

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ У РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Ф. М. Кемпер

E-mail: fkemper@mail.ru

В этой статье рассматривается распределительная задача на простом графе без лимитов на перемещения ресурсов. И для нее устанавливаются необходимые и достаточные условия существования решений в виде набора линейных неравенств, связывающих предложения ресурсов и потребности в них. Затем предлагается алгоритм построения всех независимых линейных ограничений. Полученный результат зависит только от структуры исходного графа.

This article considers an allocation problem on a simple graph without limits on resource movements. And for it, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions are established in the form of a set of linear inequalities connecting the supply of resources and the need for them. An algorithm for constructing all independent linear constraints is then proposed. The result obtained depends only on the structure of the original graph.

Ключевые слова: потоки в сетях, двудольные графы

REQUIRED AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR EXISTENCE SOLUTIONS FROM DISTRIBUTION PROBLEMS WITH CONSTRAINTS

F. M. Kemper

This article considers an allocation problem on a simple graph without limits on resource movements. And for it, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions are established in the form of a set of linear inequalities connecting the supply of resources and the need for them. An algorithm for constructing all independent linear constraints is then proposed. The result obtained depends only on the structure of the original graph.

Keywords: flows in networks, bipartite graphs

Введение

При анализе задач потоков в сетях исследователи акцентируют основное внимание на экстремальных свойствах сети – задаче максимального потока и ее обобщении. Полный набор условий существования потоков в конкретной сети, как видно из результата [2], есть довольно большой набор однородных линейных неравенств. И конструктивное выделение из них подмножества независимых неравенств представляет довольно

сложную задачу. Поэтому при многопараметрическом анализе сети (вариации ее параметров) приходится при каждом значении набора параметров решать задачу о максимальном потоке двойственной сети [2]. Есть попытки использовать вариацию параметров в задаче о расстояниях в сети, например [3]. В [4] рассматриваются специфические эмпирические способы моделирования и вариации параметров в городских транспортных сетях. В [5] для многостадийной модели распределения транспортных потоков по сети используется метод выпуклой оптимизации.

Мне удалось для конкретного типа сети - распределительной сети на двудольных графах (задача транспортировки товара) элементарным методом получить конструктивное описание и эффективную вычислительную схему построения всех этих независимых условий. Структура и количество ограничений зависят только от структуры исходного графа и поэтому устойчивы к вариациям запасов в источниках и потребностей у потребителей.

1. Постановка

Простой граф $G = (X, Y, \Gamma)$ это граф, определяемый двумя непересекающимися множествами X и Y и многозначным отображением Γ множества X в Y [1] (глава 10).

$X = \{x_i, i = 1..n\}, Y = \{y_j, j = 1..m\}$. Дуга $(x_i, y_j) \in G \iff y_j \in \Gamma x_i$.

В каждой вершине x_i есть запас продукта в количестве $a_i = a(x_i) > 0$, потребность каждой вершины $y_j - b_j = b(y_j) > 0$. Пропускные способности всех ребер неограничены. Спрашивается, при каких соотношениях между $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ весь запас продукта можно распределить между потребителями, насытив их полностью. Т.е. при каких условиях совместна система (1), где $\varphi(x_i, y_j)$ - поток по дуге (x_i, y_j) .

$$\begin{cases} a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \quad (1).$$

Будем рассматривать связный граф G . Ясно, что ограничения для несвязного графа есть объединение ограничений для его каждой связной компоненты.

...

2. Система неравенств

Сначала рассмотрим систему (2) и условия ее разрешимости.

$$\begin{cases} a_i \leq \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j \geq \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \quad (2)$$

Дополним граф G до транспортной сети S , добавив вход s , выход t и дуги $(s, x_i), (y_j, t), i = 1..n, j = 1..m$.

Каждой дуге поставим в соответствие пару чисел - границы потока по этой дуге. Для $(s, x_i): (a_i, \infty)$, для $(x_i, y_j): (0, \infty)$, для $(y_j, t): (0, b_j)$. Тогда система (2) разрешима $\iff \exists$ поток по сети S .

В [1] (глава 8, теорема 2 – Гофман), имеется такая

Теорема. Пусть каждой дуге u некоторой транспортной сети отнесены два целых числа $a(u)$ и $b(u)$ [$0 \leq a(u) \leq b(u)$]. Пусть $\mathcal{N}$ - семейство тех подмножеств множества всех вершин сети, которые либо не содержат ни s , ни t , либо содержат s и t одновременно. Существует поток φ , удовлетворяющий условию $a(u) \leq \varphi(u) \leq b(u)$, тогда и

только тогда, когда $b(U_L^-) \geq a(U_L^+)$ для всех $L \in \mathbb{N}$. Здесь U_L^- - дуги, заходящие в L , U_L^+ - дуги, исходящие из L .

Для нашей задачи удобнее вместо множеств L рассматривать множества $D = S \setminus L$ того же типа, что и в теореме выше. Для них $b(U_L^-) = b(U_D^+)$ и $a(U_L^+) = a(U_D^-)$. Тогда неравенства теоремы принимают вид

$$a(U_D^-) \leq b(U_D^+) \quad (3)$$

Найдем условия, при которых ограничения (3) нетривиальны.

Предложение 1. Ограничения (3) нетривиальны тогда и только тогда, когда $D \subseteq G$ и $x_i \in D \implies \Gamma x_i \subseteq D$.

Доказательство:

Если $x_i \in D$ и $y_j \in \Gamma x_i$, но $y_j \notin D$, то $(x_i, y_j) \in U_D^+$, $b(x_i, y_j) = \infty$ и ограничение для D тривиально.

Итак, для каждого $x_i \in D$ так же и $\Gamma x_i \subseteq D$.

Если $s \in D$, $t \in D$ и $x_i \notin D$, то $b(s, x_i) = \infty$ и ограничение для D тривиально.

Если $s \notin D$, $t \notin D$, $x_i \notin D$, $y_j \in D$, то $(x_i, y_j) \in U_D^-$, $a(x_i, y_j) = 0$ и ограничение для D тривиально.

Если $s \in D$, $t \in D$ и $\forall x_i \in D$, то, по предыдущему, $\Gamma(X) = Y \subseteq D$ и $D = S$. Но у S нет входящих и исходящих дуг – ограничение отсутствует.

Если $D \subseteq G$, $\{x_i\} \subseteq D$, $\{\Gamma x_i\} \subseteq D$, то $U_D^- = \{(s, x_i)\}$, $U_D^+ = \{(y_j, t) | y_j \in \Gamma x_i\}$, а $a(s, x_i) < \infty$, $b(y_j, t) < \infty$ и ограничение нетривиально.

Все возможные случаи разобраны, что и требовалось доказать.

Поищем случаи, когда одни ограничения являются следствием других.

Если $\Gamma x_i = \Gamma x_j = Y_0$, то ограничение, соответствующее $D_0 = \{\{x_i, x_j\}, Y_0\}$, сильнее каждого из ограничений для $D_k = \{x_k, Y_0\}$, $k \in \{i, j\}$. Поэтому для всех x_i с одним общим Γx_i будем учитывать только ограничение, соответствующее объединению таких x_i с $D_{\max}(Y_0) = \{\{x_i\}, Y_0 | \Gamma x_i = Y_0, Y_0 \subseteq Y\}$.

Если $\Gamma x_i \cap \Gamma x_j = \emptyset$, то ограничения для $D_i = \{x_i, \Gamma x_i\}$, $D_j = \{x_j, \Gamma x_j\}$ в сумме дают ограничение для $D_i \cup D_j$. Т.е. ограничение для $D_i \cup D_j$ является следствием ограничений для D_i, D_j .

Если $\Gamma x_i \subset \Gamma x_j$, то ограничение для $D_{1i} = \{\{x_i\} \cup X_1, \Gamma x_j\}$ сильнее ограничения $\{X_1, \Gamma x_j\}$. В то же время остается ограничение $\{x_i, \Gamma x_i\}$.

Если $\Gamma x_i \supset \Gamma x_j$, то ограничение для $D_{1i} = \{\{x_i\} \cup X_1, \Gamma x_j\}$ сильнее ограничения $\{x_i, \Gamma x_i\}$. В то же время остается ограничение $\{X_1, \Gamma x_j\}$.

Если $\Gamma x_1 \setminus \Gamma x_2 \neq \emptyset$ и $\Gamma x_2 \setminus \Gamma x_1 \neq \emptyset$, то ограничения для $\{X_1, \Gamma x_1\}$ и $\{X_2, \Gamma x_2\}$ независимы.

...

3. Алгоритм

Для графа G строим матрицу смежности $M(G)$, строки которой соответствуют вершинам из X а столбцы - вершинам из Y .

Для X графа G вводим расстояние ρ между вершинами x_i : $\rho(x_i, x_j) = 1$ при $\Gamma x_i \cap \Gamma x_j \neq \emptyset$, иначе $\rho(x_i, x_j) = 0$. Строим симметричную матрицу смежности $M(X)$, а по ней - граф смежности $Q(X) = (X, \{[x_i, x_j] | \rho(x_i, x_j) = 1\})$.

Ясно, что $M(X) = M(G) \times M^T(G)$, где умножение матриц происходит в булевой алгебре, т.е. элементы $M(G)$ считаем элементами булевой алгебры.

Так как все коэффициенты в ограничениях (3) равны 1 или 0, то можно хранить каждое ограничение в паре битовых строк с длинами n и m , где $n = |X|, m = |Y|$. Нумерация битов в этих строках идет справа налево и соответствует порядку строк в $M(X)$, которая определяет нумерацию вершин в X . Для каждого ограничения $D_i = \{\{x_{ik}\}, \{y_{il}\} | \Gamma(\{x_{ik}\}) = \{y_{il}\}\}$ в строки заносятся 1_k и 1_l , где 1_t - 1 на месте t в строке. Для всех ограничений получаем массив пар строк R .

Граф $Q(X)$ обходим вширь.

На каждом шаге добавляем все ограничения для x_j в подграфе $X_j = \{\{x_k\} | k \leq j\}$, считая что ограничения для всех X_k с $k < j$ уже занесены в массив строк.

На 1-м шаге в массив R заносятся ограничения только для $\{x_1\}$.

Цикл по всем $x_j, j = 2..|X|$, шаг j :

Массив R перед шагом j лексикографически упорядочен.

Для вершины x_j выбираем из графа $Q(X)$ все связи $\{x_k | \rho(x_k, x_j) = 1, k < j\}$, упорядочиваем лексикографически полученный список.

Ищем в массиве R все строки ограничений, соответствующие связям вершины x_j (это можно сделать за один проход, так как массив R и список связей упорядочены одинаково).

Добавляем в массив R ограничение $\{x_j\}$.

Заносим 1_j в копию каждой строки из найденного списка ограничений, добавляем эти копии в конец массива R , наращивая его.

Заполняем битовые строки для Y , пользуясь условием $\Gamma x_j = Y_j$ и матрицей $M(G)$.

Если Y_j совпадает с Y_k у ограничения k из списка связей, то убираем исходное ограничение k из массива R .

В результате этих операций упорядоченность массива R сохраняется.

В конце получаем набор ограничений в виде массива структур из двух битовых строк.

...

4. Примеры

Пример 0 (конфигурация '1-1'): $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n\}, \Gamma x_i = y_i$. Связная компонента состоит из одной дуги и число ограничений - n .

Пример 1 (конфигурация 'Напор'): $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n\}, \Gamma x_i = \{y_j | j = 1..i\}$. Всего ограничений n : $\{\{x_i\}, \{y_i\} | i = 1..k\}, k = 1..n$.

Пример 2 (конфигурация 'Пила'): $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n + 1\}, \Gamma x_i = \{y_i, y_{i+1}\}$. Всего ограничений $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример 3 (конфигурация 'Паук'): $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 0..n\}, \Gamma x_i = \{y_0, y_i\}$. Всего ограничений $2^n - 1$.

...

5. Система равенств

$$\begin{cases} a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \iff (2) \ \& \ \begin{cases} a_i \geq \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j \leq \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases}$$

Значит, ограничения для системы равенств состоят из ограничений для системы неравенств (2), изученные ранее, и ограничений для двойственной сети T , у которой,

по сравнению с сетью S , направления дуг изменены на обратные, $s \rightarrow t$, $t \rightarrow s$. Ограничители по дугам будут: для (s, y_j) - (b_j, ∞) , для (y_j, x_i) - $(0, \infty)$, для (x_i, t) - $(0, a_i)$.

Ограничения для T получаем описанным выше способом и объединяем их с ограничениями для S .

В частности, ограничение для S $\sum_X a_i \leq \sum_Y b_j$ и ограничение для T $\sum_Y b_j \leq \sum_X a_i$ объединяются в $\sum_X a_i = \sum_Y b_j$ - следствие исходной системы равенств.

Верно и обратное: если имеется пара ограничений $\sum_X a_i \leq \sum_Y b_j$ и $\sum_Y b_j \leq \sum_X a_i$, т.е. $\sum_X a_i = \sum_Y b_j$, то (X, Y) связная компонента исходного графа. Действительно, в этом случае $\Gamma X = Y$ и $\Gamma Y = X$.

...

Заключение

Построенный алгоритм получения независимых условий решения распределительной задачи легко программируется и позволяет эффективно подбирать размеры запасов, потребностей продукта и анализировать их вариации.

Алгоритм статьи реализован в виде программы, которая строит набор ограничений-неравенств для прямого или дуального графов.

Программа доступна на <https://github.com/Gilbert00/TransportNet>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К. Теория графов и ее применение, пер. с франц. Москва: ИЛ, 1962. 320 с.
2. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях, пер. с англ. Москва: ИЛ, 1966. 278 с.
3. Родионов В. В. Параметрическая задача о кратчайших расстояниях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 1173–1177.
4. Швецов В. И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 148–157.
5. Гасникова Е. В., Гасников А. В. и др. О многостадийной транспортной модели и достаточных условиях ее потенциальности // Математическая теория игр и её приложения. 2023. Т. 15. № 2. С. 3–17.

КЕМПЕР Феликс Майорович — Москва. E-mail: fkemper@mail.ru