# Новое условие для матриц Дирака.

А. И. Локтев *

**Аннотация**

В статье представлено новое найденное условие для матрицы $\gamma^0$. Проведена проверка соответствия теории Дирака новому условию.

**Ключевые слова:** уравнение Дирака, гамма-матрицы, матрицы Дирака.

## 1 Введение

В 1928 году Поль Дирак составил релятивистское уравнение [1] для поля со спином 1/2 и вывел ряд свойств для матриц, входящих в это уравнение. Кратко эти свойства можно записать как $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \cdot I$, где $\eta^{\mu\nu}$ метрика с сигнатурой $(+ - --)$. Однако это не единственные свойства матриц, которые можно получить из общих физических соображений, и которые определяют конкретный вид матриц. Важное свойство матрицы $\gamma^0$ можно получить из уравнения непрерывности поля.

## 2 Вывод нового условия для матрицы Дирака

Для удобства возьмём уравнение Дирака с использованием $\alpha$-матриц и системы единиц $\hbar = c = 1$

$$\partial_t \psi + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + i\mu\alpha_0 \psi = 0. \tag{1}$$

Составим из него уравнение непрерывности, приняв во внимание, что масса $\mu$ может быть как вещественной, так и мнимой величиной. Для этого умножим (1) слева на $\psi^\dagger$, а сопряженное ему уравнение справа на $\psi$. Получим два уравнения

$$\psi^\dagger \partial_t \psi + \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + i\mu \psi^\dagger \alpha_0 \psi = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t \psi^\dagger \psi + \nabla \psi^\dagger \cdot \boldsymbol{\alpha}^\dagger \psi - i\mu^\dagger \psi^\dagger \alpha_0^\dagger \psi = 0. \tag{3}$$

Предположим, что

$$i\mu\psi^\dagger \alpha_0 \psi - i\mu^\dagger \psi^\dagger \alpha_0^\dagger \psi = 0. \tag{4}$$

Тогда складывая (2) и (3), получим уравнение непрерывности. Теперь из (2) вычтем (3), получим уравнение

$$i\mu\psi^\dagger \alpha_0 \psi + i\mu^\dagger \psi^\dagger \alpha_0^\dagger \psi = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) дают систему уравнений, из которой следует, что $\psi^\dagger \alpha_0 \psi = 0$, или

$$\boxed{\psi^\dagger \gamma^0 \psi = 0} \tag{6}$$

Условие (6) не зависит от характера массы и эрмитовости или антиэрмитовости $\gamma$-матриц, т.к. уравнения (4) и (5) будут просто меняются местами. Это условие должно соблюдаться для всех решений уравнения Дирака.

*E-mail: osmiy74@yandex.ru

## 3 Проверка

Возьмём ненормированный собственный вектор

$$\psi = \begin{pmatrix} E+\mu \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \tag{7}$$

Подставим (7) в (6), где $\gamma^0 = \mathrm{diag}\,\{1, 1, -1, -1\}$. Получим

$$(E+\mu)(E+\mu^\dagger) - p^2 = 0. \tag{8}$$

Для случая вещественной массы условие (6) не выполняется $(E+m)^2 - p^2 \neq 0$. В случае мнимой массы условие (6) выполняется $E^2 + m^2 - p^2 = 0$. Но если взять суперпозицию собственных векторов $\psi = \psi_1 + \psi_2$, получим $\psi^\dagger\gamma^0\psi = \psi_1^\dagger\gamma^0\psi_2 + \psi_2^\dagger\gamma^0\psi_1$. Дальнейшая подстановка приводит к большому несократимому выражению, численная проверка которого показывает невыполнение условия (6) для случая мнимой массы в общем случае.

## 4 Теорема

**Теорема 1** *Не существует ненулевой матрицы $M$, для которой выполняется условие $v^\dagger M v = 0$ для произвольного комплексного вектора $v$.*

**Доказательство**. Если $v^\dagger M v = 0$, то $v^\dagger M^\dagger v = 0$. Складывая и вычитая оба уравнения приходим к уравнениям $v^\dagger(M + M^\dagger)v = 0$ и $v^\dagger(M - M^\dagger)v = 0$. Унитарным преобразованием базиса эрмитовые матрицы $M + M^\dagger$ и $i(M - M^\dagger)$ можно привести к диагональным видам. Для диагональных матриц $M'$ уравнения вида $v^\dagger M' v = 0$ $\forall v$ означают $M' = 0$. Тогда и $M = 0$.

## 5 Заключение

Согласно уравнению (6) и теореме 1 волновая функция, матрицы и уравнение Дирака в целом могут быть только вещественными, а матрица $\gamma^0$ должна быть антисимметричной матрицей. Либо вместо матриц в уравнении должны использоваться четыре оператора $\hat{\alpha}_\mu$ более общего вида, для которых выполняются условия $\{\hat{\alpha}_\mu, \hat{\alpha}_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \cdot \hat{1}$ и $\psi^\dagger\hat{\alpha}_0\psi = 0$. Таким образом теория Дирака в текущем виде не согласованна с новым найденным условием для матрицы $\gamma^0$.

## Список литературы

[1] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. Roy. Soc. A **117**, 610-624 (1928).