Движение заряженной частицы в магнитном поле постоянного тока, текущего в бесконечном прямом проводе

Зафар Туракулов

10 ноября 2024 г.

Аннотация

Приведено полное решение задачи о движении заряженной частицы в магнитном поле тока, текущего в бесконечном прямом проводе. Приведена также прямая проверка полученного результата.

1 Введение

Движение заряженной частицы в магнитном поле интересно со многих точек зрения. Оно играет важную роль в физике плазмы, как в лабораториях, так и космической, и во многих технических приложениях, таких, как физика ускорителей и анализаторов частиц. В классической механике оно могло бы составить важный раздел, и, кроме того, оно ставит интересные задачи в теории дифференциальных уравнений. Таким образом, потребность в построении полноценной теории этого явления очевидна. Однако, такая теория до сих пор не построена. Не найден сколько-нибудь универсальный подход к ее задачам. Не найден сколько-нибудь универсальный подход к ее задачам.

Состояние этого научного направления не меняется уже более ста лет и не видно никаких попыток исправить это положение. За всю историю пространственные решения задач движения частицы в магнитном поле получены только в двух случаях – в однородном поле и в поле магнитного монополя, найденные в XIX столетии. В настоящей работе будет приведено без вывода полное решение этой задачи еще в одном случае – в свободном тороидальном поле. Такое поле порождается током, текущем в бесконечном прямом проводе и внутри катушки, замкнутой на себя, в частности, тороидальной, и в токамаке. Полный вывод решения не приводится по причине использования в нем малоизвестной математики, в авторской версии, изложение которой здесь было бы нецелесообразным. Вместо этого полученное решение проверяется прямой подстановкой в уравнения движения.

2 Свободное тороидальное магнитное поле

Свободное тороидальное магнитное поле единственно и его явный вид хорошо известен. Она известна, в частности, как поле тока в бесконечном прямом проводе. В системе координат круглого цилиндра $\{z, \rho, \varphi\}$, в которой провод протянут вдоль оси $\rho = 0$, напряженность поля $\vec{H}$ чисто азимутальна и ее напряженность по абсолютной величине равна

$$H = \frac{2\pi I}{\rho},$$

где I – это величина тока в проводе [1].

Это же поле можно представить векторным потенциалом $\vec{A}$, единственная компонента которого A_z имеет вид

$$A_z = I \ln \rho, \quad H = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\rho} \tag{1}$$

Поскольку аргумент функции ln может быть только безразмерным, ее принято представлять как $A_z = I \ln \rho / a$, где a – произвольная постоянная размерности длины. В данном случае удобно сразу ввести единицу длины и измерять обе размерные координаты в ней, так что они обе становятся безразмерными. Это необходимо сделать потому, что один из интегралов движения оказывается аддитивным к этой компоненте векторного потенциала. Итак, ниже координаты z и ρ – безразмерные переменные и z-компонента векторного потенциала представляется как в формуле (1).

3 Частица и система

При движении заряженной частицы в тороидальном магнитном поле ее угловой момент относительно оси симметрии сохраняется. Это позволяет исключить одну из степеней свободы – переменную φ. В результате, рассматриваемая частица как механическая система делится на две – одномерную и двумерную. Двумерная определена на полуплоскости $\varphi = \mathrm{const}$ и ее траектории заданы искомыми функциями $z(t)$ и $\rho(t)$. После того, как они найдены, движение одномерной определяется по формуле

$$\varphi(t) = \int \frac{L \mathrm{d}t}{m\rho^2}, \tag{2}$$

где L – это сохраняющийся угловой момент частицы, а m – это ее масса. Таким образом, основная задача состоит в том, чтобы найти движение двумерной системы на полуплоскости с заданным значением углового момента.

Поскольку полная энергия E частицы, движущейся в магнитном поле равна ее кинетической энергии, величина импульса двумерной системы равна

$$p_z^2 + p_\rho^2 = 2mE - \frac{L^2}{\rho^2}. \tag{3}$$

Его компоненты подчиняются уравнениям движениям

$$\dot{p}_z = -\frac{qHp_\rho}{m}, \quad \dot{p}_\rho = \frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{qHp_z}{m}. \tag{4}$$

Если их проинтергрировать при каких-нибудь начальных условиях, то можно найти эти компоненты как функции времени, затем, повторным интегрированием построить траекторию системы в виде функций $z(t)$, $\rho(t)$. В основу метода Гамильтона-Якоби положена более эффективная идея: вместо отдельно взятой траектории рассмотреть семейство траекторий на полуплоскости. Этому семейству соответствует поле импульсов, компоненты которых – это функции не времени, а точки на полуплоскости. Величина импульса системы заданана уравнением (3), его компоненты удовлетворяют уравнениям движения (3), где производные по времени берутся как для сплошной среды:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\rho}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}. \tag{5}$$

Это выражение не содержит члена $\frac{p_z}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ потому, что производные всех появившихся здесь функций по z равны нулю. Мы же пошли дальше и, учитывая трансляционную симметрию системы, положили, что траектории заданы уравнением

$$z + f(\rho) = \mathrm{const}, \tag{6}$$

которое содержит одну искомую функцию $f(\rho)$. Ниже приведится решение этой задачи и его прямая проверка.

4 Динамические потоки и поля импульса

Прежде, чем переходить к решению задачи, уточним ее постановку. Задача состоит в том, чтобы найти движение частицы, обладающей массой m и зарядом q в магнитном поле, заданном уравнением (1). Кроме массы и заряда она обладает сохраняющимися интегралами движения – энергией E и угловым моментом L относительно оси z, которые также удобно зафиксировать, но значения которых можно выбирать произвольно. Существует также третий интеграл движения N, который появится в виде произвольной постоянной в общем решении, которое будет приведено ниже. Само это общее решение полностью задается функцией $f(\rho)$. Действительно, она задает траектории системы в виде (6), и, поскольку поле импульсов системы всюду ортогонально градиенту функции $z+f(\rho)$, и по абсолютной величине всюду равно $P(\rho)$,

$$P(\rho) = \sqrt{2mE - \frac{L^2}{\rho^2}}, \tag{7}$$

его компоненты равны

$$\begin{aligned} p_z &= -\frac{P(\rho)f'(\rho)}{\sqrt{1+f'^2(\rho)}} \\ p_\rho &= \frac{P(\rho)}{\sqrt{1+f'^2(\rho)}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Для получения решения задачи осталось найти такую функцию $f(\rho)$, чтобы выполнялись уравнения движения (4,5):

$$\frac{1}{m}p_\rho\frac{\mathrm{d}p_\rho}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\frac{L^2}{\rho^2} + \frac{qHp_z}{m} \tag{9}$$

$$\frac{1}{m}p_\rho\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{qHp_\rho}{m}. \tag{10}$$

Эта функция, содержащая еще одну произвольную постоянную, являющуюся по смыслу интегралом движения, будет приведена ниже.

5 Решение и его проверка

Для построения искомой функцию $f(\rho)$ был применен специфический подход, описание которого заняло бы слишком много места и поэтому будет опущено. В результате она была получена в виде

$$f(\rho) = \int \frac{\mathrm{d}\rho\rho\cdot q[A(\rho)-N]}{\sqrt{2mE\rho^2 - L^2 - q^2\rho^2[A(\rho)-N]^2}}, \tag{11}$$

где функция $A(\rho)$ задана уравнением (1), а N – это постоянная, являющаяся по смыслу третьим интегралом движения. Поскольку этот метод ранее не применялся, мы прежде всего проверим, обеспечивает ли полученный вид функции $f(\rho)$ выполнение уравнений движения (9). Для этого, прежде всего, найдем явный вид компонент импульса (8). Обе компоненты содержат выражение $\sqrt{1+f'^2(\rho)}$ в знаменателе, которое удобно сразу упростить:

$$\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(\rho)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{q^2[A(\rho)-N]^2}{P^2-[A(\rho)-N]^2}}} = \frac{\sqrt{P^2-[A(\rho)-N]^2}}{P}.$$

После этого они приобретают относительно простой вид:

$$p_z = q[N - A(\rho)] \qquad (12)$$
$$p_\rho = \sqrt{2mE\rho^2 - L^2 - q^2[A(\rho) - N]^2}.$$

Подстановка этих выражений в уравнения движения обращает их в тождества. Действительно, то, что первое уравнение выполняется, видно из уравнения (1) и остается показать, что второе также выполнено. Для проверки подставим выражение для компоненты p_ρ из (12) во второе уравнение (9):

$$\dot{p}_\rho = \frac{p_\rho}{m}\frac{\mathrm{d}p_\rho}{\mathrm{d}\rho} = \frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}p_\rho^2 = -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{L^2}{\rho^2} + q^2[A(\rho) - N]^2\right) =$$
$$= \frac{L^2}{m\rho^3} - \frac{q^2}{m}[N - A(\rho)] = \frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{qHp_z}{m}.$$

Таким образом, доказано, что полученный явный вид функции обеспечивает выполнение уравнений движения. Тем самым доказано, поле импульсов системы имеет вид (12).

Осталось установить некоторые детали. Зависимость координаты ρ от времени выводится из уравнения

$$t = \int \frac{m\mathrm{d}\rho}{p_\rho} = m\int \frac{\mathrm{d}\rho\rho}{\sqrt{2mE\rho^2 - L^2 - q^2\rho^2[A(\rho) - N]^2}} \qquad (13)$$

как функция обратная к получившейся функции $t(\rho)$. Если считать функцию $\rho(t)$ установленной, то в том же смысле установлена и функция φt. Вернувшись от задачи о движении двумерной системы к исходной задаче о движении заряженной частицы в свободном тороидальном магнитном поле в форме

$$z + \int \frac{\mathrm{d}\rho\rho \cdot q[A(\rho) - N]}{\sqrt{2mE\rho^2 - L^2 - q^2\rho^2[A(\rho) - N]^2}} = \mathrm{const}, \qquad (14)$$
$$\varphi(\rho) = L\int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{2mE\rho^2 - L^2 - q^2[A(\rho) - N]^2}}.$$

На этом решение задачи о движении заряженной частицы в свободном тороидальном магнитном поле завершено.

6 Заключение

Приведенное в настоящей работе о пространственном движении заряженной частицы в магнитном поле – третье за всю историю и первое после

XIX в. Успехи в развитии этого направления вцелом настолько незначительны, что оно даже не упоминается в теме механики точки. Одной из его особенностей является то, что в не неприменим метод Гамильтона-Якоби, обеспечивающий полное решение задач в других областях механики. То, что частица, движущаяся в магнитном поле, строго говоря, не эквивалентна никакой гамильтоновой системе, видно, в частности, из того, что в данном случае третий интеграл движения N появился необычным путем – как постоянная интегрирования, а не разделения переменных, как это происходит при решении уравнения Гамильтона-Якоби. Это означает, что для решения задач такого рода необходимо создание какого-то иного метода, отличного от метода Гамильтона-Якоби. В настоящей работе был применен некоторый новый подход, но пока он дал только один результат и неясно, удастся ли эти методом получить какие-нибудь другие. Поэтому пока говорить о создании такого нового метода преждевременно и поэтому мы воздержались от того, чтобы описывать его со всех деталях.

Список литературы

[1] J. D. Jackson *Classical Electrodynamic* (John Wiley & Sons, 1998)