

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ЗАМЕТКИ
О ПРИРОДЕ ВЕЩЕЙ

Баяк И.В.

2021

Электрон так же неисчерпаем, как и атом, природа бесконечна, но она бесконечно существует, и вот это-то единственно категорическое, единственно безусловное признание ее существования вне сознания и ощущения человека и отличает диалектический материализм от релятивистского агностицизма и идеализма.

—В. Ленин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ О ПРИРОДЕ ВЕЩЕЙ

Баяк И.В.

31 октября 2024 г.

Оглавление

1	Введение	5
1.1	О динамических потоках	6
1.2	О принципе наименьшего действия	16
1.3	О квантовой механике	23
2	Хаотическая динамика электрона	29
2.1	Введение	29
2.2	Действие модулярной группы на сфере	31
2.3	Колебания метафизического маятника	37
2.4	О случайном блуждании по ломаным линиям обмотки сферы	44
2.5	Заключение	51
3	О некоторых приложениях алгебры	53
3.1	Линейные векторные поля	53
3.2	Локальная алгебра векторных полей	57
3.3	Геометрия алгебры векторных полей	61
3.4	Динамика векторных полей	70
4	О геометрических конструкциях	81
4.1	Введение	81
4.2	Гомоморфизмы четности	85
4.3	Топологическая связь	92
4.4	Алгебры Ли вращающихся торов	96

Оглавление

5	О параллелепипедах	101
5.1	Введение	101
5.2	Подстановки	104
5.3	Знакопеременные произведения	107
5.4	Параллелепипеды и многообразия	113
5.5	Минимальные потоки и поверхности	123
6	О построении векторных полей сфер	129
6.1	Постановка задачи и определения	129
6.2	Схема решения задачи	135
Appendices		
A	О ядерной реакции в вихре	142
B	Задача о лестницах	152
B.1	Условие задачи	152
B.2	Решение задачи	152

Предисловие

Вашему вниманию предлагается коллекция математических заметок автора, которые призваны служить инструментом для описания природы вещей. Тем самым, предметом изучения данной книги является математический формализм теории всего, а в качестве основополагающей идеи книги используется принцип наименьшего действия, поднятый на геометро-динамический уровень.

Книга предназначена в первую очередь для тех читателей, которых интересует метафизический фундамент физики, т. е., вопросы о происхождении законов физики, физических полей и частиц, наконец, о происхождении физического пространства и о зависимости математического описания физического пространства от локализации наблюдателя.

Содержание основной части книги состоит из введения и пяти заметок, раскрывающих философский замысел автора, а в приложении находятся ещё две заметки, имеющие прикладной характер.

Заметим также, что эта небольшая по объему брошюра адресована не только читателям, способным проникнуться философско-математической идеей автора, но и скептически настроенным читателям, которых, возможно, интересуют только математические аспекты этой идеи.

1 Введение

Изучается вопрос о материалистической интерпретации принципа наименьшего действия и вопрос о материалистической интерпретации квантовой механики. Осуществляя выход за рамки классической механики, мы от представления частицы материальной точкой в физическом пространстве (т. е., геометрической точкой, имеющей собственную массу), перешли к представлению частицы в виде особенности векторного поля скоростей частичек материи, замкнутой своими линиями тока на 3-мерной сфере, и имеющей собственную угловую скорость в 4-мерном евклидовом пространстве эволюционирующей 3-сферы $\mathbb{R}^4 = r * S^3$, где радиус сферы r и эволюционный параметр τ связаны зависимостью $\tau = \log(r)$. Иначе говоря, отныне инерциальное многообразие динамической системы 4-мерного пространства, образованное предельными циклами, замыкающимися на 3-сфере, является прообразом материальной точки, а в силу того, что абсолютное время является функцией полярной координаты пространства \mathbb{R}^4 , динамическая система представляет собой векторное поле скорости материи в эволюции. Более того, интерпретация линий тока векторного поля 4-мерного пространства (соответствующих логарифмическим спиралям в \mathbb{R}^4) как всевозможных траекторий свободного движения предельных циклов приводит к необходимости метафизического расширения 3-мерного евклидова пространства, до цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Это позволило нам истолковать принцип наименьшего действия как утверждение о том, что частица

движется по пути, доставляющему минимум полному (суммарному) числу оборотов особенности, а квантовую механику интерпретировать как задачу о случайном блуждании особенности. Вместе с тем, выбор в качестве метафизического расширения пространства эволюционирующей 3-сферы является упрощением, тогда как для учёта всех физических феноменов (в том числе калибровочных связностей) необходимо изучать эволюционирующую гипersферу 8-мерного пространства с нейтральной метрикой, которая укладывается на 7-сферу 8-мерного евклидова пространства.

1.1 О динамических потоках

С давних времён люди пытались понять природу вещей. Сначала умозрительно (как в поэме Лукреция "О природе вещей"), а потом с привлечением разнообразных опытов и изощрённого математического аппарата. Однако, несмотря на то, что к настоящему времени многие тайны природы уже раскрыты и описаны в виде законов, до сих пор нет понимания их первопричины. С точки зрения автора, для полного понимания законов природы, нам необходимо их вывести из одного простого (но материалистического, а не идеалистического) принципа. Дело в том, что у нас уже имеется обобщающий все законы природы принцип, а именно, принцип наименьшего действия. Осталось лишь подвести под него материалистическое основание, где действие толковалось бы как длина траектории частичек материи в подходящем многообразии.

Хорошо известно [1], что материя (как философская категория) в случае простейшего ее движения имеет механическую (физическую) форму. Однако не существует математического описания движущейся материи, из которого следова-

1 Введение

ло бы образование этой формы материи, и вот поэтому настоящая монография (представляющая собой коллекцию математических заметок автора) призвана восполнить данный пробел.

А начнём мы наш экскурс с представления динамической системы, которая служит прообразом материальной точки. Пусть на плоскости (x, y) задана динамическая система с предельным циклом на единичной окружности

$$\Gamma = \partial\varphi + \rho\partial\rho \quad (1.1.1)$$

где $\rho = \log \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\partial\varphi = ydx - xdy \quad \partial\rho = xdx + ydy \quad (1.1.2)$$

линии тока которой представляют собой предельные циклы в виде логарифмических спиралей, замыкающихся на единичной окружности. Тогда из уравнения $\Gamma = 0$ следует выражение

$$-\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho} \quad (1.1.3)$$

которое с учётом отображения плоскости (x, y) на цилиндр (ρ, φ) служит аналогом гравитационного потенциала материальной точки. Аналогично получается выражение для n предельных циклов с центрами в точках (x_i, y_i)

$$\sum_1^n -\frac{\partial\rho_i}{\partial\varphi_i} = \sum_1^n \frac{1}{\rho_i} \quad (1.1.4)$$

где $\rho_i = \log \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$,

$$\begin{aligned} \partial\varphi_i &= (y - y_i)\partial x - (x - x_i)\partial y \\ \partial\rho_i &= (x - x_i)\partial x + (y - y_i)\partial y \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

1 Введение

В свою очередь, для переноса частицеподобной динамической системы в евклидово пространство эволюционирующей 3-сферы \mathbb{R}^4 необходимо иметь в виду, что на S^3 существует три линейно независимых и ортогональных друг другу (в метрике 4-мерного евклидова пространства) линейных векторных поля

$$\begin{aligned}\partial\varphi_x &= -x_2\partial x^1 + x_1\partial x^2 - x_4\partial x^3 + x_3\partial x^4 \\ \partial\varphi_y &= -x_4\partial x^1 - x_3\partial x^2 + x_2\partial x^3 + x_1\partial x^4 \\ \partial\varphi_z &= -x_3\partial x^1 + x_4\partial x^2 + x_1\partial x^3 - x_2\partial x^4\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

и учесть, что $\partial\rho = x_1\partial x^1 + x_2\partial x^2 + x_3\partial x^3 + x_4\partial x^4$, а $\rho = \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$. Вместе с тем, поскольку векторные поля $\partial\varphi_x, \partial\varphi_y, \partial\varphi_z$ являются генераторами алгебры кватернионов (и одновременно базисом алгебры Ли этой алгебры) относительно операции умножения векторных полей

$$A * B = \nabla_B A = \sum_{i=1}^n \nabla_B a^i \partial x_i = \sum_{i=1}^n b^j \frac{\partial a^i}{\partial x_j} \partial x_i\tag{1.1.7}$$

то произвольное векторное поле

$$\partial\varphi = X\partial\varphi_x + Y\partial\varphi_y + Z\partial\varphi_z\tag{1.1.8}$$

где $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, удовлетворяет уравнению $\nabla_{\partial\varphi}\partial\varphi = -\partial\rho$, а следовательно оно принадлежит множеству единичных чисто мнимых кватернионов (то есть её алгебре Ли), и поэтому динамическая система с инерциальным многообразием на 3-мерной единичной сфере задаётся уравнением

$$\Gamma = \partial\varphi + \rho\partial\rho\tag{1.1.9}$$

которое в цилиндрическом многообразии $\mathbb{R}^3 \times S^1$ образует ньютонов гравитационный потенциал $-\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho}$, где $\rho =$

1 Введение

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а координаты x, y, z соответствуют параметризованным интегральным линиям векторных полей $d\varphi_x + \partial\rho, d\varphi_y + \partial\rho, d\varphi_z + \partial\rho$.

Обратимся теперь к вопросу о динамике особенности векторного поля в \mathbb{R}^4 . Если свободное движение особенности в координатах цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$ есть движение по произвольным винтовым линиям цилиндра $\mathbb{R} \times S^1$, которое подчиняется уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\tau} * \frac{dr}{d\tau} = m^2 \quad (1.1.10)$$

то координаты φ, r связаны уравнением

$$\varphi * r = \text{const} \quad (1.1.11)$$

откуда следует, что φ, r это образ изотропных координат произвольной псевдоевклидовой плоскости пространства Минковского на цилиндре $\mathbb{R} \times S^1$, а m это характеристика инерциального многообразия, которая служит прообразом релятивистской массы материальной точки. Заметим при этом, что в компактифицированном пространстве Минковского изотропный конус представляет собой евклидово пространство \mathbb{R}^3 , к точке отсчёта которого приклеена трёхмерная сфера S^3 , а φ это широта изотропной сферы. Вместе с тем, надо понимать, что квадрат дифференциального интервала пространства Минковского равен произведению $ds^2 = d\varphi * dr$, которое можно интерпретировать как квадрат предельно малого расстояния, пройденного особенностью векторного поля в базе накрытия. А поскольку пространство Минковского покрывает 4-сферу (за исключением полярных шапок), то интервал пространства Минковского равен длине траектории обмотки тора $S^3 \times S^1$, намотанной на 4-сферу без полярных шапок. В первой заметке нашего сборника ('Хаотическая динамика

1 Введение

электрона') на примере отображения псевдоевклидовой плоскости на классический тор и сферу полярных шапок мы показываем, что такая траектория наматывается на большие окружности сферы, а следовательно интервал псевдоевклидовой плоскости факторизуется кратным числом оборотов особенности векторного поля (в данном случае - предельного цикла) вокруг большой окружности сферы. Тем самым, факторизация действия материальной точки является первым шагом для перехода от классической механики к квантовой.

Рассмотрим теперь следствие сохранения базы накрытия для динамической системы в целом. Сохранение длины и формы больших окружностей S^4 влечёт за собой локальное сохранение произведения дифференциалов $d\varphi * dr$ при произвольном выборе направления единичного вектора $\partial\varphi$, что, в свою очередь, выделяет узкий класс псевдоримановых многообразий с локальной квадратичной дифференциальной формой

$$dS^2 = e^{2\varphi(t,r)} dt^2 - e^{-2\varphi(t,r)} dr^2 \quad (1.1.12)$$

при произвольном выборе направления единичного вектора ∂r . Источником этих специальных псевдоримановых преобразований пространства Минковского служат инерциальные многообразия, которые возмущают (то есть искажают) вакуумное векторное поле $\partial\varphi + \partial\rho$. Действительно, на расстоянии ρ_0 от инерциального многообразия Γ_0 цилиндрическое многообразие трансформируется следующим образом

$$\begin{aligned} \varphi' &= e^{\frac{1}{\rho_0}} \varphi \\ r' &= e^{-\frac{1}{\rho_0}} r \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

эквивалентным преобразованию динамической системы $\partial\varphi + \partial\rho$ в динамическую систему Γ_0 , что в свою очередь эквива-

1 Введение

лентно соответствующему псевдориманову преобразованию пространства Минковского. Вместе с тем, если допустить, что геометрия базы накрытия не сохраняется (то есть, допустить локальную замену сферы сфероидом), то квадратичная форма изотропного конуса пространства Минковского локально может трансформироваться произвольным образом, и тогда из пространства Минковского получится псевдориманово многообразие с произвольной локальной квадратичной дифференциальной формой, а инвариантное действие вдоль линии тока векторного поля $X(\tau)$ в изотропных координатах пространства Минковского (X_1, X_2, X_3, X_4) равно

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{i,j \in \{1, \dots, 4\}} \left(\frac{dX_i}{d\tau} \frac{dX_j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \quad (1.1.14)$$

где $i \neq j$. В то же время, поскольку векторное поле $X(\tau)$ должно обеспечивать экстремум функционалу действия, то (как показано в разделе "Минимальные потоки и поверхности" главы "О параллелепипедах в алгебре и топологии") дуальная голономному векторному полю $X(\tau)$ дифференциальная форма $\zeta(x) = \zeta_1 dx^1 + \zeta_2 dx^2 + \zeta_3 dx^3 + \zeta_4 dx^4$ должна удовлетворять уравнению $d * \zeta(x) = 0$, где $\zeta^2(x) = 1$, а $*$ – оператор Ходжа для метрики пространства Минковского. При этом, в случае сохранения геометрии базы накрытия при фиксированном времени t , гравитационный потенциал $\varphi(x)$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 должен удовлетворять уравнению $d * d\varphi(x) = 0$.

Далее, для достижения намеченной цели, нам необходимо выбрать адекватную математическую конструкцию движущейся материи и правильно ответить на вопрос о том, где и как она движется. Имея в виду поставленную перед нами задачу, мы рассмотрим алгебру векторных полей, соответству-

1 Введение

ющих локальной алгебраической структуре пространства-времени. При этом мы исходим из того, что локальная алгебраическая структура пространства-времени заложена в алгебраической структуре уравнений движения квантовой частицы. Тем самым, нас интересуют векторно-полевые представления алгебр альтернионов [2], образованных матрицами Паули и Дирака, т.е. алгебр Клиффорда, в которые вкладываются евклидово пространство и пространство Минковского соответственно.

В заметке “О некоторых приложениях алгебры векторных полей” настоящего сборника показано, что интересующая нас матричная алгебра $M_4(\mathbb{C})$ может быть представлена алгеброй линейных векторных полей, у которой порождающие векторные поля (генераторы алгебры) касательны к гиперболам 8-мерного евклидова пространства и псевдоевклидова пространства с нейтральной метрикой. Иначе говоря, алгебра Ли $sl(4, \mathbb{C})$ изоморфна алгебре Ли векторных полей Киллинга 8-мерного пространства с евклидовой и нейтральной метрикой. Кроме того, там же показано, что алгебра Ли касательных линейных векторных полей 4-мерного пространства с евклидовой метрикой изоморфна $su(2)$, а алгебра Ли касательных линейных векторных полей 6-мерного пространства с полуевклидовой метрикой изоморфна $su(3)$.

Таким образом, динамическая система, соответствующая вакуумному векторному полю (то есть, векторному полю, длины траекторий которого глобально минимальны в 8-мерном пространстве с нейтральной метрикой) представляет собой суперпозицию двух векторных полей, а именно, ортогонального и касательного к гиперболам этого пространства. Кроме того, алгебра Ли векторных полей, касательных к гиперболам \mathbb{R}^8 , порождает дублет пространств Минковского с инверсной метрикой, то есть $(+, -, -, -)$ и $(-, +, +, +)$. Сле-

1 Введение

довательно, для более глубокого изучения симметрий этой динамической системы мы должны обратить внимание на финслерово произведение дублета пространств Минковского, в котором поступательное и вращательное движение особенности порождает фазовое пространство материальной точки, то есть, её траекторию и 4-импульс. В свою очередь, гипersфера пространства с нейтральной метрикой положительного радиуса гомеоморфна $\mathbb{R}^4 \times S^3$, и при этом она легко укладывается (отображается) на сферу S^7 8-мерного евклидова пространства \mathbb{R}^8 . Действительно, пусть дана гипersфера единичного радиуса

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = 1 \quad (1.1.15)$$

и сфера радиуса $\rho \geq 1$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = \rho \quad (1.1.16)$$

Тогда на пересечении сферы и гипersферы лежит клиффордов тор $S^3 \times S^3$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{\rho+1}{2} \\ x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = \frac{\rho-1}{2} \end{cases} \quad (1.1.17)$$

который легко укладывается на сферу единичного радиуса

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{\rho+1}{2\rho} \\ x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = \frac{\rho-1}{\rho^2} \end{cases} \quad (1.1.18)$$

и если мы сделаем замену $\tau = \log \rho$, где $\tau \in \mathbb{R}^+$ и примем во внимание изоморфизм $\mathbb{R}^+ * S^3 = \mathbb{R}^4$, где звёздочкой обозначено прямое произведение с особенностью в нулевой точке, то тем самым мы получим на сфере S^7 сложение $\mathbb{R}^+ * S^3 \times S^3$ гомеоморфное гипersфере. Вместе с тем,

1 Введение

поскольку $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times S^1$, где пространство эволюционирующей 3-сферы \mathbb{R}^4 представлено в виде произведения 3-мерного евклидова пространства и окружности, то мы имеем ещё и эквивалентное представление слоения сферы, а именно, $\mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^3$.

Тем самым, концептуально мы исходим из того, что реальная Вселенная это динамический поток на семимерной сфере, поэтому вакуум, без учёта эволюционной составляющей, представляет собой глобально-минимальное векторное поле скоростей материи, образующее на поверхности сферы S^7 слоение $\mathbb{R}^+ * S^3 \times S^3 = \mathbb{R}^3 \times S^1 \times S^3$, типичный слой которого имеет форму клиффордова тора $S^3 \times S^3$ или цилиндра $\mathbb{R}^3 \times S^3$. Однако, поскольку глобально-минимальное векторное поле скоростей материи эволюционирует к своему абсолютно-минимальному состоянию так, что в процессе эволюции радиус одной из сфер клиффордова тора увеличивается, а радиус другой сферы уменьшается, то с учётом эволюции типичного слоя трансформируется и всё слоение.

Динамические потоки на семимерной сфере, которые не совпадают с глобально-минимальным векторным полем, но остаются локально-минимальными векторными полями скоростей материи, мы трактуем как физические поля и частицы. При этом, если в пространстве эволюционирующей 3-сферы \mathbb{R}^4 векторное поле образует особенности (компактные инерциальные многообразия, в которых потоки замыкаются), то они ассоциируются с фермионами, а если потоки замыкаются только в дуальном пространстве \mathbb{R}^4 с инверсной метрикой, то особенности ассоциируются с бозонами. Например, фотон это предельный цикл (окружность) дуального пространства, который в пространстве Минковского поступательно движется по изотропной прямой, лежащей в произвольной плоскости (z, t) , и вращается в плоскостях (x, t) ,

1 Введение

(y, t) . Вместе с тем, потоки не обязаны замыкаться в дуальном пространстве, и тогда эти незамкнутые потоки воспринимаются в пространстве Минковского как композиция дифференциальных форм связности $A(x)$, удовлетворяющих уравнению $d * A(x) = 0$.

Заметим также, что компактные векторные поля служат источником калибровочных симметрий, а именно: окружность обладает симметриями группы $U(1)$, трёхмерная сфера - симметриями группы $SU(2)$, а произведение $S^1 \times S^3$, у которого радиус окружности равен радиусу сферы, обладает симметриями группы $SU(3)$. Однако, поскольку в результате эволюции динамического потока в произведении $S^3 \times S^1 \times S^3$ имеется пара $S^1 \times S^3$ как с разными так и с равными радиусами окружности и сферы, то в первом случае происходит нарушение симметрии, а во втором - нет.

Итак, подбираясь к изучению динамических потоков на сфере S^7 , мы ответили на некоторые философские вопросы и обозначили направление будущих исследований движущейся материи. Впрочем, всё дальнейшее (основное) содержание этой монографии представляет собой шаг назад, который лишь подготавливает математическую почву для достижения высшей цели.

1.2 О принципе наименьшего действия

На примере простой воображаемой модели движения колец, “надетых” на бесконечный цилиндр и уносимых потоком движущейся материи, мы покажем, что принцип минимальности угла поворота кольца эквивалентен принципу наименьшего действия одномерной релятивистской механики. Кроме того, мы покажем, что динамика колец, движущихся под действием потока, с точки зрения локального наблюдателя эквивалентна движению по минимальному пути в псевдоримановом многообразии, индуцированном этим потоком. Следует также отметить, что кольцо нашей модели формируется потоком материи, поскольку оно представляет собой особенность векторного поля скоростей частичек материи, линии тока которого замыкаются в окружность, параллельную задающей окружности цилиндра.

Геометрия модели основана на отображении накрытия бесконечного цилиндра псевдоевклидовой плоскостью, поэтому поместим здесь необходимые математические сведения. Пусть у нас имеется псевдоевклидова плоскость (x, t) , на которой задан квадрат метрического интервала $s^2 = t^2 - x^2$. Тогда изотропный конус, который представляет собой две пересекающиеся прямые, определяется выражением $t^2 - x^2 = 0$, причем относительные координаты x, t псевдоевклидовой плоскости связаны с ее абсолютными изотропными координатами X, T формулами

$$\begin{aligned} X &= t - x, & 2t &= X + T \\ T &= t + x, & 2x &= T - X \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

При этом, для квадрата метрического интервала имеет место

1 Введение

выражение

$$s^2 = t^2 - x^2 = XT \quad (1.2.2)$$

а для ассоциированного с ним скалярного произведения справедливо

$$a \cdot b = a_t b_t - a_x b_x = a_X b_T + a_T b_X \quad (1.2.3)$$

Гиперболический поворот псевдоевклидовой плоскости на угол φ в изотропных координатах задается формулой

$$T' = e^\varphi T, \quad X' = e^{-\varphi} X \quad (1.2.4)$$

откуда немедленно получается гиперболический поворот псевдоевклидовой плоскости в относительных координатах t, x

$$\begin{aligned} t' &= \cosh(\varphi)t + \sinh(\varphi)x \\ x' &= \sinh(\varphi)t + \cosh(\varphi)x \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Изотропные координаты времениподобного вектора v , имеющего длину $|v| = \sqrt{v_t^2 - v_x^2}$ и угол φ между вектором v и осью t , равны

$$v_T = \pm e^\varphi |v|, \quad v_X = \pm e^{-\varphi} |v| \quad (1.2.6)$$

а относительные координаты t'', x'' , параметризованные с помощью изотропных координат вектора v по формулам

$$t''(\tau) = |v_T| \tau = e^\varphi |v| \tau, \quad x''(\tau) = |v_X| \tau = e^{-\varphi} |v| \tau \quad (1.2.7)$$

с учетом тривиальной параметризации координат t', x'

$$t'(\tau) = \tau, \quad x'(\tau) = \tau \quad (1.2.8)$$

образуют квадрат метрического интервала

$$s^2 = e^{2\varphi} v^2 t'^2 - e^{-2\varphi} v^2 x'^2 \quad (1.2.9)$$

1 Введение

Следовательно гладкое времениподобное векторное поле $v(x, t)$, заданное на псевдоевклидовой плоскости (x, t) , индуцирует на ней псевдориманово многообразие (x'', t'') с квадратом метрического интервала

$$ds^2 = e^{2\varphi} v^2 dt^2 - e^{-2\varphi} v^2 dx^2 \quad (1.2.10)$$

причем единичное векторное поле индуцирует метрику

$$ds^2 = e^{2\varphi} dt^2 - e^{-2\varphi} dx^2 \quad (1.2.11)$$

Пусть теперь у нас имеется цилиндр $\mathbb{R} \times S^1$ с образующими координатами (ϕ, r) . Тогда отображением псевдоевклидовой плоскости на цилиндр является соответствие

$$\phi = |\pi T| \bmod 2\pi, \quad r = X \quad (1.2.12)$$

которое одну изотропную координатную линию наматывает на образующую окружность цилиндра, а вторую изотропную координату отождествляет с линейной образующей цилиндра.

Далее, приступая к вопросу о динамике нашей модели, введем удобную систему обозначений. Гладкое векторное поле цилиндра ассоциированное с потоком движущейся материи мы обозначим

$$\begin{aligned} v &= v_T(X, T) \frac{\partial}{\partial T} + v_X(X, T) \frac{\partial}{\partial X} \\ &= v_t(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + v_x(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

а поле ускорений

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{dv}{d\tau} = \dot{v}_T(X, T) \frac{\partial}{\partial T} + \dot{v}_X(X, T) \frac{\partial}{\partial X} \\ &= \dot{v}_t(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + \dot{v}_x(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

1 Введение

Заметим при этом, что мы не требуем выполнения условия периодичности векторного поля по изотропной координате T , поскольку поток материи постоянно эволюционирует, а это не предполагает стационарности векторного поля. Заметим также, что координата T , кроме геометрического назначения, выполняет роль абсолютного времени. Пусть теперь вектор ускорения поступательного движения кольца (без учета его вращательной составляющей) равен

$$\ddot{\xi} = \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{d^2 \xi_T}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{d^2 \xi_X}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{d^2 \xi_t}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d^2 \xi_x}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.2.15)$$

где $\xi = (\xi_X, \xi_T) = (\xi_x, \xi_t)$ — радиус-вектор кольца, представленного точкой на плоскости. Однако, поскольку кольцо движется в потоке материи, то дифференциальное приращение скорости кольца относительно потока равно

$$du = (\ddot{\xi} - \dot{v}) d\tau \quad (1.2.16)$$

а дифференциальной мерой воздействия потока на виртуальное дифференциальное перемещение кольца $dy = dT + dX = dt + dx$ служит скалярное произведение

$$\begin{aligned} (dy, du) / d\tau &= dT \dot{u}_X + dX \dot{u}_T = dT (\ddot{\xi}_X - \dot{v}_X) + dX (\ddot{\xi}_T - \dot{v}_T) \\ &= dt \dot{u}_t - dx \dot{u}_x = dt (\ddot{\xi}_t - \dot{v}_t) - dx (\ddot{\xi}_x - \dot{v}_x) \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

равное приращению угла поворота (подкрутке) кольца на дифференциальном элементе его виртуального пути под действием потока. Интегральной мерой воздействия потока на виртуальное (возможное) перемещение кольца служит кри-

1 Введение

волинейный интеграл по виртуальному пути кольца L

$$S = \int_L [dT (\ddot{\xi}_X - \dot{v}_X) + dX (\ddot{\xi}_T - \dot{v}_T)] = \int_L [dt (\ddot{\xi}_t - \dot{v}_t) - dx (\ddot{\xi}_x - \dot{v}_x)] \quad (1.2.18)$$

равный приращению угла поворота кольца на протяжении всего виртуального пути. Для полноты модели осталось лишь сформулировать принцип движения кольца, согласно которому из множества виртуальных путей мы выбираем реальный путь.

Итак, с точки зрения абсолютного наблюдателя (располагающего изотропными координатами X, T) или глобального наблюдателя (располагающего относительными координатами x', t'), кольцо движется по пути, параметризованному временем, так, чтобы подкрутка кольца (которая измеряется интегралом 1.2.18) была минимальной.

Заметим при этом, что в такой формулировке принципа минимальности потока предполагается произвольность гладкого векторного поля $\dot{v}(x, t)$, но на самом деле поле ускорений должно быть минимальным. Действительно, если в интегральном выражении 1.2.18 собственное ускорение кольца принять равным нулю, то мы получим приращение угла поворота кольца на произвольном свободном от ускоренного движения пути кольца, то есть при его равномерном поступательном движении

$$S = - \int_L [dT \dot{v}_X + dX \dot{v}_T] = - \int_L [dt \dot{v}_t - dx \dot{v}_x] \quad (1.2.19)$$

а следовательно будет естественно потребовать, чтобы векторное поле $\dot{v}(x, t)$ имело такую форму, которая доставляет

1 Введение

минимум угла подкрутки кольца на произвольном прямолинейном пути L .

Заметим также, что локальный наблюдатель (которого мы ассоциируем с кольцом), не располагает координатами ни абсолютного, ни глобального наблюдателя, но располагает координатами псевдориманова многообразия (x'', t'') , индуцированного потоком материи $v(x, t)$ с помощью метрического соотношения

$$ds^2 = dt''^2 - dx''^2 = e^{2\varphi} dt^2 - e^{-2\varphi} dx^2 \quad (1.2.20)$$

и поэтому для локального наблюдателя движение кольца по принципу минимальности потока должно быть заменено на принцип движения по минимальному (кратчайшему) пути в псевдоримановом многообразии (x'', t'') .

Постоянное по направлению единичное векторное поле псевдоевклидовой плоскости, линии тока которого отображаются в винтовые линии цилиндра, мы сопоставляем с нулевым (вакуумным) состоянием, а гиперболический угол отклонения произвольного единичного векторного поля от направления, выделенного вакуумным состоянием (который индуцирует метрику 1.2.11), мы сопоставляем с гравитационным потенциалом. Если ограничиться единичными векторными полями, то с точки зрения локального наблюдателя, интегральной мерой потока, индуцированного на виртуальном пути кольца, служит выражение

$$S = \int |\dot{\xi}| \sqrt{e^{2\varphi(x,t)} dt^2 - e^{-2\varphi(x,t)} dx^2} \quad (1.2.21)$$

Вместе с тем, произвольное векторное поле, ассоциированное с потоком материи, не обязано быть единичным, но его всегда можно разложить на сумму единичного и нулевого векторного поля, а нулевое по модулю гладкое векторное поле, линии

1 Введение

тока которого на цилиндре замкнуты в окружности, параллельные его образующей окружности, индуцирует эффективное кручение образующей линии цилиндра, а следовательно фазовый сдвиг линейной образующей цилиндра в классическом пределе можно сравнить с электрическим потенциалом.

Таким образом, топологические особенности векторного поля цилиндра, имеющие замкнутые линии тока, образуют кольца, которые служат источником возмущения вакуума, а принцип их движения имеет некоторое сходство с принципом движения материальных точек. Действительно, вектор скорости кольца $\dot{\xi}$ можно сопоставить с релятивистским импульсом частицы, имеющей массу $|\dot{\xi}|$, а разложение векторного поля скоростей потока $v(x, t)$ на единичную и нулевую по модулю части $v(x, t) = g(x, t) + a(x, t)$, где $|g(x, t)| = 1$ и $|a(x, t)| = 0$, можно интерпретировать как выделение гравитационного и электромагнитного вектор-потенциалов, а тождественное равенство $\ddot{\xi} = \dot{g}(x, t)$ сопоставить с принципом эквивалентности гравитационной и инертной массы. Более того, по сути это предквантовая модель, поскольку угол подкрутки полностью обертывает кольцо целое число раз, то есть квантуется.

1.3 О квантовой механике

В предыдущем разделе на примере потока, движущегося по поверхности бесконечного цилиндра, мы построили простую модель классической механики, а теперь сосредоточим свое внимание на квантовых аспектах нашей модели. Прежде всего заметим, что естественным инструментом для описания динамики вращательного движения кольца особенности, радиус которого эволюционирует, является алгебра комплексных чисел. Действительно, пусть динамика вращательного движения подчиняется принципу наименьшего действия, а действием служит угол поворота кольца

$$S = \varphi = \int_0^{\tau} \omega(t) dt \quad (1.3.1)$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Тогда

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = 0 \quad (1.3.2)$$

откуда следует

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \text{const} \quad (1.3.3)$$

Вместе с тем, если радиус r кольца окружности связан с эволюционным параметром времени t зависимостью $at = \log(r)$, где $a \in \mathbb{R}$, тогда радиальная составляющая скорости кольца V_r равна

$$V_r = \frac{dr}{dt} = ar = a(x\partial x + y\partial y) \quad (1.3.4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а тангенциальная составляющая V_τ равна

$$V_\tau = \frac{d\varphi(t)}{dt} r = b(y\partial x - x\partial y) \quad (1.3.5)$$

1 Введение

где $b \in \mathbb{R}$. Таким образом, имея в виду соответствие алгебры комплексных чисел \mathbb{C} и алгебры линейных векторных полей с образующими

$$1 = x\partial x + y\partial y \quad i = y\partial x - x\partial y \quad (1.3.6)$$

получим

$$V = V_r + V_\tau = a + bi = c \quad (1.3.7)$$

где $c \in \mathbb{C}$.

Далее в качестве особенности векторного поля мы возьмём трёхмерную сферу. Для этого компактифицируем пространство Минковского так, чтобы изотропный конус превратился в евклидово пространство, к нулевой точке которого приклеена трёхмерная сфера. Такая компактификация получается в результате предельного сжатия временной координаты и сворачивания всех псевдоевклидовых плоскостей пространства Минковского в цилиндры единичного радиуса. Действительно, предельное сжатие укладывает одни изотропные прямые конуса на 3-мерную плоскость, а другие (свёрнутые в окружности) - на 3-мерную сферу. При этом, посредством сжатия времени до нуля, на изотропном пространстве индуцируется евклидова метрика. Посмотрим теперь на 3-сферу изотропного пространства как на динамическую систему. Пусть на поверхности сферы движется линейный и замкнутый поток векторного поля скоростей частичек материи. Тогда этот поток характеризуется собственным парным вращением (вращением тора Клиффорда), алгебра которого в 4-мерном евклидовом пространстве задаётся изоморфной $su(2)$ алгеброй Ли касательных линейных векторных полей 3-сферы. Тем самым, замкнутый поток сферической особенности является аналогом спина квантовой частицы. Кроме того, 4-импульс квантовой частицы можно интерпретировать как

1 Введение

особенность, вращающуюся вокруг оси, направление которой задаётся 4-вектором угловой скорости $\omega = (\omega_t, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ а величина скорости вращения определяется длиной этого вектора в метрике Минковского. Далее мы полагаем, что наша особенность блуждает по пространству Минковского, а поэтому положение особенности в 3-мерном евклидовом пространстве и его угловая скорость суть случайные величины. Однако, если угловая скорость сферической особенности окажется вполне определённой величиной, то её положение будет равномерно распределенно по всему евклидову пространству и угол поворота сферической особенности можно сравнить с фазовым действием квантовой частицы $\frac{S}{\hbar}$

$$\frac{S}{\hbar} = \omega \cdot x = \omega_t t - \omega_x x - \omega_y y - \omega_z z \quad (1.3.8)$$

Такая абсолютно нелокализованная сферическая особенность описывается вероятностной волновой функцией $\Psi_{\omega, \varphi} = e^{iS/\hbar + i\varphi}$, где квадрат волновой функции равен вероятности встретить где-то (в произвольной точке пространства-времени) особенность, имеющую угловую скорость ω , а аргумент волновой функции равен углу поворота (фазовому действию) особенности в точке x . Тогда, вероятностную суперпозицию двух волновых функций $\Psi_{\omega^1}, \Psi_{\omega^2}$ можно описывать волновой функцией

$$\Psi = c_1 \Psi_{\omega^1} + c_2 \Psi_{\omega^2} \quad (1.3.9)$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, причем поскольку $\Psi^2 = \Psi^* \Psi = c_1 \bar{c}_1 + c_2 \bar{c}_2 = 1$, то квадраты модулей этих комплексных коэффициентов задают вероятности наблюдения соответствующих случайных событий, а сама волновая функция имеет смысл математического ожидания случайной величины фазового действия на пространстве событий (ω^1, ω^2) . С другой стороны, волновую

1 Введение

функцию $\Psi(x)$ можно интерпретировать как амплитуду вероятности локализации особенности, где $\Psi^*(x)\Psi(x)$ – вероятность локализации особенности с нулевой фазой в точке x , а $\arg(\Psi(x))$ – фаза локализованной особенности. Понятно, что от суперпозиции из двух нелокализованных особенностей можно перейти к конечному, счетному и даже непрерывному случаю

$$\psi(x) = \int c(k)e^{ikx}dk \quad (1.3.10)$$

Упрощая непрерывную волновую функцию до одного измерения и применяя к ней интегральное преобразование фурье, получим волновую функцию

$$\psi(k) = \int c(x)e^{ikx}dx \quad (1.3.11)$$

которая подсказывает нам, что пространство локализованных особенностей дуально к пространству нелокализованных особенностей. Таким образом, локализованные потоки также могут служить кирпичиками для построения математического аппарата квантовой механики.

В качестве иллюстрации наших аналогий с квантовой физикой покажем сейчас, что в классическом пределе марковский процесс случайного блуждания локализованной особенности приводит к фейнмановской формулировке квантовой механики. Пусть вероятностное поведение локализованной особенности описывается марковским процессом случайного блуждания, в котором элементарным случайным событием является свободный пробег. Со свободным пробегом мы свяжем такие случайные величины как абсолютное время свободного пробега $\Delta\tau$, длину свободного пробега Δx в евклидовом пространстве наблюдателя и фазовую длину свободного пробега $\Delta\phi = k\Delta x + \varphi$, где $k = \frac{m}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta\tau}$, φ – начальная фаза локализованной особенности. Тогда, имея в виду равную веро-

1 Введение

ятность свободных пробегов нелокализованной особенности, и меняя для удобства обозначения длину свободного пробега Δx на y , без учета нормировочного множителя получим интегральную сумму

$$\psi(x, \tau_0 \rightarrow \tau_0 + \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{my^2}{\hbar\Delta\tau} + i\varphi(x-y)} \psi(x-y, \tau_0) dy \quad (1.3.12)$$

которая вычисляет амплитуду локализации особенности в точке x в конечный момент времени свободного пробега $\tau_0 + \Delta\tau$ по значениям амплитуды вероятности локализации особенности в точках $x-y$ в начальный момент времени свободного пробега τ_0 . Амплитуда вероятности локализации особенности за два свободных пробега вычисляется как произведение двух интегральных сумм

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau_0 \rightarrow \tau_0 + \Delta\tau_1) \times \psi(x, \tau_0 + \Delta\tau_1 \rightarrow \tau_0 + \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{my^2}{\hbar\Delta\tau_1} + i\varphi(x-y)} \psi(x-y, \tau_0) dy \times \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{my^2}{\hbar\Delta\tau_2} + i\varphi(x-y)} \psi(x-y, \tau_0 \rightarrow \tau_0 + \Delta\tau_1) dy \quad (1.3.13) \end{aligned}$$

В свою очередь, амплитуда вероятности локализации особенности за n свободных пробегов вычисляется как произведение n интегральных сумм

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \psi(x, \tau_0 + \dots + \Delta\tau_{i-1} \rightarrow \tau_0 + \dots + \Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) = \\ \psi(x, \tau_0 \rightarrow \tau_0 + \Delta\tau_1) \times \dots \\ \times \psi(x, \tau_0 + \dots + \Delta\tau_{n-1} \rightarrow \tau_0 + \dots + \Delta\tau_{n-1} + \Delta\tau_n) \quad (1.3.14) \end{aligned}$$

1 Введение

Таким образом, фейнмановский интеграл по траекториям это по сути предел произведений

$$\lim_{\substack{\Delta\tau_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \prod_{i=1}^n \psi(x, \tau_0 + \dots + \Delta\tau_{i-1} \rightarrow \tau_0 + \dots + \Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) \quad (1.3.15)$$

и поэтому, имея в виду представление интегральных сумм пределом конечных сумм, континуальный интеграл можно представить как бесконечный предел конечного произведения конечных сумм. Действительно, пусть на сферический поток наложено полуклассическое условие, ограничивающее скорость свободного пробега из точки x_j в точку x_k за время от τ_{i-1} до τ_i неравенством $|x_k - x_j| \leq c|\tau_i - \tau_{i-1}|$. Тогда при вычислении амплитуды вероятности локализации особенности за N случайных свободных пробегов принимаем во внимание конечный объем суммирования и для континуального интеграла получаем формулу

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \prod_{k=1}^M \psi(\tau_N, x_k) &= \prod_{i=0}^N \prod_{k=1}^M \psi(\tau_i, x_k) = \\ \lim_{\substack{|\tau_i - \tau_{i-1}| \rightarrow 0 \\ |x_j - x_{j-1}| \rightarrow 0}} \prod_{i=0}^N \prod_{k=1}^M \sum_{j=1}^M F((\tau_i - \tau_{i-1}), (x_k - x_j)) \psi(\tau_{i-1}, x_j) &\quad (1.3.16) \end{aligned}$$

где $F((\tau_i - \tau_{i-1}), (x_k - x_j))$ – амплитуда вероятности перехода из точки x_j в точку x_k за время от τ_{i-1} до τ_i .

Таким образом, компактификация пространства Минковского, при которой изотропный конус трансформируется в соприкасающиеся 3-пространство и 3-сферу, позволяет интерпретировать квантовую частицу как сферический поток, блуждающий по евклидову пространству.

2 Хаотическая динамика электрона

Сначала мы конструируем образ тора на двухслойной оболочке сферы и замечаем, что изометрии образа тора на сфере порождают унитарную группу $U(2)$, а затем устанавливаем, что в результате действия модулярной группы на сфере она факторизуется так, что минимальные (одноэлементные) классы эквивалентности задаются множеством простых чисел. Далее, изучая колебания метафизического маятника, мы формируем представление обмотки сферы для тета-функции Якоби и дзета-функции Римана, а затем, рассматривая хаотическую динамику на сфере, замечаем, что в задаче о случайном блуждании по ломаным линиям обмотки сферы вполне естественным образом возникает понятие комплексной амплитуды вероятности, причем динамика амплитуды вероятности блуждающей частицы подчиняется дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Шредингера.

2.1 Введение

В физике известны два основных направления моделирования электрона. С одной стороны, это множество тороидально кольцевых моделей, начало которым было положено Парсоном [32], а с другой стороны, это стандартная модель электро-слабых взаимодействий, которая берёт начало с работы Янга, Миллса [33], затем была продолжена Глэшоу [34] и закончена

Вайнбергом [35] и Саламом [36]. Однако, несмотря на успешное описание физических свойств электрона в рамках квантовой механики и квантовой теории поля, такие загадочные свойства как происхождение группы калибровочных симметрий электрослабых взаимодействий и происхождение волновой функции электрона остаются непонятными до сих пор. А поскольку эти загадки относятся к вопросам основания физики, то решаться они должны посредством математического моделирования, но с обязательной последующей проверкой на соответствие физическим закономерностям. В данной работе представлена тороидально сферическая модель, из геометрии которой извлекается группа $U(1) \times SU(2)$, а из динамики случайного блуждания по тороидальной обмотке сферы – одномерное уравнение Шредингера. При этом надо чётко понимать, что 'динамика на сфере' это не физика (и даже не альтернатива электрослабой модели), а всего лишь математика, точнее, математический пример одной динамической модели. Пока ещё трудно сказать, какое отношение наша тороидально сферическая модель имеет к реальной Вселенной, но автор уверен [37], что динамические потоки на семимерной сфере это и есть реальная Вселенная.

Во втором и третьем разделе статьи мы готовим математический инструмент, который затем применяем в четвёртом разделе для изучения динамической модели случайного блуждания по виткам тороидальной обмотки сферы. Заметим при этом, что, поскольку даже иррациональные обмотки тора бесконечны, то компактность тороидально сферической модели не противоречит бесконечности пространственно-временных координат. Кроме того, мы полагаем, что в ненаблюдаемых дополнительных измерениях электрон имеет тороидально сферическую форму, и это не противоречит точечноподобной природе электрона в наблюдаемом евклидо-

вом пространстве.

2.2 Действие модулярной группы на сфере

За разъяснениями базовых алгебро-геометрических понятий можно обратиться к [38]. Здесь же мы возьмем декартову плоскость (x, y) с перпендикулярными (в евклидовом смысле) осями координат и построим из неё комплексную плоскость $z = x + iy$. Если совместить оси координат декартовой плоскости (соответственно действительную и мнимую оси комплексной плоскости) с изотропными координатами псевдоевклидовой плоскости, имеющей ортонормальные координаты $(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$, то квадрат псевдоевклидовой длины вектора $\xi = (x, y)$ будет равен произведению xy , а гиперболический угол наклона этого вектора к соответствующей оси координат псевдоевклидовой плоскости будет равен $-\frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{y} \right|$. При этом обычный (евклидов) угол наклона вектора $\xi = (x, y)$ к изотропной прямой x равен $\arctan \left(\frac{y}{x} \right)$.

Факторизация координат декартовой плоскости $z = x + iy$ по модулю единицы

$$x' \equiv x \pmod{1} \quad y' \equiv y \pmod{1} \quad (2.2.1)$$

превращает ее в тор $S^1 \times S^1 \cong (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, и если потребовать сохранения отношения эквивалентности 2.2.1 (что равнозначно сохранению на торе образа узлов целочисленной решетки), то группа допустимых линейных преобразований декартовой плоскости сужается до $SL(2, \mathbb{Z})$. Кроме того, если пренебречь ориентацией прямых (и их обмоток на торе), проходящих через точку отсчета декартовой плоскости, то

2 Хаотическая динамика электрона

группа допустимых преобразований сузится до модулярной группы $SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$. Следует также напомнить, что отображение комплексной плоскости на комплексную плоскость с выколотой точкой

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : \quad x + iy \rightarrow e^{2\pi i(x+iy)} \quad (2.2.2)$$

сворачивает комплексную плоскость в трубочку (бесконечный цилиндр) и выворачивает эту трубочку на плоскость с выколотой точкой, а отображение

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : \quad t \rightarrow e^{2\pi i t(a+ib)} \quad (2.2.3)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, рисует на комплексной плоскости спираль Sp .

Рассмотрим также факторизацию по модулю 2 произведения координат векторов декартовой плоскости, лежащих на прямой линии $y = \tau x$, где $\tau > 0$,

$$(x, y = \tau x) : x'y' \equiv xy = \tau x^2 \pmod{2} \quad (2.2.4)$$

Иначе говоря, с помощью псевдоевклидовой метрики комплексной плоскости мы строим отображение намотки комплексной прямой, эквивалентной времениподобной прямой линии псевдоевклидовой плоскости, на единичную комплексную окружность двойного аргумента

$$(x + i\tau x) \rightarrow 2S^1 : \quad (x + i\tau x) \rightarrow e^{2\pi i \sqrt{x\tau x}} = e^{\pi i \tau x^2} \quad (2.2.5)$$

Зададим, наконец, согласованное с намоткой прямой на окружность, отображение намотки комплексной прямой на комплексную спираль двойного аргумента

$$(rx + i\tau x) \rightarrow 2Sp : \quad (rx + i\tau x) \rightarrow e^{\pi(r-1)x^2} e^{\pi i \tau x^2} \quad (2.2.6)$$

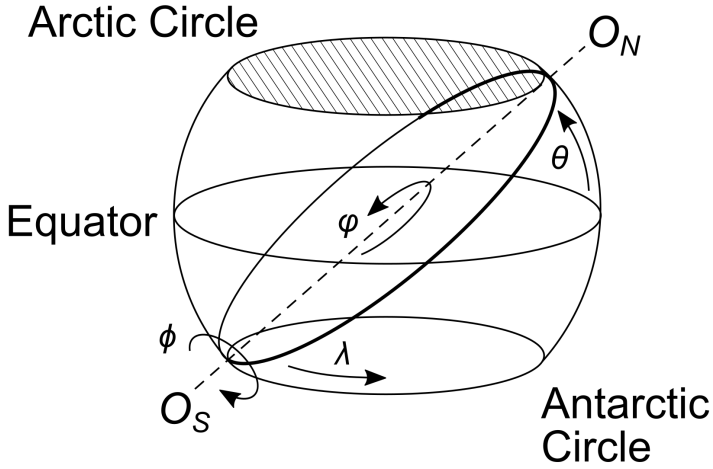


Рис. 2.1: Образ тора на двухслойной оболочке сферы

Приступим теперь к описанию композиции отображений плоскости (x, y) на тор $S^1 \times S^1$ и тора на двухслойную оболочку сферы без полярных шапок $S^2 \setminus \{S, N\}$. Пусть северный полярный круг имеет широту $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, а южный - $-\frac{\pi}{4}$. Тогда долгота тора равна долготе сферы $\lambda = 2\pi\{x\}$, а широта тора

$$2\vartheta - \frac{\pi}{2} = \pi \left(\left\{ y + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.2.7)$$

ограничена широтой сферы без полярных шапок, но дополнена широтой второго слоя сферы. Тем самым, нулевая широта тора будет на северной широте полярного круга, а максимальная широта тора $\pm \frac{\pi}{2}$ будет на южном полярном круге, причём, (имея в виду двухслойную оболочку сферы) положи-

2 Хаотическая динамика электрона

тельная широта тора соответствует точке на сфере, а отрицательная - внутри сферы (отождествляются только максимальные значения широты). Иначе говоря, двойная оболочка сферы это тор, полученный проколом сферы в полюсах, стягиванием границ полюсов к экватору по поверхности сферы и склеиванием этих границ на экваторе. Далее, на северном полярном круге отметим точку O_N , имеющую долготу λ , а на южном полярном круге отметим точку O_S на долготе $\lambda + \pi$ и построим на сфере образ (1,1)-торического узла, то есть проведем через точки O_N, O_S большую окружность сферы так, чтобы она в каждой из этих точек прикасалась (но не пересекала) к соответствующей полярной окружности. Тогда полуокружность $]O_S, O_N[$ с координатами $\varphi([O_S, O_N]) =]0, \pi[$ лежит в одном (например, внешнем) слое, а полуокружность $]O_N, O_S[$ с координатами $\varphi([O_N, O_S]) =]\pi, 2\pi[$ лежит в другом (внутреннем) слое оболочки сферы $S^2 \setminus \{S, N\}$, в то время как точки (O_S, O_N) принадлежат двум слоям одновременно. Итак, теперь у нас появляется возможность представить ещё одно отображение плоскости на двухслойную оболочку сферы

$$\left(\vartheta = \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = 2\pi\{x\}, \quad \varphi = 2\pi\{\rho\} \right) \quad (2.2.8)$$

где $\rho = |y|$ это псевдоевклидова длина отрезка, образованного точкой пересечения оси координат x с линией функции $y = x - x_0$ и произвольной точкой этого графика. При этом, в силу того, что псевдоевклидова длина отрезка равна модулю координаты y , данное отображение совпадает с предыдущим только в полуплоскости $y \geq 0$.

Заметим при этом, что собственные изометрии тора и вращение образа тора на сфере вокруг оси (O_S, O_N) на угол ϕ порождают унитарную группу $U(2)$, а движение тора по обмотке (1,1)-торического узла и вращение вокруг оси (O_S, O_N)

порождают специальную унитарную группу $SU(2)$. Действительно, если $O, O' \in SO(2)$, а $T \in \text{diag} [e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}]$, то $OTO' \in U(2)$, и если $T \in \text{diag} [e^{i\varphi}, e^{i(2\pi-\varphi)}]$, то $OTO' \in SU(2)$, и кроме того, сумма размерностей группы диагональных матриц и двух ортогональных групп равна размерности соответствующей унитарной группы.

Посмотрим сейчас как при гиперболическом повороте псевдоевклидовой плоскости преобразуются угловые значения ϑ , φ двойной оболочки сферы. Пусть на комплексной плоскости задан гиперболический поворот $z' = x' + iy' = e^{\pm\psi}(x + iy) = e^{\psi}x + ie^{-\psi}y$. Тогда, для вектора ξ , образ которого лежит на обмотке (1,1)-торического узла (и в силу чего $\xi_x = \xi_y$), выполняются тождества $\xi'_x \xi'_y = e^{\psi} \xi_x e^{-\psi} \xi_y = \xi_x \xi_y$, $\frac{\xi'_x}{\xi'_y} = e^{2\psi} \frac{\xi_x}{\xi_y} = e^{2\psi}$, мы получим преобразования

$$\begin{aligned} (x + iy) \rightarrow e^{\pm\psi}(x + iy) = (x' + iy') \rightarrow \\ \left(\vartheta' = \arctan(e^{-2\psi}), \varphi' = 2\pi \left\{ \sqrt{\xi_x \xi_y} \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

В свою очередь, при евклидовом повороте изотропных прямых псевдоевклидовой плоскости $z' = x' + iy' = e^{i\phi}(x + iy)$ координаты вектора ξ в системе отсчёта (x', y') сохраняются, то есть $\xi'_{x'} = \xi_x$, $\xi'_{y'} = \xi_y$, поэтому в отображение намотки 2.2.8 следует просто добавить евклидов поворот оболочки вокруг оси (O_S, O_N)

$$\begin{aligned} (x + iy) \rightarrow e^{i\phi}(x + iy) = (x' + iy') \rightarrow \\ \left(\vartheta' = \frac{\pi}{4}, \phi' = \phi, \varphi' = 2\pi \left\{ \sqrt{\xi_x \xi_y} \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Заметим при этом, что тройка произведений всевозможных

2 Хаотическая динамика электрона

операторов $e^{\pm\psi_1}e^{i\phi}e^{\pm\psi_2}$ принадлежит группе $SL(2, \mathbb{R})$, а именно

$$\begin{pmatrix} e^{\psi_1} & 0 \\ 0 & e^{-\psi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\psi_2} & 0 \\ 0 & e^{-\psi_2} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} e^{\psi_1+\psi_2} \cos \phi & e^{\psi_1-\psi_2} \sin \phi \\ -e^{\psi_2-\psi_1} \sin \phi & e^{-\psi_1-\psi_2} \cos \phi \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (2.2.11)$$

где $\phi, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$. Более того, группа $SL(2, \mathbb{R})$ порождается группами специальных диагональных и ортогональных матриц $SD(2, \mathbb{R}), SO(2, \mathbb{R})$, поскольку любое одновременно центроаффинное и эквиаффинное преобразование декартовой плоскости может быть получено как последовательность евклидовых поворотов и эквиаффинных сжатий (растяжений) координат декартовой плоскости. Тем самым, если мы возьмем произвольный элемент $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $SL(2, \mathbb{R})$, то, приравнивая его к матрице, представляющей произведение $e^{\pm\psi_1}e^{i\phi}e^{\pm\psi_2}$, получим тождественные равенства

$$\tan^2 \phi = \left| \frac{bc}{ad} \right|, \quad \psi_1 + \psi_2 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{a}{d} \right|, \quad \psi_1 - \psi_2 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{b}{c} \right| \quad (2.2.12)$$

а поскольку $ad - bc = 1$, то первое тождество упрощается

$$\tan^2 \phi = \left| \frac{bc}{bc + 1} \right| \quad (2.2.13)$$

Таким образом, если потребовать сохранения прообраза точки отсчета тора, намотанного на сферу с выколотыми полюсами (т. е. сохранения узлов целочисленной решетки декартовой плоскости) и пренебречь ориентацией обмотки тора, то мы получим модулярную группу $PSL(2, \mathbb{Z})$, а разбивая

группу $PSL(2, \mathbb{Z})$ на классы эквивалентности по отношению равенства значений углового параметра $\vartheta = \arctan e^{\psi_1 \pm \psi_2}$, мы получим такое разбиение $PSL(2, \mathbb{Z})$ на фактормножество $PSL(2, \mathbb{Z})/\vartheta$, что классы эквивалентности задаются матрицами, образованными исключительно взаимно простыми парами целых чисел (a, d) и (b, c) . В свою очередь, если нас интересует фактормножество $PSL(2, \mathbb{Z})/\vartheta/a$, то его классы эквивалентности можно задать матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & bc + 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

где $b > 0$, а $c < 0$, причем, если b простое число, то класс эквивалентности состоит из единственной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & 1 - p \end{pmatrix} \quad (2.2.15)$$

где $p \in \mathbb{P}$.

2.3 Колебания метафизического маятника

Пусть динамика маятника описывается принципом наименьшего действия, выраженным в полярных координатах псевдоевклидовой плоскости ρ, φ в виде вариационного уравнения

$$\delta \int_0^\tau \left(\frac{\sigma}{2} e^{-2\varphi} + \frac{t}{2} e^{-2\rho} \right) - \frac{1}{2} (\rho'^2 + \varphi'^2) d\tau = 0 \quad (2.3.1)$$

где $t, \sigma \in \mathbb{R}$. Тогда, уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие этому интегральному уравнению, имеют вид си-

2 Хаотическая динамика электрона

стемы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi'' = -\sigma e^{-2\varphi} \\ \rho'' = -t e^{-2\rho} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

откуда вытекает, что параметрическая кривая

$$\begin{cases} \rho = t \log \tau \\ \varphi = \sigma \log \tau \end{cases} \quad (2.3.3)$$

служит решением этой системы. Однако, надо понимать, что мы ищем траекторию движения маятника на торе, натянутом на сферу без полюсов, поэтому полярные координаты положения маятника на псевдоевклидовой плоскости ρ, φ следует отображать на круг с комплексными координатами $\{e^\varphi\} e^{i\rho}$, где фигурные скобки возвращают дробную часть числа.

Далее пусть на декартовой плоскости задан график линейной функции $y = \tau x$, где $\tau = \tan \alpha > 0$, а на соответствующей ей комплексной плоскости он представлен линейной функцией $z = (1 + i\tau)x$. Тогда выражение

$$e^{\pi i y x} = e^{\pi i \tau x^2} = e^{\pi i \tan \alpha x^2} \quad (2.3.4)$$

следует рассматривать как комплексную функцию намотки линии графика на обмотку $(1,1)$ -торического узла тороидальной оболочки сферы единичного радиуса. Заметим при этом, что $\alpha = \vartheta$, где ϑ – широта северного полярного круга, соответствующего обмотке $(1,1)$ -торического узла, на которую наматывается ось псевдоевклидовой плоскости при гиперболическом повороте на угол $\psi = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y}{x} \right|$. Кроме того, поскольку широта тора $\phi = \pi \left(\left\{ y + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right)$ и широта северного полярного круга сферы ϑ связаны формулой

$$\phi = 2\vartheta - \frac{\pi}{2} \quad (2.3.5)$$

то

$$\begin{aligned}\tan \vartheta &= \left| \frac{y}{x} \right| = \tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \phi &= 2 \arctan \left(e^{2\psi} \right) - \frac{\pi}{2} = \text{gd } 2\psi\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Рассмотрим теперь отображение линейной функции $z = (r + i\tau)x + a + ib$, где $\tau > 0$, а $r \in \mathbb{R}$, на экспоненту

$$e^{\pi(r-1+i\tau)x^2+2\pi c} = e^{\pi(r-1)x^2+2\pi a} e^{\pi i \tau x^2+2\pi i b}\tag{2.3.7}$$

где $c = a + ib$, которое следует рассматривать как комплексную функцию намотки линии графика на логарифмическую спираль

$$e^{2\pi c} e^{\pi \left(\frac{r-1}{\tau} + i \right) t}\tag{2.3.8}$$

где $t = \tau x$. Данное отображение можно оживить, если переменной x придать значение времени, параметру τ - значение угловой скорости разворачивания спирали, а параметру $\frac{r-1}{\tau}$ - значение тангенса угла развертки логарифмической спирали.

Далее мы возьмём величину радиуса точки логарифмической спирали R и с помощью отображения

$$R \rightarrow 2\vartheta - \frac{\pi}{2} : \quad \pi \left(\left| R + \frac{1}{2} \right| \bmod 1 - \frac{1}{2} \right)\tag{2.3.9}$$

намотаем нашу спираль на двойную оболочку сферы, диаметр которой в процессе эволюции непрерывно увеличивается. Кроме того, пусть далее действительная величина $\tau > 0$ выполняет роль эволюционного параметра, $\log \tau$ служит параметром линейного времени, а широта линии наблюдателя r на двойной оболочке сферы описывается выражением, формирующим пилообразную волну

$$\pi(-1)^{[r]} (2\{r\} - 1)\tag{2.3.10}$$

2 Хаотическая динамика электрона

Тогда образ эволюционирующей логарифмической спирали на обмотке раздувающейся двойной оболочки сферы задаётся композицией эволюционирующей линии наблюдателя и линии маятника

$$\begin{aligned} \left/ e^{\pi i \tau^\alpha x^2} \right/ &= (-1)^{[e^{\pi \tau x^2}]} \left(2 \left\{ e^{\pi \tau x^2} \right\} - 1 \right) \\ e^{\pi \tau x^2} \left(\left\{ e^{\pi(\gamma-1)\tau x^2} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right) &e^{\pi i \beta \tau x^2} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

где комплексной параметр $\alpha = \beta + i\gamma$ выполняет роль комплексной угловой скорости маятника. Дополнив описание движения маятника движением линии наблюдателя, мы получим выражение

$$\begin{aligned} \left/ e^{\pi i \tau^\alpha x^2 + 2\pi i c x} \right/ &= (-1)^{[e^{\pi \tau x^2 + 2\pi a x}]} \left(2 \left\{ e^{\pi \tau x^2 + 2\pi a x} \right\} - 1 \right) \\ e^{\pi \tau x^2} \left(\left\{ e^{\pi(\gamma-1)\tau x^2} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right) &e^{\pi i \beta \tau x^2 + 2\pi i b x} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

где $c = a + ib \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр угловой скорости наблюдателя. Однако, если зафиксировать местоположение точек измерения (наблюдения) координат на сфере, полагая $x = m \in \mathbb{Z}$, то можно будет наблюдать точки обмотки логарифмической спирали с координатами (ϕ_m, φ_m) , которые со-держатся в выражении

$$\left/ e^{\pi i \alpha \tau m^2 + 2\pi i m c} \right/ \quad (2.3.13)$$

а сумма

$$\theta(c, \tau^\alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left/ e^{\pi i \alpha \tau m^2 + 2\pi i m c} \right/ \quad (2.3.14)$$

представляет собой тэта-функцию Якоби. В то же время, если зафиксировать точку измерения и местоположение наблюдателя, полагая $x = 1$, $c = 0$, то в дискретные моменты времени

2 Хаотическая динамика электрона

$\tau = \frac{1}{\pi} \log n$, где $n \in \mathbb{N}$, можно наблюдать дискретные координаты обмотки логарифмической спирали

$$\begin{aligned} \left/ e^{i\alpha \log n} \right/ &= \left/ n^{i\alpha} \right/ = \\ (-1)^n (2\{n\} - 1) n \left(\left\{ n^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right) n^{i\beta} &= \\ (-1)^{n-1} n \left(\left\{ n^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right) n^{i\beta} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

а сумма

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} \left/ n^{-\frac{s}{2}} \right/ ^2 \quad (2.3.16)$$

где $s = \sigma - it = -2i\alpha$, представляет собой дзета-функцию Римана, причём каждый член суммы $(-1)^{n-1} \left/ n^{-\frac{s}{2}} \right/ ^2$ фактически содержит в себе дискретные координаты маятника

$$\left(\theta_n - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{n} (-1)^{n-1} \left/ n^{-\frac{\sigma}{2}} \right/ ^2, \varphi_n = t \log n \right) \quad (2.3.17)$$

В таком случае, тривиальные нули дзета-функции Римана суть решения уравнения

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} n \left(\left\{ n^{-1-\sigma/2} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \quad (2.3.18)$$

Физический смысл данного решения заключается в том, что при чётных $\sigma \leq -2$ в каждый момент эволюции n образ эволюционирующей спирали на обмотке сферы всегда имеет нулевую координату $\theta - \frac{\pi}{4}$, то есть совпадает с обмоткой (1,1)-торического узла.

В свою очередь, если образ логарифмической спирали на псевдоевклидовой плоскости (а следовательно и на соответствующем торе) в дискретные моменты эволюции задать

отображением

$$n^{-\sigma} = e^{\psi_n}, \quad n^{it} = e^{i\rho_n} \quad (2.3.19)$$

где $\rho_n = t \log n$ – измеренное в момент эволюции n псевдоевклидово расстояние до n -ой точки спирали, $\psi_n = -\sigma \log n$ – гиперболический угол вектора n -ой точки спирали, то при условии $\tan \vartheta_n = \frac{y_n}{x_n} = n$, выполняется равенство $\sigma = \frac{1}{2}$, вытекающее из цепочки равенств $\left| \frac{y_n}{x_n} \right| = e^{-2\psi_n} = e^{2\sigma \log n} = n^{2\sigma}$. Тем самым, если $\sigma = \frac{1}{2}$, то в n -ые моменты эволюции для наблюдателя с фиксированной координатой $x = 1$ фиксирована также и торическая широта маятника $\phi = \pi\{n\} = 0$, и поэтому окружность маятника совпадает с замкнутой обмоткой $(1, n)$ -торического узла, причём координата положения маятника на этой окружности в n -ые моменты эволюции равна $\varphi_n = \pi\{t \log(n)/\pi\}$. Иначе говоря, если широта ϑ соответствует линии наблюдения за колебаниями маятника и эволюционный параметр времени τ связан с ней соотношением $\tan \vartheta = \tau$, то в дискретные моменты времени n относительный наблюдатель всегда оказывается в фиксированной точке окружности маятника. Таким образом, нетривиальные нули дзета-функции Римана суть решения уравнения

$$\sum_{\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} n^{it} = 0 \quad (2.3.20)$$

тесно связанного с движением маятника по простейшим (гомотопным окружности) замкнутым траекториям. Вместе с тем, линия неподвижного (стационарного) наблюдателя лежит на уровне $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, а следовательно не совпадает с линией движущегося наблюдателя, соответствующей замкнутой обмотке $(1, n)$ -торического узла. Однако, поскольку квадрат длины обмотки $(1, n)$ -торического узла в n раз больше квадрата длины обмотки $(1, 1)$ -торического узла, то фазовые коор-

динаты маятника (его положение на окружности) в дискретные моменты времени можно перенести на окружность стационарного наблюдателя. При этом ожидается, что требование равномерного распределения множества точек $\{t \log(n)/\pi\}$ на отрезке $[0, 1]$ выделяет из множества всех возможных вещественных параметров t счётное множество параметров t_m , каждый из которых формирует мнимую часть соответствующего нетривиального корня дзета-функции Римана. Иначе говоря, с точки зрения стационарного наблюдателя равномерное распределение положений маятника на окружности, которое выполняется при нулевом среднем значении случайной величины n^{it}

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N n^{it} = 0 \quad (2.3.21)$$

доставляет мнимую часть нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Тогда, поскольку фазовая длина обмотки маятника без учёта его движения по окружности равна $\pi n^{2\sigma} + \pi n$, гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции эквивалентна утверждению о том, что в случае $\sigma \neq \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N n^{it} e^{i\pi n^{2\sigma} + i\pi n} \neq 0 \quad (2.3.22)$$

которое очевидно выполняется в силу невозможности равномерного распределения случайной величины $\left\{ \frac{n^{2\sigma} + n}{2} \right\}$. Кроме того, поскольку

$$\int_0^\infty \tau^{-s-1} (-1)^{[\tau]-1} d\tau = -2s \sum_{\mathbb{N}} n^{-s} (-1)^{n-1} \quad (2.3.23)$$

где $\text{Re}(s) = \sigma \geq 0$, $\sigma \neq 1$, что следует из разбиения предела интегрирования $[0, \infty]$ на отрезки $[n-1, n]$ и непосред-

ственного интегрирования в пределах каждого отрезка, то дзета-функцию Римана можно представить в виде интегрального преобразования Меллина периодической знакопеременной ступенчатой функции, а интегральную сумму интерпретировать как среднее за всё время эволюции значение случайной величины $(-1)^{[\tau]-1}\tau^{it}$, при условии что плотность вероятности обнаружения этой случайной величины наблюдателем, находящимся на обмотке (1,1)-торического узла, равна $\tau^{-\sigma-1}$. Заметим при этом, что случайную величину $(-1)^{[\tau]-1}\tau^{it}$ надо понимать как случайную точку на двойной окружности, полученной отождествлением противоположных точек исходной окружности, а для продления интегрального представления дзета-функции на всю область определения s необходимо использовать модифицированное интегральное преобразование Меллина

$$\int_0^\infty \frac{\left|\tau^{-\frac{s}{2}}\right|^2}{\tau} (-1)^{[\tau]-1} d\tau \quad (2.3.24)$$

2.4 О случайном блуждании по ломаным линиям обмотки сферы

Пусть задано конечное множество натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$, причем выборка из этого множества осуществляется случайным образом. Обозначим X случайную величину, принимающую значение выбранного числа. Выбор осуществляется так, что вероятность выбора n равна $P(X = n) = \frac{1}{N}$, то есть предполагается равная вероятность выбора n . Кроме того, пусть с этой случайной величиной связана комплексная случайная величина $Y_{\eta, N} = X^{i\eta}$, где i — мнимая единица, η — вещественный параметр, которую следует понимать как

2 Хаотическая динамика электрона

случайную точку $e^{i\alpha}$, где $\alpha = 2\pi \{\eta \log X/2\pi\}$, на комплексной единичной окружности. При этом вероятность выбора $n^{i\eta}$ также равна $P(Y_{\eta,N} = n^{i\eta}) = \frac{1}{N}$, а комплексную величину $\bar{P}(Y_{\eta,N} = n^{i\eta}) = \frac{n^{i\eta}}{N}$ мы трактуем как амплитуду вероятности выбора случайной величины $n^{i\eta}$. Тогда математическое ожидание случайной величины $Y_{\eta,N}$ вычисляется по формуле

$$M(Y_{\eta,N}) = \sum_1^N \frac{n^{i\eta}}{N} = \sum_1^N \bar{P}(n^{i\eta}) \quad (2.4.1)$$

и поскольку $Y_{\eta,N} = e^{i\alpha}$, где $\alpha = 2\pi \{\eta \log X/2\pi\}$ — угловой параметр единичной окружности комплексной плоскости, то математическое ожидание $M(Y_{\eta,N})$ можно интерпретировать как среднее значение множества чисел $\{1^{i\eta}, \dots, N^{i\eta}\}$, лежащих на единичной окружности комплексной плоскости. В этой связи возникает вопрос существования предела, для которого (в случае его существования) выполняется уравнение

$$\Psi_{\eta}(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{n | \alpha < \beta\}} \frac{n^{i\eta}}{N} = \int_0^{\beta} \rho_{\eta}(x) dx \quad (2.4.2)$$

где $\alpha = 2\pi \{\eta \log X/2\pi\}$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, а $\rho_{\eta}(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция. При этом функцию $\Psi_{\eta}(\beta)$ следует интерпретировать как функцию непрерывного распределения амплитуды вероятности случайной величины Y_{η} , которая получается из дискретной случайной величины $Y_{\eta,N}$ при устремлении N к бесконечности. В самом деле, поскольку

$$\Psi'_{\eta}(\beta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \sum_{\{n | \beta < \alpha < \beta + \varepsilon\}} \frac{n^{i\eta}}{\varepsilon N} = \rho_{\eta}(\beta) \quad (2.4.3)$$

2 Хаотическая динамика электрона

откуда в силу $n^{i\eta} = e^{i\beta}$ имеет место

$$|\rho_\eta(\beta)| = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \sum_{\{n | \beta < \alpha < \beta + \varepsilon\}} \frac{1}{\varepsilon N} \quad (2.4.4)$$

то функция $|\rho_\eta(x)|$ есть плотность вероятности случайной величины Y_η , а функция $\rho_\eta(x) = e^{ix} |\rho_\eta(x)|$ — соответственно плотность амплитуды вероятности случайной величины Y_η . Наконец, заметим, что

$$M(Y_\eta) = \Psi_\eta(2\pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \frac{n^{i\eta}}{N} = \int_0^{2\pi} \rho_\eta(x) dx \quad (2.4.5)$$

До сих пор мы исходили из равной вероятности выбора случайной величины Y_η , однако, если, $Y_{\eta,\sigma} = e^{i\eta \log n + \pi i n}$, а относительная вероятность выбора случайной величины $Y_{\eta,\sigma}$ (вероятность, взятая без учёта нормировочного множителя) равна $P(Y_{\eta,\sigma}) = \left/ n^{-\sigma/2} \right/$, то относительное среднее значение этой случайной величины равно

$$M(Y_{\eta,\sigma}) = \sum_1^\infty \left/ n^{-\sigma/2} \right/^2 e^{i\eta \log n + \pi i n} = \left(1 - 2^{(\sigma+i\eta)}\right) \zeta(\sigma + i\eta) \quad (2.4.6)$$

Итак, если точка окружности является случайной величиной, то среднее значение этой случайной величины имеет значение произвольного комплексного числа. В то же время, если пространство случайных величин это множество точек на цилиндре, то среднее значение случайной величины на окружности, образованной сечением цилиндра, является комплекснозначной функцией на образующей линии цилиндра. При этом, в качестве множества случайных точек на сечении цилиндра можно взять точки пересечения со случайными винтовыми линиями цилиндра. Тогда дуализм между

2 Хаотическая динамика электрона

средним значением по сечению цилиндра и средним значением по шагу винтовой линии задаётся математическим формализмом интегрального преобразования Фурье. Кроме того, если случайные винтовые линии цилиндра представляют собой всевозможные траектории движения частицы, а окружности сечений цилиндра суть вероятностные ловушки наблюдателя, то точки пересечения вероятной траектории частицы с ловушкой наблюдателя представляют собой локализованное пространство случайных событий наблюдателя. Заметим также, что движение частицы по случайным винтовым линиям цилиндра и движение по случайным обмоткам тороидальной оболочки сферы описываются аналогично, но в качестве вероятностной ловушки наблюдателя во втором случае следует применять большую окружность тороидальной оболочки сферы, а имея ввиду решения для колебаний метафизического маятника, интегральное преобразование Фурье следует заменить на интегральное преобразование Меллина.

Далее, опираясь на динамику броуновского движения [39], рассмотрим процесс случайного блуждания частицы по обмотке тороидальной оболочки сферы. Пусть вероятность свободного пробега без учета нормировочного множителя за интервал времени τ из точки $x = 0$, в точку $x = m$ по обмотке, которая вращается с комплексной скоростью $\alpha = \beta + i\gamma$, где $\gamma > 0$, равна $e^{-\pi\gamma\tau m^2}$. Тогда, объединив эту вероятность с достоверной информацией о координатах частицы на обмотке сферы в одном комплексном числе

$$e^{\pi i \tau^\alpha m^2} = e^{-\pi\gamma\tau m^2} e^{\pi i \beta \tau m^2} \quad (2.4.7)$$

мы получим амплитуду вероятности свободного пробега за интервал времени τ из точки $x = 0$, в точку $x = m$ по обмотке, вращающейся с комплексной скоростью $\alpha = \beta + i\gamma$. Пусть теперь время измерения дискретно $\tau = n$, а в сумме амплитуд

вероятностей

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} \quad (2.4.8)$$

содержится информация о среднем во времени значении координаты частицы на обмотке сферы (аргумент суммы) и об интенсивности этого среднего значения (модуль суммы). Строго говоря, в данном случае сумма амплитуд вероятностей это математическое ожидание такой случайной величины как комплексное представление угловой координаты обмотки сферы. В свою очередь, амплитуда вероятности марковского процесса случайного блуждания, состоящего из счетного числа произвольных свободных пробегов по еще не занятым обмоткам сферы, есть произведение сумм

$$\prod_{n \in \mathbb{P}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} \quad (2.4.9)$$

то есть бесконечное произведение дискретных значений тета-функции. Не берясь непосредственно за подсчет функции, к которой сходится это бесконечное произведение бесконечных сумм, мы все же присмотримся к нему с другой (более физической) стороны. Пусть задан минимальный конечный интервал измерения времени и координаты частицы $\Delta\tau = \Delta x$, причём $\tau_n = n\Delta\tau$, где $n \in \mathbb{N}$, $x_j = j\Delta x$, где $j \in \mathbb{Z}$, а $f(\tau_1, x_j(\tau_1))$ – первоначальное значение комплексной амплитуды вероятности появления частицы с координатой x_j . Тогда произведение сумм

$$f(\tau_n, x_m(\tau_n)) = \prod_{i < n} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} f(\tau_1, x_j(\tau_1)) e^{\pi i \tau_i^\alpha \left(\frac{x_k(\tau_{i+1}) - x_j(\tau_i)}{\Delta\tau} \right)^2 \Delta\tau} \quad (2.4.10)$$

при предельно малых интервалах измерения времени и координаты частицы $\Delta\tau = \Delta x \rightarrow 0$ можно обозначить обобщаю-

2 Хаотическая динамика электрона

щим его функциональным интегралом

$$f(\tau \rightarrow \infty, x) = \int Dx f(\tau, x) e^{\pi i \tau^\alpha \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 d\tau} \quad (2.4.11)$$

из которого следует интегральное уравнение

$$f(\tau + \Delta\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, y) e^{\pi i \tau^\alpha \left(\frac{x-y}{\Delta\tau}\right)^2 \Delta\tau} dy \quad (2.4.12)$$

и соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$i \frac{\partial f(\tau, x)}{\partial \tau} = -\frac{\tau^\alpha}{4\pi} \frac{\partial^2 f(\tau, x)}{\partial x^2} \quad (2.4.13)$$

которое, конечно же, отличается от уравнения Шредингера свободной частицы, но в частном случае $\alpha = 0$ это отличие полностью исчезает.

В заключение возьмем статистическую сумму

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} \quad (2.4.14)$$

которая по сути есть среднее значение угловых координат обмоток сферы, полученное суммированием не только по множеству всех целых значений координат линии наблюдателя, но и по натуральному множеству всех возможных графиков обмотки сферы, и установим ее связь с тета-функцией Якоби $\vartheta(0, \tau)$. Прежде всего, заметим, что в сумме 2.4.14 содержатся две суммы, а именно, тета-функция Якоби

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \alpha n m^2} = \theta(0, n\alpha) \quad (2.4.15)$$

где $\alpha = \beta + i\gamma$ и сумма

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\pi i n^\alpha m^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\pi i \alpha n m^2} \quad (2.4.16)$$

2 Хаотическая динамика электрона

которая в случае $\gamma > 0$ является сходящейся геометрической прогрессией и равна

$$\frac{e^{\pi i \alpha m^2}}{1 - e^{\pi i \alpha m^2}} \quad (2.4.17)$$

Следовательно исходную двойную сумму 2.4.14 можно упростить до простой суммы и получить искомую функцию

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{\pi i \alpha m^2}}{1 - e^{\pi i \alpha m^2}} = \frac{\theta(0, \alpha)}{1 - \theta(0, \alpha)} \quad (2.4.18)$$

Таким образом, для статистической суммы, интерпретируемой как амплитуда вероятности газа, состоящего из частиц, блуждающих по намотке сферы, выполняется тождество

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^{\alpha} m^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta(0, n\alpha) = \frac{\theta(0, \alpha)}{1 - \theta(0, \alpha)} \quad (2.4.19)$$

Вместе с тем, если функцию

$$\rho(\tau) = \frac{\theta(0, i\tau)}{1 - \theta(0, i\tau)} \quad (2.4.20)$$

где $\tau \geq 0$, понимать как комплексную плотность вероятности, то применив к ней интегральное преобразование, мы получим частотную плотность распределения вероятности (характеристическую функцию)

$$\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta(0, i\tau) \tau^{iz-1}}{1 - \theta(0, i\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(0, ie^t) e^{izt}}{1 - \theta(0, ie^t)} dt \quad (2.4.21)$$

где $t = \log \tau$. А поскольку эволюция функции $\theta(x, i\tau)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta(x, i\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \theta(x, i\tau)}{\partial x^2} \quad (2.4.22)$$

с начальными условиями $\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta(x, i\tau) = \delta(x - m)$, где $m \in \mathbb{Z}$, то было бы интересно знать, какое дифференциальное уравнение соответствует функции

$$\varphi(x, i\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta(x, ni\tau) = \frac{\theta(x, i\tau)}{1 - \theta(x, i\tau)} \quad (2.4.23)$$

или функции

$$\zeta(x, iz) = \int_0^{+\infty} \tau^{iz-1} \varphi(x, i\tau) d\tau \quad (2.4.24)$$

полученной из оригинальной с помощью интегрального преобразования Меллина.

2.5 Заключение

Таким образом, наши абстрактные математические конструкции имеют некоторое сходство с математическим формализмом квантовой механики, а следовательно вопросы обоснования квантовой механики, возможно, могли бы получить ответ в рамках развитого здесь математического формализма. Вместе с тем, не исключено, что обобщенное уравнение Шредингера 2.4.13, которое описывает эволюцию волновой функции свободной частицы с комплексной массой τ^α , применимо для космологических масштабов эволюционного параметра τ . Кроме того, унитарная группа изометрий тора на сфере подсказывает нам, что природа электрона как-то связана с геометрией обмотки сферы. Например, постоянную тонкой структуры можно было бы связать с углом наклона прообраза обмотки (1,1)-торического узла, который она имеет в настоящий момент эволюции, а массу электрона - с псевдоевклидовой длиной замкнутой обмотки сферы, имеющей форму

2 Хаотическая динамика электрона

(2,3)-торического узла. Тогда иерархию лептонов можно было бы объяснить связкой из трехлистников. Действительно, пусть тангенс угла наклона прообраза замкнутой обмотки на комплексной плоскости равен

$$\tan \vartheta_c = \frac{2}{3}\alpha \quad (2.5.1)$$

где $\tan \vartheta_0 = \alpha$ - тангенс угла наклона диагонали прямоугольника, который служит прообразом обмотки тора на сфере, а коэффициент роста соответствующей этой обмотке логарифмической спирали $r = e^{k\varphi}$ равен

$$k = -1 - \log \frac{2}{3}\alpha \quad (2.5.2)$$

Имея в виду, что за один оборот (1,1)-торического узла обмотка четыре раза проходит с одного полюса сферы к другому, можно в качестве массы лептона N -ой иерархии взять длину спирали за $j + 1$ четвертей оборотов обмотки

$$M_N = e^{k(1+j)} \quad (2.5.3)$$

где $j = \sum_{n=0}^N n^4$. Тогда при упрощении $k' = k + 1$ выполняется формула Барута [40] для соотношения масс лептонов.

3 О некоторых приложениях алгебры векторных полей

Изучаются локальные алгебры линейных векторных полей, которые находят применение в математическом моделировании физического пространства-времени. Показано, что динамические потоки векторных полей 8-мерного пространства с нейтральной метрикой удовлетворяют принципу наименьшего действия, а топологические особенности векторных полей подчиняются уравнениям Дирака.

3.1 Линейные векторные поля

В статье собраны алгебраические, геометрические и динамические факты, касающиеся векторных полей простых локально аффинных многообразий (\mathbb{R}^n , цилиндры, торы), причем главным ингредиентом коллекции служит алгебра этих векторных полей с произведением $X \star Y = \nabla_X Y$, где ∇ — плоская связность без кручения локально аффинной структуры многообразия.

3.1.1 Определение. Пусть X векторное поле гладкого многообразия M , где (U, u) — тотальная карта M , а $\{u^i\}$ — ассоциированная с ней система координат. Векторное поле X с его локальным представлением

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

3 О некоторых приложениях алгебры

называется линейным относительно $\{u^i\}$, если его локальные компоненты имеют форму

$$X^i = C_j^i u^j$$

где $C_j^i \in \mathbb{R}$.

Начиная с простейшего двумерного случая, напомним, что если на декартовой плоскости (x, y) заданы гладкие векторные поля

$$\begin{aligned} A(x, y) &= a_x(x, y)\partial_x + a_y(x, y)\partial_y, \\ B(x, y) &= b_x(x, y)\partial_x + b_y(x, y)\partial_y, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

и функция $f(x, y)$, то градиентом этой функции называется дифференциальная 1-форма (ковекторное поле)

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (3.1.2)$$

а производной функции $f(x, y)$ по направлению векторного поля $A(x, y)$ называется функция свертки градиента $\nabla f(x, y)$ и векторного поля $A(x, y)$

$$\nabla_A f(x, y) = \langle A(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = a_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + a_y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (3.1.3)$$

В свою очередь, производной векторного поля $B(x, y)$ вдоль векторного поля $A(x, y)$ называется векторное поле

$$\nabla_A B = \nabla_A b_x \partial_x + \nabla_A b_y \partial_y. \quad (3.1.4)$$

соответственно производной от $A(x, y)$ по направлению $B(x, y)$ будет векторное поле:

$$\nabla_B A = \nabla_B a_x \partial_x + \nabla_B a_y \partial_y. \quad (3.1.5)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

Наконец, скобкой Ли двух векторных полей называется векторное поле

$$[A, B] = \nabla_A B - \nabla_B A = (\nabla_A b_x - \nabla_B a_x) \partial_x + (\nabla_A b_y - \nabla_B a_y) \partial_y. \quad (3.1.6)$$

Пусть все рассматриваемые далее векторные поля являются линейными [3], то есть их координатные функции суть линейные функции координат декартовой плоскости. Тогда линейные векторные поля декартовой плоскости относительно производной векторного поля по направлению векторного поля образуют алгебру \mathcal{A}_∇ , которая изоморфна матричной алгебре $M_2(\mathbb{R})$ и инвариантна относительно невырожденных линейных преобразований координат декартовой плоскости. Вместе с тем, касательные линейные векторные поля (т.е. линейные векторные поля без радиальной составляющей, которая коллинеарна единичному векторному полю $x\partial_x + y\partial_y$) относительно скобки Ли образуют алгебру \mathcal{A}_T , которая изоморфна матричной алгебре Ли $sl_2(\mathbb{R})$ и инвариантна относительно произвольных невырожденных линейных преобразований координат декартовой плоскости.

В качестве иллюстрации этих алгебр мы построим алгебру линейных векторных полей со структурой алгебры комплексных чисел. Возьмем векторные поля

$$E = x\partial_x + y\partial_y, \quad I = y\partial_x - x\partial_y \quad (3.1.7)$$

для которых справедливы соотношения

$$E^2 = E \star E = \nabla_E E = x\partial_x + y\partial_y = E, \quad (3.1.8)$$

$$E \star I = I \star E = \nabla_E I = \nabla_I E = y\partial_x - x\partial_y = I, \quad (3.1.9)$$

$$I^2 = I \star I = \nabla_I I = -x\partial_x - y\partial_y = -E. \quad (3.1.10)$$

Следовательно векторное поле I служит генератором алгебры линейных векторных полей (подалгебры \mathcal{A}_∇), которая изо-

3 О некоторых приложениях алгебры

морфна алгебре комплексных чисел $\langle (I, *) \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}$, и алгебры Ли линейных векторных полей (подалгебры \mathcal{A}_T), которая изоморфна соответствующей унитарной алгебре $\langle (I, [\cdot, \cdot]) \rangle_{\mathbb{R}} \cong u(1)$.

Понятие алгебры линейных векторных полей декартовой плоскости \mathcal{A}_{∇} легко обобщается на случай декартова пространства \mathbb{R}^n . Действительно, если имеется произвольное линейное векторное поле

$$A = a^1 \partial x_1 + \cdots + a^n \partial x_n = a^i \partial x_i \quad (3.1.11)$$

где $a^i = a_{i1}x^1 + \cdots + a_{in}x^n$, и произвольное линейное векторное поле

$$B = b^1 \partial x_1 + \cdots + b^n \partial x_n = b^i \partial x_i \quad (3.1.12)$$

где $b^i = b_{i1}x^1 + \cdots + b_{in}x^n$, а также задана операция дифференцирования векторного поля A по направлению векторного поля B

$$\begin{aligned} \nabla_B A &= \sum_{i=1}^n \nabla_B a^i \partial x_i = \sum_{i=1}^n b^j \frac{\partial a^i}{\partial x_j} \partial x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (b_{11}x^1 + \cdots + b_{1n}x^n) \frac{\partial (a_{i1}x^1 + \cdots + a_{in}x^n)}{\partial x_1} \partial x_i + \cdots \\ &+ (b_{n1}x^1 + \cdots + b_{nn}x^n) \frac{\partial (a_{i1}x^1 + \cdots + a_{in}x^n)}{\partial x_n} \partial x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{n1})x^1 + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (a_{i1}b_{1n} + \cdots + a_{in}b_{nn})x^n \right] \partial x_i \\ &= \sum_{i=1}^n c_{ij}x^j \partial x_i = c^i \partial x_i = C, \quad (3.1.13) \end{aligned}$$

тогда, поскольку $C = (c_{ij})_n = (a_{ij})_n(b_{ij})_n = AB \cong \nabla_B A$, то имеет место эквивалентность алгебры линейных векторных полей декартова пространства \mathbb{R}^n и матричной алгебры $M_n(\mathbb{R})$, то есть алгебры эндоморфизмов линейного пространства \mathbb{R}^n .

3.2 Локальная алгебра векторных полей

Пусть на касательном расслоении многообразия M^n с помощью формального выражения

$$c(x') = \sum_{i=1}^n c_{ij}(x') dx'^j \partial x'_i \quad (3.2.1)$$

где $(c_{ij})_n = C \in M_n(\mathbb{R})$, $\partial x'_i \in T_{x'} M^n$, а dx'^j — это координаты произвольной точки в касательном пространстве $T_{x'} M^n$, задан элемент локальной алгебры линейных векторных полей $\mathcal{A}_\nabla(T_{x'} M^n)$. Тогда невырожденное отображение $F : \mathbb{R}^n \mapsto M^n : (x \rightarrow x')$ индуцирует из $T_{x'} M^n$ в $T_x \mathbb{R}^n$ локальную алгебру $\mathcal{A}_\nabla(T_x \mathbb{R}^n)$ линейных векторных полей касательного расслоения пространства \mathbb{R}^n . Действительно, поскольку $\partial x_i \in T_x \mathbb{R}^n$, $dx'^j = J_{ji}(x) dx^i$, $\partial x'_i = J_{ij}^{-1}(x) \partial x_j$, где $J_{ij}(x)$ — якобиан отображения F , то

$$c'(x) = \sum_{i=1}^n (J^{-1} C J)_{ij}(x) dx^j \partial x_i \quad (3.2.2)$$

и при этом $c'(x) \in \mathcal{A}_\nabla(T_x \mathbb{R}^n)$. С другой стороны, если у нас имеется элемент глобально линейной алгебры $\mathcal{A}_\nabla(\mathbb{R}^n)$

$$c'(x) = \sum_{i=1}^n c'_{ij} x^j \partial x_i \quad (3.2.3)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

тогда в силу $C = JC'J^{-1}$, эта алгебра переносится в $\mathcal{A}_{\nabla}(T_{x'}M^n)$ в виде выражения

$$c(x') = \sum_{i=1}^n (JC'J^{-1})_{ij}(x') dx'^j \partial x'_i. \quad (3.2.4)$$

Кроме того, в том случае, когда в качестве алгебры \mathcal{A} рассматривается некоторая подалгебра матричной алгебры эндоморфизмов \mathbb{R}^n и $C' \in \mathcal{A}$, то на производные от C' элементы $c(x')$ локальной алгебры $\mathcal{A}_{\nabla}(T_{x'}M^n)$ должны быть наложены дополнительные условия. Действительно, если требуется сохранение принадлежности подалгебре $C(x') \in \mathcal{A}$ для всех x' , то необходимо выполнение условия $J \in G\mathcal{A}$, где $G\mathcal{A}$ – группа обратимых элементов подалгебры \mathcal{A} , поскольку только тогда J действует на \mathcal{A} по формуле внутренних автоморфизмов группы $G\mathcal{A}$: $C' = J^{-1}CJ$.

Если в качестве примера выполнения условия $J \in G\mathcal{A}$ обратиться к локальной алгебре линейных векторных полей $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R}^2)$, имеющей структуру алгебры комплексных чисел, то мы получим условия Коши-Римана. В самом деле, если $C'(x) \in \mathbb{C}$, то требуется выполнение условия

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (3.2.5)$$

которое означает, что

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \quad (3.2.6)$$

Аналогично, если обратиться к локальной алгебре $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R}^8)$, имеющей структуру матричной алгебры $M_4(\mathbb{C})$, тогда в силу

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_{2i-1}}{\partial x_{2j-1}} & \frac{\partial x'_{2i-1}}{\partial x_{2j}} \\ \frac{\partial x'_{2i}}{\partial x_{2j-1}} & \frac{\partial x'_{2i}}{\partial x_{2j}} \end{pmatrix}_8 \in M_4(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \quad (3.2.7)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

где $i, j = 1, \dots, 4$, мы получим условия типа Коши-Римана

$$\frac{\partial x'_{2i-1}}{\partial x_{2j-1}} = \frac{\partial x'_{2i}}{\partial x_{2j}}, \quad \frac{\partial x'_{2i-1}}{\partial x_{2j}} = -\frac{\partial x'_{2i}}{\partial x_{2j-1}} \quad (3.2.8)$$

Понятно при этом, что при перестановке координат многообразия M^8 условия типа Коши-Римана меняют свой вид в целом, но условия Коши-Римана для каждой последовательной пары координат первоначального порядка сохраняются. Например, при соответствующей перестановке координат условия типа Коши-Римана приобретают вид

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_{i+4}}{\partial x_{j+4}}, \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_{j+4}} = -\frac{\partial x'_{i+4}}{\partial x_j} \quad (3.2.9)$$

Пусть теперь дано

$$x_1 = e^z \cos \varphi, \quad x_2 = e^z \sin \varphi \quad (3.2.10)$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}. \quad (3.2.11)$$

Тогда отображение $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \times S^1 : (x_1, x_2) \rightarrow (z, \varphi)$ имеет якобиан

$$J(z, \varphi) = e^{-z} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (3.2.12)$$

и поэтому

$$C(z, \varphi) = JC'(x)J^{-1} = e^z \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \quad (3.2.13)$$

Таким образом, комплексная плоскость, как локальная алгебра $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R}^2)$ со структурой \mathbb{C} , и комплексный цилиндр, как локальная алгебра $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R} \times S^1)$ со структурой \mathbb{C} , эквивалентны,

3 О некоторых приложениях алгебры

а соответствие между этими локальными алгебрами эквивалентно комплексно-аналитическому отображению

$$z + i\varphi \rightarrow e^z e^{i\varphi} : \begin{pmatrix} z & -\varphi \\ \varphi & z \end{pmatrix} \rightarrow e^z \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.14)$$

где $z, \varphi \in \mathbb{R}$, в котором комплексификация накрытия цилиндра отображается на комплексификацию цилиндра.

Пусть теперь локальная алгебра линейных векторных полей $\mathcal{A}_{\nabla}(M^8)$ индуцирована отображением $F : M^8 \mapsto M'^8 : (z_i, \varphi_i)_4 \rightarrow (z'_i, \varphi'_i)_4$ с якобианом $J(z', \varphi')$. Тогда уравнения типа Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial z'_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \varphi_j}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial \varphi_j} = -\frac{\partial \varphi'_i}{\partial z_j} \quad (3.2.15)$$

где $i, j = 1, 2, 3, 4$, и мы получим многообразие M^8 , в котором координатами служат винтовые линии четырех бесконечных цилиндров. Вместе с тем, если мы возьмём алгебру Ли $\mathcal{A}_T(M'^8)$ касательных векторных полей локальной алгебры линейных векторных полей $\mathcal{A}_{\nabla}(M'^8)$, индуцированной произвольным отображением $F : M^8 \mapsto M'^8$ с якобианом, удовлетворяющим обобщённым уравнениям Коши-Римана, то она будет эквивалентна алгебре Ли векторных полей Киллинга соответствующего метрического многообразия.

Заметим также, что если $C'(x)$ принадлежит алгебре двойных чисел:

$$C'(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{D} \quad (3.2.16)$$

тогда для того, чтобы выполнялось условие принадлежности $C(x') \in \mathbb{D}$, требуется выполнение гиперболических уравнений Коши-Римана:

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \quad (3.2.17)$$

3.3 Геометрия алгебры векторных полей

Прежде всего примем удобную систему обозначений многомерных пространств, сохраняющих квадратичные формы. Если в n -мерном линейном пространстве сохраняется квадратичная форма, имеющая канонический вид

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 \quad (3.3.1)$$

где $n - m = d$, $m - k = l$, то следуя [2], мы его представляем как полуевклидово пространство дефекта d и индекса l с обозначением $^{l+\{d\}}\mathbb{R}_n$, причем при нулевом дефекте следует говорить об евклидовых пространствах индекса l . Заметим при этом, что гиперболы этих пространств задаются уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = \text{const} \quad (3.3.2)$$

соответствующим каноническому виду квадратичной формы, однако уравнение гиперболы может иметь и другой вид, соответствующий неканоническому виду квадратичной формы, например, при другом порядке следования индексов координат.

Обратимся теперь к алгебре $\mathcal{A}_\nabla(\mathbb{R}_2)$ линейных векторных полей со структурой алгебры комплексных чисел \mathbb{C} . Геометрическая структура этой алгебры определяется ее образующими векторными полями, а именно радиальным и касательным векторными полями

$$E = x\partial_x + y\partial_y, \quad I = y\partial_x - x\partial_y \quad (3.3.3)$$

А поскольку векторное поле I ортогонально к E в метрике евклидовой плоскости (x, y) , и поэтому касательно к окруж-

3 О некоторых приложениях алгебры

ностям $x^2 + y^2 = \text{const}$, то в данном случае $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R}_2)$ — есть алгебра линейных векторных полей евклидовой плоскости \mathbb{R}_2 .

Аналогично, геометрическая структура алгебры $\mathcal{A}_{\nabla}({}^1\mathbb{R}_2)$ линейных векторных полей со структурой алгебры двойных чисел \mathbb{D} определяется ее образующими векторными полями, а именно радиальным и касательным векторными полями:

$$E = x\partial_x + y\partial_y, \quad J = y\partial_x + x\partial_y \quad (3.3.4)$$

где векторное поле J ортогонально к E в метрике псевдоевклидовой плоскости (x, y) , а следовательно касательно к равнобочным гиперболам $x^2 - y^2 = \text{const}$. Тем самым, в данном случае $\mathcal{A}_{\nabla}({}^1\mathbb{R}_2)$ — есть алгебра линейных векторных полей псевдоевклидовой плоскости ${}^1\mathbb{R}_2$.

В свою очередь, геометрическая структура алгебры $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R}^2)$ линейных векторных полей со структурой матричной алгебры $M_2(\mathbb{R})$ определяется ее образующими векторными полями, а именно радиальным и касательными векторными полями

$$\begin{aligned} E &= x\partial_x + y\partial_y, & I &= y\partial_x - x\partial_y, \\ J &= y\partial_x + x\partial_y, & IJ &= x\partial_x - y\partial_y \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

где векторное поле IJ ортогонально к E в метрике псевдоевклидовой плоскости $(x + y, x - y)$, а следовательно касательно к равнобочным гиперболам $xy = \text{const}$. Таким образом, в данном случае $\mathcal{A}_{\nabla}(\mathbb{R}^2)$ — есть алгебра линейных векторных полей декартовой плоскости \mathbb{R}^2 .

Обращаясь к алгебрам Ли \mathcal{A}_T , следует заметить, что поскольку множество элементов этой алгебры получается исключением из алгебры \mathcal{A}_{∇} радиальной составляющей E , то геометрия алгебры Ли \mathcal{A}_T полностью задается геометрией соответствующих касательных векторных полей. В частности,

3 О некоторых приложениях алгебры

если мы обратимся к алгебре Ли касательных векторных полей алгебры $\mathcal{A}_\nabla(\mathbb{R}_4)$ со структурой алгебры кватернионов \mathbb{H} , то обнаружим, что эти векторные поля касательны к гиперсферам 4-мерного евклидова пространства \mathbb{R}_4 . Действительно, в этом случае

$$\mathcal{A}_T(\mathbb{R}_4) = \langle i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3 \rangle_{\mathbb{R}} = su(2) \quad (3.3.6)$$

где σ_j – матрицы Паули, а $i\sigma_j$ – матричное представление векторных полей

$$\begin{aligned} i\sigma_1 : & \quad x_4\partial x_1 - x_3\partial x_2 + x_2\partial x_3 - x_1\partial x_4, \\ i\sigma_2 : & \quad x_3\partial x_1 + x_4\partial x_2 - x_1\partial x_3 - x_2\partial x_4, \\ i\sigma_3 : & \quad x_2\partial x_1 - x_1\partial x_2 - x_4\partial x_3 + x_3\partial x_4 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

каждое из которых ортогонально друг другу и радиальному векторному полю

$$\sigma_0 : \quad x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_3\partial x_3 + x_4\partial x_4 \quad (3.3.8)$$

в метрике евклидова пространства \mathbb{R}_4 . Если мы теперь вспомним, что векторное поле Киллинга X в ортонормированном базисе плоского метрического пространства задаётся уравнением

$$(\nabla_j X_i \partial x_i, \partial x_i) + (\nabla_i X_j \partial x_j, \partial x_j) = 0 \quad (3.3.9)$$

которое распадается на два случая

$$\begin{cases} \nabla_j X_i + \nabla_i X_j = 0 & \text{если } (\partial x_i, \partial x_i) = (\partial x_j, \partial x_j) \\ \nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0 & \text{если } (\partial x_i, \partial x_i) = -(\partial x_j, \partial x_j) \end{cases} \quad (3.3.10)$$

то заметим, что алгебра Ли $\mathcal{A}_T(\mathbb{R}_4)$ является алгеброй Ли векторных полей Киллинга 4-мерного евклидова пространства. Объединим теперь евклидовы повороты пространства

3 О некоторых приложениях алгебры

\mathbb{R}_4 и гиперболические повороты пространства с нейтральной метрикой ${}^2\mathbb{R}_4$, мы получим алгебру Ли

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T(\mathbb{R}_4 \oplus {}^2\mathbb{R}_4) &= \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_4) \otimes \mathcal{A}_T({}^2\mathbb{R}_4) \\ &= \langle (\sigma_j)_3, (i\sigma_j)_3 \rangle_{\mathbb{R}} = sl_2(\mathbb{C})\end{aligned}\quad (3.3.11)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T({}^2\mathbb{R}_4) &= \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_2 \oplus {}^1\mathbb{R}_2) = \\ &= \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_2) \otimes \mathcal{A}_T({}^1\mathbb{R}_2) = I \otimes J\end{aligned}\quad (3.3.12)$$

Аналогично, рассматривая векторные поля Киллинга 8-мерного евклидова пространства \mathbb{R}_8 , мы получим алгебру Ли

$$\mathcal{A}_T(\mathbb{R}_8) = \langle \gamma_{[1,2,3]} \rangle_{\mathbb{R}} \quad (3.3.13)$$

где $\gamma_{[1,2,3]}$ это набор из семи γ -матриц Дирака $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_3, \gamma_2\gamma_3, \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$, а при добавлении векторных полей Киллинга пространства с нейтральной метрикой ${}^4\mathbb{R}_8$, получим алгебру Ли

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T(\mathbb{R}_8 \oplus {}^4\mathbb{R}_8) &= \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_8) \otimes \mathcal{A}_T({}^4\mathbb{R}_8) = \\ &= \langle \gamma_0, i\gamma_0, \gamma_{[1,2,3]}, i\gamma_{[1,2,3]}, \gamma_0\gamma_{[1,2,3]}, i\gamma_0\gamma_{[1,2,3]} \rangle_{\mathbb{R}} = sl_4(\mathbb{C})\end{aligned}\quad (3.3.14)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T({}^4\mathbb{R}_8) &= \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_4 \oplus {}^2\mathbb{R}_4) = \\ &= \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_4) \otimes \mathcal{A}_T({}^2\mathbb{R}_4) = sl_2(\mathbb{C})\end{aligned}\quad (3.3.15)$$

и

$$\langle i\gamma_0, \gamma_{[1,2,3]}, \gamma_0\gamma_{[1,2,3]} \rangle_{\mathbb{R}} = su(4) \quad (3.3.16)$$

При этом, заметим, что

$$\mathcal{A}_T({}^8\mathbb{R}_{16}) = \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_8 \oplus {}^4\mathbb{R}_8) \quad (3.3.17)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

Вместе с тем, если

$$\mathcal{A}_T(\{^2\}\mathbb{R}_6) = \left\langle [\mathrm{i}\sigma_j]_k \right\rangle_{\mathbb{R}} = su(3) \quad (3.3.18)$$

где $[\mathrm{i}\sigma_j]_k$ – матричное представление векторных полей с нулевой компонентой ∂x_{2k-1} и ∂x_{2k} , а именно

$$\begin{aligned} [\mathrm{i}\sigma_1]_1 : & \quad x_6 \partial x_3 - x_5 \partial x_4 + x_4 \partial x_5 - x_3 \partial x_6, \\ [\mathrm{i}\sigma_1]_2 : & \quad x_6 \partial x_1 - x_5 \partial x_2 + x_2 \partial x_5 - x_1 \partial x_6, \\ [\mathrm{i}\sigma_1]_3 : & \quad x_4 \partial x_1 - x_3 \partial x_2 + x_2 \partial x_3 - x_1 \partial x_4, \\ [\mathrm{i}\sigma_2]_1 : & \quad x_5 \partial x_3 + x_6 \partial x_4 - x_3 \partial x_5 - x_4 \partial x_6, \\ [\mathrm{i}\sigma_2]_2 : & \quad x_5 \partial x_1 + x_6 \partial x_2 - x_1 \partial x_5 - x_2 \partial x_6, \\ [\mathrm{i}\sigma_2]_3 : & \quad x_3 \partial x_1 + x_4 \partial x_2 - x_1 \partial x_3 - x_2 \partial x_4, \\ [\mathrm{i}\sigma_3]_1 : & \quad x_4 \partial x_3 - x_3 \partial x_4 - x_6 \partial x_5 + x_5 \partial x_6, \\ [\mathrm{i}\sigma_3]_2 : & \quad x_2 \partial x_1 - x_1 \partial x_2 - x_6 \partial x_5 + x_5 \partial x_6, \\ [\mathrm{i}\sigma_3]_3 : & \quad x_2 \partial x_1 - x_1 \partial x_2 - x_4 \partial x_3 + x_3 \partial x_4 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

причем

$$[\mathrm{i}\sigma_3]_1 + [\mathrm{i}\sigma_3]_3 = [\mathrm{i}\sigma_3]_2 \quad (3.3.20)$$

то легко проверить, что каждое из этих векторных полей касательно к гиперболам пространства $\{^2\}\mathbb{R}_6$, то есть 6-мерного полуевклидова пространства дефекта 2. Действительно, поскольку каждому из этих векторных полей найдется такая подходящая квадратичная форма, что ассоциированное с ней скалярное произведение этого векторного поля и радиального векторного поля зануляется, то в данном случае $\mathcal{A}_T(\{^2\}\mathbb{R}_6)$ — есть алгебра касательных линейных векторных полей в полуевклидовом пространстве $\{^2\}\mathbb{R}_6$. Впрочем, возможно и эквивалентное представление алгебры $su(3)$ как алгебры касательных линейных векторных полей в 6-мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}_6 . В самом деле, достаточно добавить к каждому базисному элементу $[\mathrm{i}\sigma_j]_k$ компоненту

3 О некоторых приложениях алгебры

$x_{2k}\partial x_{2k-1} - x_{2k-1}\partial x_{2k}$ и мы получим требуемое. Тем самым,

$$\mathcal{A}_T(\mathbb{R}_6) = \text{isu}(3) \quad (3.3.21)$$

Еще одним примером алгебры Ли, порождаемой алгеброй касательных линейных векторных полей полуевклидова пространства $\{^2\}\mathbb{R}_4$ служит алгебра вращений в 4-мерном евклидовом пространстве $so(4)$. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} J_1 : & \quad x_2\partial x_1 - x_1\partial x_2, \\ J_2 : & \quad x_3\partial x_1 - x_1\partial x_3, \\ J_3 : & \quad x_4\partial x_1 - x_1\partial x_4, \\ J_4 : & \quad x_3\partial x_2 - x_2\partial x_3, \\ J_5 : & \quad x_4\partial x_2 - x_2\partial x_4, \\ J_6 : & \quad x_4\partial x_3 - x_3\partial x_4 \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Тогда

$$\mathcal{A}_T(\{^2\}\mathbb{R}_4) = \langle J_k \rangle_{\mathbb{R}} = so(4) \quad (3.3.23)$$

Таким образом, геометрическая структура интересной с точки зрения физических приложений алгебры линейных векторных полей \mathcal{A}_{∇} со структурой матричной алгебры $M_4(\mathbb{C})$ тесно связана с геометрией пространства \mathbb{R}_8 и ${}^4\mathbb{R}_8$, поскольку алгебра Ли $sl_4(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_T(\mathbb{R}_8 \oplus {}^4\mathbb{R}_8)$ это алгебра Ли векторных полей Киллинга пространств \mathbb{R}_8 и ${}^4\mathbb{R}_8$ или пространства ${}^8\mathbb{R}_{16}$. Более того, поскольку

$$\gamma_5 \cdot \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \cdot \gamma_5 = 0 \quad (3.3.24)$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, то в 4-мерном линейном пространстве

$$\langle \gamma_5\gamma_0, \gamma_5\gamma_1, \gamma_5\gamma_2, \gamma_5\gamma_3 \rangle_{\mathbb{R}} = t^*\gamma_5\gamma_0 + x^*\gamma_5\gamma_1 + y^*\gamma_5\gamma_2 + z^*\gamma_5\gamma_3 \quad (3.3.25)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

квадратом

$$(t^* \gamma_5 \gamma_0 + x^* \gamma_5 \gamma_1 + y^* \gamma_5 \gamma_2 + z^* \gamma_5 \gamma_3)^2 = (-t^{*2} + x^{*2} + y^{*2} + z^{*2})E \quad (3.3.26)$$

где E — единичная матрица, индуцируется квадратичная метрическая форма

$$s^{*2} = -t^{*2} + x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} \quad (3.3.27)$$

Вместе с тем, в 4-мерном линейном пространстве

$$\langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle_{\mathbb{R}} = t\gamma_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 \quad (3.3.28)$$

квадратом:

$$(t\gamma_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3)^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)E \quad (3.3.29)$$

индуцируется квадратичная метрическая форма

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.3.30)$$

а суммой двух этих квадратов индуцируется дублет (финслерово произведение) пространств Минковского с метрической формой

$$S^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - t^{*2} + x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} \quad (3.3.31)$$

В то же время, если мы перейдем к дуальному представлению:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \gamma_0 + \gamma_5 \gamma_0, & \tau_1 &= \gamma_1 + \gamma_5 \gamma_1, \\ \tau_2 &= \gamma_2 + \gamma_5 \gamma_2, & \tau_3 &= \gamma_3 + \gamma_5 \gamma_3 \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

$$\begin{aligned} \tau_0^* &= \gamma_0 - \gamma_5 \gamma_0, & \tau_1^* &= \gamma_5 \gamma_1 - \gamma_1, \\ \tau_2^* &= \gamma_5 \gamma_2 - \gamma_2, & \tau_3^* &= \gamma_5 \gamma_3 - \gamma_3 \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

то суммой четырех квадратов индуцируется метрическая форма гиперболического вида, а именно

$$\begin{aligned} (T\tau_0 + T^*\tau_0^*)^2 + (X\tau_1 + X^*\tau_1^*)^2 + (Y\tau_2 + Y^*\tau_2^*)^2 + (Z\tau_3 + Z^*\tau_3^*)^2 \\ = TT^* + XX^* + YY^* + ZZ^* \\ = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - t^{*2} + x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} \quad (3.3.34) \end{aligned}$$

В качестве примера пространства, которое не допускает построения алгебры линейных векторных полей (в силу отсутствия касательных векторных полей у четномерных сфер), приведем пример евклидова пространства \mathbb{R}_3 . Однако сразу отметим, что полуевклидово пространство $\{^1\}\mathbb{R}_3$, гиперболы которого задаются совокупностью уравнений

$$x_1^2 + x_2^2 = \text{const}, \quad x_2^2 + x_3^2 = \text{const}, \quad x_1^2 + x_3^2 = \text{const} \quad (3.3.35)$$

уже допускает алгебру линейных векторных полей, причем ее алгебра Ли изоморфна алгебре $su(2)$.

Далее заметим, что поскольку функция $f(x + iy) = \ln \rho + i\varphi$, где i это генератор алгебры комплексных чисел, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \text{Arctg } \frac{y}{x}$, аналитична в смысле выполнения условий Коши-Римана, а функция $f(x + jy) = \ln \rho + j\varphi$, где j это генератор алгебры двойных чисел, $\rho = \sqrt{x^2 - y^2}$, $\varphi = \ln \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$, аналитична в смысле выполнения гиперболических условий Коши-Римана, то функции $\ln \rho$ и φ являются гармоническими либо в метрике евклидовой, либо в метрике псевдоевклидовой плоскости. Кроме того, следует отметить, что если декартовы (линейные) координаты (x', y') , заданные в модифицированных полярных координатах $(\ln \sqrt{x^2 - y^2}, \ln \sqrt{\frac{x+y}{x-y}})$ с помощью тождества $\{(x', 0), (0, y')\} = \{(\ln \rho, \varphi = 0)\}$, связаны с цилиндрическими

3 О некоторых приложениях алгебры

координатами многообразия $\left(X = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, Y = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}\right)$ соотношением

$$x' + y' = X, \quad x' - y' = Y, \quad (3.3.36)$$

то можно говорить о двух координатных системах одного и того же цилиндрического многообразия $\mathbb{R} \times S^1$, гомеоморфного плоскости с выколотой точкой.

Итак, функции

$$X = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad \varphi_X = X^* = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad (3.3.37)$$

$$Y = \frac{1}{2} \ln(x_3^2 + x_4^2), \quad \varphi_Y = Y^* = \arctan \frac{x_4}{x_3}, \quad (3.3.38)$$

$$Z = \frac{1}{2} \ln(x_5^2 + x_6^2), \quad \varphi_Z = Z^* = \arctan \frac{x_6}{x_5}, \quad (3.3.39)$$

$$T = \frac{1}{2} \ln(x_7^2 + x_8^2), \quad \varphi_T = T^* = \arctan \frac{x_8}{x_7} \quad (3.3.40)$$

удовлетворяют уравнениям типа Коши-Римана, а значения этих функций равны соответствующим координатам линейного подпространства $\langle \tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_0^*, \tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^* \rangle_{\mathbb{R}}$ алгебры $M_4(\mathbb{C})$, из которой индуцируется квадратичная метрическая форма

$$S^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - t^{*2} + x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} \quad (3.3.41)$$

пространства ${}^4\mathbb{R}_8$, содержащего в себе дублет пространств Минковского, а именно ${}^3\mathbb{R}_4$ и ${}^1\mathbb{R}_4$. При этом, заменой переменных:

$$\begin{aligned} T &= t + t^*, & T^* &= t - t^*, \\ X &= x^* + x, & X^* &= x^* - x, \\ Y &= y^* + y, & Y^* &= y^* - y, \\ Z &= z^* + z, & Z^* &= z^* - z, \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

эта квадратичная форма приводится к гиперболическому виду:

$$S^2 = TT^* + XX^* + YY^* + ZZ^*, \quad (3.3.43)$$

где координаты $(X, X^*, Y, Y^*, Z, Z^*, T, T^*)$ являются изотропными координатами пространства ${}^4\mathbb{R}_8$, а скалярное произведение, ассоциированное с этой гиперболической формой, имеет вид:

$$2ab = a_T b_{T^*} + a_{T^*} b_T + a_X b_{X^*} + a_{X^*} b_X + a_Y b_{Y^*} + a_{Y^*} b_Y + a_Z b_{Z^*} + a_{Z^*} b_Z. \quad (3.3.44)$$

3.4 Динамика векторных полей

Приступим теперь непосредственно к вопросу о динамике интересных с точки зрения физики векторных полей. В этом вопросе мы опираемся на представление о векторном поле как о поле ускорений частиц сплошной среды (потока материи) распространяющихся по поверхности семимерной сферы S^7 . Однако, поскольку мы хотели бы рассматривать векторное поле ускорений в эволюции, то будем полагать, что радиус сферы является функцией эволюционного параметра (абсолютного времени τ), а векторное поле ускорений задано в открытом шаре, то есть в пространстве \mathbb{R}^8 . Тем самым, если векторное поле ускорений всюду в \mathbb{R}^8 имеет только радиальную составляющую, коллинеарную радиус-вектору точки в \mathbb{R}^8 , то мы будем говорить о статическом (за исключением эволюционной составляющей) векторном поле ускорений и соответствующем ему векторном поле скоростей. Впрочем, возможно и альтернативное представление динамики векторного поля семимерной сферы. Действительно, эволюцию векторного поля

3 О некоторых приложениях алгебры

на поверхности сферы S^7 можно задать статическим векторным полем на поверхности цилиндра $S^7 \times \log \tau$.

Далее, исходя из того, что геометрия вакуумного потока материи соответствует нейтральной метрике пространства ${}^4\mathbb{R}_8$, мы присмотримся к геометрии статического нулевого и единичного векторного поля ускорений пространства ${}^4\mathbb{R}_8$. Однако заметим прежде, что компактификация всех его псевдоевклидовых плоскостей в тор превращает ${}^4\mathbb{R}_8$ в произведение клиффордова тора на классический тор $S^3 \times S^3 \times T^2$, и при этом изотропный конус 8-мерного пространства с нейтральной метрикой компактифицируется в произведение клиффордова тора на букет из двух окружностей, на которые отображаются изотропные прямые линии псевдоевклидовой плоскости.

Итак, пусть поле скоростей равно

$$v(x) = \sum_1^8 v_i(x) \quad (3.4.1)$$

а поле ускорений

$$\dot{v}(x) = \sum_1^8 \dot{v}_i(x) \quad (3.4.2)$$

Тогда, если

$$\sum_1^8 \dot{v}_i^2(x) = \sum_1^8 x_i^2 = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \quad (3.4.3)$$

и

$$\dot{v}^2(x) = \sum_1^4 \dot{v}_i^2(x) - \sum_5^8 \dot{v}_i^2(x) = \sum_1^4 x_i^2 - \sum_5^8 x_i^2 = 0 \quad (3.4.4)$$

3 О некоторых приложениях алгебры

то

$$\begin{cases} \sum_1^4 \dot{v}_i^2(x) = \sum_1^4 x_i^2 = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{4} \\ \sum_5^8 \dot{v}_i^2(x) = \sum_5^8 x_i^2 = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{4} \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Таким образом, множество радиус-векторов статического нулевого поля ускорений принадлежит клиффордову тору $S^3 \times S^3$, лежащему на семимерной сфере, а следовательно соответствующее нулевому полю ускорений поле скоростей будет касательно клиффордову тору $S^3 \times S^3$ и сфере S^7 . При этом следует отметить, что в данном случае клиффордов тор симметричен во все моменты эволюции, поскольку радиусы его сфер всегда одинаковы. Если мы обратимся к статическому ненулевому полю ускорений, то полагая

$$\dot{v}^2(x) = \sum_1^4 \dot{v}_i^2(x) - \sum_5^8 \dot{v}_i^2(x) = \sum_1^4 x_i^2 - \sum_5^8 x_i^2 = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \quad (3.4.6)$$

получим систему

$$\begin{cases} \sum_1^4 \dot{v}_i^2(x) = \sum_1^4 x_i^2 = e^\tau \\ \sum_5^8 \dot{v}_i^2(x) = \sum_5^8 x_i^2 = e^{-\tau} \end{cases} \quad (3.4.7)$$

которой можно сопоставить изотропный конус

$$e^{-\tau} \sum_1^4 x_i^2 - e^\tau \sum_5^8 x_i^2 = 0 \quad (3.4.8)$$

8-мерного пространства с эволюционирующей нейтральной метрикой. Однако в данном случае мы видим глобальное нарушение симметрии клиффордова тора, в результате которого радиусы сфер клиффордова тора и соответствующая им

метрика являются функцией от эволюционного параметра. При этом следует заметить, что локальное нарушение симметрии клиффордова тора влечет за собой локальное изменение метрики, ответственное за гравитационное взаимодействие нашей модели. Например, при локальном изменении соотношения диаметров сфер клиффордова тора, вызванном гиперболическим углом отклонения векторного поля ускорений

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{v}_1^2(x) + \dot{v}_2^2(x) + \dot{v}_3^2(x) + \dot{v}_4^2(x)}{\dot{v}_5^2(x) + \dot{v}_6^2(x) + \dot{v}_7^2(x) + \dot{v}_8^2(x)} \quad (3.4.9)$$

его можно соотнести с гравитационным потенциалом.

Итак, геометрия статического вакуумного векторного поля ускорений в эволюции (то есть динамического векторного поля) описывается изменяющейся геометрией клиффордова тора $S^3 \times S^3$. Вместе с тем, для более полного описания эволюции статического вакуумного векторного поля ускорений необходимо добавить еще одну степень свободы, связанную с тем, что на сфере S^7 клиффордов тор может вращаться, и рассматривать геометрию произведения $S^3 \times S^3 \times S^1$. При этом надо понимать, что движению клиффордова тора по поверхности сферы S^7 в пространстве ${}^4\mathbb{R}_8$ соответствует его движение по поверхности гипersферы, а следовательно геометрия динамического вакуумного векторного поля ускорений без учета изменения радиусов тора описывается геометрией гипersферы пространства ${}^4\mathbb{R}_8$. В этой связи, заметим, что единичная сфера 8-мерного пространства с нейтральной метрикой гомеоморфна $\mathbb{R}^4 \times S^3$. А поскольку линейные векторные поля, касательные к гипersфере пространства ${}^4\mathbb{R}_8$, порождают алгебру Дирака, то геометрия динамического вакуумного векторного поля ускорений описывается произведением ${}^3\mathbb{R}_4 \times S^3$, где наше евклидово пространство движется в пространстве Минковского ${}^3\mathbb{R}_4$. Заметим при этом, что в

3 О некоторых приложениях алгебры

данном случае координаты пространства Минковского суть линии тока генераторов алгебры Дирака, лежащие на гиперсфере пространства ${}^4\mathbb{R}_8$. Замечательно также то, что динамическое векторное поле ускорений, в слоении которого имеют место локальные изменения формы клиффордова тора (в простейшем случае изменение радиусов его сфер), индуцирует локализацию алгебры Дирака в касательном пространстве, которая трансформирует пространство Минковского в псевдориманово многообразие.

В свою очередь, если обратиться к статическим векторным полям скоростей, взятым из алгебры линейных векторных полей, изоморфной алгебре Ли алгебры Дирака, то выбирая те векторные поля, которые одновременно касательны к сферам евклидова пространства \mathbb{R}_8 и псевдоевклидова пространства ${}^4\mathbb{R}_8$, мы убеждаемся, что линии тока этих векторных полей замкнуты в окружность Вилларсо симметричного клиффордова тора $S^3 \times S^3$. Откуда делаем вывод, что в том случае когда $\dot{v}^2(x) = 0$, векторное поле $v(x)$ имеет топологическую особенность (поскольку его линии тока замыкаются в окружность), и этими топологическими особенностями можно попробовать моделировать элементарные частицы. Пусть ξ – радиус-вектор топологической особенности, тогда криволинейный интеграл по пути L

$$S = \int_L [\ddot{\xi} - \dot{v}(x)] dl \quad (3.4.10)$$

от скалярного произведения разности ускорения особенности и векторного поля \dot{v} ускорений частичек внешней среды на дифференциальный элемент пути dl , пройденного особенностью векторного поля в пространстве ${}^4\mathbb{R}_8$, измеряет приращение угла собственного вращения топологической особенности (то есть подкрутку кольца особенности) на этом пути,

3 О некоторых приложениях алгебры

вызванное действием потока частичек, и тем самым моделирует действие элементарных частиц. Принцип наименьшего действия нашей модели обеспечивает выбор реальной траектории особенности в ${}^4\mathbb{R}_8$ при произвольном поле ускорений, но это не означает, что оно должно быть произвольным. Действительно, если мы в 3.4.10 занулим ускорение особенности, рассматривая только равномерное их движение, соответствующее прямолинейным траекториям особенности L в ${}^4\mathbb{R}_8$, тогда мы получим действие для поля ускорений

$$S = \int_L -\dot{v}(x)dl \quad (3.4.11)$$

и принцип наименьшего действия 3.4.11 будет обеспечивать оптимальный выбор, но уже не траектории, а поля ускорений.

Пусть теперь ковекторное поле ускорений частичек потока потенциально, т.е. $\dot{v} = \nabla u$. Тогда, потребовав выполнения вариационного уравнения

$$\delta \int_L \nabla^2 u dl = 0 \quad (3.4.12)$$

обеспечивающего равномерное течение потока, мы получим необходимое условие в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^{*2}} \quad (3.4.13)$$

Не следует однако забывать, что в том случае, когда каждая пара координат (t, t^*) , (x, x^*) , (y, y^*) , (z, z^*) является системой координат тороидального многообразия, на уравнение 3.4.13 должно быть наложено условие периодичности градиента потенциала по изотропным координатам. Заметим при

3 О некоторых приложениях алгебры

этом, что в изотропных координатах уравнение 3.4.13 принимает вид

$$\frac{\nabla^2 u}{\partial T \partial T^*} + \frac{\nabla^2 u}{\partial X \partial X^*} + \frac{\nabla^2 u}{\partial Y \partial Y^*} + \frac{\nabla^2 u}{\partial Z \partial Z^*} = 0. \quad (3.4.14)$$

В свою очередь, более сильное требование устойчивости (равновесности) потока, сводящееся к локальной экстремальности криволинейного интеграла по произвольному прямолинейному пути

$$\delta S = \int_L \nabla u(x) dl = 0 \quad (3.4.15)$$

приводит к необходимому условию, которое заключается в том, что поверхности уровня потенциальной функции $u(x)$ должны быть минимальными в пространстве ${}^4\mathbb{R}_8$, то есть они должны иметь нулевую среднюю кривизну. Иначе говоря, вариационное уравнение 3.4.15 имеет решение, задаваемое дифференциальным уравнением

$$d \star n(x) = 0, \quad (3.4.16)$$

где $n(x) = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}$, а звездочкой обозначен оператор Ходжа. Вместе с тем, если нас интересует динамика особенности векторного поля, то нам следует обратиться к вариационному уравнению

$$\delta S = \int_L [\ddot{\xi} - \nabla u(x)] dl = 0 \quad (3.4.17)$$

при условии, что варьируется траектория особенности в пространстве ${}^4\mathbb{R}_8$, а градиент потенциала играет роль внешнего поля.

Рассмотрим, наконец, такой классический предел, в котором мы пренебрежем изотропными координатами T^*, X^*, Y^*, Z^* ,

3 О некоторых приложениях алгебры

зачуляя их системой уравнений

$$t = t^*, \quad x = x^*, \quad y = y^*, \quad z = z^* \quad (3.4.18)$$

Тогда, по аналогии с 3.4.10 в пространстве Минковского (t, x, y, z) динамика особенности задается вариационным уравнением

$$\delta \int_S [\ddot{\xi} - e\dot{v}(x)] ds = 0 \quad (3.4.19)$$

где S — мировая линия особенности в пространстве Минковского, $\ddot{\xi}, \dot{v}(x)$ — ускорение особенности и поле ускорений потока в пространстве Минковского, а e — коэффициент увлечаемости особенности потоком.

Конечно, все эти физические аналогии требуют дальнейшего изучения. Необходимо также обратить внимание на преобразования комплексного вектора

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 = \omega_x + i\omega_{t^*} \\ \psi_2 = \omega_y + i\omega_z \\ \psi_3 = \omega_{x^*} + i\omega_t \\ \psi_4 = \omega_{y^*} + i\omega_{z^*} \end{cases} \quad (3.4.20)$$

$$(\psi^* \gamma_0, \psi) = \omega^2 = \omega_t^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 - \omega_{t^*}^2 + \omega_{x^*}^2 + \omega_{y^*}^2 + \omega_{z^*}^2 \quad (3.4.21)$$

где ω — вектор угловой скорости топологической особенности.

Заметим при этом, что относительно лоренцевых преобразований пространства Минковского (t, x, y, z) мы имеем биспинорное представление, реализуемое в алгебре касательных векторных полей пространства ${}^4\mathbb{R}_8$ изоморфной $sl_4(\mathbb{C})$, в то время как относительно поворотов евклидова пространства

3 О некоторых приложениях алгебры

(x, y, z) это представление редуцируется до спинорного представления, реализуемого в алгебре касательных векторных полей пространства \mathbb{R}_4 изоморфной $su(2)$. Тем самым, биспинор ψ имеет смысл комплексифицированного вектора направления угловой скорости топологической особенности, а в комбинации с углом поворота (фазой действия) особенности, из него можно построить биспинорную волновую функцию топологической особенности $\Psi = \psi e^{iS}$, где S — фазовое действие (угол поворота) особенности. Более того, если рассматривать вектор ω как векторнозначную функцию $\omega(t, x, y, z)$ с областью определения в пространстве Минковского, которая доставляет экстремум функционалу

$$\int \omega(x) \cdot \nabla \omega(x) d^4x, \quad (3.4.22)$$

а следовательно является решением вариационного уравнения

$$\delta \int \omega \cdot (\partial_t \omega^t + \partial_x \omega^x + \partial_y \omega^y + \partial_z \omega^z) d^4x = 0, \quad (3.4.23)$$

где $\omega^t, \omega^x, \omega^y, \omega^z$ — значения соответствующих векторных полей, а именно: $\omega^t = \gamma_0 \omega$, $\omega^x = \gamma_1 \omega$, $\omega^y = \gamma_2 \omega$, $\omega^z = \gamma_3 \omega$, при том, что $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — оверхествленные гамма-матрицы Дирака, тогда комплекснозначная вектор-функция $\psi(t, x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Дирака.

Ранее мы представляли топологическую особенность векторного поля скоростей $v(x)$ как векторное поле, линии тока которого замкнуты в окружность. С другой стороны, можно обобщить это определение, полагая, что топологические особенности представляют собой замкнутые статичные векторные поля 7-мерной сферы S^7 , линии тока которых заузлены на произведении сфер $S^3 \times S^3 \times S^1$. Попытаемся теперь исследовать симметрии этих геометрических объектов на предмет их соответствия глобальным калибровочным симметриям

3 О некоторых приложениях алгебры

так называемой стандартной модели элементарных частиц. В этой связи стоит отметить, что мы уже имеем обнадеживающий результат. Действительно, алгебра Ли окружности S^1 , прообразом которой служит изотропная прямая псевдоевклидовой плоскости (t, t^*) , изоморфна $u(1)$, алгебра Ли касательных линейных векторных полей 4-мерного пространства с нейтральной метрикой (x, x^*, t, t^*) изоморфна $su(2)$, а алгебра Ли касательных линейных векторных полей 6-мерного пространства с нейтральной метрикой (x, y, z, x^*, y^*, z^*) изоморфна $su(3)$. Кроме того, изучая топологию узлов на произведении сфер $S^3 \times S^3 \times S^1$, мы без ущерба для понимания топологических свойств узла можем упростить это произведение до 3-мерного тора $S^1 \times S^1 \times S^1$, а для наглядности рассматривать замкнутую ленточку, лежащую на 2-мерном классическом торе $S^1 \times S^1$. Тогда, в силу того, что узлу на торе соответствует фундаментальная группа его дополнения, изоморфная соответствующей группе кос, вполне справедливо сопоставление элементов этой группы с фундаментальными компонентами элементарной частицы, как это сделано в топологической конструкции Билсона-Томпсона.

В целом, следует понимать, что динамика векторных полей вакуумного потока определяется эволюцией глобально минимальной поверхности уровня к абсолютно минимальной поверхности уровня потенциальной функции, заданной во всем пространстве ${}^4\mathbb{R}_8$. Вместе с тем, вакуумный потенциал трансформируется не только глобально — в результате образования и эволюции его глобально минимальных поверхностей уровня, но и локально — либо в результате образования и движения его локально минимальных поверхностей уровня без особенностей (полей), либо в результате образования и движения его локально минимальных поверхностей уровня с особенностями (частиц), либо в результате случайных флуктуаций по-

3 О некоторых приложениях алгебры

тока.

4 О геометрических конструкциях конечных групп и алгебр Ли

Изучается топологическая связь между абелевыми и неабелевыми группами четности. Абелевы группы четности формируются как ядра гомоморфизмов четности в группе \mathbb{Z}^n а неабелевы группы четности формируются как ядра гомоморфизмов четности в группе $S_2 \wr S_n$. Факторизацией узлов целочисленной решетки с помощью абелевой группы четности мы получаем фактор-решетку, которая служит одномерным клеточным комплексом (каркасом) соответствующего произведения сфер. Показано, что автоморфизмы этой фактор-решетки, образуют соответствующую неабелеву группу четности. В заметке также представлены конструкции алгебр Ли, в частности $sl_n(\mathbb{C})$, $su(n)$, которые реализуются как вращения тором.

4.1 Введение

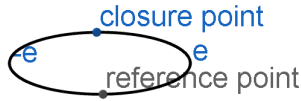
В данной статье с помощью геометрического конструирования связок окружностей мы устанавливаем соответствие между конечными абелевыми и неабелевыми группами. А поскольку этот вопрос ещё не нашёл отражения в литературе, то для первоначального знакомства с темой предлагаем обратиться к примерам групп автоморфизмов маломерных свя-

4 О геометрических конструкциях



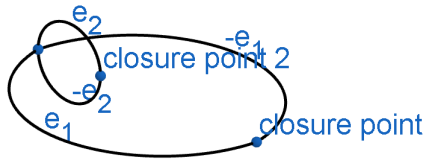
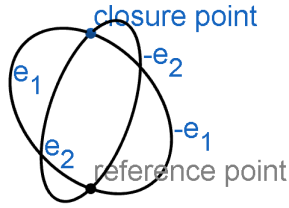
зок окружностей, состоящих из дискретных топологических отображений связок на себя, которые получаются в результате гомотопии, допускающей непрерывное изменение радиусов и расположения окружностей связки, но запрещающей их пересечения и разрывы.

Прежде всего заметим, что группа автоморфизмов букета из двух половинок окружности, свёрнутых в восьмёрку, может быть представлена мультипликативной группой из двух элементов $\{1, -1\}$, а группа автоморфизмов окружности, разделённой на две половинки окружности точкой замыкания, состоит из единственного элемента $\{1\}$, поскольку без разры-

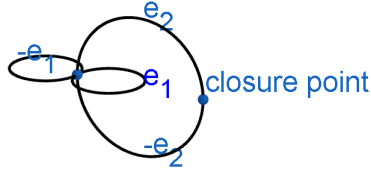


ва окружности в точке замыкания возможно только тождественное отображение окружности на себя. В свою очередь, группа автоморфизмов связки из двух окружностей с одной точкой замыкания четырёх половинок двух окружностей может быть представлена мультипликативной матричной группой $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, а группа автоморфизмов связки из двух окружностей с двумя точками замыкания двух пар половинок окружностей может быть представлена мультипликативной матричной группой

4 О геометрических конструкциях

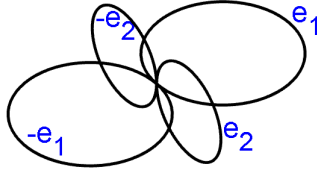


$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Ана-}$$



логично, связка из восьмёрки и окружности порождает группу $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ и, наконец, связка из двух свёрнутых в восьмёрки окружностей порождает группу

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$



$$\left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \}.$$

Задействуем теперь абелевы группы для конструирования представленных здесь связок окружностей. Пусть у нас имеется одномерная решётка \mathbb{L} , которая представляет собой прямую с целочисленными узлами, то есть, $\mathbb{L} = \{\mathbb{Z}; \mathbb{R}\}$. Тогда связка окружностей в виде восьмёрки получается в результате факторизации $\{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}; \mathbb{R}/2\mathbb{Z}\}$, а связка в виде окружности - в результате факторизации $\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{R}/2\mathbb{Z}\}$. В свою очередь, если у нас имеется двумерная решётка $\mathbb{L}^2 = \{\mathbb{Z}^2; (\mathbb{Z}, \mathbb{R}), (\mathbb{R}, \mathbb{Z})\}$ и её осевое ограничение $\mathbb{I}^2 = \{(0, \mathbb{Z}), (\mathbb{Z}, 0); (\mathbb{Z}, \mathbb{R}), (\mathbb{R}, \mathbb{Z})\}$, то факторизация решётки $\{\mathbb{Z}^2/(*); (\mathbb{Z}, \mathbb{R}/2\mathbb{Z}), (\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})\}$ сворачивает оси решётки в соответствующую связку окружностей. Действительно, если в качестве подгруппы $(*)$, факторизирующей узлы решётки, взять подгруппу, состоящую из пар чётных и пар нечетных целых чисел, то мы свернём оси решётки в связку из двух окружностей с одной точкой замыкания, а если взять подгруппу пар чётных целых чисел, то получим связку из двух окружностей с двумя точками замыкания. Если же $* = \mathbb{Z}^2$, то оси решётки компактифицируются в связку из пары восьмёрок.

Итак, мы наглядно показали, что в двумерном случае топологическая связь между абелевыми и неабелевыми группами существует, а теперь осталось лишь формализовать этот ре-

зультат на случай n измерений. Впрочем, за рамками нашего исследования остаётся вопрос о взаимоднозначности соответствия между абелевыми и неабелевыми конечными группами, но стоит заметить, что если это предположение верно, то вопрос о классификации конечных групп становится тривиальным.

4.2 Гомоморфизмы четности

Хорошо известно, что группа подстановок S_n допускает расширение до группы мономиальных подстановок $P_n = S_2 \wr S_n$, которую легко представить группой таких линейных преобразований $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x'_1, \dots, x'_n) : x'_i = \pm x_j$, в которых отображение множества индексов координат биективно, или группой квадратных матриц порядка n , имеющих в каждом столбце и в каждой строке по одному ненулевому элементу равному 1 или -1 .

Однако малоизвестно, что на группе P_n можно задать три типа функций четности. Действительно, по определению $S_2 \wr S_n = \prod^n S_2 \ltimes S_n$, где группа S_n действует на группе $\prod^n S_2$ подстановками компонент прямого произведения. Поэтому всякий элемент $z \in S_2 \wr S_n$ раскладывается в произведение $z = xy$, где $x \in S_n$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \prod^n S_2$, а сопряженный ему элемент $z^* \in S_2 \wr S_n$ раскладывается в произведение $z^* = yx$. Тогда можно дать следующие определения четности элемента z и сопряженного ему элемента z^* .

4.2.1 Определение. Функцией четности первого типа называется функция $\text{sgn } z = \text{sgn } z^* = \text{sgn } x$

4.2.2 Определение. Функцией четности второго типа называется функция $\text{sgn } z = \text{sgn } z^* = \text{sgn } y = \text{sgn } y_1 * \dots * \text{sgn } y_n$

4.2.3 Определение. Функцией четности третьего типа называется функция $\text{sgn } z = \text{sgn } z^* = \text{sgn } x * \text{sgn } y$

Все эти функции гомоморфно отображаются в группу $\{\pm 1\}$. Действительно, пусть дано разложение $x = x'x''$ и $y = y'y''$. Тогда, если $\text{sgn } xy = \text{sgn } x$, то $\text{sgn } x'y' * \text{sgn } x''y'' = \text{sgn } x' * \text{sgn } x'' = \text{sgn } x'x'' = \text{sgn } x = \text{sgn } xy$, если $\text{sgn } xy = \text{sgn } y$, то $\text{sgn } x'y' * \text{sgn } x''y'' = \text{sgn } y' * \text{sgn } y'' = \text{sgn } y'y'' = \text{sgn } y = \text{sgn } xy$, если $\text{sgn } xy = \text{sgn } x * \text{sgn } y$, то $\text{sgn } x'y' * \text{sgn } x''y'' = \text{sgn } x' * \text{sgn } y' * \text{sgn } x'' * \text{sgn } y'' = \text{sgn } x' * \text{sgn } x'' * \text{sgn } y' * \text{sgn } y'' = \text{sgn } x * \text{sgn } y = \text{sgn } xy$, чем и доказывается, что все наши функции четности являются гомоморфизмами. Таким образом, гомоморфизмы четности выделяют в группе P_n три подгруппы: AP_n , BP_n , CP_n , которые формируются как ядра функций четности соответственно первого, второго и третьего типа.

Исследуем теперь алгебраическую структуру этих групп. Прежде всего напомним, что группа P_n изоморфна группе $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$, где \mathbb{Z}_2^n это прямое произведение n компонент двух-элементного поля \mathbb{Z}_2 , и заметим, что гомоморфизм четности группы \mathbb{Z}_2^n , равный сумме по модулю 2 всех n компонент ее элемента, выделяет в ней подгруппу $A\mathbb{Z}_2^n$, состоящую из элементов, в которых 1 встречается четное число раз или вовсе не встречается. Поскольку всякий элемент группы $A\mathbb{Z}_2^n$ складывается в сумму, каждое слагаемое которой состоит из пар единиц и остальных нулей, то группа $A\mathbb{Z}_2^n$ порождается своими подгруппами, изоморфными $A\mathbb{Z}_2^2$. Тогда из определения групп AP_n , BP_n следует, что группа AP_n изоморфна группе $\mathbb{Z}_2^n \rtimes A_n$, где A_n это знакопеременная группа, а группа BP_n изоморфна группе $A\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$. Поскольку знакопеременная группа порождается циклами длины 3, то группа AP_n порождается своими подгруппами третьей степени AP_3 . В свою очередь, поскольку S_n порождается транспозициями

4 О геометрических конструкциях

а группа $A\mathbb{Z}_2^n$ порождается своими двухкомпонентными подгруппами, то группа BP_n порождается своими подгруппами второй степени BP_2 . Выпишем здесь линейное представление и матричный образ группы BP_2 :

$$\begin{aligned} &\{(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2), (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1), \\ &\quad (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2), (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)\}, \\ &\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Элементом этой группы соответствуют отражения плоскости (x_1, x_2) относительно диагоналей $x_2 = x_1$ и $x_2 = -x_1$. Выпишем также линейное представление и матричный образ группы CP_2 :

$$\begin{aligned} &\{(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2), (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1), \\ &\quad (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2), (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)\}, \\ &\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Элементом этой группы соответствуют повороты евклидовой плоскости на угол кратный $\pi/2$. Группа CP_n также порождается своими подгруппами, изоморфными CP_2 . Действительно, возьмем произвольный элемент группы CP_n и, умножая его на элементы группы, преобразующие только пару координат пространства представления, получим сначала тождественное отображение в компоненте S_n а затем и в компоненте S_2 сплетенного произведения, что возможно в силу свойства групп S_n и $A\mathbb{Z}_2^n$. Тогда, произведение обратных элементов разложения будет равно исходному элементу CP_n , а следова-

4 О геометрических конструкциях

тельно всякий элемент группы CP_n можно разложить в произведение элементов групп, изоморфных CP_2 .

Пусть теперь дано такое разбиение множества $I = \{1, \dots, n\}$ на непересекающиеся подмножества I_1, \dots, I_m , что мощности подмножеств I_i равны n_i , причем $n_1 + \dots + n_m = n$. Тогда всякому разбиению $J = \{I_1, \dots, I_m\}$ можно сопоставить группу, образованную внешним полупрямым произведением

$$JP_n = CP_{n_1} \times \dots \times CP_{n_m} \rtimes BP_m, \quad (4.2.3)$$

где группа BP_m действует на группе $\prod^m CP_{n_i}$ соответствующими подстановками компонент прямого произведения. Назовем эту группу конечной неабелевой группой четности. Следует отметить, что в общем случае группа JP_n не имеет матричного представления, но ее элементы могут быть представлены матрицами (представляющими группу BP_m), ненулевые элементы которых являются группами CP_{n_i} , также имеющими матричное представление.

Пусть теперь задан матричный образ вещественного линейного представления групп второй степени CP_2, BP_2 . Обозначим посредством C и B матричные алгебры, порождаемые матрицами, соответствующих групп, а посредством C^* , B^* обозначим группы обратимых элементов соответствующих алгебр. Тогда несложно показать, что ядро гомоморфизма четности $C^* \rightarrow \mathbb{R}^* : C^* \rightarrow \det C^*$ равно специальной ортогональной группе $SO(2)$, а ядро гомоморфизма четности $B^* \rightarrow \mathbb{R}^* : B^* \rightarrow \det B^*$ равно специальной псевдоортогональной группе $SO(1,1)$. Действительно, поскольку $C = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right\}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то множество решений уравнения $\det C^* = x^2 + y^2 = 1$ как раз и выделяет в группе C^* подгруппу $SO(2)$. В свою очередь, по-

4 О геометрических конструкциях

сколькx $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \right\}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то множество решений уравнения $\det B^* = x^2 - y^2 = 1$ выделяет в группе B^* подгруппу $SO(1, 1)$. С помощью блочно-диагональных матриц порядка n мы зададим изоморфную $SO(2)$ группу $SO_{jk}(2) = \text{diag} \left[1, \dots, SO(2)_{(jk)}, \dots, 1 \right]_n$, которая образована матрицами, отличающимися от единичной только тем, что на пересечении пары строк и пары столбцов с индексами j, k находится матричный элемент группы $SO(2)$. Аналогично зададим изоморфную $SO(1, 1)$ группу $SO_{jk}(1, 1) = \text{diag} \left[1, \dots, SO(1, 1)_{(jk)}, \dots, 1 \right]_n$. Тогда всякому разбиению J можно сопоставить группу

$$SO(n_1, \dots, n_m) = \left\langle SO_{jk}(2), SO_{jk}(1, 1) \right\rangle_J, \quad (4.2.4)$$

порождаемую генераторами $SO_{jk}(2)$ и $SO_{jk}(1, 1)$ так, что пара индексов первого генератора принадлежит произвольному подмножеству I_i , а пара индексов второго генератора принадлежит произвольной паре подмножеств разбиения. Однако заметим, что достаточное для образования группы $SO(n_1, \dots, n_m)$ число генераторов задается формулой

$$p = \sum_m n_i(n_i - 1)/2 + m(m - 1)/2, \quad (4.2.5)$$

поскольку для гиперболического поворота между двумя подпространствами достаточно только одного генератора $SO_{jk}(1, 1)$ с произвольными индексами j, k , взятыми из двух разных подмножеств I_i , а остальные генераторы $SO_{jk}(1, 1)$ (с другими индексами) будут производными от выбранного генератора и дискретных вращений внутри каждого из двух подпространств в отдельности. Тем самым, поскольку

4 О геометрических конструкциях

группа Ли порождается своими однопараметрическими подгруппами, то мы получили p -параметрическую группу Ли $SO(n_1, \dots, n_m)$, которую назовем группой четности Ли.

Итак, взяв за основу группу $S_2 \wr S_n$ и задав на ней гомоморфизмы четности, нам удалось получить не только конечные но и непрерывные группы четности, включающие в себя в том числе и некоторые классические группы. Заметим однако, что для образования всех возможных матричных групп Ли посредством порождения их маломерными подгруппами Ли необходимо воспользоваться еще одной матричной алгеброй, а именно, алгеброй $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\}$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда,

всякая подгруппа общей линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ порождается всевозможными маломерными группами Ли, которые могут быть образованы из матричных алгебр $M(2, \mathbb{R})$, A, B, C и расширены группой мономимальных подстановок двухэлементного базиса. Например, многосвязная, а точнее $2^n n!$ -компонентная, группа Ли, состоящая из n -матриц, в каждой строке и каждом столбце которых по одному ненулевому элементу, порождается генераторами, изоморфными односвязной группе Ли $A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\}$, где $x, y \in \mathbb{R}^+$, и генераторами, изоморфными конечной группе $S_2 \wr S_2$.

Приступим теперь к конструированию абелевых групп четности, которые формируются как ядра гомоморфизмов четности в группе \mathbb{Z}^n . Для этого зададим на группе \mathbb{Z}^n функцию четности $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}_2 : |x_1 + \dots + x_n| \bmod 2$, значение которой равно сумме по модулю 2 всех n компонентов ее элемента. Тем самым, мы получим гомоморфизм группы \mathbb{Z}^n в группу \mathbb{Z}_2 . Ядро гомоморфизма четности мы обозначим $A\mathbb{Z}^n$ и назовем группой четных элементов \mathbb{Z}^n . Легко заметить, что группа $A\mathbb{Z}^n$ состоит из элементов \mathbb{Z}^n , в которых нечетные компонен-

4 О геометрических конструкциях

ты встречаются четное число раз либо вовсе не встречаются, и поэтому она порождается всевозможными своими подгруппами второй степени $A\mathbb{Z}^2$. Имея ввиду, что $A\mathbb{Z}^1 = 2\mathbb{Z}$, сформируем также в \mathbb{Z}^n подгруппу $B\mathbb{Z}^n = (2\mathbb{Z})^n$, состоящую из прямого произведения (суммы) n экземпляров $A\mathbb{Z}^1$, т. е. из четных целых во всех компонентах \mathbb{Z}^n . Заметим при этом, что $\mathbb{Z}^n / B\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_2^n$.

Пусть далее мы имеем разбиение $J = \{I_1, \dots, I_m\}$, определенное ранее. Тогда, в соответствии с этим разбиением можно сформировать группу

$$J\mathbb{Z}^n = A\mathbb{Z}^{n_1} \times \dots \times A\mathbb{Z}^{n_m}. \quad (4.2.6)$$

Фактор-группу $\mathbb{Z}^n / J\mathbb{Z}^n$, изоморфную группе \mathbb{Z}_2^m порядка 2^m мы назовем конечной абелевой группой четности. Порядок группы $\mathbb{Z}^n / J\mathbb{Z}^n$ можно вычислить также, исходя из того, что

$$\mathbb{Z}^n / J\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n_1} / A\mathbb{Z}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}^{n_m} / A\mathbb{Z}^{n_m} \quad (4.2.7)$$

а всякая группа $\mathbb{Z}^{n_i} / A\mathbb{Z}^{n_i}$ состоит из двух элементов. В качестве иллюстрации приведем здесь несколько примеров. Если $J = \{(1), (2)\}$, то $J\mathbb{Z}^2 = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}\}$, а группа $\mathbb{Z}^n / J\mathbb{Z}^2$ состоит из четырех точек. Если $J = \{(1, 2)\}$, то $J\mathbb{Z}^2 = \{(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}), (2\mathbb{Z} + 1, 2\mathbb{Z} + 1)\}$, а группа $\mathbb{Z}^n / J\mathbb{Z}^2$ состоит из двух точек, причем на плоскости ее можно представить в качестве двух классов целочисленных параллелограммов, т.е. параллелограммов, составленных из пар целых чисел на его сторонах, с равноудаленными от нулевой точки вершинами, лежащими в четных и нечетных точках координатных осей соответственно.

4.3 Топологическая связь между группами четности

Пусть $\mathbb{L} = \{\mathbb{Z}; \mathbb{R}\}$ одномерная целочисленная решетка, в которой $z \in \mathbb{Z}$ – узлы решетки, $[2z, 2z + 1]$ – четные ребра, а $[2z + 1, 2z]$ нечетные ребра. отождествим теперь узлы нашей решетки с помощью факторизации группами $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и \mathbb{Z}/\mathbb{Z} соответственно, а ребра отождествим с помощью отношением эквивалентности по признаку четности. Тогда, в первом случае мы получим одномерную компактифицированную решетку $\mathbb{L}/2\mathbb{Z}$ в виде окружности с двумя фактор-узлами, лежащими в противоположных точках окружности, которые разделяют четные и нечетные фактор-ребра, а во втором случае мы получим одномерную компактифицированную решетку \mathbb{L}/\mathbb{Z} в виде двух соприкасающихся окружностей с одним факто-узлом в точке касания окружностей и парой (четных и нечетных) фактор-ребер свернутых в окружности.

Если зафиксировать нулевую точку (четный фактор-узел) фактор-решетки $\mathbb{L}/2\mathbb{Z}$, лежащей на плоскости, то изоморфизмы такого вложения решетки на плоскости сводятся к единственному тождественному преобразованию, поскольку без разрыва решетки в нечетном фактор-узле невозможно поменять местами четные и нечетные фактор-ребра. Если же зафиксировать нулевую точку фактор-решетки \mathbb{L}/\mathbb{Z} , лежащей на плоскости, то мы получим автоморфизм тождественного преобразования решетки и автоморфизм меняющий местами четные и нечетные ребра, поскольку теперь никаких топологических препятствий к такой перестановке нет.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n задана целочисленная решетка $\mathbb{L}^n = \{\mathbb{Z}^n; (\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{Z})\}$, состоящая из прямых линий, пересекающихся в точках \mathbb{R}^n с целочисленными координатами и параллельных базисным ортам. Целочисленная решетка

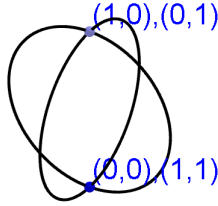
\mathbb{L}^n представляет собой регулярно повторяющийся набор узлов и ребер, который может быть получен бесконечным повторением n -мерного образующего параллелепипеда, состоящего из 2^n узлов соединенных ребрами. Следовательно, группа автоморфизмов целочисленной решетки совпадает с группой автоморфизмов образующего параллелепипеда, и поэтому равна группе мономиальных подстановок, которая изоморфна сплетенному произведению $S_2 \wr S_n$. Определим также в пространстве \mathbb{R}^n осевое ограничение целочисленной решетки $\mathbb{I}^n = \{(0, \dots, \mathbb{Z}, \dots, 0); (\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{Z})\}$.

Факторизуем теперь решетку \mathbb{L}^n так, чтобы узлы решетки факторизовались с помощью канонического гомоморфизма $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}^n$, а ребра с помощью отношения эквивалентности по признаку четности ребер. В результате такой факторизации целочисленной решетки, мы получим фактор-решетку $\mathbb{L}^n / \mathbb{Z}^n = \{\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}^n; (\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{R} / 2\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z})\}$ с одним фактор-узлом и n пар фактор-ребер (половинок окружностей). Группа топологических автоморфизмов фактор-решетки $\mathbb{L}^n / \mathbb{Z}^n$ также равна $S_2 \wr S_n$. Это следует из того, что нет никаких топологических препятствий для образующих группу подстановок S_n перестановок пар фактор-ребер и для образующих группу подстановок S_2 перестановок внутри каждой пары фактор-ребер. В свою очередь, если $\mathbb{L}^n / * = \{\mathbb{Z}^n / *; (\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{R} / 2\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z})\}$, то группа топологических автоморфизмов фактор-решетки $\mathbb{L}^n / *$ задаётся группой топологических автоморфизмов связки окружностей, полученной в результате компактификации (сворачивания) осей решетки.

Установим теперь группу топологических автоморфизмов фактор-решетки $\mathbb{L}^n / A\mathbb{Z}^n$. Напомним, что группа топологических автоморфизмов фактор-решетки $\mathbb{L}^1 / 2\mathbb{Z}$ тривиальна и равна CP_1 . Если же мы образуем фактор-решетку $\mathbb{L}^2 / A\mathbb{Z}^2$, изоморфную пучку из двух окружностей, пересекающихся в

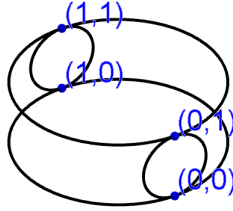
4 О геометрических конструкциях

двух своих противоположных точках, то, как мы установили во введении, группа топологических автоморфизмов этого пучка равна группе CP_2 . Наконец, пусть дана фактор-



решетка \mathbb{L}^n / AZ^n , изоморфная пучку из n окружностей, пересекающихся в двух своих противоположных точках, причем касательные вектора к окружностям в этих точках образуют систему из n линейно независимых векторов. Поскольку всякая пара ее 1-мерных элементов равна \mathbb{L}^2 / AZ^2 , то всякий топологический автоморфизм фактор-решетки \mathbb{L}^n / AZ^n можно разложить в композицию топологических автоморфизмов всевозможных ее пар, а следовательно группа топологических автоморфизмов фактор-решетки \mathbb{L}^n / AZ^n равна группе четности CP_n .

Пусть дана фактор-решетка \mathbb{L}^2 / BZ^2 , которую можно представить в виде четырех окружностей, точки пересечения которых расположены в узлах образующего параллелограмма, а её осевое ограничение представляет собой связку из двух окружностей с двумя точками замыкания половинок окружностей. Следовательно, как мы установили во введении, топологические автоморфизмы фактор-решетки \mathbb{L}^2 / BZ^2 составляют группу BP_2 . Аналогично, пусть дана фактор-решетка \mathbb{L}^n / BZ^n , которую можно представить в виде n -параллелепипеда, составленного из 2^n узлов, связан-



ных окружностями. Тогда, топологические автоморфизмы фактор-решетки $\mathbb{L}^n/B\mathbb{Z}^n$ порождаются исключительно его двумерными связками окружностей, а следовательно составляют группу BP_n .

Наконец, пусть дана фактор-решетка $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$, которую можно представить в виде образующего m -параллелепипеда, составленного из 2^m узлов, связанных пучками из n_i окружностей. Поскольку топологические автоморфизмы фактор-решетки $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$ сводятся к составляющим группу BP_m изоморфизмам m -араллелепипеда с ребрами в виде окружностей (то есть, пар половинок окружностей), которые действуют на прямом произведении топологических автоморфизмов пучков окружностей, составляющих группу $\prod^m CP_{n_i}$, то ее группа топологических автоморфизмов равна $\prod^m CP_{n_i} \rtimes BP_m$. Таким образом, доказано

4.3.1 Предложение. Группа топологических автоморфизмов решетки $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$ эквивалентна группе четности JP_n

Если рассмотреть целый континуум непрерывных вращений фактор-решетки $\mathbb{L}^n/A\mathbb{Z}^n$, оставляющих на месте ее узловые точки, то мы получим группу движений сферы S^n , оставляющих неподвижными ее полюса, т.е., группу $SO(n)$. Аналогично можно было бы получить группу движений пря-

мого произведения сфер, оставляющих неподвижными узловые точки соответствующей фактор-решетки. Действительно, если фактор-решетку $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$ рассматривать как каркас (одномерный клеточный комплекс) прямого произведения сфер $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$, то группу дискретных вращений фактор-решетки JP_n можно было бы расширить до группы четности Ли $SO(n_1, \dots, n_m)$ и сопоставить ее группе движений прямого произведения сфер $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$, оставляющих неподвижными узловые точки соответствующей фактор-решетки.

4.4 Алгебры Ли вращающихся торов

В этом разделе нет классификации алгебр Ли, порождаемых касательными линейными векторными полями вращающихся торов, но подробно описаны конструкции некоторых из них. Прежде всего представим алгебры Ли касательных векторных полей окружностей. Пусть у нас имеется векторное поле

$$I = x_2 \partial x_1 - x_1 \partial x_2 \quad (4.4.1)$$

касательное к евклидовым окружностям. Тогда задание этой образующей вместе с конструкцией скобки Ли векторных полей решает поставленную задачу. А поскольку всякая алгебра Ли линейных векторных полей изоморфна соответствующей матричной алгебре с операцией коммутирования, то генератор этой алгебры мы запишем в виде

$$I = 1_{ij} - 1_{ji} \quad (4.4.2)$$

где 1_{ij} – матрица с единственным ненулевым (равным единице) элементом на пересечении i -той строки и j -го столбца,

4 О геометрических конструкциях

причем $i < j$, и кроме того, в данном случае $i, j = 1, 2$. Аналогично, если у нас имеется векторное поле

$$J = x_2 \partial x_1 + x_1 \partial x_2, \quad J = 1_{ij} + 1_{ji} \quad (4.4.3)$$

касательное к псевдоевклидовым окружностям, то этого достаточно для задания соответствующей алгебры Ли. В свою очередь, векторное поле

$$IJ = x_i \partial x_1 - x_2 \partial x_2, \quad D = IJ = 1_{ii} - 1_{jj} \quad (4.4.4)$$

порождает алгебру Ли, касательную к псевдоевклидовым окружностям в изотропном базисе. Объединим теперь все эти векторные поля $\{I, J, D\}$ для образования базиса алгебры Ли $sl_2(\mathbb{R})$, касательной к псевдоевклидовой окружности, каждая точка которой вращается по траектории евклидовой окружности. А имея в виду факторизацию псевдоевклидовой плоскости в тор $S^1 \times S^1$, можно сказать, что алгебра Ли $sl_2(\mathbb{R})$ реализуется как евклидовы и псевдоевклидовы вращения классического тора, намотанного на поверхность классической сферы S^2 с выколотыми полюсами. Данная конструкция легко обобщается для образования базиса алгебры Ли $sl_n(\mathbb{R})$. Действительно, если задать набор матриц

$$\begin{aligned} I_{ij} &= 1_{ij} - 1_{ji} \\ J_{ij} &= 1_{ij} + 1_{ji} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, n$, и матрицы

$$D_{ii} = 1_{ii} - 1_{nn} \quad (4.4.6)$$

где $i = 1, \dots, n-1$, то мы получим линейно независимый базис $\{I_{ij}, J_{ij}, D_{ii}\}$ алгебры Ли $sl_n(\mathbb{R})$, которая реализуется как вращения тора $S^1 \times \dots \times S^n$ по поверхности сферы S^n с выколотыми полюсами. Более того, воспользовавшись парными

4 О геометрических конструкциях

вращениями, можно получить алгебру Ли $sl_n(\mathbb{C})$. В самом деле, пусть

$$\begin{aligned} I_{ij} &= (1_{2i-1, 2j-1} - 1_{2j-1, 2i-1}) + (1_{2i, 2j} - 1_{2j, 2i}) \\ J_{ij} &= (1_{2i-1, 2j-1} + 1_{2j-1, 2i-1}) + (1_{2i, 2j} + 1_{2j, 2i}) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, n$, и

$$D_{ii} = (1_{2i-1, 2i-1} - 1_{2n-1, 2n-1}) + (1_{2i, 2i} - 1_{2n, 2n}) \quad (4.4.8)$$

где $i = 1, \dots, n-1$, и

$$I = \sum_1^n (1_{2i-1, 2i} - 1_{2i, 2i-1}) \quad (4.4.9)$$

Тогда множество $\{I_{ij}, J_{ij}, D_{ii}, II_{ij}, IJ_{ij}, ID_{ii}\}$ служит линейно независимым базисом алгебры $sl_n(\mathbb{C})$, а множество $\{I_{ij}, IJ_{ij}, ID_{ii}\}$ образует базис алгебры $su(n)$, причем $\{sl_n(\mathbb{C})\} = \{su(n)\} + I\{su(n)\}$. Алгебра Ли $sl_n(\mathbb{C})$ реализуется как собственные движения тора $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ по окружностям Вилларсо (за счет парных вращений тора в $2n$ -мерном евклидовом пространстве) и как движения этого тора по поверхности гиперболы $2n$ -мерного пространства с нейтральной метрикой.

Исходная простейшая конструкция алгебры Ли обобщается также в том случае, когда мы рассматриваем касательные векторные поля гиперболы $2n$ -мерного пространства с нейтральной метрикой, которая вращается в $2n$ -мерном пространстве с евклидовой метрикой. Причем, поскольку на пересечении гиперболы и сферы в $2n$ -мерном пространстве лежит тор (произведение сфер $S^{n-1} \times S^{n-1}$), то мы и здесь будем говорить об алгебре Ли касательных векторных полей вращающихся торов. Генераторы алгебры Ли векторных полей, касательных к гиперсферам псевдоевклидова пространства с сигнатурой метрики $(-n, n)$, реализуются с помощью

4 О геометрических конструкциях

матриц

$$\begin{aligned} I_{ij}^1 &= 1_{ij} - 1_{ji} \\ I_{ij}^2 &= 1_{i+n, j+n} - 1_{j+n, i+n} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, n$, и набора матриц

$$J_{ij} = 1_{i, j+n} + 1_{j+n, i} \quad (4.4.11)$$

где $i, j = 1, \dots, n$, а генераторы алгебры Ли векторных полей, касательных к сферам $2n$ -мерного евклидова пространства, реализуются с помощью матриц

$$1_{ij} - 1_{ji} \quad (4.4.12)$$

где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, 2n$, либо (что эквивалентно) с помощью набора матриц

$$\begin{aligned} I_{ij}^1 &= 1_{ij} - 1_{ji} \\ I_{ij}^2 &= 1_{i+n, j+n} - 1_{j+n, i+n} \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, n$, и матриц

$$I_{ij}^3 = 1_{i, j+n} - 1_{j+n, i} \quad (4.4.14)$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Заметим при этом, что совместно генераторы евклидова и псевдоевклидова пространства образуют новый набор матриц

$$D_{ij} = I^3 J = 1_{ij} - 1_{j+n, j+n} \quad (4.4.15)$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Таким образом, генераторы алгебры Ли векторных полей, касательных к тору $S^{n-1} \times S^{n-1}$, вращающиеся в $2n$ -мерном пространстве с евклидовой и нейтральной

4 О геометрических конструкциях

метрикой, реализуются с помощью набора $\{I_{ij}^1, I_{ij}^2, I_{ij}^3, J_{ij}, D_{ij}\}$, состоящего из $4n^2 - n$ матриц. Отметим также, что в алгебру Ли $\left\langle \{I_{ij}^1, I_{ij}^2, I_{ij}^3, J_{ij}, D_{ij}\} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ вкладываются алгебра Ли $so_{2n}(\mathbb{R})$ и $sl_n(\mathbb{C})$, а ее размерность при $n = 8$ совпадает с размерностью исключительной алгебры Ли e_8 .

5 О параллелепипедах в алгебре и топологии

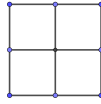
Мы исходим из того, что концепцию применения параллелепипедов можно найти в таких разделах математики как комбинаторный анализ, полилинейная алгебра и алгебраическая топология. Действительно, последовательности ребер n -мерного параллелепипеда, натянутого на базис n -мерного пространства, изоморфны подстановкам. В свою очередь, вычисление ориентированного объема параллелепипеда как полилинейной функции, принимающей нулевое значение на линейно зависимых векторах, приводит к понятию знакопеременного полилинейного произведения. Наконец, параллелепипеды легко могут складываться в клеточные пространства и образовывать цепные комплексы с группой гомологий в качестве топологического инварианта этих пространств. Имея в виду вышеперечисленные проникновения геометрии в алгебру и топологию, мы будем последовательно развивать алгебро-топологический формализм, имеющий отношение к параллелепипедам, а затем найдем ему применение в решении проблемы классификации замкнутых ориентируемых многообразий произвольной размерности.

5.1 Введение

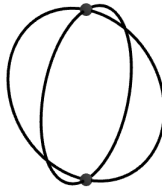
Для быстрого погружения в тему и приобретения навыков конструирования каркасов замкнутых многообразий про-

5 О параллелепипедах

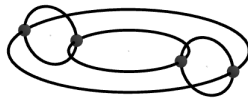
извольной размерности, обратимся сначала к интуитивно понятным изображениям каркасов 2-мерных многообразий. Прежде всего возьмём 4-клеточную решётку и сформируем



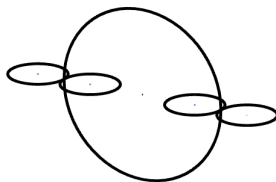
из неё каркасы основных 2-мерных многообразий. Для того чтобы получить каркас сферы необходимо образовать крест, переместив диагональные вершины (тянуть вместе с рёбрами) в центральную вершину, а затем отождествить концы креста. Каркас тора получается отождествлением пар вер-



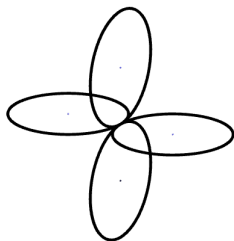
шин, лежащих на двух противоположных горизонтальных и вертикальных сторонах решётки. Для формирования каркаса



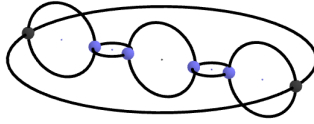
проективной плоскости необходимо отождествить пары вершин на противоположных вертикальных сторонах и тройки вершин на горизонтальных сторонах решетки. В свою оче-



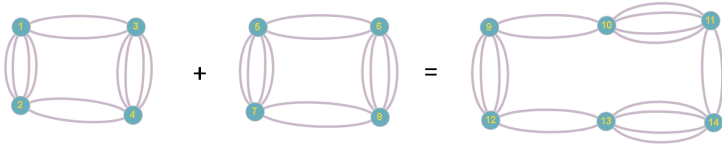
редь, для формирования каркаса бутылки Клейна необходимо отождествить тройки вершин и на горизонтальных и на вертикальных сторонах решётки.



Далее мы обратимся к вопросу о классификации каркасов 2-мерных замкнутых ориентируемых многообразий. Легко заметить, что каркас кренделя получается сплетением двух каркасов тора. Для этого в каждом каркасе тора необходимо расцепить окружности в одной произвольной вершине, а затем отождествить соответствующие пары окружностей из двух разных каркасов. Понятно, что таким же образом можно получить каркас 2-многообразия, имеющего род $g > 2$. Однако, более ценно то, что мы можем изображать каркасы многообразий, имеющие размерность более двух. Посмотрите, например, как можно с помощью графов изобразить каркас 3-многообразия, полученного сплетением каркасов двух



3-многообразий $S^2 \times S^1$. В дальнейшем (в разделе о парал-



лелепипедах и многообразиях) мы покажем как с помощью клеточного разбиения замкнутого многообразия можно дать строгое определение каркаса многообразия и как с помощью графа изобразить каркас произведения сфер произвольной размерности.

5.2 Подстановки

Прежде всего обратимся к основаниям комбинаторного анализа, т. е. к понятию отображения множеств, где устоялись классические определения, и поэтому нам будет достаточно сослаться на университетский учебник, например, [18]. Однако, даже классические представления иногда допускают определенную модернизацию. Действительно, пусть дана такая тройка множеств (A, B, F) , что $F = \{(a, b)\} \neq \emptyset$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда мы определим неклассическое понятие отображения F с классическим обозначением $f : A \rightarrow B$, имея в ви-

ду, что каждая пара из F может быть представлена стрелкой соответствия $a \rightarrow b$, где $b = f(a)$ для однозначного соответствия и $b \in f(a)$ для многозначного соответствия. Вместе с тем, триплет (B, A, F^{-1}) , где имеет место обращение всех стрелок, задает обратное отображение. Если $\forall a \exists b (f(a) = b)$, то мы говорим об однозначном отображении всего A и тем самым возвращаемся к классическому представлению об отображении. Сужением отображения F на $A' \subset A$ мы назовем такое отображение $f' = f|_{A'} : A' \rightarrow B$, которое соответствует триплету (A', B, F') , где включение $F' \subset F$ порождается включением $A' \subset A$; т.е., исключением из F стрелок, выходящих из подмножества $A \setminus A'$.

Расширение понятия отображения влечет за собой расширение таких понятий как инъективное и сюръективное отображение. Инъективным отображением можно было бы назвать такое F , которое своим первым аргументом исчерпывает A , и в котором нет сходящихся стрелок, т. е. отсутствуют пары $(x, b), (y, b)$, иначе говоря, $\forall x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \cap f(y) = \emptyset$. В свою очередь, сюръективным отображением можно было бы назвать такое F , которое своим вторым аргументом исчерпывает B , и в котором нет расходящихся стрелок, т. е. отсутствуют пары $(a, x), (a, y)$, иначе говоря, $\forall b \exists a (f(a) = b)$. Квазиинъективным отображением можно назвать такое F , которое исчерпывает A , и в котором нет расходящихся стрелок, иначе говоря, $\forall a \exists b (f(a) = b)$. Квазисюръективным отображением можно назвать такое F , которое исчерпывает B , и в котором нет сходящихся стрелок, иначе говоря, $\forall b \exists! a (f(a) = b)$. Наконец, строго инъективным отображением можно назвать отображение, инъективное в классическом смысле, т. е. такое, что $\forall x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Аналогично, строго сюръективным отображением можно назвать отображение, сюръективное в классическом смысле. Вместе

с тем, в понятие биективного отображения мы, по-прежнему, вкладываем классический смысл.

Логические связи между всеми этими типами отображений отражены в нижеследующих очевидных утверждениях.

5.2.1 Предложение. Биективное отображение одновременно инъективно и сюръективно

5.2.2 Предложение. Сужение биекции строго инъективно

5.2.3 Предложение. Отображение, обратное инъективному (квазиинъективному), является сюръекцией (квазисюръекцией)

Теперь, в рамках вышепринятого формализма, нам будет легко определить основные комбинаторные понятия. Действительно, если произвольную биекцию из триплета (A, A, F) называть подстановкой, а простейшую подстановку — транспозицией, то размещение без повторений можно определить как строгую инъекцию, а размещение с повторениями — как квазиинъекцию. Примем также удобную нам систему обозначений. Если заданы множества $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, m\}$, где $m \leq n$, тогда отображение $/J/ := /i_1, \dots, i_j, \dots, i_m/ : J \rightarrow J$ пусть обозначает произвольную подстановку m элементов множества J , а $\text{sgn } /J/$ — знак четности этой подстановки; отображение $[J] := [i_1, \dots, i_j, \dots, i_m] : J \rightarrow I$ пусть обозначает произвольное размещение из n по m с повторением. Отображение $\langle J \rangle := \langle i_1, \dots, i_j, \dots, i_m \rangle : J \rightarrow I$ обозначает произвольное размещение из n по m без повторений; отображение $(J) := (i_1, \dots, i_j, \dots, i_m) : J \rightarrow I$ пусть обозначает произвольное упорядоченное размещение, т. е. такое $\langle J \rangle$ в котором $i_j < i_{j+1}$. Наконец, если множество $\{J\} := \{i_1, \dots, i_j, \dots, i_m\}$ обозначает у нас производное от (J) подмножество I , состоящее

из m элементов образа размещения (J) , тогда отображение $/ (J) / := / (i_1, \dots, i_j, \dots, i_m) / : \{J\} \rightarrow \{J\}$ пусть обозначает произвольную подстановку элементов множества $\{J\}$, соответственно $\text{sgn } / (J) /$ — знак четности этой подстановки.

Пусть отображение $/ (J) \hat{i}_j / : (i_1, \dots, i_j, \dots, i_m) \rightarrow (i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_m) i_j$ обозначает производную от (J) и произвольного элемента $\{J\}$ подстановку изъятия этого элемента, в результате которой элемент i_j переходит в конец а остальные элементы, после переноса i_j , остаются упорядоченными по возрастанию. Наряду с изъятием элемента из упорядоченного множества можно рассматривать присоединение элемента с последующим упорядочиванием. Тогда мы получим подстановку $/ (J) \check{k} /$, где $k \in \{J'\} = I \setminus \{J\}$, которую следует понимать как подстановку упорядочивания множества $\{(J), k\}$. Все эти подстановки обладают свойством антикоммутативности их четностей, так что $\text{sgn } / (J) \hat{i}_j \hat{i}_k / = -\text{sgn } / (J) \hat{i}_k \hat{i}_j /$, а $\text{sgn } / (J) \check{k} / = -\text{sgn } / (J) \check{j} /$.

Рассмотрим, наконец, подстановки частичного нарушения упорядоченности множества I . Принимаем, что образ подстановки $/ J, J' / : I \rightarrow \{(J), (J')\}$, где $\{J'\} = I \setminus \{J\}$, образован множествами $\{J\}$ и $\{J'\}$, упорядоченными по отдельности, а подстановка $/ (J, J') / : \{(J), (J')\} \rightarrow \{(J'), (J)\}$ подразумевает перестановку упорядоченных множеств. Тогда, поскольку $/ J', J / = / J, J' / * / (J, J') /$ а $\text{sgn } / (J, J') / = (-1)^{m(n-m)}$, то мы получим равенство $\text{sgn } / J, J' / \cdot \text{sgn } / J', J / = (-1)^{m(n-m)}$.

5.3 Знакопеременные произведения

Алгебра знакопеременных полилинейных произведений хорошо изучена, и поэтому можно сослаться, например, на соответствующую главу в [20] или [25]. Здесь же мы, исполь-

5 О параллелепипедах

зую понятие четности частично упорядоченных подстановок и подстановок изъятия (присоединения), коснемся лишь отдельных вопросов.

Прежде всего обратимся к полилинейным произведениям в целом. Пусть \mathbb{L} означает n -мерное линейное пространство над \mathbb{R} а $(e^i)_I$ — его базис. Пусть также $\mathbb{T}^m(\mathbb{L})$ означает n^m -мерное пространство над \mathbb{R} а $(e^{[J]})_{\{[J]\}}$ — его базис. Тогда мы можем явно представить тензорное полилинейное произведение, если запишем

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^m : \mathbb{L}^m \rightarrow \mathbb{T}^m(\mathbb{L}) : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \sum_{\{[J]\}} \prod_{i \in [J]} x_{ij} e^{[J]},$$

где x_{ij} означает j -ю координату вектора x^i . Поскольку $e^{[i_1] \otimes \cdots \otimes e^{i_m]} = e^{[J]}$, то линейная оболочка множества $\{e^{[i_1] \otimes \cdots \otimes e^{i_m]}\}_{\{[J]\}}$ изоморфна тензорному линейному пространству $\mathbb{T}^m(\mathbb{L})$.

Сформируем теперь два знакопеременных полилинейных произведения, а именно, внешнее произведение

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^m : \mathbb{L}^m \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{L}) : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \sum_{\{[J]\}} e^{(J)} \sum_{\{/(J)/\}} \text{sgn } /(J)/ \prod_{i_j \in /(J)/} x_{ij} = \sum_{\{[J]\}} \det(x_{ij})_J^{\{J\}} e^{(J)}$$

где $\Lambda^m(\mathbb{L})$ это пространство поливекторов, изоморфное линейной оболочке множества $\{e^{(i_1 \wedge \cdots \wedge e^{i_m})}\}_{\{[J]\}}$; и векторное произведение

$$x^1 \times \cdots \times x^m : \mathbb{L}^m \rightarrow \Lambda^{n-m}(\mathbb{L}) : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \sum_{\{[J']\}} \text{sgn } /J, J' / \det(x_{ij})_J^{\{J\}} e^{(J')},$$

5 О параллелепипедах

где $\{J'\} = I \setminus \{J\}$. Всем этим произведениям гарантирована знакопеременность, поскольку при транспозиции произвольной пары векторов из набора (x^1, \dots, x^m) знаки четностей всех подстановок $/ (J) /$ меняются на противоположные. Кроме того, для них справедливо

5.3.1 Предложение. Система векторов (x^1, \dots, x^m) линейно зависима тогда и только тогда, когда $x^1 \wedge \dots \wedge x^m = x^1 \times \dots \times x^m = 0$

Действительно, с одной стороны, если система (x^1, \dots, x^m) линейно зависима, то $\det(x_{ij})_J^{\{J\}} = 0 \quad \forall (J) \in \{(J)\}$, с другой стороны, если система (x^1, \dots, x^m) линейно независима, то с помощью элементарных преобразований системы и перестановок элементов базиса (e^1, \dots, e^n) матрица $(x_{ij})_J^I$ приводится к трапецидальному виду с m ненулевыми строками и ненулевой диагональю $(x_{ii})_J$, в силу чего $\det(x_{ij})_J^J \neq 0$. Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что элементарные преобразования сохраняют независимость системы векторов и одновременно сохраняют равенство (неравенство) нулю определителя, а подстановки базиса не закупают ни внешнего ни векторного произведения. Тем самым, внешнее и векторное произведение линейно независимой системы векторов имеют по крайней мере по одной ненулевой координате, а следовательно утверждение доказано.

Пространство поливекторов $\Lambda^m(\mathbb{L})$ интересно еще и тем, что для него существуют естественные понижающий и повышающий граничные гомоморфизмы, а именно,

$$\delta : \Lambda^m(\mathbb{L}) \rightarrow \Lambda^{m-1}(\mathbb{L}) : e^{(J)} \rightarrow \sum_{j \in \{J\}} \text{sgn} / (J) \hat{j} / \cdot e^{(\hat{j})},$$

где (\hat{j}) означает упорядоченную подстановку изъятия $/ (J) \hat{j} /$,

и

$$d : \Lambda^m(\mathbb{L}) \rightarrow \Lambda^{m+1}(\mathbb{L}) : e^{(I)} \rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{J\}} \text{sgn } / (J) \check{j} / \cdot e^{(\check{J})},$$

где (\check{J}) означает упорядоченную подстановку присоединения $/ (J) \check{j} /$. Действительно, поскольку в поливекторе $\delta\delta(x)$ базисные элементы образуются с помощью изъятий дважды, то в силу свойства антикоммутативности четностей подстановок с изъятием мы получим тождество $\delta\delta(x) = 0$ для всякого поливектора x . Аналогично получается тождество $dd(x) = 0$.

Обратимся теперь к пространству \mathbb{L} , в котором задан функционал скалярного произведения. Пусть \mathbb{E} будет произвольным n -мерным евклидовым пространством над \mathbb{R} . Если принять, что

$$x^1 \wedge \dots \wedge x^m \cdot y^1 \wedge \dots \wedge y^m = \det(x^i \cdot y^j)_I,$$

то это означает, что мы индуцируем из \mathbb{E} в $\Lambda^m(\mathbb{E})$ скалярное произведение поливекторов. Если взять квадрат поливектора $x^1 \wedge \dots \wedge x^m$, т. е. его скалярное произведение на себя, тогда мы получим определитель Грама системы векторов (x^1, \dots, x^m) , равенство нулю которого эквивалентно линейной зависимости этой системы. Линеаризация определителя Грама, т. е. корень квадратный из его абсолютного значения, представляет собой полилинейную (но не знакопеременную) функцию, которую обычно отождествляют с объемом параллелепипеда, натянутого на систему (x^1, \dots, x^m) . Напомним, что скалярное произведение устанавливает изоморфизм между \mathbb{E} и дуальным к нему пространством \mathbb{E}^* с базисом $(\varepsilon^i)_I$, двойственным к ортонормированному базису $(e^i)_I$, т. е.

$$* : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^* : x \rightarrow x^* : \langle x^*, y \rangle = x \cdot y \quad (\forall x, y \in \mathbb{E}) :$$

5 О параллелепипедах

$$\langle e_i^*, e_i \rangle = e_i \cdot e_i : e_i^* = e_i \cdot e_i \varepsilon_i,$$

который индуцирует изоморфизм $\mathbb{T}^m(\mathbb{E}) \simeq \mathbb{T}^m(\mathbb{E}^*)$. В частности, изоморфизм $\Lambda^m(\mathbb{E}) \simeq \Lambda^m(\mathbb{E}^*)$ устанавливается соответствием между m -векторами и m -формами по формуле

$$\begin{aligned} * : \sum x_J e^J \rightarrow \sum x_J^* \varepsilon^J : \sum_{\{J\}} x_{(J)} e^{(i_1 \wedge \dots \wedge e^{i_m})} \rightarrow \\ \sum_{\{J\}} x_{(J)} e^{(*i_1 \wedge \dots \wedge e^{*i_m})} \end{aligned}$$

Напомним также, что евклидова структура линейного пространства задает оператор дуализации Ходжа

$$\star : \Lambda^m(\mathbb{E}) \rightarrow \Lambda^{n-m}(\mathbb{E}) :$$

$$\sum x_J e^J \rightarrow \langle * \sum x_J e^J, \epsilon \rangle : \sum x_J e^J \rightarrow \text{sgn} / J, J' / \sum x_J^* e^{J'},$$

где дискриминант $\epsilon := e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ при сворачивании с m -формой e^J приобретает знак подстановки $e^J \wedge e^{J'} := e^{(i_1 \wedge \dots \wedge e^{i_m}) \wedge e^{(i_{m+1} \wedge \dots \wedge e^{i_n})}}$. Впрочем, в евклидовом пространстве с положительной сигнатурой, где $x_J^* = x_J$, мы получим $\star : \Lambda^m(\mathbb{E}) \rightarrow \Lambda^{n-m}(\mathbb{E}) : \sum x_J e^J \rightarrow \text{sgn} / J, J' / \sum x_J e^{J'}$. Тем самым, наше определение векторного произведения через четность частично упорядоченных подстановок согласовано с определением оператора дуализации в евклидовом пространстве с положительной сигнатурой через сворачивание с дискриминантом.

Обратимся теперь к гладким дифференциальным формам. Пусть дано поле гладких дифференциальных m -форм $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$, где $J := (J)$, $dx^J := dx^{(i_1 \wedge \dots \wedge dx^{i_m})}$ и $a_J(x)$ — произвольные гладкие отображения из \mathbb{L} в \mathbb{R} . Напомним, что внешним произведением дифференциальной m -формы $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$ и дифференциальной 1-формы

$b(x) = \sum_n b_i(x) dx^i$ называют $(m+1)$ -форму $a(x) \wedge b(x) = \sum b_i(x) a_J(x) \operatorname{sgn} \hat{J} dx^{\hat{J}}$, где \hat{J} есть упорядоченная подстановка присоединения $/(J)i/$, т.е. внешнее произведение получается в результате внешнего произведения этих форм и подстановок присоединения, преобразующих базисные элементы $dx^J \wedge dx^i$ к упорядоченному виду $dx^{\hat{J}}$.

Вместе с тем, помимо внешнего произведения, существует внутреннее произведение дифференциальной m -формы $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$ на векторное поле $\bar{b}(x) = \sum_n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, под которым понимают свертку поля формы с полем вектора. Однако, несмотря на простоту такого определения внутреннего произведения, обратим ваше внимание на то, что для сворачивания необходимо, выполнив подстановки изъятия, привести форму $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$ к виду $\sum a_J(x) \operatorname{sgn} \hat{J} dx^{\hat{J}} \wedge dx^i$, а затем, заменив в этом представлении внешнее произведение на dx^i на произведение на число $b_i(x)$, получить уже искомое внутреннее произведение $\langle a(x), \bar{b}(x) \rangle = \sum b_i(x) a_J(x) \operatorname{sgn} \hat{J} dx^{\hat{J}}$.

Внешняя производная гладкой дифференциальной формы (дифференциал) задается формулой $da(x) = \sum d_J a(x) dx^{\hat{J}} = \sum da_J(x) \wedge dx^J$, где $da_J(x) = \sum_n \frac{\partial a_J(x)}{\partial x_i} dx^i$. Тогда, в силу свойства антикоммутативности подстановок упорядочивания с присоединением, которые возникают при повторном дифференцировании, мы получим тождество $dda(x) = 0$, характеризующее внешнюю производную как повышающий граничный гомоморфизм.

Установим теперь еще одно важное свойство внешней производной. Пусть дан такой произвольный предельно малый вектор $\Delta x = \sum_n \Delta x^i = \sum_n \Delta x_i e^i$, что из него можно сформировать ненулевой $(m+1)$ -вектор $\Delta = \sum \Delta x^{\hat{J}}$, где $\Delta x^{\hat{J}} := \Delta x^{(i_1} \wedge \dots \wedge \Delta x^{i_{m+1})}$, и соответствующий ему m -вектор $\delta \Delta = \sum \Delta x^J$, где $\Delta x^J = \Delta x^{(i_1} \wedge \dots \wedge \Delta x^{i_m)}$. Тогда

$\langle da(x), \Delta \rangle = \sum \langle d_J a(x) dx^J, \Delta x^J \rangle$, где $\langle d_J a(x) dx^J, \Delta x^J \rangle = d_J a(x) \cdot \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{m+1}}$. С другой стороны, разложив в этом выражении компоненту дифференциала и компоненту поливектора, мы будем иметь выражение $\langle d_J a(x) dx^J, \Delta x^J \rangle = \langle \sum_n \frac{\partial a_J(x)}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J, \sum_n \Delta x^i \wedge \Delta x^J \rangle$, и если затем свернем 1-форму и вектор, то получим равенство $\langle d_J a(x) dx^J, \Delta x^J \rangle = \langle \sum_{m+1} [a_J(x + \Delta x^i) - a_J(x)] dx^J, \sum_{m+1} \Delta x^J \rangle$. Таким образом, доказано утверждение

5.3.2 Предложение. $\langle da(x), \Delta \rangle = \langle [a(x + \Delta x) - a(x)], \delta \Delta \rangle$

Данное предложение мы применим в следующем разделе при выводе формулы Стокса, где предельно малые вектора служат остовом для предельно малого параллелепипеда а интегрирование по поверхности отождествляется с суммированием сверток дифференциальной формы и поливекторов, соответствующих этим параллелепипедам. Сейчас же, заметим только, что величина $\langle da(x), \Delta \rangle$ характеризует линейную часть приращения свертки дифференциальной формы в точке x и поливектора, соответствующего граням параллелепипедов, построенных на предельно малых векторах, при сдвиге каждой грани на противоположную и соответствующем изменении значения дифференциальной формы.

5.4 Параллелепипеды и многообразия

Начнем мы с классического определения параллелепипедов, которое здесь повторим, сославшись на университетский учебник [21].

5.4.1 Определение. Параллелепипедом π^m , натянутым на систему линейно независимых векторов x^1, \dots, x^m , выходящих из точки x^0 n -мерного аффинного пространства \mathbb{R}^n , назы-

5 О параллелепипедах

вается множество точек $x^0 + \sum_m \alpha_i x^i$, задаваемое условием $0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \forall i \in J$.

Затем, в дополнение к этому геометрическому понятию, мы дадим алгебраическое определение ориентированного параллелепипеда.

5.4.2 Определение. Ориентированным параллелепипедом называется параллелепипед π^m , в котором определенным образом задано направление всех цепочек ребер $x^{/i_1}, \dots, x^{i_m/}$. Направление цепочки от x^0 к $x^0 + \sum_m x^i$ считается положительным, а обратное — отрицательным. Если в параллелепипеде всем четным цепочкам (цепочкам с четными последовательностями ребер) задать положительное направление, а нечетным — отрицательное, то такой параллелепипед называется положительно ориентированным и обозначается $+\pi^m$, т. е. $\text{sgn } \pi^m = +1$. В обратном случае параллелепипед называется отрицательно ориентированным и обозначается $-\pi^m$, т. е. $\text{sgn } \pi^m = -1$.

На основании геометрического определения мы полагаем, что гранями параллелепипеда π^m служат $2m$ параллелепипедов π^{m-1} , а именно, m параллелепипедов π_{*j}^{m-1} , натянутых на подсистемы $m-1$ векторов, полученных исключением вектора x^j , где $j \in J$, из системы x^1, \dots, x^m , и выходящих из начальной точки x^0 , а также m параллелепипедов π_{j*}^{m-1} , выходящих из m точек $x^0 + x^i$ и натянутых соответственно на подсистемы без x^j каждый. Таким образом, у параллелепипеда 2^m вершин, $2m$ граней, и $m2^{m-1}$ ребер. Заметим также, что все грани параллелепипеда π^m соединяют соответствующие пары соседних граней, т. е. $\pi_{j*}^{m-1} \cap \pi_{k*}^{m-1} = \pi_{jk*}^{m-2}$, $\pi_{*j}^{m-1} \cap \pi_{*k}^{m-1} = \pi_{*jk}^{m-2}$, $\pi_{j*}^{m-1} \cap \pi_{*k}^{m-1} = \pi_{j*k}^{m-2}$, где $j \neq k$.

5.4.3 Определение. Ориентированной поверхностью параллелепипеда называется совокупность определенным образом ориентированных его граней. Ориентация граней π_{*j}^{m-1} параллелепипеда соответствует четности подстановок $/(1, \dots, m)\hat{j}/$ а грани π_{j*}^{m-1} , противоположные граням π_{*j}^{m-1} , имеют также и противоположную ориентацию. Иначе говоря, $\text{sgn } \pi_{*j}^{m-1} = -\text{sgn } \pi_{j*}^{m-1} = \text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{j}/$.

Тогда, в силу антикоммутативности подстановок с изъятием, мы получим одно замечательное свойство

5.4.1 Предложение. Общие грани соседних граней ориентированной поверхности параллелепипеда имеют в них противоположную ориентацию.

Действительно, в параллелепипеде π_{*j}^{m-1} ориентация грани π_{*jk}^{m-2} равна $\text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{j}\hat{k}/$ а в параллелепипеде π_{*k}^{m-1} ориентация этой же грани равна $\text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{k}\hat{j}/$. Аналогично, в параллелепипеде π_{j*}^{m-1} ориентация грани π_{jk*}^{m-2} равна $\text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{j}\hat{k}/$ а в параллелепипеде π_{k*}^{m-1} ее ориентация равна $\text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{k}\hat{j}/$. Вместе с тем, в параллелепипеде π_{j*}^{m-1} ориентация грани π_{j*k}^{m-2} равна $-\text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{j}\hat{k}/$ а в параллелепипеде π_{*k}^{m-1} ее ориентация равна $-\text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{k}\hat{j}/$.

Алгебраическая конструкция ориентированного параллелепипеда допускает формализацию. Действительно, если допустить кратность ориентированного параллелепипеда, реализуемую посредством расслоения цепочек его ребер, то алгебраическую сумму чисел положительно и отрицательно ориентированных слоев можно задавать некоторым произвольным целым числом. Тем самым, мы можем говорить о

z -ориентированном параллелепипеде $z\pi^m$, который является элементом абелевой группы Π_m , изоморфной \mathbb{Z} .

В свою очередь, геометрическая конструкция параллелепипеда через возможность формирования гомологической сети параллелепипедов допускает расширение до понятия клеточной поверхности. Действительно, параллелепипед π^m в пространстве \mathbb{R}^n может быть продолжен геометрически, через собственные $(m-1)$ -мерные грани так, что новый m -мерный параллелепипед натягивается на произвольную, но уже существующую грань, и некоторый новый вектор, не лежащий в подпространстве этой грани. Конечное или счетное объединение параллелепипедов π^m , произвольные пары которых либо вовсе не пересекаются, либо пересекаются своими общими гранями произвольной размерности, можно отождествить с m -мерным клеточным комплексом. Тогда m -мерной клеточной поверхностью Ω^m мы назовем такой m -мерный клеточный комплекс, в котором каждая пара параллелепипедов может быть соединена в цепь, связанную общими $(m-1)$ -мерными гранями ее звеньев – соседних параллелепипедов. Вместе с тем, m -мерным клеточным многообразием мы назовем клеточную поверхность без самопересечений, т.е. такую, в которой каждая общая грань поверхности имеет размерность $(m-1)$ и является пересечением только двух параллелепипедов. Границей $d\Omega^m$ клеточного многообразия Ω^m мы назовем объединение всех $(m-1)$ -мерных граней параллелепипедов многообразия Ω^m за вычетом общих граней. Замкнутым клеточным многообразием мы назовем компактное (составленное из конечного числа параллелепипедов) клеточное многообразие без границ. Заметим при этом, что среди всех граней отдельного параллелепипеда π^m нет ни одной общей грани, поэтому клеточная поверхность параллелепипеда является его границей $d\pi^m$. В то же время, поскольку все $(m-2)$ -мерные

границы поверхности параллелепипеда $d\pi^m$ являются общими гранями, то поверхность параллелепипеда не имеет границы, и следовательно $dd\pi^m = \emptyset$. Вместе с тем, поскольку всякое клеточное многообразие является объединением параллелепипедов, то для всякого клеточного многообразия Ω^m справедливо тождество $dd\Omega^m = \emptyset$, а следовательно граница многообразия $d\Omega^m$ это либо замкнутое многообразие, либо она является объединением замкнутых многообразий.

Элементарным гомеоморфным преобразованием клеточного многообразия с границей Ω^m мы назовем такое присоединение к границе нового параллелепипеда или изъятие уже существующего параллелепипеда, которое не нарушает связности его границы, т.е. не изменяет числа кусков (замкнутых многообразий) его границы. В свою очередь, элементарным гомеоморфным преобразованием замкнутого клеточного многообразия $d\Omega^m$ мы назовем элементарное гомеоморфное преобразование клеточного многообразия с границей Ω^m .

Множество всех m -мерных параллелепипедов, составляющих многообразие Ω^m , порождает свободную абелеву группу $\Pi_m(\Omega^m)$, образованную формальными суммами $\sum_K z_i \pi_i^m$, где $z_i \in \mathbb{Z}$, $K \subseteq \mathbb{N}$. Сумму $\sum_K \pm \pi_i^m$, составленную из одинаково ориентированных параллелепипедов многообразия Ω^m , грани пересечения соседних параллелепипедов которой имеют в них противоположную ориентацию, мы назовем ориентированным клеточным многообразием. Клеточное многообразие, которое допускает ориентацию составляющих его параллелепипедов, называется ориентируемым клеточным многообразием. Заметим при этом, что при элементарном гомеоморфном присоединении параллелепипеда грань соединения этого параллелепипеда с примыкающим к нему параллелепипедом имеет в них противоположную ориентацию только в том слу-

5 О параллелепипедах

чае, когда сами параллелепипеды имеют одинаковую ориентацию. Следовательно ориентация гомеоморфно присоединяемого (изымаемого) параллелепипеда согласована с ориентацией соседних параллелепипедов, и поэтому мы получим

5.4.2 Предложение. Ориентируемость является топологическим инвариантом клеточного многообразия Ω^m

Кроме того, всякое клеточное многообразие Ω^m порождает свободную абелеву группу $\Pi_{m-1}(\Omega^m)$, образованную формальными суммами граней его параллелепипедов. Группу $\Pi_{m-1}(\Omega^m)$ мы называем группой граней клеточного многообразия. Группа граней одного параллелепипеда $\Pi_{m-1}(\pi^m)$ состоит из формальных сумм $\sum_{2m} z_i \pi_i^{m-1}$ а отображение

$$\gamma : \pi^m \rightarrow \Pi_{m-1}(\pi^m) :$$

$$\pi^m \rightarrow \sum_m \text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} / \cdot \pi_{*j}^{m-1} - \sum_m \text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} / \cdot \pi_{j*}^{m-1}$$

индуцирует граничный гомоморфизм соответствующих абелевых групп

$$\delta : \Pi_m(\Omega^m) \rightarrow \Pi_{m-1}(\Omega^m) : \sum_K z_i \pi_i^m \rightarrow \sum_K z_i \gamma(\pi_i^m).$$

Действительно, в силу предложения 5.4.1 имеет место тождество $\gamma\gamma(\pi^m) = 0$, применяя которое покомпонентно, получим другое тождество $\delta\delta(\Omega^m) = 0$, определяющее граничное отображение и цепной комплекс $\{\Pi_{m-1}(\Omega^m), \delta\}$.

Положим

$$Z_{m-1}(\Omega^m) := \text{Ker}\{\delta : \Pi_{m-1}(\Omega^m) \rightarrow \Pi_{m-2}(\Omega^m)\} \subset \Pi_{m-1}(\Omega^m)$$

и назовем $Z_{m-1}(\Omega^m)$ группой циклов. Положим также

$$B_{m-1}(\Omega^m) := \text{Im}\{\delta : \Pi_m(\Omega^m) \rightarrow \Pi_{m-1}(\Omega^m)\} \subset \Pi_{m-1}(\Omega^m)$$

и назовем $B_{m-1}(\Omega^m)$ группой границ. Так как $\delta\delta = 0$, то $B_{m-1}(\Omega^m) \subset Z_{m-1}(\Omega^m)$. Факторгруппу

$$H_{m-1}(\Omega^m) := Z_{m-1}(\Omega^m) / B_{m-1}(\Omega^m)$$

назовем $(m-1)$ -мерной группой гомологий. Тогда, поскольку гомеоморфное присоединение или изъятие параллелепипеда добавляет в группу граней или удаляет из нее элементарный цикл, который является границей, то мы имеем

5.4.3 Предложение. Группа $(m-1)$ -мерных гомологий является топологическим инвариантом клеточного многообразия Ω^m

Таким образом, применение понятия ориентированного параллелепипеда позволяет сделать естественный переход к построению стандартной теории гомологий. Однако далее мы покажем, что параллелепипеды с успехом могут также применяться и в вопросах классификации замкнутых клеточных многообразий.

Пусть каркасом замкнутого m -мерного клеточного многообразия называется граф, полученный в результате раскраски m -мерного многообразия 2^m цветами краски. Если для раскраски многообразия не хватает параллелепипедов, то они добавляются гомеоморфным присоединением. Раскраска начинается с собранного в одну точку пересечения пучка из 2^m параллелепипедов, которые затем окрашиваются в различные цвета. Далее параллелепипеды окрашиваются в произвольные цвета, но с таким условием, чтобы цвет окрашиваемого параллелепипеда сопадал с цветом одного из соседних с ним. Вершины каркаса формируются как точки пересечения 2^m параллелепипедов различного цвета, а ребра каркаса образуются в результате пресечения 2^{m-1} параллелепипедов различного цвета. Из соображений симметрии следует, что в

каркасе m -мерного замкнутого клеточного многообразия может быть произвольное число вершин, но в каждой вершине должен быть собран набор из m пар ребер. При этом, если ни одна из этих пар ребер не образует пары петель, то это каркас ориентируемого клеточного многообразия, а если хотя бы одна из этих пар ребер образует пару петель, то это будет каркас неориентируемого замкнутого клеточного многообразия.

Рассмотрим теперь вопрос о классификации каркасов ориентируемых замкнутых клеточных многообразий, которые для краткости будем называть c -каркасами. Если мы заметим пары ребер c -каркаса n -мерного многообразия одиночными ребрами, то увидим, что классификация c -каркасов эквивалентна классификации неориентированных графов без петель, обладающих таким свойством, что каждая вершина графа инцидентна n смежным ребрам.

Сформируем теперь элементарный c -каркас, соответствующий простейшему графу. Для этого, мы произвольным образом разложим n в сумму $n_1 + \dots + n_m = n$, где $1 \leq m \leq n$, и построим 2^m -вершинный граф, изоморфный m -параллелепипеду с ребрами кратности n_i , т. е. такой граф, вершины которого совпадают с вершинами m -параллелепипеда а всякие n_i его кратных ребер соответствуют каждому ребру параллелепипеда из соответствующего класса его параллельных ребер. Тогда, поскольку у m -параллелепипеда $m2^{m-1}$ ребер, то с учетом их кратности мы получим $n2^{m-1}$ ребер графа или $n2^{m-1}$ пар ребер соответствующего c -каркаса. Элементарный c -каркас, соответствующий разложению n_1, \dots, n_m мы обозначим символом $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$ и заметим, что из двух произвольных элементарных c -каркасов можно составить новый c -каркас $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m} + S^{n_1} \times \dots \times S^{n_l}$, которому соответствует граф, полученный из двух простейших графов путем разрыва ребер

в одной произвольной вершине каждого из них и последующего совмещения соответствующих ребер двух этих графов. Однако, если $l = 1$, то мы получим исключение, так как в этом случае $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m} + S^n = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$.

Итак, мы получили полную классификацию c -каркасов, которая определяется их сборкой из элементарных c -каркасов. Заметим также, что клеточное многообразие, имеющее c -каркас элементарного типа $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$, гомеоморфно произведению сфер $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$. В свою очередь, многообразие имеющее c -каркас, представленный суммой двух элементарных c -каркасов, образуется из соответствующих произведений сфер с помощью связной суммы, т.е. с помощью вырезания в каждом из них по клетке и склеивания их по границе клетки. С учетом этих замечаний справедливо утверждение.

5.4.4 Предложение. Фундаментальная группа замкнутого ориентируемого многообразия тривиальна, если во всех его образующих элементарных каркасах типа $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$ не встречается ни одной компоненты S^1 .

Доказательство. Действительно, при данных условиях исходное многообразие можно склеить из элементарных многообразий, каждое из которых можно разложить в произведение подмногообразий, гомеоморфных некоторым сферам S^k , где каждое $k > 1$. Но поскольку фундаментальная группа произведения таких сфер тривиальна а каждая граница склейки гомеоморфна сфере S^{n-1} , которая в случае $n > 2$ имеет тривиальную фундаментальную группу, то утверждение доказано. \square

Из последнего предложения и из того, что классификация замкнутых ориентируемых многообразий в размерности три сводится к классификации соответствующих каркасов, которые могут быть составлены из каркасов типа $S^1 \times S^1 \times S^1$,

$S^2 \times S^1$ и $S^1 \times S^2$, где обязательно встречается компонента S^1 , либо это есть каркас типа S^3 , следует, что замкнутые ориентируемые 3-многообразия, имеющие тривиальную фундаментальную группу, гомеоморфны 3-мерной сфере. Таким образом, классическая гипотеза Пуанкаре, является простым следствием классификации замкнутых ориентируемых многообразий посредством классификации их каркасов.

Обратимся теперь к вопросам измерения, связанным с клеточными поверхностями. Поскольку внешнее произведение векторов, на которые натягивается параллелепипед, задает отображение $\bar{\pi}^m : \pi^m \rightarrow \wedge^m(\mathbb{L})$, индуцирующее эквивалентность элементов пространства $\{\pi^m\}$, то пространство $\wedge^m(\mathbb{L})$ и $\wedge^m(\mathbb{L}^*)$ можно интерпретировать как пространство эквивалентных приборов и воздействий на них соответственно. Иначе говоря, мы полагаем, что свертка $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, где $\bar{x} \in \wedge^m(\mathbb{L})$, $\bar{y} \in \wedge^m(\mathbb{L}^*)$, есть результат измерения воздействия \bar{y} на прибор \bar{x} . В соответствии с такой концепцией, всякому многообразию Ω^m и полю дифференциальных m -форм $a(x)$ можно сопоставить сумму сверток $\sum_K \langle a(x_i^0), \bar{\pi}_i^m \rangle$, которую следует понимать как результат воздействия на поверхность, составленную из K приборов–параллелепипедов. В том случае, когда многообразие Ω^m составлено из предельно малых параллелепипедов $\Delta\pi^m$, мы назовем его интегральной поверхностью а сумму сверток обозначим символом интеграла $\int_{\Omega^m} \langle a(x), \Delta\bar{\pi}^m \rangle$. Заметим при этом, что для канонической поверхности, все параллелепипеды которой построены на векторах, коллинеарных базисным, принято обозначение $\int_{\Omega^m} a(x) dx^J$. Поскольку общие грани являются одновременно начальными и конечными порождающими гранями в соседних параллелепипедах, то применив разложение

$$\langle da(x), \Delta\bar{\pi}^m \rangle = \sum_m \langle a(x + \Delta x^j), \Delta\bar{\pi}_{j*}^{m-1} \rangle - \sum_m \langle a(x), \Delta\bar{\pi}_{*j}^{m-1} \rangle$$

ко всем предельно малым параллелепипедам интегральной поверхности, мы получим формулу Стокса

$$\int_{\Omega^m} \langle da(x), \Delta \bar{\pi}^m \rangle = \int_{\delta \Omega^m} \langle a(x), \Delta \bar{\pi}^{m-1} \rangle.$$

Если отображение $\bar{\pi}^m$ индуцировано векторным произведением, то с ориентированным многообразием Ω^m можно связать векторный объем $\text{Vol}(\Omega^m) := \sum_K \bar{\pi}_i^m$. Наконец, со всякой интегральной поверхностью, заданной в евклидовом пространстве положительной сигнатуры, можно связать линейный объем $\int_{\Omega^m} \sqrt{|\Delta \bar{\pi}^m \cdot \Delta \bar{\pi}^m|}$, который в наблюдаемом пространстве ассоциируется с длиной, площадью и собственно объемом.

5.5 Минимальные потоки и поверхности

Векторные поля и минимальные поверхности, заданные в евклидовом пространстве, основательно описаны в учебной литературе [29] [22], [23], [24], поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь того, что непосредственно вытекает из нашей алгебры параллелепипедов, либо посмотрим на известные факты немного с другой стороны.

Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n задано произвольное гладкое ковекторное поле, т. е. поле дифференциальной 1-формы $a(x) = \sum_n a_j(x) dx^j$. Тогда мы имеем также сопряженное к $a(x)$ векторное поле $a^*(x)$ и дуальную к $a(x)$ дифференциальную (n-1)-форму $\star a(x) = \text{sgn } J \sum_n a_j(x) dx^J$, где $J := /I, \hat{j}/$. Дифференциальные формы $a(x)$ и $\star a(x)$ можно представить стационарным потоком некой идеальной жидкости, измеряемым 1-мерными и (n-1)-мерными приборами

(поливекторами) в результате их сворачивания с $a(x)$ и $\star a(x)$ соответственно. Если в качестве приборов для измерения потока используются 1-мерные или $(n-1)$ -мерные интегральные поверхности, то в результате измерения мы получим интегральные суммы $\int_{\Omega^1} \langle a(x), dx \rangle$ и $\int_{\Omega^{n-1}} \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle$ соответственно, где $dx := \Delta \pi^1$ и $dx^{n-1} := \Delta \pi^{n-1}$. Применение предельно малых поверхностей без границ дает нам возможность установить локальные характеристики потока. Действительно, отсутствие локального вращения потока $\oint \langle a(x), dx^1 \rangle = 0$ обеспечено дифференциальным условием $da(x) = 0$, а отсутствие стоков и истоков $\oint \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle = 0$ обеспечено условием $d \star a(x) = 0$.

Критерии замкнутости потока мы дополним критериями его устойчивости. Так, ламинарное течение потока, характеризующееся его слоением, удовлетворяет дифференциальному условию голономности $a(x) \wedge da(x) = 0$. Заметим при этом, что всякая точная 1-форма $a(x) = d\varphi(x)$ голономна а ее семейство интегральных поверхностей (слоение) задано поверхностями уровня функции $\varphi(x)$. В свою очередь, всякое голономное ковекторное поле $a(x)$ коллинеарно некоторому потенциальному ковекторному полю $d\varphi(x)$, т.е. $a(x) = k(x)d\varphi(x)$, где $k(x)$ — произвольная необращающаяся в нуль гладкая функция. Действительно, $da(x) = d[k(x)d\varphi(x)] = dk(x) \wedge d\varphi(x)$, и поэтому $a(x) \wedge da(x) = k(x)d\varphi(x) \wedge dk(x) \wedge d\varphi(x) = 0$. Обратно, если уравнение $a(x) \wedge da(x) = 0$ вполне интегрируемо, то его интегральным поверхностям, т.е. слоению, всегда можно поставить в соответствие поверхности уровня некоторой функции $\varphi(x)$, а следовательно $a(x)$ коллинеарно $d\varphi(x)$.

Равновесное течение ламинарного потока удовлетворяет соответствующему дифференциальному условию, в частности, для потенциального поля $a(x) = d\varphi(x)$ это будет диффе-

ренциальное уравнение $\Delta\varphi(x) = 0$. Действительно, величина $\Delta\varphi(x) = d \star d\varphi(x)$ характеризует разность давлений потока на предельно малые элементы поверхностей уровня, полученные градиентным переносом в предельно малом элементе объема, а именно,

$$\int_{\Delta V} \langle d \star d\varphi(x), dx^n \rangle = \int_{\Delta\Phi_2} \langle \star d\varphi(x), dx^{n-1} \rangle - \int_{\Delta\Phi_1} \langle \star d\varphi(x), dx^{n-1} \rangle$$

где учтено отсутствие давления на боковую поверхность предельно малого элемента объема ΔV , образованного замечанием предельно малой площадки $\Delta\Phi_1$ поверхности уровня $\varphi(x) = c$ на площадку $\Delta\Phi_2$ поверхности уровня $\varphi(x) = c + h$ при ее переносе градиентным векторным полем. Следовательно гармоничность функции уровня обеспечивает отсутствие разности давлений, т. е. равновесие (устойчивость) соответствующего потока. В общем случае, когда $a(x) = k(x)d\varphi(x)$, аналогичные рассуждения позволяют в качестве критерия равновесности потока получить дифференциальное уравнение $d \star k(x)d\varphi(x) = k(x)\Delta\varphi(x) + (\nabla k(x), \nabla\varphi(x)) = 0$.

Рассмотрим теперь вариационную задачу, решение которой позволит нам получить локально устойчивые (минимальные) потоки. В качестве функционала устойчивости потока мы возьмем значение криволинейного интеграла $\int \langle a(x), dx \rangle$, определенного на конечном отрезке прямой общего положения. Поскольку нас интересует локальный критерий устойчивости потока, то следует взять предельно малый отрезок Δx и решить вариационное уравнение

$$\text{Loc. var } \int \langle a(x), dx \rangle = \delta \int_x^{x+\Delta x} \langle a(x), dx \rangle = \delta \langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = 0$$

Тем самым, интегральная вариационная задача сводится к вариационной задаче на минимум приращения свертки. Пусть сначала вектор Δx коллинеарен вектору $a^*(x)$. Тогда уравнение $\delta \langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = \pm(|a(x + \Delta x)| - |a(x)|)|\Delta x| = 0$ выполняется, если $|a(x + \Delta x)| = |a(x)|$, откуда следует, что необходимым условием выполнения вариационного уравнения является постоянство модуля ковекторного поля $a(x)$. Затем пусть вектор Δx ортогонален вектору $a^*(x)$. Тогда уравнение $\delta \langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = \delta \langle a(x + \Delta x), \Delta x \rangle = 0$ выполняется, если ковектор $a(x + \Delta x)$ параллелен ковектору $a(x)$, откуда следует, что необходимым условием выполнения вариационного уравнения является голономность поля $a(x)$. Теперь пусть вектор Δx имеет общее положение а ковекторное поле $a(x)$ единично и голономно, т.е. $a(x) = k(x)d\varphi(x)$, где $k(x) = |\nabla\varphi(x)|^{-1}$. Тогда, поскольку $a(x + \Delta x) = a(x) + \sum_n \langle \nabla a_j(x), \Delta x \rangle dx^j = a(x) + \nabla_{\Delta x} a(x)$, то приращение свертки равно значению квадратичной формы $\langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = \langle \nabla_{\Delta x} a(x), \Delta x \rangle = (H\Delta x, \Delta x)$, где оператор H в матричном представлении задается недиагональными элементами $k(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_j} + \left(\frac{\partial k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial k(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)$ и диагональными элементами $k(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2} + \left(\frac{\partial k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)$. Таким образом, вариационное уравнение $\delta(H\Delta x, \Delta x) = 0$ сводит нашу задачу к поиску минимального самосопряженного оператора. В этой связи напомним [26], что всякий самосопряженный оператор C с точностью до отражений может быть разложен на оператор A с нулевым следом и положительно определенный оператор B , т. е. $C = \pm(A + B)$. Действительно, достаточно привести матрицу оператора C к диагональному виду и разложить ее диагональные элементы. В то же время, для квадратичных форм выполняется неравенство $(Ax, x) < ((A + B)x, x)$, следовательно самосопряжен-

ный оператор с нулевым следом будет минимальным оператором и решение $\text{Tr } H = k(x)\Delta\varphi(x) + (\nabla k(x), \nabla\varphi(x)) = 0$, где $k(x) = |\nabla\varphi(x)|^{-1}$, является необходимым и достаточным условием локальной экстремальности функционала устойчивости потока. Заметим также, что такое же решение имеет вариационная задача на экстремум интеграла $\int \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle$, определенного на конечной площадке произвольной $(n-1)$ -плоскости общего положения. Действительно, вариационное уравнение

$$\text{Loc. Var} \int \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle = \delta \langle \star a(x + \Delta x) - \star a(x), \star \Delta x \rangle = 0$$

не меняет постановки вариационной задачи, так как свертка вектора с ковектором равна свертке их дуализаций.

Пусть теперь в евклидовом пространстве положительной сигнатуры, где мы не делаем отличия векторов от ковекторов, дано поле точной 1-формы $d\varphi(x)$. Рассмотрим производное от него единичное голономное поле $n(x) = k(x)d\varphi(x)$, где $k(x) = 1/|d\varphi(x)|$, и вычислим площадь S поверхности Φ^{n-1} , которая является ограниченной частью поверхности уровня функции $\varphi(x)$. Покажем, что

$$S(\Phi^{n-1}) = \int_{\Phi^{n-1}} (\star n(x), dx^{n-1}).$$

Действительно, единичный вектор $n(x)$ ортогонален к плоскости, касательной к поверхности уровня функции $\varphi(x)$ в точке x а единичный поливектор $\star n(x)$ коллинеарен предельно малому поливектору $\Delta\bar{\pi}^{n-1}(x)$, и поэтому площадь последнего равна их скалярному произведению $(\star n(x), \Delta\bar{\pi}^{n-1}(x))$, откуда следует, что

$$S(\Phi^{n-1}) = \sum_{\Phi^{n-1}} S(\Delta\pi^{n-1}) = \int_{\Phi^{n-1}} (\star n(x), dx^{n-1}).$$

Заметим также, что

$$\int_{\Delta V} \langle d \star n(x), dx^n \rangle = S(\Delta \Phi_2) - S(\Delta \Phi_1),$$

где площадка $\Delta \Phi_2$ образована ортогональным переносом площадки $\Delta \Phi_1$ на предельно малое расстояние с поверхности уровня Φ_1 на поверхность уровня Φ_2 , а следовательно

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{S(\Delta \Phi_2) - S(\Delta \Phi_1)}{\Delta V} = d \star n(x).$$

Вместе с тем, легко показать, что локальное решение вариационного уравнения

$$\text{Loc. Var} \int_{\Phi^{n-1}} (\star n(x), dx^{n-1}) = 0$$

приводит к тому же дифференциальному уравнению минимальности $d \star n(x) = 0$. Таким образом, локально минимальные параметризованные поверхности евклидова пространства с нулевой средней кривизной и поверхности уровня функций, удовлетворяющих уравнению минимальности, эквивалентны. Впрочем, эта эквивалентность следует также из того хорошо известного факта, что средняя кривизна поверхности уровня, заданной в n -мерном евклидовом пространстве, вычисляется по формуле $H(x) = -(\frac{1}{n})d \star (\frac{d\varphi(x)}{|\nabla \varphi(x)|})$. Кроме того, в результате исследования мы получили дуальность таких понятий как минимальные поверхности и минимальные (максимально устойчивые) потоки.

6 О построении векторных полей сфер

Показано как с помощью группы зеркальных симметрий сформировать максимально возможную систему линейно независимых линейных векторных полей нечетномерной сферы произвольной размерности.

6.1 Постановка задачи и определения

Необходимая нам группа зеркальных симметрий возникает при решении конкретной задачи, поэтому сформулируем сначала проблему. Хорошо известно, что тривиальных векторных полей четномерных сфер не существует, а максимальное число регулярных линейно независимых векторных полей нечетномерной сферы S^{n-1} равно $p(m) = 8d + 2^c - 1$, где $c = |m| \bmod 4$, $m = 4d + c$, $n = (2a + 1)2^m$, $m, a \in \mathbb{N}$. Окончательное решение этой задачи нашло отражение в работе Адамса [28]. В свою очередь, Аминов в монографии [29] показал как сформировать, т.е. получить в явном виде, полную систему регулярных (линейных) линейно независимых векторных полей нечетномерных сфер малой размерности. Попробуем формализовать и обобщить эмпирический результат, полученный Аминовым. Отметим здесь также работу [30] по комбинаторному построению касательных векторных полей на сферах, которую успешно выполнил Огникян.

6 О построении векторных полей сфер

Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n размерности $n = 2^m$ уравнением $x^2 = 1$ задана сфера S^{n-1} , на которой лежит произвольный вектор X . Ортогональное к X векторное поле AX , где A – оператор пространства $\text{End } \mathbb{R}^n$, называется регулярным векторным полем сферы S^{n-1} . Поскольку $(AX, X) = 0$, то A это кососимметричный оператор, и поэтому в матричном представлении $A^T = -A$. Перед нами стоит задача – найти и представить линейно независимую систему регулярных векторных полей. Операторы, формирующие эти поля, мы будем искать среди ортогональных операторов, а условие линейной независимости заменим условием попарной ортогональности. Тогда, если $A \in O(n)$, то кососимметричность ортогонального оператора A эквивалентна условию $A^{-1} = -A$ или $A^2 = -E$. В то же время, если $A, A' \in O(n)$, $A^2 = (A')^2 = -E$ и выполняется условие ортогональности полей AX и $A'X$, то в силу тождества $(A'X, AX) = (A^*A'X, X) = -(AA'X, X) = 0$ мы получим условие $(AA')^2 = -E$, из которого следует равносильное ему условие антикоммутативности операторов $A'A = -AA'$. Итак, нам необходимо найти максимально возможное число ортогональных кососимметричных попарно антикоммутирующих операторов, или иначе, ортогональных кососимметричных операторов, всякое попарное произведение которых также кососимметрично.

Прежде чем взяться за решение поставленной задачи, напомним вам, что доказательство существования тривиальных векторных полей нечетномерных сфер основано на существовании гомотопного тождественному антиподального отображения нечетномерных сфер. Обратно, отсутствие векторных полей четномерных сфер связано с отсутствием гомотопного тождественному антиподального отображения четномерных сфер. Вместе с тем, всякая сфера S^{n-1} гомеоморфна границе n -мерного параллелепипеда, и поэтому существование

(отсутствие) тривиальных векторных полей сферы S^{n-1} эквивалентно существованию (отсутствию) гомотопного тождественному антиподального отображения границы n -мерного параллелепипеда. Заметим при этом, что группа изоморфизмов границы n -мерного параллелепипеда равна группе мономиальных подстановок базиса пространства \mathbb{R}^n , т.е. она состоит из матриц, в каждой строке и каждом столбце которых по одному ненулевому элементу равному 1 или -1 , и поэтому изоморфна сплетенному произведению $S_2 \wr S_n$. Множество изоморфизмов границы n -мерного параллелепипеда по свойству сохранения или изменения ориентации границы разбивается на два класса отображений, а именно, на класс гомотопных и класс негомотопных тождественному отображений. Принадлежность к тому или иному классу определяется детерминантом матрицы представления изоморфизма, т.е. равенство детерминанта матрицы единице означает принадлежность соответствующего изоморфизма к классу гомотопных тождественному отображений, а равенство -1 означает принадлежность к классу негомотопных тождественному отображений. Откуда понятно, что существование (отсутствие) гомотопного тождественному антиподального отображения границы n -мерного параллелепипеда определяется детерминантом диагональной матрицы, все элементы которой равны -1 , т.е. это свойство связано с четностью числа n . В свою очередь, для всякого четного n всегда существует изоморфизм границы n -мерного параллелепипеда, квадрат которого равен антиподальному отображению. Действительно, для этого достаточно взять такую мономиальную подстановку базиса \mathbb{R}^n , которая в произвольном разбиении базиса $\{(e_j)\}_n$ на непересекающиеся пары (e_i, e_k) осуществляет вращение $(e_i, e_k) \mapsto (e_k, -e_i)$ всех пар разбиения. С другой стороны, матрицы представления изоморфизмов границы

n -мерного параллелепипеда, квадрат которых равен антиподальному отображению, принадлежат $SO(n)$ и им соответствуют регулярные векторные поля соответствующей нечетномерной сферы. Следовательно ортогональность пары таких полей приводит к тому, что квадрат композиции соответствующих им изоморфизмов границы параллелепипеда равен антиподальному отображению. Таким образом, максимальное число попарно ортогональных векторных полей нечетномерной сферы S^{n-1} в точности равно максимальному числу соответствующих изоморфизмов границы n -мерного параллелепипеда.

Итак, пространство операторов, формирующих регулярные векторные поля сферы мы будем искать в некоторой подгруппе $M(n)$ группы мономиальных подстановок, состоящей исключительно из симметричных и кососимметричных матриц, т.е. матриц, квадрат которых равен E или $-E$. Пусть группа $M(2^m)$ порождается $2m$ -элементным множеством $\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$, где A_i — блочно-диагональная матрица, состоящая из расположенных по диагонали квадратных матриц порядка $k = 2^i$, имеющих ненулевые элементы везде кроме побочной диагонали, на которой расположены k единиц, а B_i — диагональная матрица, диагональ которой заполнена последовательностью чередующихся 2^{i-1} единиц и 2^{i-1} единиц со знаком минус, причем первые 2^{i-1} единиц диагонали имеют знак плюс. Иначе говоря, оператор A_i действует на \mathbb{R}^n так, что в каждом подпространстве \mathbb{R}^k , на которые оно раскладывается в прямую сумму, имеет место зеркальное отражение, т.е. перестановка всех первых координат с последними, вторых с предпоследними, и так далее. В свою очередь, оператор B_i действует на \mathbb{R}^n так, что в каждом подпространстве \mathbb{R}^k имеет место зеркальная инверсия, т.е. изменение знака второй половины координат. Тем самым, группу $M(2^m)$

можно назвать группой зеркальных симметрий.

Как легко проверить, все генераторы группы $M(2^m)$ являются ортогональными симметричными операторами ($A_i^2 = B_i^2 = E$ для всех i), которые либо коммутируют либо антикоммутируют, а именно, $A_i A_j = A_j A_i$, $B_i B_j = B_j B_i$ для всех i, j , и $A_i B_j = -B_j A_i$ если $i \geq j$, но $A_i B_j = B_j A_i$ если $i < j$. Пусть произвольный оператор C , взятый из группы зеркальных симметрий, разложен в некоторое произведение генераторов. Тогда, для того чтобы выяснить, является ли C симметричным или кососимметричным ортогональным оператором нам необходимо вычислить чему равен квадрат оператора C , т.е. установить равенство $C^2 = E$ или $C^2 = -E$. Прежде всего заметим, что при перестановке произвольной пары генераторов разложения оператора C мы получим новый оператор C' , квадрат которого по-прежнему равен квадрату оператора C , т.е. $(C')^2 = C^2$. Пусть в результате композиции перестановок генераторов разложения оператора C он приведен к виду $C' = AB$, где ни в произведении A ни в произведении B нет генераторов с повторяющимися индексами. А такое приведение возможно, поскольку последовательные пары операторов с повторяющимися индексами можно менять либо на E либо на $-E$. Тогда квадрат оператора C' (равно как и неприведенного оператора C) зависит от перестановочных свойств оператора AB . Действительно, если $BA = AB$, то $(C')^2 = E$, а если $BA = -AB$, то $(C')^2 = -E$. В свою очередь, перестановочные свойства оператора AB определяются четностью числа δ , равного количеству всех возможных пар $A_i B_j$ в произведении AB , индексы которых удовлетворяют условию $i \geq j$. Таким образом, в силу равенства $BA = (-1)^\delta AB$ справедлива формула

$$C^2 = (AB)^2 = (-1)^\delta E. \quad (6.1.1)$$

Абстрактное представление группы зеркальных симметрий

6 О построении векторных полей сфер

можно дать с помощью $2m + 1$ образующих и соотношений:

$$M(2^m) \simeq \langle (a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m), \varepsilon | a_i^2 = b_i^2 = \varepsilon^2 = e, \$$

$$a_i a_j = a_j a_i, b_i b_j = b_j b_i, \varepsilon a_i = a_i \varepsilon, \varepsilon b_i = b_i \varepsilon, \$$

$$a_i b_j = b_j a_i \forall i < j, a_i b_j = \varepsilon b_j a_i \forall i \geq j \rangle$$

Центр группы $M(2^m)$ состоит из двух элементов $\{e, \varepsilon\}$. Однако абстрактное задание группы зеркальных симметрий не вполне удобно, и поэтому мы воспользуемся ее представлением в виде неабелевой аддитивной группы. Пусть на группе $\mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m$ задана функция α , принимающая значение 0 или 1 в соответствии с отображением

$$\alpha : \mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2 : \alpha(a, b) = a_1 b_1 + a_2 \sum_1^2 b_j + \dots + a_i \sum_1^i b_j + \dots + a_m \sum_1^m b_j, \quad (6.1.2)$$

где a_i это соответствующая компонента элемента a а b_j это соответствующая компонента b , и где подразумевается суммирование единиц и нулей по модулю 2. Например, если $m = 5$, то $\alpha(a, b) = a_1 b_1 + a_2(b_1 + b_2) + a_3(b_1 + b_2 + b_3) + a_4(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + a_5(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$. Поскольку в сумму $\alpha(a, b)$ включаются только такие равные единице произведения $a_i b_j$, для которых выполнено условие $i \geq j$, то $\alpha(a, b) = |\delta| \pmod 2$, где число δ равно количеству всех тех пар единиц элемента группы, которые принадлежат разным компонентам произведения $\mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m$ и чьи индексы удовлетворяют соотношению $i \geq j$. Тем самым, если $\alpha(a, b) = 0$, то в абстрактном представлении группы зеркальных симметрий соответствующее произведение коммутирует, т.е. $ba = ab$, если же $\alpha(a, b) = 1$, то $ba = \varepsilon ab$. В свою очередь, если $\alpha(a', b) = 0$, то $aba'b' = aa'bb'$,

6 О построении векторных полей сфер

если же $\alpha(a, b') = 1$, то $aba'b' = \varepsilon aa'bb'$. Следовательно группа зеркальных симметрий изоморфна группе

$$\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m),$$

в которой произведение (сложение) элементов (s, a, b) и (s', a', b') задано формулой

$$(s, a, b) + (s', a', b') = (s + s' + \alpha(a', b), a + a', b + b'), \quad (6.1.3)$$

где отображение α , конечно же, не является гомоморфизмом. Далее, опираясь на абстрактное представление группы $M(2^m)$ неабелевой аддитивной группой, мы будем всякий факторизованный по центру ее элемент ab , соответствующий элементу $(a, b) \in \mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m$, обозначать символом $(I|J)$, где мультииндексы I, J суть наборы индексов единиц a и b соответственно. Таким образом, изучение группы внутренних автоморфизмов группы зеркальных симметрий мы сводим к изучению функции α , определенной на группе $\mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m$.

6.2 Схема решения задачи

Прежде всего установим основные свойства α -функции.

1. Если в формуле 6.1.2 сначала перемножить все члены а затем сгруппировать слагаемые уже при b_i , то мы получим формулу

$$\alpha(a, b) = b_m a_m + b_{m-1} \sum_{j=1}^m a_j + \cdots + b_i \sum_{j=1}^m a_j + \cdots + b_1 \sum_{j=1}^m a_j \quad (6.2.1)$$

2. $\alpha(a, 0) = \alpha(0, b) = 0$

6 О построении векторных полей сфер

3. $\alpha(a, b + a', b') = \alpha(a + a', b + b') = \alpha(a, b) + \alpha(a', b') + \alpha(a, b') + \alpha(a', b)$
4. Поскольку при любом фиксированном ненулевом значении a функция $\alpha(a, b)$ равна сумме по модулю 2 некоторых (вполне определенных) компонентов b , то $\alpha(a, b) = 1$ для всех тех 2^{m-1} значений b , для которых указанная сумма равна единице, и $\alpha(a, b) = 0$ для всех тех 2^{m-1} значений b , для которых она равна нулю. Аналогично, при любом фиксированном ненулевом значении b мы получим 2^{m-1} значений a , для которых $\alpha(a, b) = 1$, и 2^{m-1} значений a , для которых $\alpha(a, b) = 0$
5. Так как мы имеем $2^m - 1$ ненулевых значений $a(b)$, то функция $\alpha(a, b)$ принимает единичное значение на $2^{m-1}(2^m - 1)$ различных аргументах
6. Если $\alpha(a, b) = \alpha(a', b') = 1$, то равенства $\alpha(a, b + a', b') = 1$ и $\alpha(a, b') + \alpha(a', b) = 1$ равносильны
7. Если $(a, b) = (i|i)$, т.е. a и b равны элементам с единицей в i -ой компоненте и нулями во всех остальных компонентах, тогда $\alpha(i|i) = a_i b_i = 1$
8. Если $(i, j|i, j) = (i|i) + (j|j)$, где $i < j$, то $\alpha(i, j|i, j) = a_i b_i + a_j(b_i + b_j) = 1$

Теперь наша задача сводится к тому, чтобы выбрать максимально возможное множество $\{(a, b)\}_{p(m)}$ элементов $\mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m$, для которых выполняются условия $\alpha(a', b') = \alpha(a'', b'') = 1$ и $\alpha(a', b' + a'', b'') = 1$, где $(a', b'), (a'', b'') \in \{(a, b)\}_{p(m)}$. Однако, прежде чем обратиться к произвольному m , воспользуемся основными свойствами α -функции и решим задачу в случае $m = 1, 2, 3, 4$.

Пусть $m = 1$. Тогда в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ имеется только один элемент $(1|1)$, на котором функция α принимает единичное значение. Следовательно для всякого вектора $X = (X_1, X_2)$, лежащего на S^1 , мы получим одно ортогональное ему векторное поле $A_1 B_1 X = (-X_2, X_1)$.

Пусть $m = 2$, где функция α принимает единичное значение на шести своих аргументах. Представим функцию α , определенную на группе $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2$, таблицей ее значений, лежащих на пересечении строк и столбцов, где столбцы соответствуют элементам b а строки – элементам a , записанным в виде двоичной записи номеров столбцов и строк (от 0 до 4), причем единица в старшем разряде соответствует выбору индекса 2 а единица в младшем разряде соответствует выбору индекса 1. Тогда легко получить три элемента, равные $\{(1|1), (2|2), (1, 2|1, 2)\}$ (в двоичной форме они имеют вид $\{(01, 01), (10, 10), (11, 11)\}$), которые обладают тем свойством, что их попарные произведения (суммы) также отображаются функцией α в единицу. Действительно, первые два элемента можно выбрать в силу свойства 7 α -функции, а третий элемент, с учетом равенства $a + a = b + b = 0$ и в силу свойства 2, не должен лежать на строках и столбцах с номерами 0, 1, 2, но может лежать на пересечении строки и столбца с номером 3. Но этот выбор следует еще подтвердить. Для этого необходимо, последовательно складывая элемент $(11, 11)$ с уже выбранными элементами, проверить суммы этих пар элементов на предмет равенства функции α от них единице. В силу свойства 6, совместность третьего элемента с уже выбранными элементами можно также проверить при помощи теста на значение α -функции в вершинах прямоугольника с двумя диагонально расположенными вершинами в проверяемой паре элементов. Таким образом, для всякого вектора $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, лежащего

6 О построении векторных полей сфер

на S^3 , мы получили три ортогональных ему векторных поля $A_1B_1X = (-X_2, X_1, -X_4, X_3)$, $A_2B_2X = (-X_4, -X_3, X_2, X_1)$, $A_1A_2B_1B_2X = (-X_3, X_4, X_1, -X_2)$, которые ортогональны друг другу.

	00	01	10	11
00	0	0	0	0
01	0	1	0	1
10	0	1	1	0
11	0	0	1	1

Пусть $m = 3$, где функция α , определенная на группе $\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2^3$, принимает единичное значение на 28 своих аргументах. Зададим ее табличное представление и в соответствии с ранее изложенной методикой найдем элементы, совместные с задающими элементами $\{(1|1), (2|2), (3|3)\}$ (в двоичной форме они имеют вид $\{(001, 001), (010, 010), (100, 100)\}$). Тем самым, мы получим максимально возможное множество элементов, попарные произведения (суммы) которых отображаются функцией α в 1, а именно, семь элементов $\{(1|1), (2|2), (3|3), (1, 2|1, 2, 3), (1, 3|1, 2), (2, 3|1, 3), (1, 2, 3|2, 3)\}$, в двоичной форме имеющих вид

$$\begin{aligned} (001, 001), (010, 010), (100, 100), (011, 111), \\ (101, 011), (110, 101), (111, 110) \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Следовательно для всякого вектора, $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8)$, лежащего на S^7 , мы получим семь ортогональных ему векторных полей

$$A_1B_1X = (-X_2, X_1, -X_4, X_3, -X_6, X_5, -X_8, X_7),$$

$$A_2B_2X = (-X_4, -X_3, X_2, X_1, -X_8, -X_7, X_6, X_5),$$

6 О построении векторных полей сфер

$$\begin{aligned}
A_3 B_3 X &= (-X_8, -X_7, -X_6, -X_5, X_4, X_3, X_2, X_1), \\
A_1 A_2 B_1 B_2 B_3 X &= (-X_3, X_4, X_1, -X_2, X_7, -X_8, -X_5, X_6) \\
A_1 A_3 B_1 B_2 X &= (-X_7, X_5, X_5, -X_6, -X_3, X_4, X_1, -X_2), \\
A_2 A_3 B_1 B_3 X &= (-X_5, X_6, -X_7, X_8, X_1, -X_2, X_3, -X_4), \\
A_1 A_2 A_3 B_2 B_3 X &= (-X_6, -X_5, X_8, X_7, X_2, X_1, -X_4, -X_3),
\end{aligned}$$

которые ортогональны друг другу.

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	1	0	1	0	1	0	1
010	0	1	1	0	0	1	1	0
011	0	0	1	1	0	0	1	1
100	0	1	1	0	1	0	0	1
101	0	0	1	1	1	1	0	0
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	1	0	1	1	0	1	0

Пусть $m = 4$, где функция α принимает единичное значение на 120 элементах группы $\mathbb{Z}_2^4 \times \mathbb{Z}_2^4$. Если задать ее табличное представление, то в результате последовательного поиска элементов, совместных с элементами $\{(1|1), (2|2), (3|3), (4|4)\}$ (в двоичной форме они имеют вид $\{(0001, 0001), (0010, 0010), (0100, 0100), (1000, 1000)\}$), мы получим 8 элементов, а именно, $\{(1|1), (2|2), (3|3), (4|4), (1, 2|1, 2, 3), (1, 3|1, 2, 4), (2, 3|1, 3, 4), (1, 2, 3|2, 3, 4)\}$, которые в двоичной форме они имеют вид

$$\begin{aligned}
&\{(0001, 0001), (0010, 0010), (0100, 0100), \\
&\quad (1000, 1000), (0011, 0111), \\
&\quad (0101, 1011), (0110, 1101), (0111, 1110)\}
\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

6 О построении векторных полей сфер

и обладают тем свойством, что их попарные произведения (суммы) также отображаются функцией α в единицу. Кроме того, они обладают таким замечательным свойством, что сумма по модулю 2 всех компонентов b произвольного элемента (a, b) из множества $\{(a, b)\}_{p(4)}$ всегда равна единице. Имея в виду соответствие элементов (a, b) операторам AB , мы легко получим восемь ортогональных друг другу векторных полей сферы S^{15} .

Пусть теперь m произвольно, причем $m = 4d + c$, где $c = 0, 1, 2, 3$. Случаи $m \leq 4$, в которых $d = 0$ а $c = 1, 2, 3$ и $d = 1$ а $c = 0$ мы уже рассмотрели, поэтому пусть $m > 4$. Тогда множество $\{(a, b)\}_{p(m)}$ состоит из подмножества $\{(a, b)\}_{p(4)}$ и из записанных в двоичной форме элементов (a', b') вида

$$(2^{4k+1}a + 2^{4k}\chi(a), 2^{4k+1}b),$$

где $k = 1, \dots, d$; дискретная функция $\chi(a)$ принимает нулевое значение в том случае, когда сумма по модулю 2 всех компонентов a равна единице, и наоборот, если эта сумма равна нулю, то значение функции $\chi(a)$ равно единице; $(a, b) \in \{(a, b)\}_{p(4)}$ для $k = 1, \dots, d - 1$ и $(a, b) \in \{(a, b)\}_{p(c)}$ для $k = d$, причем, $p(0) = 0$. Как легко проверить, $\alpha(a', b') = 1$ а в силу того, что сумма по модулю 2 всех компонентов b и a' по отдельности равна единице, функция α от суммы двух произвольных элементов множества $\{(a, b)\}_{p(m)}$ также равна единице, т.е. множество $\{(a, b)\}_{p(m)}$ удовлетворяет всем необходимым требованиям. Заметим также, что перенести результат, полученный для $n = 2^m$, на случай $n = (2a + 1)2^m$, не составляет труда, достаточно разложить пространство \mathbb{R}^n в прямую сумму $(2a + 1)$ подпространств размерности 2^m .

Appendices

А Об индуцировании низкоэнергетической ядерной реакции в сверхзвуковом плазменном вихре

Предложено устройство вихревого плазменного двигателя, в котором используется коллективно-ускорительный механизм реакции ядерного синтеза. Показано, что в приближении трех ядер пороговое значение потенциальной энергии, затрачиваемой на преодоление кулоновского барьера, на несколько порядков меньше порогового значения кинетической энергии парных столкновений ядер. В данной работе представлены также генератор электрической энергии и генератор искусственной шаровой молнии, в которых используется явление индуцирования холодного синтеза в сверхзвуковом плазменном вихре.

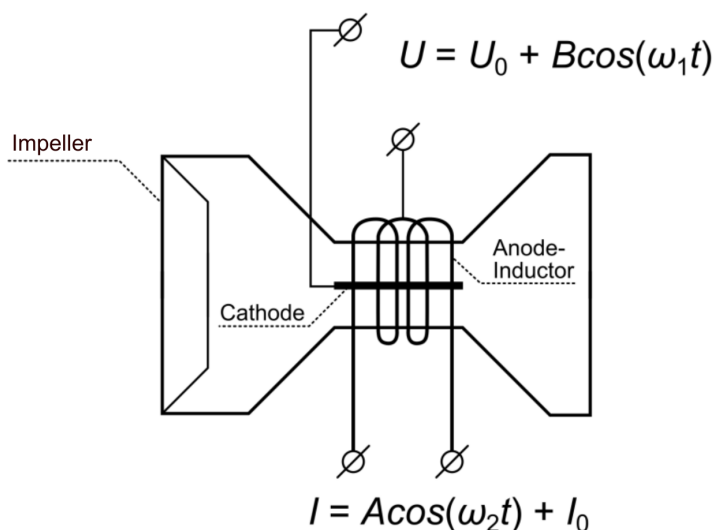


Рис. А.1: Принципиальная схема вихревого плазменного двигателя

Предлагаемое для обсуждения устройство относится к физике плазменных двигателей [43]. При этом, оно существенно отличается от цилиндрических двигателей Холла [44] и от бесстенных двигателей Холла [45], но в то же время имеет сходство с ними. Основным элементом вихревого плазменного двигателя является коническая воронка, в которой с помощью импеллера образуется газовый вихрь, влетающий со сверхзвуковой скоростью в цилиндрическую камеру высокочастотного индуктора, где он превращается во вращающийся плазменный цилиндр со структурой двойного электрического слоя. В переменнo-постоянных скрещенных полях (радиальном электрическом и аксиальном магнитном) плазма под

действием этих полей вращается как единое целое, а диаметр двойного электрического слоя цилиндрической оболочки плазмы сжимается с частотой колебаний электрического поля ω_1 . Кроме того, в переменном радиальном электрическом поле коаксиальных электродов цилиндра возникает переменный радиальный ток плазмы, индуцирующий переменное азимутальное собственное магнитное поле плазмы, под действием которых (в силу закона Ампера) плазма вместе со своим двойным электрическим слоем колеблется с частотой ω_1 в аксиальном направлении. Вместе с тем, в плазменном цилиндре двойного электрического слоя из-за неравновесности плазмы, вызванной ее вращением, самопроизвольно образуются ионно-звуковые волны, а когда частота колебаний переменной части электрического поля совпадает с частотой колебаний одной из мод стоячей ионно-звуковой волны, амплитуда колебаний ионной плотности волны резонансно увеличивается. Кроме того, ударная волна, создаваемая сверхзвуковым потоком плазмы, сжимает плазменный цилиндр проходящим через него кольцом ударной плотности двойного электрического слоя. Ожидается также, что коллективно-ускорительный механизм колебаний предельно сжатой плазмы создаст условия для запуска реакции холодного ядерного синтеза. В этом случае, на выходе воронки мы получим не только более быстрый, но и более горячий газовый вихрь, который с помощью патрубка можно вернуть на вход импеллера (турбины), превратив реактивный двигатель в мотор-генератор тепловой и электрической энергии. В свою очередь, если в нашей схеме убрать выпускную воронку, плотно закрыв камеру справа от соленоида, то вместо реактивного двигателя мы получим устройство (рисунок А.2), генерирующее искусственный смерч и шаровую молнию. Заметим, при этом, что между входящим и исходящим потоками нахо-

дится шаровая молния, которая представляет собой двойной электрический слой плазмы, вращающийся и колеблющейся в цилиндрической части сосуда, причём на его поверхности возбуждаются низкоэнергетические ядерные реакции.

Дополним теперь наше словесное описание необходимыми формулами. Подобно тому, как это делается при выводе барометрической формулы [46], из уравнения баланса сил мы получим формулу зависимости давления P основного (фонового) потока вращающейся плазмы от расстояния r до оси цилиндра

$$P = P_0 \exp \left(\frac{-MU^2}{RTB^2r^2} \right)$$

где P_0 - давление на стенку камеры, U - напряжение между анодом и катодом, M - молярная масса, B - индукция магнитного поля, T - температура плазмы, R - универсальная газовая постоянная, причем $P_0 = \rho \frac{\omega^2 r_0^2}{2}$, где ρ - плотность газовой среды, ω - угловая скорость вращения плазмы, а r_0 - радиус цилиндрической камеры. В то же время, давление градиента внешнего электрического поля $\nabla E \approx \frac{U}{r^2}$ на двойной электрический слой цилиндрической оболочки плазмы, имеющий радиус r , начальную концентрацию n_0 и ширину D , равно

$$P' = \frac{r_0 n_0 U D^2}{r^3}$$

С другой стороны, давление центробежной силы на двойной слой цилиндрической оболочки плазмы, вращающийся с тангенциальной скоростью v_τ , которая складывается из дрейфовой скорости $\frac{U}{rB}$ и скорости аэродинамического завихрения газа, равно

$$P'' = \frac{n_0 r_0 M v_\tau^2 D}{r^2}$$

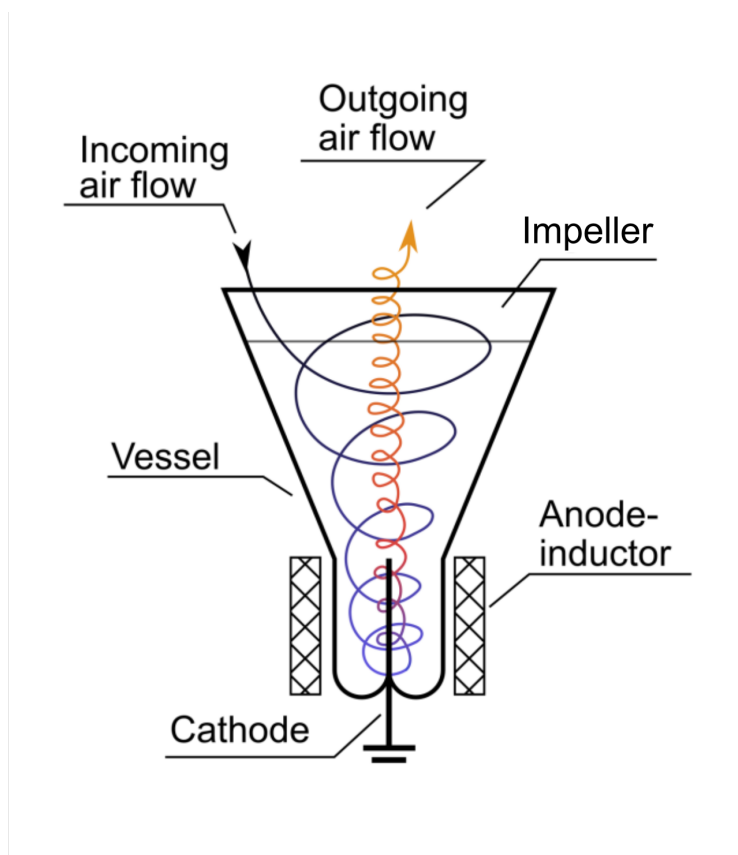


Рис. А.2: Принципиальная схема генератора шаровых молний

В свою очередь, из равенства $P' = P''$ можно вычислить ра-

А О ядерной реакции в вихре

диус двойного слоя потока плазмы

$$r = \frac{UD}{Mv_{\tau}^2}$$

и степень сжатия цилиндрической оболочки двойного слоя плазмы

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r_0 M v_{\tau}^2}{UD}$$

Таким образом, плотность и концентрация цилиндра двойного электрического слоя, имеющего радиус r , значительно превышает плотность и концентрацию основной (фоновой) плазмы на расстоянии r от оси цилиндрической камеры, а следовательно наибольшая плотность вероятности ядерного синтеза локализована в цилиндрической оболочке двойного слоя плазмы. Иначе говоря, тонкая плотная оболочка двойного слоя плазмы вращается в разряженной области плазмы, причем, преодоление кулоновского барьера ядерных реакций синтеза происходит преимущественно за счет коллективного взаимодействия ядер, собранных вместе в кольце двойного слоя, а не за счет парных столкновений, как это имеет место быть в высокотемпературной плазме. Действительно, пусть среднее расстояние между парами соседних ядер, имеющих заряд q и воображаемо соединенных в цепочку по окружности радиуса r , равно s . Тогда в приближении трёх ядер радиальная сила, выталкивающая каждое ядро цепочки за пределы окружности двумя соседними ядрами, равна

$$F_r \approx 2 \frac{q^2}{s^2} \cdot \frac{s}{r} = \frac{2q^2}{sr}$$

а тангенциальная сила, действующая на ядро, которое относительно соседних ядер имеет отклонение от среднего значе-

ния Δs , то есть, смещенное на расстояние Δs , равна

$$F_{\tau} \approx \frac{q^2}{(s + \Delta s)^2} - \frac{q^2}{(s - \Delta s)^2} \approx \frac{4q^2 \Delta s}{s^3}$$

Воображаемые цепочки ядер лежат на положительно заряженной поверхности двойного слоя (а точнее, хаотически движутся в толще этой поверхности), в силу чего, по кольцу двойного слоя будут распространяться волны плотности, а в случае резонанса с частотой вынужденных колебаний внешнего электрического поля должно наблюдаться значительное увеличение амплитуды смещения Δs , а следовательно и значительное уменьшение расстояния сближения ядер $s - \Delta s$, отвечающего в реакциях синтеза ядер за преодоление кулоновского барьера. Кроме того, поскольку цепочка ядер, замкнутых в кольцо, порождает дискретный набор разрешённых волновых чисел гармонических звуковых колебаний (фононов), то ожидается, что сжимающееся кольцо ядер будет порождать ударную звуковую волну, которая описывается движущейся дельта-функцией Дирака, полученной суммированием всех возможных гармонических колебаний.

Вычислим, наконец, в приближении трёх ядер пороговое значение потенциальной энергии, которую необходимо затратить для преодоления средним ядром кулоновского барьера, равного $b = s - \Delta s$

$$U = \frac{2q^2(s - b)^2}{s^3}$$

Тогда, поскольку концентрация ионов n двойного слоя плазмы и среднее расстояние между ионами s связаны формулой $n = \frac{1}{s^3}$, окончательно имеем

$$U = 2nq^2(n^{-\frac{1}{3}} - b)^2$$

А О ядерной реакции в вихре

и, например, при $b = 10^{-13} \text{ cm}$, $n = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ мы получим пороговое значение потенциальной энергии протона $U \approx 0,3 \text{ eV}$, что на несколько порядков меньше порогового значения кинетической энергии парных столкновений приблизительно равного 1 MeV .

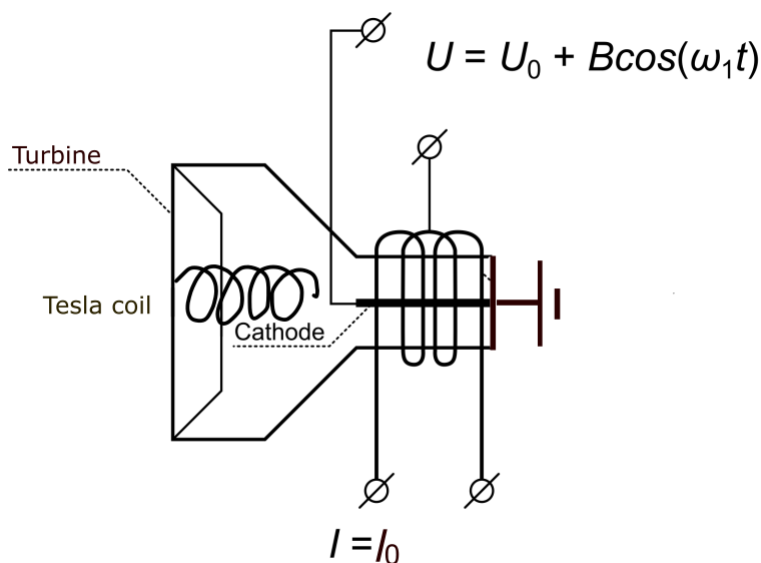


Рис. А.3: Принципиальная схема генератора плазменных вихрей, инициируемых в закрытом сосуде с помощью катушки Тесла

В заключение признаем, что наши теоретические выводы требуют более детального математического моделирования и экспериментальной проверки. Более того, если целью эксперимента является изучение зависимости динамических

А О ядерной реакции в вихре

свойств плазменного вихря от давления в сосуде, то можно изменить также и принципиальную схему установки (рисунок А.3), или модифицировать эту конструкцию, освободив её от пропеллера (рисунок А.4, где вращение плазмы осуществляется исключительно в результате воздействия электрического дрейфа, а поток вращающейся плазмы, в свою очередь, индуцирует Холловское напряжение).

С другой стороны, следует признать, что представленных математических выкладок вполне достаточно для инициирования НИОКР. Обращаем также ваше внимание на то, что анализ работы устройства вихревого плазменного двигателя сделан на основе классических физических представлений, но с учетом нового взгляда на механизм коллективного взаимодействия ядер в реакции так называемого холодного ядерного синтеза.

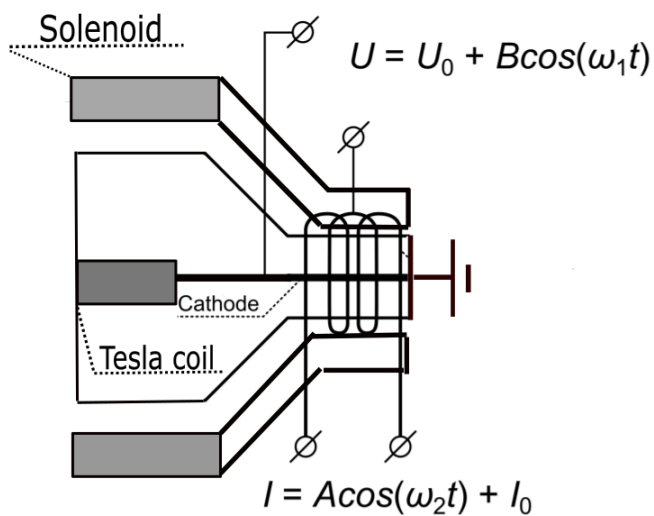


Рис. А.4: Принципиальная схема генератора плазменных вихрей без пропеллера

В Задача о лестницах

Мы рассматриваем геометрическую интерпретацию задачи о распределении простых чисел и неожиданно находим её наивное решение.

В.1 Условие задачи

Представьте себе человечка, способного шагать вверх по ступенькам приставной лестницы. Пусть нашему человечку по его требованию подставляют бесконечно длинные лестницы, шаг которых кратен его шагу. С земли человек может запрыгнуть на ступеньку лестницы, расстояние между соседними ступеньками которой равно двум его шагам, однако далее при подъеме он каждый раз делает только один шаг, и при этом ставит ногу либо на ступеньку затребованной им новой лестницы, либо на ступеньку поставленной ранее старой лестницы. Спрашивается, сколько ему потребуется лестниц, чтобы подняться на N шагов, если N достаточно велико

В.2 Решение задачи

Прежде всего заметим, что шаг, затребованных человечком лестниц, всегда равен простому числу. Действительно, измеряемая числом шагов высота ступеньки установленной лестницы, на которую человек может поставить ногу, кратна шагу одной из уже поставленных лестниц, а следовательно

В Задача о лестницах

высота ступеньки, на которую он не может поставить ногу из-за отсутствия лестницы, не кратна шагу ни одной из поставленных лестниц, и поэтому не делится на высоту ни одной из нижележащих ступенек.

Пусть человек стоит на высоте N . Тогда вероятность того, что он не поставит ногу на уже установленную лестницу с простым шагом p , где $p < \sqrt{N+1}$, равна $1 - 1/p$, а вероятность того, что он не поставит ногу ни на одну из уже установленных лестниц, равна

$$\prod_{p < \sqrt{N+1}} (1 - 1/p) \quad (\text{B.2.1})$$

Следовательно, вероятность того, что число $N + 1$ простое, равна этой же величине

$$P(N + 1) = \prod_{p < \sqrt{N+1}} (1 - 1/p) \quad (\text{B.2.2})$$

Воспользуемся теперь разложением

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots \quad (\text{B.2.3})$$

чтобы преобразовать произведение B.2.2 в обратную сумму величину

$$\prod_{p < \sqrt{N+1}} (1 - 1/p) = \frac{1}{\sum_{n < N} \frac{1}{n} + \sum_{m > N} \frac{1}{m}} \quad (\text{B.2.4})$$

где n и m составлены из произведений простых чисел меньших $\sqrt{N+1}$, в силу чего n пробегает от единицы до N все числа натурального ряда, а m пробегает от $N+1$ до бесконечности только малую его часть. Действительно, поскольку

В Задача о лестницах

выполняется неравенство

$$\sum_{m>N} \frac{1}{m} < \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{N}}{(\sqrt{N})^k} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{-1} \quad (\text{B.2.5})$$

то сумма $\sum_{m>N} \frac{1}{m}$ ограничена. Таким образом, при достаточно большом N мы имеем приближительное равенство

$$P(N+1) \approx \frac{1}{\log N} \quad (\text{B.2.6})$$

В том случае, когда человек стоит на высоте N и делает оттуда ΔN шагов, вероятность того, что на этом отрезке пути нет ступеньки, или иначе говоря, что он не наступит ни на одну из поставленных ранее лестниц, равна

$$P(N, N + \Delta N) \approx \frac{\Delta N}{\log N} \quad (\text{B.2.7})$$

А поскольку суммарная вероятность равна суммарному числу успешных испытаний, то последовательным суммированием этих вероятностей, при движении человека со ступеньки высоты 2 на ступеньку высоты N , мы вычислим число ступенек с простыми числами их высот

$$P(2, N) = \int_2^N \frac{dt}{\log t} \quad (\text{B.2.8})$$

Нам осталось только заметить, что суммарная вероятность случайных событий, заключающихся в попадании в интервале $[2, N]$ на простые числа, равна накопленной достоверности этих событий, т.е. количеству простых чисел $\pi(N)$ в интервале $[2, N]$, и поэтому окончательно мы имеем формулу

$$\pi(N) = \int_2^N \frac{dt}{\log t} \quad (\text{B.2.9})$$

Литература

- [1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Т. 20. С. 391.
- [2] Б.А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, Москва, 1955.
- [3] С.П. Новиков, И.А. Тайманов, Современные геометрические структуры и поля, Москва, МЦНМО, 2005.
- [4] David Hestenes (1966). Space-Time Algebra, Gordon & Breach
- [5] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, Уравнения математической физики, М., 2000.
- [6] Б.В. Пальцев, Сферические функции, МФТИ
- [7] Е.В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, Москва, 1952.
- [8] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, М., 2002.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика.
- [10] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967.
- [11] Birkhoff G. D., Flat space-time and gravitation, 1944, Proc. Nat. Acad. Sci., v. 30 No. 10.
- [12] O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.

Литература

- [13] Ю.Б. Румер, Действие как координата пространства (I-IX)-ЖЭТФ, 1949, т.19
- [14] Кассандров В.В. "Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика." М., изд. УДН, 1992.
- [15] Румер Ю. Б., Фет А. И. Теория унитарной симметрии. М., Наука, 1970
- [16] Павлов Д. Г., Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, 2004.
- [17] Сипаров С. В., К вопросу об анизотропной геометродинамике. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 10, с.64-75, 2008.
- [18] Тышкевич З. И., Феденко А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, "Вышэйш. школа Минск, 1976
- [19] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1967.
- [20] С. Ленг, Алгебра, "Мир Москва, 1968
- [21] Винберг Э. Б., Курс алгебры, "Факториал Москва, 1999
- [22] Горбузов В. Н., Математический анализ: Теория поля: Учебное пособие, Гродно: ГрГУ, 2000
- [23] В. Блашке, Введение в дифференциальную геометрию, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет 2000
- [24] Дж. Торп, Начальные главы дифференциальной геометрии, "Мир Москва, 1982

Литература

- [25] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия
- [26] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, "Добросвет Москва, 1998
- [27] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, "Наука Москва, 1986.
- [28] Adams, J. F. Vector fields on spheres. Ann. of Math. (2) 75 1962 603–632.
- [29] Ю.А. Аминов, Геометрия векторного поля, "Наука Москва, 1990.
- [30] А.А. Огникян, Комбинаторное построение касательных векторных полей на сферах, Математические заметки, том 83 выпуск 4 апрель 2008.
- [31] П. Сарнак, Модулярные формы и их приложения.
- [32] Alfred L. Parson, "Magnetron Theory of the Structure of the Atom," Smithsonian Miscellaneous Collection, Pub 2371, 80pp, 2 plates (29 Nov 1915)
- [33] Yang, C. N.; Mills, R. (1954). "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance". Physical Review. 96 (1): 191–195.
- [34] S.L. Glashow (1961). "Partial-symmetries of weak interactions". Nuclear Physics. 22 (4): 579–588.
- [35] S. Weinberg (1967). "A Model of Leptons". Physical Review Letters. 19 (21): 1264–1266.

- [36] A. Salam (1968). N. Svartholm (ed.). Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analyticity. Eighth Nobel Symposium. Stockholm: Almquist and Wiksell. p. 367.
- [37] Igor V. Bayak, Applications of the Linear Algebras of Vector Fields to the Modelling of Physical Phenomena, Journal of Geometry and Symmetries in Physics, 38 (2015)
- [38] Ж.-П. Серр, Курс арифметики.
- [39] Edward Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion.
- [40] A. O. Barut, Lepton Mass Formula, Phys. Rev. Lett. 42, 1251 (1979)
- [41] Э. Борель, Вероятность и достоверность, Наука, 1969
- [42] Э. Трост, Простые числа, ГИФЛ, 1959
- [43] Dan M. Goebel, Ira Katz. Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters. John Wiley & Sons (2008)
- [44] Artem Smirnov, Yegeny Raitses, and Nathaniel J. Fisch. Experimental and theoretical studies of cylindrical Hall thrusters. Physics of Plasmas 14, 057106 (2007)
- [45] Jacob Simmonds, Yevgeny Raitses. Ion acceleration in a wall-less Hall thruster. Journal of Applied Physics 130, 093302 (2021)
- [46] Berberan-Santos, Bodunov, and Pogliani. On the barometric formula. Am. J. Phys., Vol. 65, No. 5, May 1997