УДК 511.2

Р. З. Ахмадуллин

О критерии Робина

Доказано, что неравенство Робина

$$\sigma\left(N\right)<e^{\gamma}N\ln\left(\ln N\right),$$

где $\sigma(N)$ – сумма делителей натурального числа $N\geqslant 7!$ равносильно неравенству

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}<\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p(i)\right),$$

здесь s – число различных простых сомножителей числа N, причём для *натуральных* показателей степеней a_i в каноническом разложении числа Nвыполнено неравенство

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_s\geqslant 1.$$

С другой стороны, доказано, что для всех достаточно больших значений s и любого *действительного* значения числа $m\geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}<\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{m+1}}{p\left(i\right)^{m+1}-1}\left(\ln\left(m\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)\right).$$

Для всех достаточно больших значений s доказана равносильность гипотезы Римана неравенству

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right)<\left(1+o\left(1\right)\right)\frac{4+\gamma-\ln 4\pi}{\sqrt{p\left(s\right)}}.$$

Получены достаточные условия выполнения критерия Робина. Найдены необходимые условия минимальности арифметической функции $N/\sigma(N)$ при фиксированном числе сомножителей числа N.

Библиография: 7 наименований.

Ключевые слова: критерий Робина, неравенства Россера-Шенфельда, гипотеза Римана.

§ 1. Постановка задачи

Гипотеза Римана эквивалентна ряду утверждений о скорости роста многих арифметических функций. В частности, для делителей натуральных чисел она эквивалентна утверждению [1] «Для всякого натурального числа $N{>}7!$ сумма его делителей $\sigma\left(N\right)$ меньше величины $e^{\gamma}N\ln\left(\ln N\right)$», то есть равносильно неравенству:

$$\sigma\left(N\right) < e^{\gamma}N\ln\left(\ln N\right), \tag{1.1}$$

либо, например, следующему утверждению [2] «Для всех натуральных $N{\geqslant}1$ выполняется неравенство

$$\sigma\left(N\right){\leqslant}H_N + e^{H_N}\ln\left(H_N\right), \tag{1.2}$$

причем равенство выполняется только в случае $N{=}1$». Здесь $\sigma(N)$ – сумма делителей натурального числа N, и N-ое гармоническое число равно

$$H_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}.$$

Поскольку для гармонического ряда H_N верно асимптотическое выражение для суммы первых N членов ряда (формула Эйлера):

$$H_N = \ln\left(N\right) + \gamma + \varepsilon_N,$$

где $\gamma{=}0{,}57721\ldots$ – постоянная Эйлера – Маскерони, $\varepsilon_N > 0$ (при $N{\to}{+}\infty$ значение $\varepsilon_N{\to}0$),

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \ln(N)\right\},$$

то легко видеть, что неравенство (1.2) при $N{>}7!$ следует из неравенства (1.1). Численные расчёты для значений $N < 10^{12}$ в неравенстве (1.1) позволяют сделать предположение о возрастании как верхней, так и вероятно *нижней* границы функции $F{\equiv}e^{\gamma}\ln\left(\ln N\right) - \sigma\left(N\right)/N$ при увеличении N (Замечание 2).

Также известно, гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда неравенство [3]:

$$\frac{N}{\varphi(N)} < e^{\gamma}\ln\ln N + \frac{e^{\gamma}\left(4 + \gamma - \ln 4\pi\right)}{\sqrt{\ln N}}, \tag{1.3}$$

выполняется для всех $N{\geqslant}120\,569\#$, где $\varphi(N)$ – арифметическая функция Эйлера, а $120\,569\,\#$ - произведение первых 120 569 простых чисел, приблизительно равное $9,3 * 10^{690608}$.

Далее в статье использованы следующие теоремы.

1. Каноническое разложение натурального числа N на множители имеет вид

$$N = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * \ldots * p_s^{a_s}, \tag{1.4}$$

где p_i – некоторые простые числа, i=1... s, a_i – некоторые *натуральные* числа, s – количество различных простых сомножителей числа N, $p_s > p_{s\text{-}1} > \ldots > p_2 > p_1$ (это представление числа N определено единственным образом). Далее в тексте считается, что всё множество натуральных чисел представлено подобным образом, причём $p(i)$ - i-ое по счёту простое число в натуральном ряду и выполняется

$$p_i \geqslant p\left(i\right). \tag{1.5}$$

2. Для суммы всех положительных делителей числа N верно равенство

$$\sigma\left(N\right) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{1+a_i} - 1}{\left(p_i - 1\right)}. \tag{1.6}$$

3. Для $p(s) \geqslant 286$ выполнены неравенства Россера-Шенфельда [4] (стр.70, теорема 8):

$$\ln p\left(s\right)\left(1 - \frac{1}{2\ln^2 p\left(s\right)}\right) < \frac{1}{e^\gamma}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right) - 1} < \ln p\left(s\right)\left(1 + \frac{1}{2\ln^2 p\left(s\right)}\right). \tag{1.7}$$

4. Третья теорема Мертенса (следствие теоремы (1.7)) [5] (стр.33, теорема 7), [6] (стр.60, теорема 24):

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right) - 1} = (1 + o(1))e^\gamma \ln p\left(s\right). \tag{1.8}$$

5. Следствие из теоремы об асимптотическом распределении простых чисел [7] (стр. 91, теорема 2.2):

$$p\left(s\right) = \left(1 + o(1)\right)\ s * \ln\left(s\right). \tag{1.9}$$

6. Для $x \geqslant 563$ выполнены неравенства Россера-Шенфельда [5] (стр.70, теорема 4), [6]:

$$x\left(1 - \frac{1}{2\ln x}\right) < \theta\left(x\right) = \sum_{p\leqslant x}\ln p < x\left(1 + \frac{1}{2\ln x}\right), x \geqslant 563 \tag{1.10}$$

здесь $\theta\left(x\right)$-функция Чебышёва.

7. Эквивалентная форма теоремы об асимптотическом распределении простых чисел (следствие неравенств (1.10)) [4] (стр.65):

$$\theta\left(x\right) = \sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right) = \left(1 + o(1)\right)\ p\left(s\right). \tag{1.11}$$

Одна из возможных стратегий доказательства верности неравенства (1.1) для всех достаточно больших чисел N основана на следующих утверждениях:

1. Для *постоянного* количества различных простых сомножителей s числа N может существовать лишь *конечное* множество чисел N, для которых возможно неверно неравенство (1.1);

2. Существует такое безусловное количество различных простых сомножителей s_{min} числа N, не зависящее от показателей степеней a_i, начиная с которого неравенство (1.1) верно для всех последующих значений s.

Из этих двух утверждений следует конечность множества возможных значений N, для которых возможно неверно неравенство (1.1). С другой стороны, Гай Робин показал, что в случае ошибочности гипотезы Римана существует бесконечно много чисел N, нарушающих неравенство (1.1) [1].

§ 2. Достаточные и необходимые условия выполнения неравенства (1.1).

Неравенство (1.1) достаточно и необходимо рассмотреть только для чисел вида

$$N_* = p\,(1)^{a_1} \dots p\,(s)^{a_s} = 2^{a_1} * 3^{a_2} * \dots * p\,(s)^{a_s}\,. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Неравенство (1.1) при $N{>}7!$ $(s{\geqslant}6)$ равносильно неравенству*

$$\frac{1}{e^\gamma}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1} < \left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right) * \ln\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \ln p\,(i)\right).$$

Доказательство. Поскольку $p(i) \leqslant p_i$, то выполняются неравенства (в том числе и для нулевых значений a_i):

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}} = \prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p_i}+\dots+\frac{1}{p_i^{a_i}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p\,(i)}+\dots+\frac{1}{p\,(i)^{a_i}}\right) = \prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}-1}{(p\,(i)-1)\,p\,(i)^{a_i}}, \tag{2.2}$$

$$e^\gamma \ln\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \ln p\,(i)\right) \leqslant e^\gamma \ln\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \ln p_i\right) = e^\gamma \ln\left(\ln N\right).$$

С учётом формул (1.4), (1.5), (1.6) и (2.2) получим тождество

$$\frac{\sigma\,(N)}{N} = \prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}} \leqslant \prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}-1}{(p\,(i)-1)\,p\,(i)^{a_i}}. \tag{2.3}$$

Таким образом, *достаточными и необходимыми* условиями для выполнения неравенства (1.1) являются неравенства:

$$\frac{\sigma\,(N)}{N} < e^\gamma \ln\left(\ln N\right),$$

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}-1}{(p(i)-1)\,p(i)^{a_i}} < e^\gamma \ln\left(\ln N\right),$$

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}-1}{(p(i)-1)\,p(i)^{a_i}} < e^\gamma \ln\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i)\right),$$

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1} < \left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right) * \ln\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i)\right). \tag{2.4}$$

при некоторых натуральных значениях $s\geqslant 6$ и a_i, зависящих от значения N.

В свою очередь неравенство (2.4) *необходимо и достаточно* проверить только для таких значений a_i, при которых правая часть неравенства будет по возможности *меньшей,* в частности для следующей *перестановки* показателей степеней:

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_s\geqslant 1. \tag{2.5}$$

Докажем, что при фиксированном наборе показателей степеней $\{a_i, i = 1\ldots s\}$ (может меняться только их порядок, но не значения), и сумма $\sum = \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i)$ и произведение $\prod = \prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}$ будут *наименьшими* по сравнению с теми же наборами, но упорядоченными иначе. Очевидно, что тогда, для того же набора значений показателей степеней $\{a_i, i = 1\ldots s\}$ произведение $\prod$ также будет наименьшим из всех возможных комбинаций.

Лемма 2.1. *Пусть число различных простых сомножителей s числа N фиксировано, дан набор произвольных фиксированных натуральных чисел*

$$\{a_i, i = 1, \ldots, s\}$$

проиндексированных в произвольном порядке, тогда произведение

$$\prod(s, a_1, \ldots, a_s) = \prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1} = \prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)$$

*принимает наименьшее значение, если числа a_i данного набора с меньшими значениями имеют в произведении $\prod$ б**о**льшие индексы, то есть перестановка чисел $\{a_i, i = 1, \ldots, s\}$ отсортирована в порядке невозрастания:*

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_s\geqslant 1.$$

Доказательство. Очевидно, что один сомножитель $1+\frac{1}{p(i)^{a_i+1}-1}$ для фиксированного индекса i будет наименьшим при наибольшем возможном значении a_i. Пусть теперь дан произвольный набор фиксированных натуральных значений $\{a_i,\ i{=}1,\ \ldots,\ s\}$ и для некоторых натуральных чисел n, m выполняются неравенства

$$n < m\leqslant s; p\left(n\right) < p\left(m\right). \tag{2.6}$$

Предположим, что существует такое минимальное значение Π_{min}

$$\prod\nolimits_{min} = \prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{s\setminus\{n,m\}}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right) * \left(\frac{p\left(n\right)^{a_n+1}}{p\left(n\right)^{a_n+1}-1}\right) * \left(\frac{p\left(m\right)^{a_m+1}}{p\left(m\right)^{a_m+1}-1}\right),$$

при котором условие (2.5) не выполнено, а именно *хотя бы для двух значений* a_n, a_m выполнены неравенства (2.6) и (2.7):

$$a_n < a_m. \tag{2.7}$$

Однако после *перестановки* данных значений a_n, a_m в произведении $\prod_{min}$ получим значение $\prod$

$$\prod = \left(\prod_{i=1}^{s\setminus\{n,m\}} \frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right) * \left(\frac{p\,(n)^{a_m+1}}{p\,(n)^{a_m+1}-1}\right) * \left(\frac{p\,(m)^{a_n+1}}{p\,(m)^{a_n+1}-1}\right),$$

которое *меньше* $\prod_{min}$, что противоречит выбору данного $\prod_{min}$ как минимального. В самом деле, докажем, что, если выполняются неравенства (2.6) и (2.7), то тождественно выполняется неравенство (2.8):

$$\prod\nolimits_{min} > \prod,$$

$$\left(\frac{p(n)^{a_n+1}}{p(n)^{a_n+1}-1}\right)\left(\frac{p\,(m)^{a_m+1}}{p\,(m)^{a_m+1}-1}\right) > \left(\frac{p\,(n)^{a_m+1}}{p\,(n)^{a_m+1}-1}\right)\left(\frac{p\,(m)^{a_n+1}}{p\,(m)^{a_n+1}-1}\right). \tag{2.8}$$

Тождественно преобразуем данное неравенство:

$$p\,(m)^{a_m-a_n}\left(\frac{1}{p(n)^{a_n+1}-1}\right)\left(\frac{1}{p\,(m)^{a_m+1}-1}\right) >$$

$$> p\,(n)^{a_m-a_n}\left(\frac{1}{p\,(n)^{a_m+1}-1}\right)\left(\frac{1}{p\,(m)^{a_n+1}-1}\right);$$

$$p\,(m)^{a_m-a_n}\left(p\,(n)^{a_m+1}-1\right)\left(p\,(m)^{a_n+1}-1\right) >$$

$$> p\,(n)^{a_m-a_n}\left(p\,(m)^{a_m+1}-1\right)\left(p(n)^{a_n+1}-1\right);$$

$$p\,(m)^{a_m-a_n}\left(p\,(n)^{a_m+1}p\,(m)^{a_n+1}-p\,(n)^{a_m+1}-p\,(m)^{a_n+1}+1\right) >$$

$$> p\,(n)^{a_m-a_n}\left(p(n)^{a_n+1}p\,(m)^{a_m+1}-p\,(m)^{a_m+1}-p\,(n)^{a_n+1}+1\right);$$

$$p\,(n)^{a_m+1}p\,(m)^{a_m+1}-p\,(n)^{a_m+1}p\,(m)^{a_m-a_n}-p\,(m)^{a_m+1}+p\,(m)^{a_m-a_n} >$$

$$> p(n)^{a_m+1}p\,(m)^{a_m+1}-p\,(n)^{a_m-a_n}p\,(m)^{a_m+1}-p\,(n)^{a_m+1}+p\,(n)^{a_m-a_n};$$

$$p\,(n)^{a_m-a_n}p\,(m)^{a_m+1}-p\,(n)^{a_m-a_n}-p\,(m)^{a_m+1}+\mathbf{1} >$$

$$> p\,(n)^{a_m+1}p\,(m)^{a_m-a_n}-p\,(n)^{a_m+1}-p\,(m)^{a_m-a_n}+\mathbf{1};$$

$$\left(p(n)^{a_m-a_n}-1\right)\left(p(m)^{a_m+1}-1\right) > \left(p(n)^{a_m+1}-1\right)\left(p(m)^{a_m-a_n}-1\right);$$

$$\frac{p(m)^{a_m+1}-1}{p(m)^{a_m-a_n}-1} > \frac{p(n)^{a_m+1}-1}{p(n)^{a_m-a_n}-1}. \tag{2.9}$$

В силу предположения (2.7)

$$a_m + 1 > a_m - a_n \geqslant 1;$$

произведя деление многочленов с остатком в неравенстве (2.9) k раз (как минимум один раз) до тех пор, пока не выполнится условие

$$0 \leqslant a_m + 1 - k\left(a_m - a_n\right) < a_m - a_n,$$

получим

$$\frac{p\left(m\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1} - 1}{p\left(m\right)^{a_m - a_n} - 1} =$$

$$= p\left(m\right)^{a_n + 1} + p\left(n\right)^{a_n + 1 - \left(a_m - a_n\right)} + \ldots + p\left(m\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1 - k\left(a_m - a_n\right)} +$$

$$+ \frac{p\left(m\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1 - k\left(a_m - a_n\right)} - 1}{p\left(m\right)^{a_m - a_n} - 1},$$

$$0 \leqslant r\left(n\right) = \frac{p\left(n\right)^{a_m + 1 - k\left(a_m - a_n\right)} - 1}{p\left(n\right)^{a_m - a_n} - 1} < 1,$$

$$\frac{p\left(n\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1} - 1}{p\left(n\right)^{a_m - a_n} - 1} =$$

$$= p(n)^{a_n + 1} + p(n)^{a_n + 1 - \left(a_m - a_n\right)} + \ldots + \frac{p\left(n\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1 - k\left(a_m - a_n\right)} - 1}{p\left(n\right)^{a_m - a_n} - 1},$$

$$0 \leqslant r\left(m\right) = \frac{p\left(m\right)^{a_m + 1 - k\left(a_m - a_n\right)} - 1}{p\left(m\right)^{a_m - a_n} - 1} < 1.$$

Поскольку

$$p\left(m\right) > p\left(n\right),$$

то выполняются неравенства

$$p\left(m\right)^{a_n + 1} > p\left(n\right)^{a_n + 1},$$

$$p\left(m\right)^{a_n + 1 - \left(a_m - a_n\right)} \geqslant p(n)^{a_n + 1 - \left(a_m - a_n\right)}, \ldots,$$

$$p\left(m\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1 - k\left(a_m - a_n\right)} \geqslant p\left(n\right)^{\left(a_m - a_n\right) + a_n + 1 - k\left(a_m - a_n\right)},$$

$$p\left(m\right) - p\left(n\right) \geqslant 1; a_n \geqslant 1; \left|r\left(m\right) - r\left(n\right)\right| < 1,$$

следовательно

$$p(m)^{a_n + 1} - p\left(n\right)^{a_n + 1} = \left(p\left(m\right) - p\left(n\right)\right)\left(p\left(m\right)^{a_n} + \ldots + p\left(n\right)^{a_n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant p\left(m\right)^{a_n} + p\left(n\right)^{a_n} \geqslant 5 > \left|r\left(m\right) - r\left(n\right)\right|,$$

и неравенство (2.9) тождественно выполняется. Следовательно, значение $\prod_{min}$ не может быть наименьшим, если хотя бы для двух значений a_n, a_m одновременно выполнены неравенства (2.6) и (2.7), и лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть число различных простых сомножителей s чисел N фиксировано, дан набор произвольных натуральных чисел $\{a_i, i = 1 \dots s\}$, проиндексированных в произвольном порядке, тогда сумма*

$$\sum(s, a_1, \dots, a_s) = \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i)$$

*принимает наименьшее значение, если числа a_i с меньшими значениями имеют в данной сумме $\sum$ б**о**льшие индексы, то есть перестановка чисел $\{a_i, i = 1, \dots, s\}$ отсортирована в порядке невозрастания:*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_s \geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть дан произвольный набор значений $\{a_i,\ i{=}1,\ ...,\ s\}$ и для некоторых натуральных чисел $n,\ m$ выполняются неравенства (2.6)

$$n < m \leqslant s; p\left(n\right) < p\left(m\right).$$

Предположим, что существует такое минимальное значение

$$\sum\nolimits_{min} = \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i) = \left(\sum_{i=1}^{s\backslash\{n,m\}} a_i \ln p(i) \right) + a_m \ln p(m) + a_n \ln p\left(n\right),$$

при котором условие (2.5) не выполнено, то есть хотя бы для двух значений $a_n,\ a_m$ выполнены неравенства (2.6) и (2.7):

$$a_n < a_m.$$

Однако после *перестановки* данных значений $a_n,\ a_m$ в сумме $\sum_{min}$ получим значение $\sum$

$$\sum = \left(\sum_{i=1}^{s\backslash\{n,m\}} a_i \ln p(i) \right) + a_m \ln p\left(n\right) + a_n \ln p(m),$$

которое *меньше* $\sum_{min}$, что противоречит выбору данного $\sum_{min}$ как минимального. В самом деле, тождественно выполняются неравенства:

$$\sum\nolimits_{min} > \sum,$$

$$a_m \ln p\left(m\right) + a_n \ln p\left(n\right) > a_m \ln p\left(n\right) + a_n \ln p\left(m\right),$$

$$a_m \ln p\left(m\right) - a_n \ln p\left(m\right) > a_m \ln p\left(n\right) - a_n \ln p\left(n\right),$$

$$\left(a_m - a_n\right) * \ln p\left(m\right) > \left(a_m - a_n\right) * \ln p\left(n\right),$$

$$p\left(m\right) > p\left(n\right), a_m - a_n > 0.$$

Следовательно, значение $\sum_{min}$ не может быть наименьшим, если хотя бы для двух значений $a_n,\ a_m$ выполнены неравенства (2.6) и (2.7).

Следствие 1. *Неравенство (1.1) достаточно и необходимо рассмотреть только для натуральных чисел частного вида*

$$N_* = p\,(1)^{a_1} \ldots p\,(s)^{a_s}\,,$$

где p(i) — i-ое по счету простое число в натуральном ряду, для показателей степеней a_i которых всегда выполняется условие невозрастания: $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_s \geqslant 1$.

Например, если неравенство (1.1) выполнено для числа $N = 2^{100}3^{10}$, то оно выполняется и для числа $2^{10}3^{100}$, и для всех чисел вида $2^{100}p(2+k)^{10}, k \geqslant 0$.

Определение 1. Пусть функция r – средневзвешенное значение показателей степеней a_i в каноническом разложении чисел $N*$:

$$r \sum_{i=1}^{s} \ln p(i) = \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i) = \ln N_*. \tag{2.10}$$

Очевидно, что множество значений функции r — это всё множество натуральных чисел N и некоторое счётное подмножество действительных чисел, больших 1.

Определение 2. Пусть функция h – среднеарифметическое значение показателей степеней a_i в каноническом разложении чисел $N*$:

$$h = \sum_{i=1}^{s} a_i / s. \tag{2.11}$$

Лемма 2.3. *Если выполняются неравенства $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s \geqslant 0$, то верно тождество*

$$h\,(s) \geqslant r\,(s)\,.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$\sum_{i=1}^{s} a_i / s \geqslant \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p\,(i) \,/ \sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i)\,.$$

При $s = 1$ получаем $a_1 \geqslant a_1$, следовательно, неравенство выполняется;
при $s = 2$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \frac{a_1 \ln 2 + a_2 \ln 3}{\ln 2 + \ln 3},$$

$$a_1 \ln 2 + a_1 \ln 3 + a_2 \ln 2 + a_2 \ln 3 \geqslant 2a_1 \ln 2 + 2a_2 \ln 3,$$

$$a_1 \ln 3 + a_2 \ln 2 \geqslant a_1 \ln 2 + a_2 \ln 3,$$

$$a_1\,(\ln 3 - \ln 2) + a_2\,(\ln 2 - \ln 3) \geqslant 0,$$

и неравенство сводится к предыдущему случаю;
при $s = 3$ получаем

$$a_1\,(\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 - 3\ln 2) +$$

$$+a_2\,(\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 - 3\ln 3) + a_3\,(\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 - 3\ln 5) \geqslant 0,$$

$$(a_1-a_3)(\ln 2+\ln 3+\ln 5-3\ln 2)+(a_2-a_3)(\ln 2+\ln 3+\ln 5-3\ln 3)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1-a_3)(\ln 2+\ln 3+\ln 2-3\ln 2)+(a_2-a_3)(\ln 2+\ln 3+\ln 3-3\ln 3)=$$
$$=(a_1-a_3)(\ln 3-\ln 2)+(a_2-a_3)(\ln 2-\ln 3)=$$
$$=a_1'(\ln 3-\ln 2)+a_2'(\ln 2-\ln 3)\geqslant 0,$$
$$a_1'\geqslant a_2',$$

и неравенство сводится к предыдущему случаю. Индуктивный шаг от s к $s+1$ очевиден.

Лемма 2.4. *При $p(s)\geqslant 563$ выполняются неравенства*

$$\ln\left(1-\frac{1}{2\ln p(s)}\right)<\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)-\ln p(s)<\ln\left(1+\frac{1}{2\ln p(s)}\right). \qquad (2.12)$$

Доказательство. Логарифмируя неравенство (1.8) при $x=p(s)$ получим:

$$x\left(1-\frac{1}{2\ln x}\right)<\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p<x\left(1+\frac{1}{2\ln x}\right), x\geqslant 563,$$
$$\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{2\ln x}\right)<\ln\sum_{p\leqslant x}\ln p<\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{2\ln x}\right), x\geqslant 563,$$
$$\ln p(s)+\ln\left(1-\frac{1}{2\ln p(s)}\right)<\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)<\ln p(s)+\ln\left(1+\frac{1}{2\ln p(s)}\right);$$
$$p(s)\geqslant 563.$$

При s$\to+\infty$ получаем асимптотическое равенство

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)=o(1)+\ln p(s).$$

§ 3. О неравенствах (1.1) и (2.4) при постоянном значении s.

Если количество различных простых сомножителей s числа N фиксировано ($s=const$), то выполняется равенство

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}=const(s).$$

Таким образом, с учётом неравенства (2.3) неравенство (1.1) тождественно выполнено для всех достаточно больших чисел N_s с *постоянным* количеством различных простых сомножителей s, если

$$\frac{\sigma(N)}{N}<\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}=const<e^{\gamma}\ln(\ln N_s);$$

$$\exp\left(\exp\left(\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}\right)\right) < N_s. \tag{3.1}$$

В частности, неравенство (1.1) выполнено для всех степеней простых чисел ($s{=}1$) $N_1 = p^{a_1} > 22$, и для некоторых других достаточно больших натуральных чисел специального вида, например нечетных чисел (Замечание 4.3).

Поскольку

$$1 < \prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1} < \frac{\pi^2}{6},$$

то для выполнения неравенства (2.4) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1} < \ln\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p(i)\right),$$

$$\exp\left(\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}\right) - \sum_{i=1}^{s}\ln p\,(i) < \sum_{i=1}^{s}\left(a_i-1\right)\ln p\,(i)\,,$$

которые, очевидно, выполняются, если хотя бы для одного из чисел $\{a_i, i = 1\ldots s\}$ выполнено неравенство (все остальные a_i могут быть равны 1)

$$1+\left(\exp\left(\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}\right) - \sum_{i=1}^{s}\ln p\,(i)\right)/\ln p\,(i) < a_i.$$

Таким образом, при заданном *постоянном* значении s может существовать лишь *конечное* множество натуральных чисел a_i, для которых неравенство (2.4) возможно неверно. Для всех остальных наборов чисел a_i неравенство (2.4) при заданном значении s выполнено.

§ 4. Выполнение некоторых необходимых условий.

Неравенства (1.1) и (2.4), в частности, должны выполняться если:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_s = r, p_i = p\,(i)\,, i = 1, \ldots, s,$$

r- натуральное.

Теорема 2. *Для всех достаточно больших значений s и любого действительного значения $r{\geqslant}1$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)}{p\,(i)-1} < \prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{r+1}}{p\,(i)^{r+1}-1}\left(\ln r + \ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)\right). \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

$$r > r_0, \tag{4.2}$$

$$1{\leqslant}r{\leqslant}r_0, \tag{4.3}$$

где $r_0 > 1$– произвольная постоянная.

1. Случай больших средневзвешенных значений показателей степеней. Поскольку для любого действительного значения $r>1$ выполняется тождество

$$\prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)^{r+1}}{p\,(i)^{r+1}-1} > 1,$$

то в случае (4.2) достаточно выполнения неравенства

$$\frac{1}{e^{\gamma}} \prod_{i=1}^{s} \frac{p(i)}{p(i)-1} < \ln\left(r_0\right) + \ln\left(\sum_{i=1}^{s} \ln p(i)\right) \tag{4.4}$$

причём $\ln\left(r_0\right) = const > 0$. С другой стороны, при $p(s)\geqslant 286$ должны быть выполнены неравенства Россера-Шенфельда (1.7):

$$e^{\gamma}\left(\ln p\,(s) - \frac{1}{2\ln p\,(s)}\right) < \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)}{p\,(i)-1} < e^{\gamma}\left(\ln p\,(s) + \frac{1}{2\ln p\,(s)}\right),$$

и при $p(s)\geqslant 563$ неравенство (2.12)

$$\ln p\,(s) + \ln\left(1 - \frac{1}{2\ln p\,(s)}\right) < \ln\left(\sum_{i=1}^{s} \ln p(i)\right)$$

из которых при $p(s)\geqslant 563$ следуют неравенства

$$\frac{1}{e^{\gamma}} \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)}{p\,(i)-1} < \ln p\,(s) + \frac{1}{2\ln p\,(s)} <$$

$$< \ln\left(\sum_{i=1}^{s} \ln p(i)\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2\ln p\,(s)}\right) + \frac{1}{2\ln p\,(s)}.$$

Поскольку

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{2\ln p\,(s)}\right) + \frac{1}{2\ln p\,(s)} = \left(1 + o\,(1)\right)\frac{1}{\ln p\,(s)},$$

то из этих неравенств следует тождество

$$\frac{1}{e^{\gamma}} \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)}{p\,(i)-1} < \ln\left(\sum_{i=1}^{s} \ln p(i)\right) + \left(1 + o\,(1)\right)\frac{1}{\ln p\,(s)}. \tag{4.5}$$

Следовательно, неравенство (4.4)

$$\frac{1}{e^{\gamma}} \prod_{i=1}^{s} \frac{p(i)}{p(i)-1} < \ln\left(r_0\right) + \ln\left(\sum_{i=1}^{s} \ln p(i)\right)$$

выполняется для всех достаточно больших значений s, если

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{2\ln p\,(s)}\right) + \frac{1}{2\ln p\,(s)} < \ln\left(r_0\right). \tag{4.6}$$

Таким образом, случай больших средневзвешенных значений a_i (4.1) выполнен для всех достаточно больших значений s, если выполнены неравенства Россера-Шенфельда (1.5) и (1.8).

2. Случай малых средневзвешенных значений показателей степеней. Рассмотрим второй случай (4.3) малых средневзвешенных значений a_i. В этом случае выполняются неравенства

$$1+\frac{1}{2^{r_0+1}-1}\leqslant\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p\left(i\right)^{r_0+1}-1}\right)\leqslant\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p\left(i\right)^{r+1}-1}\right),$$

следовательно, для всех достаточно больших значений s и произвольной постоянной $r_0>1$ достаточно выполнения неравенства

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}<\left(1+\frac{1}{2^{r_0+1}-1}\right)\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)\right),\tag{4.7}$$

которое, в свою очередь, сводится к предыдущему случаю, если выполняются неравенства

$$\ln\left(r_0\right)+\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right)<\left(1+\frac{1}{2^{r_0+1}-1}\right)\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)\right),$$

$$\ln\left(r_0\right)<\left(\frac{1}{2^{r_0+1}-1}\right)\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)\right).\tag{4.8}$$

Заметим, что для этого случая достаточно выполнения третьей теоремы Мертенса (1.8) и теоремы об асимптотическом распределении простых чисел (1.11). Неравенства (4.6) и (4.8) позволяют при заданном $r_0>1$ получить минимальные значения s при которых выполнены условия (4.4) и (4.7) соответственно.

Далее следуют несколько замечаний, которые не доказываются и не используются в дальнейшем.

Замечание 1. Если (!) для всех возможных натуральных значений a_i и достаточно больших значений s существует хотя бы одно некоторое *среднее* $\acute{m}$ такое, что выполняется неравенство

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{\acute{m}+1}}{p\left(i\right)^{\acute{m}+1}-1}\left(\ln\acute{m}+\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p\left(i\right)\right),\tag{4.9}$$

то неравенство (1.1) выполнено в силу теоремы 2.

Замечание 2. Предположим, что всегда существует некоторое среднее r, такое, что (4.9) выполнено. Можно доказать, что для всех достаточно больших значений s ($s>4000$) выполняется более сильное по сравнению с неравенством (4.1) неравенство

$$e^{\gamma}\approx 1,78 < F \equiv \prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{r+1}}{p\left(i\right)^{r+1}-1}\left(\ln r+\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right)\right)-\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}.$$

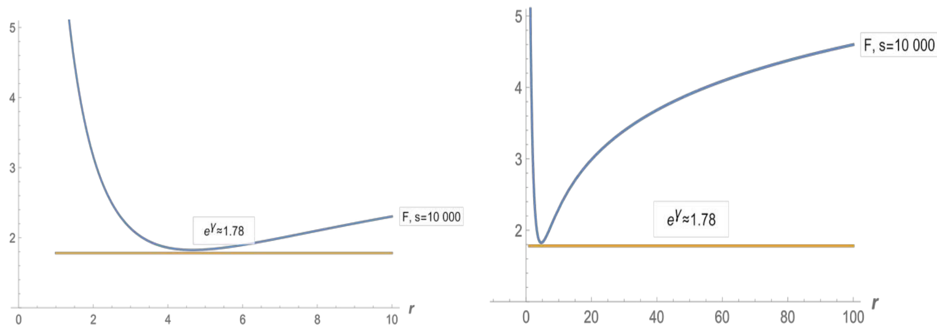

Рис.1. Графики функции F (r, s) при s=10 000.

Тогда поскольку

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{r+1}}{p\left(i\right)^{r+1}-1}<\frac{\pi^{2}}{6}\approx 1,64<e^{\gamma}\approx 1,78$$

то для всех достаточно больших значений $N\geqslant N_1$

$$N_1\approx\left(\prod_{i=1}^{4000}p\left(i\right)\right)^{4.1}\approx 4000^{4000*4,1}\approx 10^{26\ 000}$$

должно выполняться *более сильное* по сравнению с неравенством Робина (1.1) неравенство, например,

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\frac{\sigma\left(N\right)}{N}+e^{\gamma}/\left(\frac{\pi^{2}}{6}\right)<\ln\left(\ln N\right). \qquad (4.10)$$

Замечание 3. Случаи нечётности N в неравенстве (1.1) либо неделимости N на любое наперёд заданное простое число p_m, легко доказать *без использования* неравенств Россера-Шенфельда (1.5) и (1.8), используя лишь третью теорему Мертенса (1.6) и теорему об асимптотическом распределении простых чисел. В этом случае достаточными условиями выполнения неравенства (1.1) для этих чисел при $s>m$ будут неравенства

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s\backslash m}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}<\left(\prod_{i=1}^{s\backslash m}\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{s\backslash m}a_i\ln p\left(i\right)\right),$$

$$s>m=const,$$

$$\left(\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}\right)/\frac{p\left(m\right)}{p\left(m\right)-1}<\ln\left(-\ln p\left(m\right)+\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right),$$

$$\left(\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)}{p\,(i)-1}\right)/\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\,(i)\right)\right)<1+o\,(1)<$$
$$<\left(1+\frac{1}{p\,(m)-1}\right)*(1+o\,(1))\,,$$

которые выполнены для всех достаточно больших значений $s>m$.

Замечание 4. Доказано, что в силу неравенств Россера-Шенфельда при $p(s)\geqslant563$ выполняется неравенство (4.5)

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)}{p\,(i)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)<(1+o\,(1))\,\frac{1}{\ln p\,(s)}.$$

Вероятно, при соответствующем усилении неравенств Россера-Шенфельда, можно доказать, что для всех $s\geqslant6901$ выполняется неравенство

$$F\equiv\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)}{p\,(i)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)<G\equiv\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^{2}. \qquad (4.11)$$

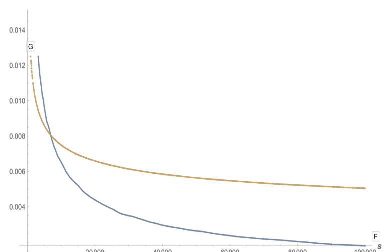

Рис.2. Графики функций $F\,(\,s\,)$, $G\,(\,s\,)$ при $s\leqslant$100 000.

§ 5. О других арифметических эквивалентах гипотезы Римана.

Теорема 3. *Неравенство (1.3)*

$$\frac{N}{\varphi(N)}<e^{\gamma}\ln\ln N+\frac{e^{\gamma}\,(4+\gamma-\ln 4\pi)}{\sqrt{\ln N}},$$

при $N\geqslant9,4*10^{690\ 608}$ *равносильно неравенству*

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)}{p\,(i)-1}<\ln\left(r\sum_{i=1}^{s}\ln p\,(i)\right)+\frac{4+\gamma-\ln 4\pi}{\sqrt{r\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)}}. \qquad (5.1)$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство (1.3) для чисел вида

$$N_{*}=p\,(1)^{a_1}\dots p\,(s)^{a_s}=2^{a_1}*3^{a_2}*\dots*p\,(s)^{a_s}\,.$$

Функция Эйлера φ для произвольного натурального N в форме (1.4) имеет вид:

$$\varphi\,(N)=N\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{p_i},$$

тогда при условии (1.5)

$$p\,(i) \leqslant p_i$$

выполняется неравенство

$$\frac{N}{\varphi(N)} = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p\,(i) - 1}\right) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)}{p\,(i) - 1} = \frac{N_*}{\varphi(N_*)}.$$

Докажем теперь, что выполняется неравенство

$$\ln(\ln N_*) + \frac{4 + \gamma - \ln 4\pi}{\sqrt{\ln N_*}} \leqslant \ln(\ln N) + \frac{4 + \gamma - \ln 4\pi}{\sqrt{\ln N}}, \tag{5.2}$$

где

$$N_* = 2^{a_1} * 3^{a_2} * \ldots * p\,(s)^{a_s}\,, N = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * \ldots * p_s^{a_s}, N_* \leqslant N.$$

Из (5.2) получаем

$$(4 + \gamma - \ln 4\pi) \left(\frac{1}{\sqrt{\ln N_*}} - \frac{1}{\sqrt{\ln N}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \ln(\ln N) - \ln(\ln N_*) = \ln\left(1 + \frac{\ln N - \ln N_*}{\ln N_*}\right). \tag{5.3}$$

Если

$$N_*^2 \leqslant N, N_* \geqslant 6091 (s \geqslant 6),$$

то выполняются неравенства

$$\ln 2 + \ln(\ln N_*) \leqslant \ln(\ln N)\,,$$

$$(4 + \gamma - \ln 4\pi) \left(\frac{1}{\sqrt{\ln N_*}} - \frac{1}{\sqrt{\ln N}}\right) \leqslant \ln 2 \leqslant \ln(\ln N) - \ln(\ln N_*)\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\ln N_*}} - \frac{1}{\sqrt{\ln N}} < \frac{\ln 2}{4 + \gamma - \ln 4\pi} \approx 0,339.$$

Если

$$N_*^2 > N,$$

то

$$\frac{\ln N - \ln N_*}{\ln N_*} < 1,$$

и справедливо разложение в ряд Тейлора

$$\ln\left(1 + \frac{\ln N - \ln N_*}{\ln N_*}\right) = \frac{\ln N - \ln N_*}{\ln N_*} + o\left(\frac{\ln N - \ln N_*}{\ln N_*}\right),$$

тогда из (5.3) получаем

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{\ln N_*}}-\frac{1}{\sqrt{\ln N}}\right)\leqslant\frac{\ln N-\ln N_*}{\ln N_*},$$
$$K\equiv(1+o(1))(4+\gamma-\ln 4\pi)\approx 2,05, \tag{5.4}$$
$$K\left(\frac{\sqrt{\ln N}-\sqrt{\ln N_*}}{\sqrt{\ln N_*}\sqrt{\ln N}}\right)\leqslant\frac{\left(\sqrt{\ln N}\right)^2-\left(\sqrt{\ln N_*}\right)^2}{\left(\sqrt{\ln N_*}\right)^2},$$
$$K\left(\frac{1}{\sqrt{\ln N_*}\sqrt{\ln N}}\right)\leqslant\frac{\left(\sqrt{\ln N}+\sqrt{\ln N_*}\right)}{\left(\sqrt{\ln N_*}\right)^2},\ \frac{\sqrt{\ln N}}{\sqrt{\ln N_*}}\geqslant 1,$$

значит при s$\geqslant$2 выполняются неравенства

$$K\approx 2,05\leqslant 2\sqrt{\ln N}\leqslant\sqrt{\ln N}\frac{\left(\sqrt{\ln N}+\sqrt{\ln N_*}\right)}{\sqrt{\ln N_*}}=\sqrt{\ln N}\left(1+\frac{\sqrt{\ln N}}{\sqrt{\ln N_*}}\right).$$

Таким образом, при $s\geqslant 6$ неравенство (1.3) равносильно неравенствам

$$\frac{N}{e^\gamma\varphi(N)}\leqslant\frac{N_*}{e^\gamma\varphi(N_*)}<\ln(\ln N_*)+\frac{4+\gamma-\ln 4\pi}{\sqrt{\ln N_*}}\leqslant\ln(\ln N)+\frac{4+\gamma-\ln 4\pi}{\sqrt{\ln N}},$$

и теорема доказана.

Следствие 2. *Для всех достаточно больших значений s неравенство (5.1) равносильно неравенству*

$$\frac{1}{e^\gamma}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)<(1+o(1))\frac{4+\gamma-\ln 4\pi}{\sqrt{p(s)}}.$$

Доказательство. Гипотеза Римана в форме (5.1) для всех достаточно больших значений s предполагает при $r=1$ выполнение неравенства

$$\frac{1}{e^\gamma}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)<\frac{4+\gamma-\ln 4\pi}{\sqrt{\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)}}=K\frac{1}{\sqrt{p(s)}}, \tag{5.5}$$

которое сильнее неравенства (4.5), и недоказанного неравенства (4.11). Более того, при $r>0$ и фиксированном $s\geqslant 1$ функция

$$\ln r+K\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{p(s)}},\ r\geqslant 0,$$

в точке $r_0=0,25\frac{K^2}{p(s)}<1$ принимает единственное минимальное значение

$$\ln r+K\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{p(s)}}=\ln\left(0,25\frac{K^2}{p(s)}\right)+K\frac{1}{0,5\frac{K}{\sqrt{p(s)}}\sqrt{p(s)}}=$$
$$=\ln\left(0,25\frac{K^2}{p(s)}\right)+2\approx\ln\left(\frac{1}{p(s)}\right)+2,$$

следовательно, при $r\geqslant 1$ для неравенства (5.1) условие $r=1$ также и достаточно.

§ 6. Достаточные условия выполнения неравенства (2.4).

Согласно определению (2.10)

$$r\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)=\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p(i),$$

преобразуя неравенство (2.4)

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)}{p(i)-1}<\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)*\ln\left(r\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right),$$

получаем

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right)<\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}\right)\ln r+$$

$$+\left(\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)-1\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right). \tag{6.1}$$

Сравнивая (6.1) с доказанным неравенством (4.5) при $p(s)\geqslant 563$, заключаем, что если

$$\frac{1}{e^{\gamma}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)}{p\left(i\right)-1}-\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p\left(i\right)\right)<\left(1+o\left(1\right)\right)\frac{1}{\ln p\left(s\right)}\leqslant\ln r,$$

то неравенство (2.4) выполнено. Таким образом, остаётся проверить только случай

$$\left(1+o\left(1\right)\right)\frac{1}{\ln p\left(s\right)}>\ln r. \tag{6.2}$$

В свою очередь, поскольку

$$\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}\right)\ln r>0$$

неравенство (6.1) *достаточно* проверить только для следующего случая:

$$\left(1+o\left(1\right)\right)\frac{1}{\ln p\left(s\right)}<\left(\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)-1\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right),$$

или с учётом леммы 2.4

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right)=o\left(1\right)+\ln p\left(s\right),$$

случая

$$1+(1+o(1))\left(\frac{1}{\ln p\left(s\right)}\right)^{2}<\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}. \tag{6.3}$$

Таким образом, дальнейшую задачу можно свести к поиску *минимального* значения выражения

$$1 < \zeta_s = \prod_{i=1}^{s} \frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1} - 1} < \frac{\pi^2}{6}$$

при двух ограничениях на показатели степеней (6.2) и (2.5).

§ 7. Ограничения на показатели степеней для минимальных значений ζ_s.

Лемма 7.1. *Если средневзвешенное значение показателей степеней $r<2$ и выполняется неравенство (2.5), то относительная доля значений a_i равных 1 не меньше, чем (r-1).*

Доказательство. Пусть $\{a_j,\ j=1..k\}$– множество значений показателей степеней a_j, больших 1, и k – общее число этих значений. Тогда в силу неравенства (2.5) необходимо выполнение неравенств:

$$r\sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) = \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p\,(i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \ln p\,(i) + \sum_{i=k+1}^{s} \ln p\,(i) \geqslant$$

$$\geqslant 2\sum_{i=1}^{k} \ln p\,(i) + \sum_{i=k+1}^{s} \ln p\,(i)\,,$$

$$(r-1)\sum_{i=1}^{s} \ln p(i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \ln p\,(i)\,.$$

Из (1.9) и (1.10) следует асимптотическое равенство (при $s \to +\infty$ значение $\varepsilon_s \to 0$)

$$\sum_{i=1}^{s} \ln p(i) = (1+\varepsilon_s) * s \ln s,$$

следовательно, выполняются неравенства

$$(1+\varepsilon_s) * (r-1) * s * \ln s \geqslant k * \ln k,$$

$$(1+\varepsilon_s) * (r-1) * s > k. \tag{7.1}$$

При значении $r<2$ для всех достаточно больших значений s доля неединичных значений a_i ограничена сверху.

Например, при r=1,1 получим

$$0.11 > (1+\varepsilon_s) * (1.1-1) > k/s$$

то есть не менее 89% значений a_i будут равны 1. Поскольку $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s \geqslant 1$, то все единичные значения a_i будут иметь максимально возможные индексы.

Поскольку для функции логарифм справедливо разложение в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), x < 1, \tag{7.2}$$

и если выполняется неравенство

$$(1+o(1))\frac{1}{\ln p(s)} > \ln r,$$

то для r получаем

$$1 + (1+o(1))\frac{1}{\ln p(s)} > r, \tag{7.3}$$

и значит в силу неравенства (7.1) относительная доля значений a_i, больших 1 в этом неравенстве, стремится к нулю:

$$\frac{1.01}{\ln s} > (1+o(1))\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right) > \frac{k}{s}. \tag{7.4}$$

Таким образом, лемма доказана.

Из (7.4) следует, что, как минимум, для всех $i \geqslant \lfloor 1,01 \frac{s}{\ln s} \rfloor$ все значения a_i равны 1. В силу лемм 1 и 2 для минимального выражения

$$\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right) * \ln\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i)\right)$$

необходимо выполнение неравенств (2.5):

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s \geqslant 1.$$

В свою очередь, неравенство (6.3) необходимо и достаточно доказать только для такого набора показателей степеней a_i, для которых значение

$$\zeta_s = \prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1} = \prod_{i=1}^{s}\left(1 + \frac{1}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)$$

минимально при дополнительном ограничении (7.3). Это даёт две основных идеи в поиске этого минимума.

Во-первых, для такого минимума $\zeta_{s\ min}$ *ни один* из показателей степеней a_j, в том числе a_1, уже не может быть увеличен (при неизменных остальных значениях a_i), иначе это значение не минимально:

$$1 + \frac{1}{p(j)^{a_j+1+1}-1} < 1 + \frac{1}{p(j)^{a_j+1}-1}.$$

Значит, для такого набора a_i должно выполняться ограничение

$$-\ln 2 + \left(1 + (1+o(1))\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s}\ln p(i) < \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p(i) <$$

$$< \left(1 + (1+o(1))\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s}\ln p(i). \tag{7.5}$$

В дальнейшем это неравенство используется в индуктивном переходе.

Во-вторых, для такого минимума $\zeta_{s\ min}$ при условии *неувеличения* верхней границы значения r *любое изменение* этих значений показателей степеней *не должно уменьшать* этот минимум. В частности, должны выполняться следующие леммы 7.2 и 7.3, аналогичные лемме 2.1.

Лемма 7.2. *Для любых натуральных $i < i+k$ минимума $\zeta_{s\ min}$ при ограничении (7.3) выполняется неравенство*

$$\frac{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}-1}{p\left(i+k\right)-1}\leqslant\frac{p\left(i\right)^{a_i+2}-1}{p\left(i\right)-1}. \tag{7.6}$$

Доказательство. Увеличим произвольное значение a_i на 1 и уменьшим произвольное значение $a_{i+k}\geqslant 2$ на 1. Тогда если $\zeta_{s\ min}$ минимально, то для любых натуральных $i < i+k$ этого минимума должно выполняться неравенство

$$\begin{gathered}\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}*\frac{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}}{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}-1}\leqslant\\ \leqslant\frac{p\left(i\right)^{a_i+1+\mathbf{1}}}{p\left(i\right)^{a_i+1+\mathbf{1}}-1}*\frac{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1-\mathbf{1}}}{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1-\mathbf{1}}-1}.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Поскольку такое изменение значений a_i, a_j приведёт только к уменьшению значения r:

$$\ln p\left(i\right)-\ln p\left(i+k\right)+\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p\left(i\right)<\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p\left(i\right),$$

то (7.7) выполнено только с ограничением $a_{i+k}\geqslant 2$.

Тождественно преобразуя неравенство (7.7) аналогично лемме 2.1, получим неравенства

$$\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}*\frac{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}}{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}-1}\leqslant\frac{p\left(i\right)^{a_i+1+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1+1}-1}*\frac{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1-1}}{p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1-1}-1};$$

$$\begin{gathered}\left(p\left(i\right)^{a_i+1+1}-1\right)*p\left(i+k\right)*\left(p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1-1}-1\right)\leqslant\\ \leqslant p\left(i\right)*\left(p\left(i\right)^{a_i+1}-1\right)*\left(p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}-1\right);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}p\left(i+k\right)-p\left(i\right)^{2+a_i}p\left(i+k\right)-p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}+\boldsymbol{p\left(i\right)^{2+a_i}p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}}\leqslant\\ \leqslant p\left(i\right)-p\left(i\right)^{2+a_i}-p\left(i\right)p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}+\boldsymbol{p\left(i\right)^{2+a_i}p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}p\left(i+k\right)-p\left(i\right)^{2+a_i}p\left(i+k\right)-p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}-\mathbf{1}\leqslant\\ \leqslant p\left(i\right)-p\left(i\right)^{2+a_i}-p\left(i\right)p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}-\mathbf{1};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}p\left(i+k\right)+p\left(i\right)p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}-p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}-1\leqslant\\ \leqslant p\left(i\right)-p\left(i\right)^{2+a_i}+p\left(i\right)^{2+a_i}p\left(i+k\right)-1;\end{gathered}$$

$$p\left(i+k\right)-1+p\left(i+k\right)^{1+a_{i+k}}\left(p\left(i\right)-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant p(i)+p(i)^{2+a_i}(p(i+k)-1)-1;$$
$$\left(p(i+k)^{1+a_{i+k}}-1\right)(p(i)-1)\leqslant\left(p(i)^{2+a_i}-1\right)(p(i+k)-1);$$
$$\frac{p(i+k)^{a_{i+k}+1}-1}{p(i+k)-1}\leqslant\frac{p(i)^{a_i+2}-1}{p(i)-1}.$$

Следовательно, также должно выполняться соотношение

$$p(i+k)^{a_{i+k}}\left(1+\frac{1-\frac{1}{p(i+k)^{a_{i+k}}}}{p(i+k)-1}\right)\leqslant p(i)^{a_i+1}\left(1+\frac{1-\frac{1}{p(i)^{a_i+1}}}{p(i)-1}\right);$$

$$p(i+k)^{a_{i+k}}\leqslant(1+o(1))*p(i)^{a_i+1}. \tag{7.8}$$

Лемма 7.3. *Для некоторых натуральных $i<i+k$ минимума $\zeta_{s\ min}$ при ограничении (7.3) выполняется неравенство*

$$\frac{p(i)^{a_i+1}-1}{p(i)^2-1}\leqslant\frac{p(i+k)^{a_{i+k}+2}-1}{p(i+k)-1}. \tag{7.9}$$

Доказательство. Уменьшим некоторое значение $a_i \geqslant 3$ на 2 и увеличим некоторое значение a_{i+k} на 1. Тогда если $\zeta_{s\ +min}$ минимально, то для любых натуральных $i<i+k$ этого минимума должно выполняться неравенство

$$\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}*\frac{p(i+k)^{a_{i+k}+1}}{p(i+k)^{a_{i+k}+1}-1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{p(i)^{a_i+1-2}}{p(i)^{a_i+1-2}-1}*\frac{p(i+k)^{a_{i+k}+1+1}}{p(i+k)^{a_{i+k}+1+1}-1}. \tag{7.10}$$

При этом достаточно выполнения ограничения (тогда значение r не увеличивается)

$$-2\ln p(i)+\ln p(i+k)+\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p(i)\leqslant\sum_{i=1}^{s}a_i\ln p(i),$$
$$\ln p(i+k)\leqslant 2\ln p(i),\ a_i\geqslant 3. \tag{7.11}$$

Тождественно преобразуя неравенство (7.10) аналогично предыдущей лемме, получим неравенства

$$\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}*\frac{p(i+k)^{a_{i+k}+1}}{p(i+k)^{a_{i+k}+1}-1}\leqslant\frac{p(i)^{a_i+1-2}}{p(i)^{a_i+1-2}-1}*\frac{p(i+k)^{a_{i+k}+1+1}}{p(i+k)^{a_{i+k}+1+1}-1},$$

$$\frac{1}{p(i)^{a_i+1}-1}*\frac{1}{p(i+k)^{a_{i+k}+1}-1}\leqslant\frac{p(i)^{-2}}{p(i)^{a_i+1-2}-1}*\frac{p(i+k)^{1}}{p(i+k)^{a_{i+k}+1+1}-1},$$
$$p(i)^2*\left(p(i+k)^{a_{i+k}+1+1}-1\right)*\left(p(i)^{a_i+1-2}-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant p\left(i+k\right)^{1} * \left(p\left(i\right)^{a_i+1}-1\right) * \left(p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}-1\right);$$

$$p\left(i\right)^{2}-p\left(i\right)^{1+a_i}-p\left(i\right)^{2}p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}+p\left(i\right)^{1+a_i}p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}\leqslant$$

$$\leqslant p\left(i+k\right)-p\left(i\right)^{1+a_i}p\left(i+k\right)-p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}+p\left(i\right)^{1+a_i}p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}};$$

$$\left[p\left(i\right)^{2}-p\left(i\right)^{2}p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}\right]-p\left(i\right)^{1+a_i}+1\leqslant$$

$$\leqslant\left\{p\left(i+k\right)-p\left(i\right)^{1+a_i}p\left(i+k\right)\right\}-p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}+1;$$

$$\left\{p\left(i\right)^{1+a_i}p\left(i+k\right)-p\left(i+k\right)\right\}-p\left(i\right)^{1+a_i}+1\leqslant$$

$$\leqslant\left[p\left(i\right)^{2}p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}-p\left(i\right)^{2}\right]-p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}+1;$$

$$\left(p\left(i+k\right)-1\right)\left(p\left(i\right)^{1+a_i}-1\right)\leqslant\left(p\left(i\right)^{2}-1\right)\left(p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}-1\right);$$

$$\frac{p\left(i\right)^{1+a_i}-1}{p\left(i\right)^{2}-1}\leqslant\frac{p\left(i+k\right)^{2+a_{i+k}}-1}{p\left(i+k\right)-1}.$$

что и требовалось доказать. Из последнего неравенства также следует

$$p\left(i\right)^{a_i-1}\leqslant\left(1+o\left(1\right)\right)*p\left(i+k\right)^{a_{i+k}+1}. \tag{7.12}$$

Из неравенств (7.8) и (7.12) следуют основополагающие для дальнейших заключений рекуррентные формулы

$$a_i\frac{\ln p\left(i\right)}{\ln p\left(i+k\right)}-\frac{\ln p\left(i\right)}{\ln p\left(i+k\right)}-1+o\left(1\right)\leqslant a_{i+k}\leqslant$$

$$\leqslant a_i\frac{\ln p\left(i\right)}{\ln p\left(i+k\right)}+\frac{\ln p\left(i\right)}{\ln p\left(i+k\right)}+o\left(1\right), \tag{7.13}$$

$$a_{i+k}\frac{\ln p\left(i+k\right)}{\ln p\left(i\right)}-1+o\left(1\right)\leqslant a_i\leqslant$$

$$\leqslant a_{i+k}\frac{\ln p\left(i+k\right)}{\ln p\left(i\right)}+1+\frac{\ln p\left(i+k\right)}{\ln p\left(i\right)}+o\left(1\right). \tag{7.14}$$

Таким образом, для минимального значения $\zeta_{s\ min}$ на произвольном интервале $[i,\ i^2]$ показатели степеней a_i определены рекуррентно с точностью ± 5:

$$0<2+\frac{\ln p\left(i+k\right)}{\ln p\left(i\right)}+\left\{a_{i+k}\frac{\ln p\left(i+k\right)}{\ln p\left(i\right)}\right\}+o\left(1\right)<5.$$

Это уже позволяет достаточно точно для решения задачи (6.3) найти само значение ζ_{smin}.

§ 8. Ограничения для первого показателя степени при минимальном значении ζ_s.

Вычислим значения верхней и нижних границ первого элемента a_1. Известно, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s \geqslant 1,$$

и как минимум все значения

$$a_{\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor}, \ldots, a_s = 1$$

равны 1. Из ограничения (7.11) для всех достаточно больших значений i следует

$$p\left(i+k\right) \leqslant p\left(i\right)^2,$$

$$\left(i+k\right) * \ln\left(i+k\right) \leqslant \left(1+o\left(1\right)\right) * i^2 \left(\ln i\right)^2,$$

$$i+k \leqslant i^2 * \left(0,5-\varepsilon\right)\left(\ln i\right). \tag{8.1}$$

Если известно предыдущее значение $a_i \geqslant 3$, то как следует из неравенств (7.14), значение a_{i^2} будет меньше его примерно в 2 раза. Будет выполняться, например, условие

$$a_{\lfloor\sqrt{s}\rfloor} \leqslant 7.$$

Для решения задачи (6.3) необходимо получить как можно меньшие значения a_i, определенных рекуррентно с учетом ограничения (7.11). Для этого индексы на числовом отрезке $[1, ..., i^{2^{m+1}}]$ разобьем на $(m+2)$ интервала:

$$[1,...,i],[i+1,...,i^2],[i^2+1,...,i^4],[i^4+1,...,i^8],...,$$

$$[i^{2^{m-1}}+1,...,\lfloor\sqrt{s}\rfloor],...,\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor,...,i^{2^m}],[i^{2^m}+1,...,s,...,i^{2^{m+1}}]$$

на каждом из которых, кроме первого, условие (8.1) выполнено, причем выполняются условия

$$i^{2^m} < s < i^{2^{m+1}},$$

$$i^{2^{m-1}} < \sqrt{s} < i^{2^m}.$$

Дополнительно можно потребовать, чтобы для i выполнялось условие

$$i^{2^m}+1 \approx s. \tag{8.2}$$

Число таких интервалов будет равно $m+2$, значение m находится из условия

$$m < \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln s}{\ln i}\right) < m+1,$$

$$m = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln s}{\ln i}\right) - 1 + \epsilon, 0 < \epsilon < 1.$$

Из формул (7.14) получаем условие

$$a_{i+k}\frac{\ln p\left(i+k\right)}{\ln p\left(i\right)} - 1 + o\left(1\right) \leqslant a_i, \quad a_{i+k} \geqslant 2,$$

которое выполнено без ограничений на индексы, и неравенство

$$a_i \leqslant \left(a_{i+k} + 1 + \frac{\ln p\,(i)}{\ln p\,(i+k)} + o\,(1)\right) \frac{\ln p\,(i+k)}{\ln p\,(i)}, \quad a_{i+k} \geqslant 3.$$

Известно, что значение a_s равно 1. Следуя в обратном порядке, начиная с каждого значения $a_{i+k} \geqslant 3$ с индексом вида i^{2^x} (с большей стороны интервала индексов) согласно формуле (7.11) увеличивается не более чем в 2 раза

$$1 < \frac{\ln p\,(i+k)}{\ln p\,(i)} < 2$$

с точностью ± 5, следовательно, после не более чем $m+1$ числа удвоений числа

$$\left(a_{i+k} + 1 + \frac{\ln p\,(i)}{\ln p\,(i+k)} + o\,(1)\right)$$

для a_i с индексами из первого интервала $[1, ..., i]$ будет заведомо выполнено

$$a_i < (a_{i+k} + 1,6) * 2^{m+1} < 4,6 \frac{\ln s}{\ln i} * 2^{\epsilon} < 10 \frac{\ln s}{\ln i}. \tag{8.3}$$

Заметим, что непосредственная подстановка значений $a_s = 1, i + k = s$ в формулу (7.14), даёт такое же ограничение на порядок роста для значения a_i (аналогичное полученному из индуктивного шага для $i=1$):

$$a_i \leqslant 2 \frac{\ln p\,(s)}{\ln p\,(i)} + 1 + o\,(1)\,.$$

Можно получить более точные коэффициенты при $\ln p\,(s)$.

Уточним теперь минимальное количество нееденичных значений a_i m для минимального ζ_s, для которого выполняется неравенство (8.3). Аналогично лемме 7.1 получим

$$r \sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) = \sum_{i=1}^{s} a_i \ln p\,(i) = \sum_{i=1}^{m} a_i \ln p\,(i) + \sum_{i=m+1}^{s} \ln p\,(i) <$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \left(10 \frac{\ln (s)}{\ln i}\right) \ln p\,(i) + \sum_{i=m+1}^{s} \ln p\,(i)\,,$$

$$(r-1) \sum_{i=1}^{s} \ln p(i) + 0,9 * \ln m * m < 10,01 * \ln (s) * m.$$

$$(r-1) \sum_{i=1}^{s} \ln p(i) / \left(10,01 * \ln (s)\right) < m.$$

Для минимального ζ_s необходимо выполнение (7.5), следовательно, значение r почти равно своей верхней границе (почти максимально) и тогда для всех j меньших

$$j < s^{1/(1+\epsilon)} < \left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right) p(s) \frac{1}{\ln (s)} / 11; \;\; 0 < \epsilon \ll 1 \tag{8.4}$$

будет выполнено

$$a_j \geqslant 2.$$

Значит при $i+k<j$ выполнено

$$\frac{2}{(1+\epsilon_1)}\frac{\ln p(s)}{\ln p(i)}-1<2\frac{\ln p\left(\lfloor s^{1/(1+\epsilon)}\rfloor\right)}{\ln p(i)}-1<a_{i+k}\frac{\ln p(i+k)}{\ln p(i)}-1+o(1)\leqslant a_i, \quad (8.5)$$

Заметим, что если выполняется

$$r<1+K\frac{1}{\sqrt{p(s)}},$$

то будет выполнено

$$2\frac{\ln p\left(\lfloor s^{1/2}/6\sqrt{\ln s}\rfloor\right)}{\ln p(i)}-1\leqslant a_i.$$

Рассмотрим два случая:

$$a_{\lfloor\ s^{1/2+\epsilon}\rfloor} \geqslant 5, \quad (8.6)$$

$$4 \geqslant a_{\lfloor\ s^{1/2+\epsilon}\rfloor}. \quad (8.7)$$

В случае (8.6) из (7.14) при получаем

$$a_i \geqslant a_{\lfloor s^{1/2+\epsilon}\rfloor}\frac{\ln p\left(\lfloor s^{1/2+\epsilon}\rfloor\right)}{\ln p(i)}-1+o(1)>\frac{5}{2}\frac{\ln p(s)}{\ln p(i)}-1, \quad (8.8)$$

и для этого случая выполнен индуктивный переход (теорема 4).

В случае (8.7) из (7.14) при $i+k=\lfloor\ s^{1/2+\epsilon}\rfloor$ рекурсивно после m числа удвоений (на 1 меньше, чем в случае (8.3)) получаем

$$a_j<\left(a_{i+k}+1+\frac{\ln p(i)}{\ln p(i+k)}+o(1)\right)*2^m<$$

$$<\left(4+1+\frac{1}{2}+o(1)\right)*\frac{\ln\lfloor s^{1/2+\epsilon}\rfloor}{\ln j}/2<\frac{5,6}{4}\frac{\ln s}{\ln j},$$

что противоречит условию (8.5)

$$\frac{2}{(1+\epsilon_1)}\frac{\ln p(s)}{\ln p(i)}-1<a_i,$$

следовательно, этот случай не выполняется для всех достаточно больших значений s. Коэффициент для нижней границы можно сделать меньше 1, уменьшив количество шагов удвоений m на 1 путём подбора соответствующих значений i.

§ 9. Некоторые достаточные условия выполнения неравенства Робина.

В силу теоремы 4 необходимо рассмотреть только случай

$$a_1 \leqslant 2\frac{\ln p(s)}{\ln p(1)} + 1,$$

тогда из (7.8) получим

$$(1+o(1)) * p(i+k)^{a_{i+k}} \leqslant p(1)^{a_1+1} \leqslant 4\left(2^{2\frac{\ln p(s)}{\ln 2}}\right) = 4p(s)^2,$$

$$(1+o(1)) * p(j)^{a_j+1} \leqslant 4p(s)^2 * p(j). \tag{9.1}$$

Заменив возможные нееденичные значения a_i в выражении $\zeta_{s\ min}$ на значения из (8.9), можно получить, например, такое *достаточное* условие выполнения неравенства (1.1):

$$\prod_{j=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p(j)^{a_j+1}-1}\right) \geqslant$$

$$\geqslant F \equiv \prod_{j=1}^{\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor}\left(1+\frac{1}{5p(s)^2 * p(j)}\right)\prod_{j=\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor+1}^{s}\frac{p(i)^2}{p(i)^2-1} >$$

$$> G \equiv 1 + (1,01)\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)^2. \tag{9.2}$$

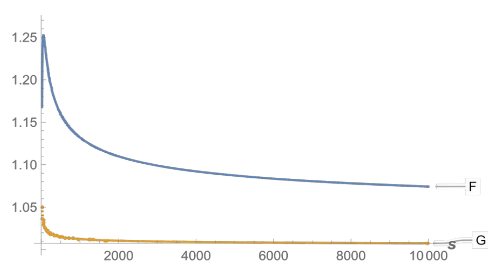

Рис.3. Графики функций $F(s)$, $G(s)$ при $s \leqslant 10\ 000$.

С учётом второго замечательного предела для случая (6.2) получим

$$\prod_{j=1}^{\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor}\left(1+\frac{1}{5p(s)^2 * p(j)}\right) < \left(1+\frac{1}{5p(s)^2}\right)^{\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor} <$$

$$< e^{\lfloor 1,01\frac{s}{\ln s}\rfloor/5p(s)^2} = ((1+o(1))\left(1+1,01\frac{s}{\ln s * 5p(s)^2}\right) <$$

$$< (1+o(1))\left(1+1,01\frac{1}{s}\right) \ll (1+o(1))\left(1+1,01\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)^2\right).$$

Однако, если пренебречь произведением с неединичными элементами a_i, то неравенство

$$\prod_{j=\lfloor 1{,}01s/(\ln s)^k\rfloor+1}^{s} \frac{p\left(i\right)^2}{p\left(i\right)^2-1} > 1+\left(1{,}01\right)\left(\frac{1}{\ln p\left(s\right)}\right)^{k+1}, \tag{9.3}$$

вероятно уже не выполняется для любых $k\geqslant 1$.

Замечание 5. Для случая $r < 1+K\frac{1}{\sqrt{p(s)}}$ для произведения с возможными неединичными значениями a_i выполняется

$$\prod_{j=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p\left(j\right)^{a_j+1}-1}\right) \approx 1+C\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right),$$

то есть для достаточно больших значений s выполняется тождество

$$K\frac{1}{\sqrt{p\left(s\right)}} < \left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p\left(i\right)^{a_i+1}}{p\left(i\right)^{a_i+1}-1}\right)\ln r + \left(\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}\right)-1\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right).$$

из которого можно сделать вывод, что для любого достаточно большого числа N всегда выполняется хотя бы одна из двух эквивалентных формулировок (5.5) либо (2.4). С другой стороны, известно, что в случае ошибочности гипотезы Римана существует бесконечно много чисел N_1, нарушающих неравенство Робина (1.1) и должно существовать некоторое множество чисел N_2, нарушающих неравенство (1.3). Эти множества могут иметь хотя бы один общий элемент, только в случае

$$a_1 = a_2 = \dots = 1,$$

что невозможно для неравенства (2.4). Таким образом, если гипотеза Римана неверна тогда и только тогда, когда неравенство (1.3) **не** выполняется **для всех** достаточно больших N, то гипотеза Римана верна.

§ 10. Условия индуктивного шага в задаче (6.3).

С учетом условия (7.3) при увеличении значения s на 1 среди показателей степеней $\{a_{i,}\ \ i{=}1..s\}$ в новом подмножестве $\{a_{i,}\ \ i{=}1..s{+}1\}$ верхняя граница только одного из них может увеличиться на 1, не считая a_1.

Лемма 10.1. *Пусть* $\left\{a_i^{(s)}, i=1\dots s\right\}$, $\left\{a_j^{(s+1)}, j=1\dots s+1\right\}$ *множества значений, удовлетворяющих неравенствам*

$$1+\left(1+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{\ln p\left(s\right)}\right) > r_s = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i^{(s)}\ln p(i)\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{s}\ln p(i)\right), \tag{10.1}$$

$$1+\left(1+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{\ln p\left(s+1\right)}\right) > r_{s+1} = \left(\sum_{j=1}^{s+1} a_j^{(s+1)}\ln p(j)\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{s+1}\ln p(j)\right), \tag{10.2}$$

где ε – близкая к нулю положительная постоянная и выполняется условие (2.5), тогда разность множеств $\left\{a_j^{(s+1)}, j = 1 \dots s\right\} \setminus \left\{a_i^{(s)}, i = 1 \dots s\right\}$ *имеет вид либо*

$$\left\{a_i^{(s)} + \delta_{ij}; \quad i, j = 1 \dots s\right\}, \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 0, i{\neq}j \\ 1, i = j \end{array} \right. ; \tag{10.3}$$

либо

$$\left\{a_1^{(s)} + 1;\ a_i^{(s)} + \delta_{ij}; \quad i, j = 2 \dots s\right\}, \tag{10.4}$$

либо

$$\left\{a_1^{(s)} + 2,\ a_2^{(s)}, \dots, a_s^{(s)}\right\}. \tag{10.5}$$

Иначе говоря, по сравнению с верхней границей значений $a_i^{(s)}$ верхняя граница только одного из значений $a_i^{(s+1)}$, кроме $a_1^{(s+1)}$, может увеличиться на 1 и только на 1.

Доказательство. Пусть для всех значений $\left\{a_i^{(s)}, i = 1 \dots s\right\}$ выполняется неравенство (10.1). Для значения *s+1* из (10.2) получим

$$\left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{s+1} \ln p(i)\right) > \sum_{i=1}^{s+1} a_i^{(s+1)} \ln p(i);$$

$$\ln p\,(s+1) + (1+\varepsilon) + \left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)\right) \sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) >$$

$$> a_{s+1} \ln p\,(s+1) + \sum_{i=1}^{s} a_i^{(s+1)} \ln p\,(i)\,. \tag{10.6}$$

Поскольку

$$a_{s+1} \geqslant 1,$$

$$1 + (1+\varepsilon)\frac{1}{\ln p\,(s)} > 1 + (1+\varepsilon)\frac{1}{\ln p\,(s+1)},$$

то из (10.6) следует, что для множества значений $\left\{a_i^{(s+1)}, i = 1 \dots s\right\}$ *необходимо* выполнение неравенства

$$(1+\varepsilon) + \left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)\right) \sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) > \sum_{i=1}^{s} a_i^{(s+1)} \ln p\,(i)\,. \tag{10.7}$$

Сравним неравенство (10.7) с неравенством (9.1)

$$\left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)\right) \sum_{i=1}^{s} \ln p(i) > \sum_{i=1}^{s} a_i^{(s)} \ln p\,(i)\,.$$

Непустая разность множеств

$$\left\{a_j^{(s+1)}, j = 1 \dots s\right\} \setminus \left\{a_i^{(s)}, i = 1 \dots s\right\} \equiv \left\{a_i^{(s+1)} = \Delta_i + a_i^{(s)}, \Delta_h > 0, i = 1 \dots s\right\}$$

может быть получена только из таких наборов ${a_i}^{(s)}$, для которых *хотя бы одно* из этих значений $a_h^{(s)}$ *не может* быть увеличено на 1 без нарушения неравенства (9.1) при неменяющихся остальных значениях $a_i^{(s)}$, значит для них выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{s} a_i^{(s)} \ln p\,(i) \geqslant -\ln p\,(h) + \left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i)\,. \tag{10.8}$$

С другой стороны, для множества значений $\left\{a_i^{(s+1)} = \Delta_i + a_i^{(s)}, i = 1\dots s\right\}$ выполняется неравенство (10.7),

$$(1+\varepsilon) + \left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) >$$

$$> \sum_{i=1}^{s} a_i^{(s)} \ln p\,(i) + \sum_{k} \Delta_k \ln p\,(k)\,,$$

причем $a_k^{(s)}$ с индексом $k{=}h$ обязан увеличиться при $s{+}1$:

$$\sum_{k} \Delta_k \ln p\,(k) = \Delta_h \ln p\,(h) + \sum_{k\neq h} \Delta_k \ln p\,(k)\,, \Delta_h{\geqslant}1.$$

Следовательно, выполняются неравенства

$$(1+\varepsilon) - \sum_{k} \Delta_k \ln p\,(k) + \left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) >$$

$$> \sum_{i=1}^{s} a_i^{(s)} \ln p\,(i) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s} \ln p\,(i) - \ln p\,(h)\,;$$

$$(1+\varepsilon) - \sum_{k} \Delta_k \ln p\,(k) > -\ln p\,(h)\,;$$

$$1+\varepsilon > (\Delta_h - 1)\ln p\,(h) + \sum_{k\neq j} \Delta_k \ln p\,(k)\,, \quad \Delta_h{\geqslant}1, \Delta_k{\geqslant}0. \tag{10.9}$$

Поскольку

$$\ln 2{\approx}0,693, \ln 3{\approx}1,098,$$

то условие (10.9) даёт три варианта

$$\begin{cases} \Delta_h = 1, \Delta_k = \begin{cases} 0 \\ 1, k = 1 \end{cases}; \\ \Delta_h = 2, \Delta_k = 0, h = 1. \end{cases}$$

Таким образом, при увеличении s на 1 при ограничении (7.3) множество значений $\left\{a_i^{(s)}, i = 1\dots s\right\}$ либо не меняется, либо дополняется множеством значений вида (10.3) - (10.5).

Замечание 6. Из (10.8) и (7.5) следует, что непустая разность множеств не могла быть получена из множества

$$\left\{a_i^{(s)}, i = 1 \ldots s\right\},$$

для которого значение ζ_s было бы минимальным, за исключением случая

$$lnp\,(h) \leqslant 1 + \varepsilon + \ln 2,\ h \leqslant 3. \tag{10.10}$$

Также случаи (10.4) и (10.5) не появляются, если выполнено неравенство (4.11).

Теорема 4. ***Индуктивный шаг.*** *Пусть для всех достаточно больших значений $s \geqslant s_0$ выполняются неравенства*

$$1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^1 \geqslant r_s, \tag{10.11}$$

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s \geqslant 1,$$

тогда если для некоторого достаточно большого значения $s \geqslant s_0$ выполняется неравенство

$$1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^2 < \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)^{a_i^{(s)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s)}+1} - 1}, \tag{10.12}$$

то либо неравенство (9.12) выполнено и для значения $s+1$

$$1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)^2 < \prod_{i=1}^{s+1} \frac{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1} - 1} \tag{10.13}$$

либо для некоторого $i < 4$ выполнено неравенство

$$2\frac{\ln p\,(s)}{\ln p\,(i)} > a_i.$$

Доказательство. Если при увеличении s на 1 среди множества показателей степеней $\left\{a_i^{(s+1)}, i = 1...s\right\}$, *не появилось* иных подмножеств значений, отличных от предыдущего множества $\left\{a_i^{(s)}, i = 1 \ldots s\right\}$, то выполняется равенство

$$\prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)^{a_i^{(s)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s)}+1} - 1} = \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1} - 1} = \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)^{a_i+1}}{p\,(i)^{a_i+1} - 1},$$

и неравенство (10.12)

$$1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^2 < \prod_{i=1}^{s} \frac{p\,(i)^{a_i^{(s)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s)}+1} - 1},$$

то неравенство (10.13) выполнено:

$$1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)^2<1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^2<$$

$$<\frac{p\,(s+1)^{a_{s+1}^{(s+1)}+1}}{p\,(s+1)^{a_{s+1}^{(s+1)}+1}-1}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1}-1}=\frac{p\,(s+1)^{a_{s+1}^{(s+1)}+1}}{p\,(s+1)^{a_{s+1}^{(s+1)}+1}-1}\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}}{p\,(i)^{a_i+1}-1}.$$

Согласно лемме 10.1 при увеличении s на 1 для непустой разности множеств $\{{a_i}^{(s+1)},\ i{=}1...s\}\backslash\{{a_i}^{(s)},\ i{=}1...s\}$ возможны три случая:

1. увеличилась на 1 верхняя грань только одного из элементов:

$$a_j^{(s+1)}=a_j^{(s)}+1;$$

2. увеличились на 1 верхние грани двух элементов:

$$a_1^{(s+1)}=a_1^{(s)}+1,\ a_j^{(s+1)}=a_j^{(s)}+1;$$

3. увеличилась на 2 верхняя грань только первого элемента:

$$a_1^{(s+1)}=a_1^{(s)}+2;$$

остальные значения верхних граней элементов ${a_i}^{(s)}$ не меняются, поэтому для определённости считаем, что для всех элементов выполняется условие:

$$a_i^{(s+1)}=a_i^{(s)}=a_i, i=1\dots s, i{\neq}j.$$

Все три случая достаточно доказать для случая при котором значение

$$\zeta_{s+1}=\prod_{i=1}^{s+1}\frac{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1}}{p\,(i)^{a_i^{(s+1)}+1}-1}$$

в неравенстве (10.13) *минимально.*

Рассмотрим первый случай. Пусть для некоторого j выполнено

$$a_j^{(s+1)}=a_j^{(s)}+1=a_j+1,$$

тогда из (10.12) и (10.13) следует

$$1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^2<\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}}{p\,(i)^{a_i+1}-1},$$

$$1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)^2<$$

$$<\frac{p\,(j)^{a_j+1+1}}{p\,(j)^{a_j+1+1}-1}\frac{p\,(j)^{a_j+1}-1}{p\,(j)^{a_j+1}}\frac{p\,(s+1)^2}{p\,(s+1)^2-1}*\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}}{p\,(i)^{a_i+1}-1}.$$

Заметим, что для минимального ζ_{s+1} должно выполняться необходимое условие (7.5) при $s+1$:

$$-\ln 2+\left(1+(1+o(1))\left(\frac{1}{\ln p(s+1)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s+1}\ln p(i)<\sum_{i=1}^{s+1}a_i\ln p(i)<$$

$$<\left(1+(1+o(1))\left(\frac{1}{\ln p(s+1)}\right)\right)\sum_{i=1}^{s+1}\ln p(i),$$

следовательно, предыдущее значение ζ_s, для которого возможно увеличение некоторого показателя степени a_j на 1 при увеличении верхней границы на $1+\varepsilon$ и достаточно большом значении j, не может быть минимальным, и значение $a_1^{(s)}$ в принципе может быть увеличено на нецелое число:

$$\Delta=\frac{\ln p(j)-\ln 2-1-\varepsilon}{\ln 2}>0,$$

и для этого неминимального значения ζ_s индуктивная база

$$1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)^2<\prod_{i=1}^{s}\frac{p(i)^{a_i+1}}{p(i)^{a_i+1}-1}$$

также должна быть выполнена. Поэтому можно считать, что $\Delta\leqslant 0$, $j\leqslant 3$.

Для выполнения индуктивного шага достаточно выполнения неравенства:

$$1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p(s+1)}\right)^2<$$

$$<\frac{p(j)^{a_j+1+1}}{p(j)^{a_j+1+1}-1}\frac{p(j)^{a_j+1}-1}{p(j)^{a_j+1}}\frac{p(s+1)^2}{p(s+1)^2-1}*\left(1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)^2\right).$$

Обозначим

$$1<T\equiv\left(1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p(s)}\right)^2\right)/\left(1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p(s+1)}\right)^2\right). \qquad (10.14)$$

Тождественно преобразуя, получаем

$$1<T*\frac{p(j)^{a_j+1+1}}{p(j)^{a_j+1+1}-1}*\frac{p(j)^{a_j+1}-1}{p(j)^{a_j+1}}*\frac{p(s+1)^2}{p(s+1)^2-1}; \qquad (10.15)$$

$$\left(p(j)^{a_j+2}-1\right)\left(p(s+1)^2-1\right)<Tp(j)^{a_j+2}p(s+1)^2-Tp(j)^1p(s+1)^2;$$

$$p(j)^{a_j+2}p(s+1)^2-p(s+1)^2-p(j)^{a_j+2}+1<$$

$$<Tp(j)^{a_j+2}p(s+1)^2-Tp(j)^1p(s+1)^2;$$

$$Tp(j)^1p(s+1)^2-p(s+1)^2<$$

$$<p(j)^{a_j+2}-1+(T-1)p(j)^{a_j+2}p(s+1)^2;$$

$$p\,(s+1)^2 < \frac{p\,(j)^{a_j+2}-1}{Tp\,(j)^1-1} + \left(\frac{T-1}{T}p\,(s+1)^2\right)\frac{p\,(j)^{a_j+2}}{Tp\,(j)^1-1}. \tag{10.16}$$

Несложно доказать, что для функции T выполняется неравенство

$$\frac{T-1}{T}p\,(s+1)^2 > \ln s. \tag{10.17}$$

В данном случае достаточно просто положить в неравенстве (10.15) T=1. Тогда если *для некоторого* j выполняются неравенства

$$p\,(s+1)^2 < \frac{p\,(j)^{a_j+2}-1}{p\,(j)^1-1} = (1+o\,(1))\,p\,(j)^{a_j+1}\,,$$

$$2\frac{\ln p\,(s+1)}{\ln p\,(j)} - 1 + o\,(1) < a_j, \tag{10.18}$$

то индуктивный шаг выполнен.

С другой стороны, если ζ_{s+1} минимально, то *для всех* значений j в силу (8.8) выполнено

$$a_j > \frac{5}{2}\frac{\ln p\,(s+1)}{\ln p\,(i)} - 1.$$

Таким образом, условие для индуктивного шага для некоторого значения a_j (10.17) полностью перекрываются условиями минимальности для всех значений a_j и первый случай выполнен.

Легко видеть, что аналогично выполнен и третий случай, при котором $j=1$, $a_1^{(s+1)} = a_1^{(s)} + 2 = a_1 + 2$.

Рассмотрим второй случай, для которого увеличились на 1 верхние грани двух элементов: $a_1^{(s+1)} = a_1^{(s)}+1$ и некоторого $a_j^{(s+1)} = a_j^{(s)}+1$. Для выполнения индуктивного шага достаточно выполнения неравенства

$$\begin{gathered}1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)^2 < \\ < \frac{2^{a_1+1+1}}{2^{a_1+1+1}-1}\frac{2^{a_1+1}-1}{2^{a_1+1}}\frac{p\,(j)^{a_j+1+1}}{p\,(j)^{a_j+1+1}-1}\frac{p\,(j)^{a_j+1}-1}{p\,(j)^{a_j+1}}\frac{p\,(s+1)^2}{p\,(s+1)^2-1}* \\ *\prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}}{p\,(i)^{a_i+1}-1},\end{gathered} \tag{10.19}$$

при условии

$$1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^2 < \prod_{i=1}^{s}\frac{p\,(i)^{a_i+1}}{p\,(i)^{a_i+1}-1}.$$

В свою очередь, для выполнения (10.20) достаточно выполнения неравенства

$$1 < T\frac{2^{a_1+1+1}}{2^{a_1+1+1}-1}\frac{2^{a_1+1}-1}{2^{a_1+1}} * \frac{p\,(j)^{a_j+1+1}}{p\,(j)^{a_j+1+1}-1}\frac{p\,(j)^{a_j+1}-1}{p\,(j)^{a_j+1}}\frac{p\,(s+1)^2}{p\,(s+1)^2-1}.$$

Несложно доказать, что этот случай сводится к первому. Например, если выполняется неравенство, эквивалентное (10.17)

$$T\equiv\left(1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s)}\right)^2\right)/\left(1+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\ln p\,(s+1)}\right)^2\right)>$$

$$>1+\frac{\ln s}{p\,(s+1)^2},$$

то выполняются неравенства

$$2+\frac{1}{T-1}<2+\frac{p\,(s+1)^2}{\ln s}<2^{a_1+2}\approx 8p\,(s)^2\,,$$

и значит выполнено условие

$$1<T\frac{2^{a_1+1+1}}{2^{a_1+1+1}-1}*\frac{2^{a_1+1}-1}{2^{a_1+1}}.$$

Таким образом, во всех случаях индуктивный шаг для значения s выполнен, если выполнено условие

$$2\frac{\ln p\,(s+1)}{\ln p\,(j)}-1<a_j,\,j\leqslant 3. \tag{10.20}$$

Список литературы

[1] G. Robin, “Grandes de la fonction somme des diviseurs et hypothese de Riemann”, *J. Math. Appl. (9)*, **63** (1984), 187–213.

[2] J. Lagarias, “An elementary problem equivalent to Riemann Hypothesis”, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), 534-543.

[3] K. Broughan, *Equivalents of the Riemann Hypothesis, Volume One: Arithmetic Equivalents (First ed.)*, Corollary 5.35, Cambridge University Press, 2017.

[4] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, “Approximate formulas for some functions of prime numbers”, *Illinois M. Math.*, **6** (1962), 64–94.

[5] А. Е. Ингам, *Распределение простых чисел (перевод с англ.)*, Едиториал УРСС, М., 2005.

[6] L. Schoenfeld, “Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta\,(x)$ *and* $\psi\,(x)$. II”, *Math. Comput*, **30** (1976), 337–360.

[7] В. И. Зенкин, *Распределение простых чисел. Элементарные методы.*, Калининград, 2008.

Р. З. Ахмадуллин (R. Z. Akhmadullin)

E-mail: `AhmadullinRobert@yandex.ru`