\varkappa \in (1, \varkappa_{\max}], \quad \text{где} \quad \varkappa_{\max} \approx 1.528580.$$

В частности, для $\varkappa = 1.331$ были получены следующие соотношения:

$$\mu_0 \approx 0.874539 < \mu_1 \approx 1.032076 \le \mu \le \mu_2 \approx 1.143460 < \mu_3 \approx 1.349441,$$

а соответствующее множество S и его образы $\tilde{A}S$ и $\tilde{B}S$ изображены на рис. 3. □

Замечание 4.3. При проведении символических преобразований в разделе 3 мы использовали программу Wolfram Mathematica®.

Визуализация многоугольников S и их образов $\tilde{A}S$ и $\tilde{B}S$ для рисунков 1–3 проводились с использованием программ на языке Python версий 3.8–3.12. Соответствующий код приведен в приложении A. При построении этих рисунков вычисления проводились при $\varkappa = 1.331$; причина выбора столь “странного”, на первый взгляд, значения для параметра $\varkappa$ объясняется в замечании 3.3.

В предварительных пробных вычислениях использовались и другие значения параметра $\varkappa$, а также программы, основанные на незначительной модификации алгоритма max-релаксации для итерационного построения норм Барабанова, достаточно подробное описание одной из последних реализаций которого можно найти в [15].

---

[2]Соответствующие программы доступны на сайте `https://github.com/kozyakin/spectrum_maximizing_products`.

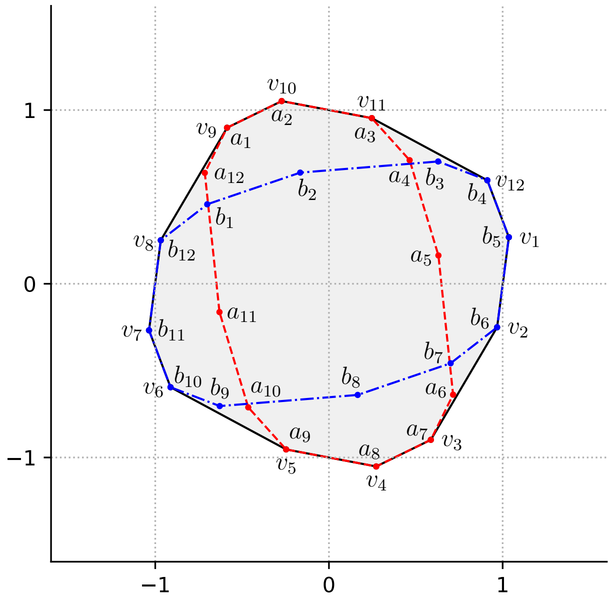

Рис. 3. Многоугольник S для примера 2.2 (черная сплошная линия, серый фон) и его образы $\tilde{A}S$ (красная штриховая линия) и $\tilde{B}S$ (синяя штрих-пунктирная линия); $\varkappa = 1.331$, $\mu = 1.07$

Использованные в работе программы доступны для скачивания и свободного использования с сайта `https://github.com/kozyakin/spectrum_maximizing_products`. □

5. Заключение

Мотивацией для настоящей работы послужил построенный в [6] пример множества матриц $\{A, B\}$, обладающего двумя различными (с точностью до циклических перестановок сомножителей) произведениями матриц $AABABB$ и $BBABAA$, максимизирующими спектр. Особенностью данного примера (и других аналогичных примеров в [6]) явилось то, что количество сомножителей A (или B) в обоих произведениях оказалось одинаковым. В связи с этим возник вопрос: существуют ли пары матричных произведений, максимизирующих спектр, с разным числом сомножителей A (или B) в этих произведениях? В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос. Для этого предложен метод построения матричных множеств $\{A, B\}$, отличный от метода, использованного в [6], при котором количество матричных произведений, максимизирующих спектр, с нечетным числом сомножителей автоматически оказывается не меньшим двух, а число сомножителей вида A (или B) в таких произведениях различно. Используя данный подход, в работе построен пример множества 2×2 матриц $\{A, B\}$, для которого произведения матриц, максимизирующие спектр, имеют вид BAA и BBA. В отличие от [6], где построение соответствующих примеров существенно использовало численную реализацию так называемого “polytope algorithm” [10, 21], в настоящей работе для построения примеров были использованы аналитические методы.

Список литературы

[1] *Барабанов Н. Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений. I // *Автом. и телемех.* 1988. № 2. С. 40–46. URL: `https://mi.mathnet.ru/at6544`.

[2] *Гельфанд И. М.* Нормированные кольца // *Матем. сб.* 1941. Т. 9. С. 3–24.

[3] *Barabanov N. E.* Stability of inclusions of linear type // American Control Conference, Proceedings of the 1995. Vol. 5. 1995. — June. P. 3366–3370.

[4] *Berger M. A., Wang Y.* Bounded semigroups of matrices // *Linear Algebra Appl.* 1992. Vol. 166. P. 21–27.

[5] *Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2003. Vol. 24, no. 4. P. 963–970 (electronic).

[6] *Bochi J., Laskawiec P.* Spectrum Maximizing Products Are Not Generically Unique // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2024. Vol. 45, no. 1. P. 585–600. arXiv:2301.12574.

[7] *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* 2002. Vol. 15, no. 1. P. 77–111 (electronic).

[8] *Breuillard E.* On the joint spectral radius // Analysis at Large: Dedicated to the Life and Work of Jean Bourgain / Ed. by A. Avila, M. T. Rassias, Y. Sinai. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 1–16. arXiv:2103.09089.

[9] *Daubechies I., Lagarias J. C.* Sets of matrices all infinite products of which converge // *Linear Algebra Appl.* 1992. Vol. 161. P. 227–263.

[10] *Guglielmi N., Protasov V.* Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators // *Found. Comput. Math.* 2013. Vol. 13, no. 1. P. 37–97. arXiv:1106.3755.

[11] *Guglielmi N., Zennaro M.* An algorithm for finding extremal polytope norms of matrix families // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. P. 2265–2282.

[12] *Hare K. G., Morris I. D., Sidorov N., Theys J.* An explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture // *Adv. Math.* 2011. Vol. 226, no. 6. P. 4667–4701. arXiv:1006.2117.

[13] *Jenkinson O., Pollicott M.* Joint spectral radius, Sturmian measures, and the finiteness conjecture // *Ergodic Theory Dynam. Systems*. 2017. P. 1–39. arXiv:1501.03419.

[14] *Kozyakin V.* A Dynamical Systems Construction of a Counterexample to the Finiteness Conjecture // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 2005. P. 2338–2343.

[15] *Kozyakin V.* Non-Sturmian sequences of matrices providing the maximum growth rate of matrix products // *Automatica J. IFAC*. 2022. — November. Vol. 145. P. Paper No. 110574, 10. arXiv:2112.00391.

[16] *Lagarias J. C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // *Linear Algebra Appl.* 1995. Vol. 214. P. 17–42.

[17] *Laskawiec P.* Partial classification of spectrum maximizing products for pairs of 2×2 matrices. ArXiv.org e-Print archive. 2024. — June. arXiv:2406.16680.

[18] *Morris I., Sidorov N.* On a Devil's staircase associated to the joint spectral radii of a family of pairs of matrices // *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*. 2013. Vol. 15, no. 5. P. 1747–1782. arXiv:1107.3506.

[19] *Plischke E., Wirth F.* Duality results for the joint spectral radius and transient behavior // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. P. 2368–2384.

[20] *Rota G.-C., Strang G.* A note on the joint spectral radius // *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Indagationes Mathematicae*. 1960. Vol. 22. P. 379–381.

[21] *Vankeerberghen G., Hendrickx J., Jungers R. et al.* The JSR Toolbox. MATLAB® Central. 2011. URL: `https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33202-the-jsr-toolbox`.

[22] *Vladimirov A.* Joint spectral radius and forbidden products. ArXiv.org e-Print archive. 2024. — June. arXiv:2406.17524.

[23] *Wirth F.* The generalized spectral radius and extremal norms // *Linear Algebra Appl.* 2002. Vol. 342. P. 17–40.

Приложение A. Программа для построения и визуализации многоугольников S, $\tilde{A}S$ и $\tilde{B}S$

Приводимый ниже код реализован на языке программирования `Python` версий 3.8–3.12. Этот код, как и другие программы на языках `Python`, `Mathematica` и `MATLAB`, использованные в данной работе для проведения символических и численных вычислений, доступны для загрузки с сайта `https://github.com/kozyakin/spectrum_maximizing_products`.

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""An extremal norm S and its images AS and BS

Created on 2024-07-05 13:46:28 +0300.

@author: Victor Kozyakin
"""

import os
import re
from pathlib import Path
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.patches import Polygon

# Initialization
theta = (2 * np.pi) / 3
cos_a = np.cos(theta)
sin_a = np.sin(theta)
KAPPA = 1.1**3
AUXFACTOR = 0.96

MU = AUXFACTOR * (1 + KAPPA**2)**2 / (1 + KAPPA**2 + KAPPA**4)

MUR = f'-{round(MU, 2)*100:.0f}'

myfilename = os.path.splitext(Path(__file__).name)[0]
myfilename = re.sub('[_-][0-9]+', '', myfilename)
pdfout = re.sub('_', '-', myfilename) + MUR + '.pdf'

A0 = np.array([[0, -1 / KAPPA], [KAPPA, 2 * cos_a]])
B0 = np.array([[0, -KAPPA], [1 / KAPPA, 2 * cos_a]])

v = np.array([1, KAPPA / (1 + KAPPA**2)])
w = np.array([1, 0])

LAMBDA = KAPPA**2
A = A0 / LAMBDA**(1 / 3)
B = B0 / LAMBDA**(1 / 3)

# Vertices of a polygon formed by eigenvectors of normed matrices
# BAA & BBA and their cyclic permutations
v1 = MU * v
v2 = w
v3 = -A @ v1
v4 = -A @ v2
v5 = -A @ v3
v6 = -B @ v4
```

```python
v7 = -v1
v8 = -v2
v9 = -v3
v10 = -v4
v11 = -v5
v12 = -v6

V = np.array([v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10, v11, v12])
AV = V @ A.T
BV = V @ B.T

print('\nList of vertices:\n')
print(', \n'.join(f'({v[0]:9.6f}, {v[1]:9.6f})' for v in V))

# Plotting

S = Polygon(V, facecolor='#f0f0f0', edgecolor='k')
AS = Polygon(AV, linestyle='--', facecolor='none', edgecolor='r')
BS = Polygon(BV, linestyle='-.', facecolor='none', edgecolor='b')

fig, ax = plt.subplots(
    num='Unit ball S of extremal norm and its images AS and BS')
ax.add_patch(S)
ax.add_patch(AS)
ax.add_patch(BS)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.set_xticks([-1, 0, 1])
ax.set_yticks([-1, 0, 1])
ax.grid(linestyle=":")
ax.set_aspect('equal')
ax.set_xlim(-1.6, 1.6)
ax.set_ylim(-1.6, 1.6)

ax.scatter(V[:, 0], V[:, 1], 4, 'k')
labels = ['$v_1$', '$v_2$', '$v_3$', '$v_4$', '$v_5$', '$v_6$',
          '$v_7$', '$v_8$', '$v_9$', '$v_{10}$', '$v_{11}$',
          '$v_{12}$']
dx = [0.1, 0.1, 0.1, 0.08, 0.0, -0.1,
      -0.1, -0.08, -0.11, 0.0, 0.0, 0.12]
dy = [0.0, -0.06, 0.0, -0.08, -0.09, 0.0,
      0.0, 0.08, 0.0, 0.1, 0.09, 0.0]
for i, label in enumerate(labels):
    ax.text(V[i, 0] + dx[i], V[i, 1] + dy[i], label,
            ha='center', va='center', usetex=True, fontsize='large')

ax.scatter(AV[:, 0], AV[:, 1], 4, 'r')
labels = ['$a_1$', '$a_2$', '$a_3$', '$a_4$', '$a_5$', '$a_6$',
          '$a_7$', '$a_8$', '$a_9$', '$a_{10}$', '$a_{11}$',
          '$a_{12}$']
adx = [0.07, 0.0, -0.04, -0.09, -0.1, -0.1,
       -0.08, -0.04, 0.06, 0.12, 0.14, 0.13]
ady = [-0.07, -0.09, -0.07, 0.01, 0.0, 0.02,
       0.07, 0.09, 0.08, 0.0, 0.0, 0.0]
for i, label in enumerate(labels):
    ax.text(AV[i, 0] + adx[i], AV[i, 1] + ady[i], label,
            ha='center', va='center', usetex=True, fontsize='large')
```

```python

ax.scatter(BV[:, 0], BV[:, 1], 4, 'b')
labels = ['$b_1$', '$b_2$', '$b_3$', '$b_4$', '$b_5$', '$b_6$',
          '$b_7$', '$b_8$', '$b_9$', '$b_{10}$', '$b_{11}$',
          '$b_{12}$']
bdx = [0.12, 0.08, -0.0, -0.06, -0.1, -0.1,
       -0.12, -0.06, 0.03, 0.1, 0.13, 0.13]
bdy = [-0.05, -0.1, -0.1, -0.08, 0.0, 0.05,
       0.05, 0.08, 0.09, 0.06, 0.0, -0.05]
for i, label in enumerate(labels):
    ax.text(BV[i, 0] + bdx[i], BV[i, 1] + bdy[i], label,
            ha='center', va='center', usetex=True, fontsize='large')

fig.savefig(pdfout, bbox_inches='tight', format='pdf', dpi=1200)

plt.show()
```

Листинг 1. Код на языке Python `smp.py` для построения многоугольника S и его образов $\tilde{A}S$ и $\tilde{B}S$ на рис. 2

Высшая школа современной математики, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.