

УДК 531.011, 531.314.1, 531.395, 531-1

О принципе стационарного укороченного действия Якоби и его следствии

В. В. Войтик

*кафедра медицинской физики и информатики,
Башкирский государственный медицинский университет,
Ул. Ленина, 3, Уфа, 450008, Российская Федерация
e-mail: vvvojtik@bashgmu.ru*

В статье рассмотрены возможные вариации действия в форме Гамильтона-Остроградского и в форме Якоби. Показано, что в укороченном действии должны варьироваться вместе координаты и время, причем вариация времени определенным образом зависит от вариации координат. Получен уточненный принцип экстремального укороченного действия, который используется для вывода уравнений, определяющих траекторию неконсервативной натуральной системы в конфигурационном пространстве во внешних переменных полях. Эти уравнения второго порядка описывают изменение касательного вектора в зависимости от начальных условий, внешних полей и свойств самой системы. Решение этих уравнений может быть найдено численными методами, например методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Ключевые слова: *натуральная система, принцип Мопертюи, конфигурационное пространство, метрический тензор, касательный вектор, уравнения траектории, переменные внешние поля*

Введение

Широко известными уравнениями движения механических систем являются уравнения Лагранжа, канонические уравнения Гамильтона и уравнение Гамильтона-Якоби. Всего, таким образом, существует по меньшей мере три эквивалентные, но идейно различные формулировки аналитической механики.

Данная статья доказывает, что на самом деле их количество больше. Ещё одной формулировкой, специально предназначенной для натуральных механических систем, является механика К. Якоби. В основе механики его имени должен лежать широко известный старейший оптический, механический и геометрический принцип экстремального укороченного действия [1, лекция 6, 7]. Первоначально принцип стационарного укороченного действия был сформулирован П. Ферма [2] как принцип наименьшего времени, которое требуется свету, чтобы пройти через две точки. Этот

принцип был обоснован Х. Гюйгенсом [3, гл. 3]. Он вывел закон преломления Снелла [3, гл. 3]. Далее Л. Эйлер в [4] и [5] предложил самую первую форму этого принципа в механике: траектория падающего тела осуществляет минимум $m \int v dq$, где m -масса, v -скорость, а dq есть элемент траектории. Ж. Лагранж переписал этот интеграл как принцип минимума интеграла от удвоенной кинетической энергии по времени для консервативной системы [6]. Решающий шаг сделал К. Якоби [1, лекция 6]. Согласно его формулировке траектория консервативной системы удовлетворяет выражению $\delta \int \sqrt{2(E - U)} dq = 0$.

История развития этого принципа ещё не закончена. Принцип экстремального укороченного действия основной и в современных исследованиях. В последних наиболее релевантных статьях [7]- [17] использующих этот принцип широко представлены самые разные разделы науки: классическая механика голономных и неголономных систем [7]- [10], релятивистская механика [11], [12], механика и электродинамика сплошных сред [13], химия [14], квантовая теория [15], термодинамика и кинетика [16], [17].

Варьируя укороченное действие Якоби по обобщённым координатам, можно получить уравнения траектории, по которой движется материальная точка в постоянном внешнем немагнитном поле [18, формула (1.1.7)], [19, задача к п. 44], [20, п. 2.7]. Поэтому такую механику с полным правом можно назвать траекторной. С точки зрения дифференциальной геометрии уравнения траектории сводятся к обычному второму закону Ньютона, выраженному в проекции на вектор нормали к траектории. Однако, в настоящее время, принцип стационарного укороченного действия в формулировке Якоби (и, следовательно, сама траекторная механика) обладает очевидным недостатком, который настолько значителен, что заставляет признать её неполноценность по сравнению с другими формулировками. Этим изъяном является её ограничение исключительно консервативными системами, например [20]- [24]. Таким образом, область действия траекторной механики изначально суженна по сравнению с широтой трёх перечисленных методов аналитической механики, в которых не накладывается ограничений на замкнутость натуральной системы.

Насколько известно автору, вплоть до настоящего времени не было предпринято значимых попыток исправить создавшееся положение.

Цель статьи: распространить применимость принципа стационарного укороченного действия Якоби на неконсервативные системы. Для этого предварительно необходимо рассмотреть возможные вариации в двух эквивалентных принципах наименьшего действия: в принципе Гамильтона-Остроградского (1 раздел) и в принципе Якоби (2 раздел). При этом для укороченного действия возникает необходимость уточнить правило варьирования. Вопрос заключается в следующем: необходима ли вариация по времени в общей вариации действия и, если необходима, то как она зависит или не зависит вообще от вариации по координатам? Это правило позволяет установить точную формулировку принципа стационарного укороченного действия для неконсервативной системы.

Кроме того, надо найти уравнения движения, соответствующие этому принципу в самом общем случае. Эти уравнения, определяют траекторию натуральной систе-

мы в конфигурационном пространстве во внешних переменных полях.

Такие уравнения для натуральных систем из-за их широкой распространённости могут быть полезны для моделирования множества устройств, например, электронно-оптического типа. Спектр возможных инженерных применений таких уравнений также широк: от робототехники и аэрокосмических приложений до разработки алгоритмов оптимального управления и навигации.

1. Вариации действия в форме Гамильтона-Остроградского

Принцип наименьшего действия был открыт Гамильтоном в 1835 г. и был обобщён для неконсервативных систем Остроградским в 1848 г. Согласно этому принципу, для каждой механической системы существует некий функционал, при вариациях имеющий стационарное значение, который называется действием S , причём

$$S = \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} L dt. \quad (1.1)$$

Какие же вариации действия могут использоваться в этом принципе? Для ответа на этот вопрос вводится расширенное $s+1$ -мерное пространство-время, состоящее из s -мерного конфигурационного пространства и дополнительной оси времени. Тогда для каждой степени свободы можно рассмотреть движение системы в плоскости (q^α, t) . В такой плоскости система движется по некоторому пути $q^\alpha = q^\alpha(t)$, который называется прямым, причём $q^\alpha(t)$ является решением уравнений движения. Любой другой кинематически возможный путь называется *окольным*. Общепринятой вариацией действия является изменение действия при замене прямого пути на мало отличающийся окольный

$$q'^\alpha(t) = q^\alpha(t) + \delta q^\alpha(t), \quad (1.2)$$

лишь бы выполнялось условие $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Здесь $\delta q^\alpha(t)$ -вариация прямого пути — малая функция времени, $q'^\alpha(t)$ —кинематически возможное, но фиктивное решение или окольный путь. Однако замена (1.2) не исчерпывает возможные вариации действия.

Теорема о вариации времени в действии Гамильтона-Остроградского (Паус [25, с. 305]). Между начальным положением q_1 в момент t_1 и конечным положением q_2 в момент t_2 натуральная система движется таким образом, чтобы действие S определённое по Гамильтону - Остроградскому и равное (1.1) имело стационарное значение не только при произвольной малой вариации координат системы (1.2), но и при любой замене истинного времени t , за которое система достигает истинного положения q на мало отличающееся время

$$t'(q) = t(q) + \delta t(q), \quad (1.3)$$

где q является точкой на истинной траектории системы. Необходимо лишь, чтобы в начале и в конце движения время не изменялось: $\delta t(q_1) = \delta t(q_2) = 0$. В этом случае $\delta S = 0$.

Доказательство. Проварьируем (1.1) по времени. Получим

$$\delta \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} L dt = \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \delta L dt + \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} L d\delta t = \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right) dt + \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} d(L \delta t) - \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \delta t dL \quad (1.4)$$

Полный дифференциал из лагранжиана можно исключить, поскольку на пределах интегрирования $\delta t(q_1) = \delta t(q_2) = 0$. Вариация же скоростей равна

$$\delta \dot{q}^\alpha = \delta \left(\frac{dq^\alpha}{dt} \right) = - \frac{dq^\alpha}{dt^2} d\delta t = - \dot{q}^\alpha \frac{d\delta t}{dt} \quad (1.5)$$

После подстановки этого выражения в (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \delta t dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha d\delta t \right) - \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \right) = \\ &= - \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha \delta t \right) + \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha \right) \delta t dt - \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \right). \end{aligned}$$

Полный дифференциал опять исключаем из подынтегрального выражения. Получим

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha \right) \delta t dt - \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \right) dt = \\ &= \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right) \dot{q}^\alpha \delta t dt = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Эта экономная (поскольку вариация всего одна) версия принципа наименьшего действия также позволяет вывести уравнения Лагранжа, если в дополнение к обсуждаемому принципу предположить, что уравнения движения обязаны выполняться независимо от величины обобщённых скоростей.

Таким образом, в принципе наименьшего действия возможны вариации (1.2) и (1.3). Число возможных независимых вариаций действия должно совпадать с числом измерений конфигурационного пространства-времени, т. е. быть равным $s + 1$.

2. Вариации действия в форме Якоби

Пусть механическая система является натуральной

$$L = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + P_\alpha \dot{q}^\alpha - U. \quad (2.1)$$

Такой наиболее общей структурой функции Лагранжа обладает любая механическая система (например, деформируемое тело с моментом инерции $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ или точечная частица в римановом пространстве $\mu_{\alpha\beta} = m\delta_{\alpha\beta}$) обладающая потенциальной энергией $U = U(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ и потенциальным импульсом $P_\alpha = P_\alpha(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ (термин принадлежит Ч. Киттелю [26, приложение II]). Потенциальный импульс обычно отвечает за взаимодействие системы с магнитным полем, а потенциальная энергия за взаимодействие с электрическим или гравитационным полем. В ранних работах по механике потенциальный импульс не рассматривался. В настоящее время очевидно, что для полноты описания его необходимо включать в лагранжиан. Кроме того, не рассматривалось также необходимое обобщение системы материальных точек на произвольную натуральную систему (2.1). Повторим, поэтому, рассуждения сделанные Лагранжем и Якоби с учётом этих обстоятельств.

Вычислим энергию натуральной системы как функцию координат, скоростей и времени:

$$E = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + U \quad (2.2)$$

Выразим потенциальную энергию в (2.2) через энергию и кинетическую энергию и подставим в (1.1) учитывая (2.1). Получим

$$S = \int \left(\mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + P_\alpha \dot{q}^\alpha - E \right) dt. \quad (2.3)$$

Эту операцию сделал Лагранж. Далее он получил уравнения движения, но его вывод существенно основывался на том факте, что общая энергия системы является известной суммой кинетической и потенциальной энергии. Если же это заранее не предполагать, то в данном интеграле требуется заменить дифференциал времени на элемент траектории системы. Это и проделал Якоби.

Он выразил из равенства (2.2) dt , получив

$$dt = \sqrt{\frac{\mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta}{2(E - U)}} = \frac{dq}{n}, \quad (2.4)$$

где величина

$$n = \sqrt{2(E - U)} \quad (2.5)$$

называется *показателем преломления*, а

$$dq = \sqrt{\mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta} \quad (2.6)$$

есть элемент длины между близкими точками в конфигурационном пространстве.

Далее в получившемся действии он учёл равенство (2.5), а в первом члене произвёл замену времени (2.4). После этого действие приняло следующий вид

$$S = \int \left(\frac{dq^2}{dt} + P_\alpha dq^\alpha - E dt \right) = \int (ndq + P_\alpha dq^\alpha - E dt), \quad (2.7)$$

где элемент dq удовлетворяет равенству (2.6). Действия в форме Гамильтона-Остроградского (1.1) и Якоби (2.7) полностью эквивалентны. Если это необходимо, то выполняя все рассуждения в обратном порядке из действия в форме Якоби (2.7) можно восстановить действие в форме (1.1). Поэтому должны быть равносильны и соответствующие принципы стационарного действия. При этом энергию будем считать функцией только времени.

Какие же вариации в действии в форме (2.7) можно использовать? Возможна вариация трёх типов переменных: энергии $E(t)$, s координат и времени. Поскольку энергия варьируется независимо (как показано в [19, п. 44]), то на координаты и время остаётся всего лишь s вариаций. Имеются две возможности: первая заключается в том, что время вообще не должно варьироваться, а варьируются только s координат. Однако в действии Лагранжа (2.3) время варьируется, что было установлено ещё в [27]. Следовательно, остаётся вторая возможность: в общем случае необходимо варьировать координаты и время вместе, но вариация времени δt не является независимой от вариации координат δq^α .

Выясним как связана вариация времени с вариацией координат. Прежде всего заметим, что при вариации энергии координаты и время считаются постоянными; наоборот, при вариации координат и времени энергия не варьируется. Другими словами, это правило варьирования означает, что при переходе от прямого пути к окольному энергия должна быть постоянной (по этому поводу смотри комментарий 47 к [27]). Поэтому для получения зависимости вариации времени от вариации координат достаточно рассмотреть вариацию элемента траектории системы δq вдоль изоэнергетического прямого пути. Для такой вариации справедливо равенство аналогичное (2.4)

$$\delta t = \frac{\delta q}{n}.$$

Однако вариация элемента траектории есть скалярное произведение касательного вектора и произвольного вектора вариации координат

$$\delta q = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta q} = \mu_{\alpha\beta} \tau^\beta \delta q^\alpha.$$

Следовательно, в общем случае, вариация времени в принципе экстремального действия не является независимой от общей вариации координат, а связана равенством

$$\delta t = \frac{\mu_{\alpha\beta} \tau^\beta}{n} \delta q^\alpha. \quad (2.8)$$

При этом число возможных вариаций в конфигурационном пространстве-времени, как это и должно быть, равно $s + 1$: это s вариаций координат и времени с учётом (2.8) и вариация энергии. Вариация по энергии в (2.7) даёт уже известное равенство (2.4) как показано в [19, формула (44,12)]. Поскольку энергия – известная функция времени, последний член в подынтегральном выражении (2.7) есть полный дифференциал некоторой функции времени и его можно из полного действия исключить. Поэтому действие (2.7) можно укоротить и выполняется

Теорема (о стационарности укороченного действия в форме Якоби).

Между начальным положением q_1 в момент t_1 и конечным положением q_2 в момент t_2 натуральная система движется таким образом, чтобы укороченное действие в форме Якоби

$$\tilde{S} = \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} (ndq + P_\alpha dq^\alpha) \quad (2.9)$$

принимало стационарное значение

$$\delta\tilde{S} = 0$$

при совокупности произвольных вариаций координат и зависящей от них вариации времени (2.8), лишь бы выполнялось граничное условие $\delta q(q_1) = \delta q(q_2) = 0$.

То обстоятельство, что варьирование времени в действии (2.9) ранее не делалось есть простое следствие необоснованно установленного ограничения этого принципа консервативными системами. Вследствие этого внешние поля предполагались постоянными. В общем же случае, как было показано, в (2.9) требуется совместная вариация координат и времени.

3. Следствие стационарности укороченного действия

Выясним теперь как же механическая система должна двигаться, чтобы действие в форме Якоби при малых вариациях не изменялось? Справедлива

Теорема. Следствием стационарности укороченного действия в форме Якоби (2.9) являются уравнения

$$\begin{aligned} n^2 \mu_{\gamma\beta} \frac{d\tau^\beta}{dq} &= n \frac{\partial n}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + n \left(\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\beta} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t} \right) \tau^\beta + \\ &+ \left[\frac{n^2}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) + \mu_{\gamma\beta} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} - n \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} \right) \right] \tau^\alpha \tau^\beta + \\ &+ \frac{n}{2} \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \mu_{\epsilon\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\epsilon. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Варьируя укороченное действие (2.9), получим

$$\delta\tilde{S} = \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} (\delta ndq + n\delta dq + \delta P_\alpha dq^\alpha + P_\alpha \delta dq^\alpha) = 0. \quad (3.2)$$

Первый подынтегральный член в этом выражении есть

$$\delta ndq = \left(\frac{\partial n}{\partial q^\gamma} \delta q^\gamma + \frac{\partial n}{\partial t} \delta t \right) dq \quad (3.3)$$

Вариация квадрата элемента длины равна

$$\delta dq^2 = 2dq\delta dq = \delta \left(\mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \right) = \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \delta q^\gamma \right) \tau^\alpha \tau^\beta dq^2 + 2\mu_{\gamma\beta} \tau^\beta dq d\delta q^\gamma.$$

Отсюда

$$\delta dq = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \delta q^\gamma \right) \tau^\alpha \tau^\beta dq + \mu_{\gamma\beta} \tau^\beta d\delta q^\gamma.$$

Поэтому второй подынтегральный член равен

$$\begin{aligned} n\delta dq &= \frac{n}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \delta q^\gamma \right) \tau^\alpha \tau^\beta dq + n\mu_{\gamma\beta} \tau^\beta d\delta q^\gamma = \frac{n}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \delta q^\gamma \right) \tau^\alpha \tau^\beta dq + \\ &+ d \left(n\mu_{\gamma\beta} \tau^\beta \delta q^\gamma \right) - n\mu_{\gamma\beta} \frac{d\tau^\beta}{dq} \delta q^\gamma dq - \frac{d(n\mu_{\gamma\beta})}{dq} \tau^\beta \delta q^\gamma dq. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вычислим последний член в выражении (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{d(n\mu_{\gamma\beta})}{dq} \tau^\beta \delta q^\gamma dq &= \frac{1}{n} \frac{\partial(n\mu_{\gamma\beta})}{\partial t} \tau^\beta \delta q^\gamma dq + \frac{\partial(n\mu_{\gamma\beta})}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta \delta q^\gamma dq = \\ &= \tau^\beta \left(\frac{\mu_{\gamma\beta}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t} \right) \delta q^\gamma dq + \left(\mu_{\gamma\beta} \tau^\alpha \tau^\beta \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} + n \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta \right) \delta q^\gamma dq. \end{aligned}$$

Подставляя в (3.4), получим

$$\begin{aligned} n\delta dq &= \frac{n}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \delta q^\gamma \right) \tau^\alpha \tau^\beta dq + d \left(n\mu_{\gamma\beta} \tau^\beta \delta q^\gamma \right) - n\mu_{\gamma\beta} \frac{d\tau^\beta}{dq} \delta q^\gamma dq - \\ &- \tau^\beta \left(\frac{\mu_{\gamma\beta}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t} \right) \delta q^\gamma dq - \left(\mu_{\gamma\beta} \tau^\alpha \tau^\beta \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} + n \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta \right) \delta q^\gamma dq. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Третий подынтегральный член в (3.2) после вариации равен

$$\delta P_\alpha dq^\alpha = \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} \tau^\alpha \delta t dq + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} \tau^\alpha \delta q^\gamma dq. \quad (3.6)$$

Четвёртый член представим в виде

$$\begin{aligned} P_\alpha d\delta q^\alpha &= d(P_\alpha \delta q^\alpha) - dP_\gamma \delta q^\gamma = d(P_\alpha \delta q^\alpha) - \left(\frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\beta} dq^\beta \right) \delta q^\gamma = d(P_\alpha \delta q^\alpha) - \\ &- \left(\frac{1}{n} \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\beta} \tau^\beta \right) \delta q^\gamma dq. \end{aligned} \quad (3.7)$$

После подстановки (3.3), (3.5) - (3.7) в (3.2) раскроем скобки и соберём все множители при δt и δq^γ . Вариация укороченного действия принимает следующий вид

$$\delta \tilde{S} = \left[\left(n\mu_{\beta\gamma} \tau^\beta + P_\gamma \right) \delta q^\gamma \right] \Big|_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} + \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \left[-n \mu_{\beta\gamma} \frac{d\tau^\beta}{dq} + \left(\frac{\partial n}{\partial q^\gamma} + \frac{1}{n} \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \right) - \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\mu_{\beta\gamma}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{\beta\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\beta} - \frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma} \right) \tau^\beta + \frac{n}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} \right) \tau^\alpha \tau^\beta \Big] \delta q^\gamma dq + \\
& + \int_{q_1, t_1}^{q_2, t_2} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} \tau^\alpha + \frac{n}{2} \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta \right] \delta t dq = 0. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Первый проинтегрированный член в вариации действия в начале и в конце траектории обращается в ноль. Подставим в оставшееся выражение значение вариации времени (2.8), вследствие произвольности вариации δq^γ приравняем нулю подынтегральное выражение и заметим, что два члена с производной $\partial n / \partial t$ взаимно сокращаются. Далее соберём все члены с одинаковыми степенями касательного вектора в правой части равенства. После этого умножим получившееся равенство на $-n$. В итоге получим уравнения (3.1). ■

Эти уравнения можно переписать в более привычной форме, если учесть (2.5)

$$\begin{aligned}
2(E - U) \mu_{\gamma\beta} \frac{d\tau^\beta}{dq} = & - \frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \sqrt{2(E - U)} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \right) \tau^\alpha + \\
& + \left[(E - U) \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) + \mu_{\gamma\beta} \left(\frac{\partial U}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} \right) \right] \tau^\alpha \tau^\beta + \\
& + \frac{\sqrt{2(E - U)}}{2} \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \mu_{\epsilon\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\epsilon. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Обсуждение

Уравнения (3.1) или (3.9) являются уравнениями траектории натуральной системы в конфигурационном пространстве с метрическим тензором $\mu_{\alpha\beta}$.

Данные уравнения второго порядка и должны иметь $2s$ произвольных постоянных: s начальных координат и s компонент начального касательного вектора. Однако независимых компонент из них только $s-1$, поскольку касательный вектор является единичным. Эти уравнения не чисто геометрические, поскольку поля $U(q, t)$, $P_\alpha(q, t)$, $\mu_{\alpha\beta}(q, t)$ зависят от времени. Тем не менее они допускают численное решение, например известным методом Рунге-Кутты 4 порядка. Нетрудно видеть, что для случая материальной точки ($\mu_{\alpha\beta} = m\delta_{\alpha\beta}$) в постоянном немагнитном поле ($\partial P_\gamma / \partial t = 0$, $\partial P_\gamma / \partial q^\beta = 0$) полученные уравнения траектории совпадают с уравнением эйконала [18, формула (1.1.7)]

$$\mu_{\gamma\beta} \frac{d\tau^\beta}{dq} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial q^\gamma} - \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta \right)$$

(смотри также [19, задача к п. 44], [20, п. 2.7.]).

Геометрические свойства траектории в конфигурационном пространстве есть, согласно (3.9), следствие переменных внешних воздействий. Эти уравнения не чисто геометрические, поскольку поля U , P_α , $\mu_{\alpha\beta}$ могут зависеть от времени. Такие уравнения называются *неавтономными* [28]. Несмотря на то, что эти уравнения

в неявной форме включают в себя время, это не исключает их из области дифференциальной геометрии. Наоборот, такая временная зависимость дополняет геометрические свойства натуральных систем разного рода нелинейными эффектами. В качестве примера существования переменной времени в геометрических уравнениях можно упомянуть уравнение геодезической в кривом пространстве-времени, которое включает в себя неявно время [29].

Уравнения траектории (3.9) имеют сложный вид. Очень вероятно, что для аналитического решения этих уравнений потребуются сложные методы дифференциальной геометрии и анализа. Решение этого дифференциального уравнения, описывающего изменение касательного вектора, зависит от начальных условий, внешних полей и свойств самой натуральной системы (метрического тензора конфигурационного пространства $\mu_{\alpha\beta}$). Начальными условиями являются начальный касательный вектор τ_0^α , начальные координаты q_0^α и начальный момент времени t_0 . Численным методом, который может быть использован для нахождения решения является популярный и точный метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4).

Если внешние поля достаточно плавно и медленно изменяются в пространстве и времени, то можно ожидать, что решение существует и является единственным в некоторой окрестности начального положения системы. Если же это условие не выполняется (то есть возникают сингулярности или особенности), то в таких случаях могут потребоваться специальные методы для обеспечения стабильности и точности решения.

Хотя уравнения (3.9) были получены в идеализированном случае в них легко ввести в качестве дополнительного члена в первое слагаемое правой части силу трения или силу сопротивления движению.

Для применения уравнений требуется знание точной модели системы, включая её энергию, метрический тензор, потенциальную энергию и потенциальный импульс. Получение этих данных может быть непростой задачей, особенно для сложных систем. В целом, уравнения траектории, полученные в статье, предоставляют собой мощный инструмент для моделирования и оптимизации реальных инженерных систем.

Заключение

Метод Якоби позволяет рассматривать натуральные системы не только известными методами Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона-Якоби, но и с наглядной геометрической точки зрения. Основой траекторной механики Якоби является известный принцип экстремального укороченного действия. В данной статье этот принцип был несколько уточнён и применён к неконсервативным системам. Оказалось, что в общей вариации действия время должно варьироваться в зависимости (2.8) от вариации координат.

Главной задачей механики Якоби является определение траектории системы. Соответствующие дифференциальные уравнения второго порядка на многообразии (3.9) для натуральной системы, движущейся под действием переменных внешних

полей, являются строгим следствием обсуждавшегося принципа. В настоящее время эти уравнения решаются только численными методами. Другой задачей является вычисление положения механической системы на траектории в любой момент времени: это условие Якоби (2.4) позволяющее сопоставить данную точку кривой определённому моменту времени.

Список литературы

1. Якоби К. Лекции по динамике. Ленинград-Москва, 1936.
2. Ферма П. Синтез для рефракции. в Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. Под ред. Полак Л. С.— Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит. , 1959. – 932 с.
3. Гюйгенс Х. Трактат о свете, в котором объяснены причины того, что с ним происходит при отражении и при преломлении, в частности при странном преломлении исландского кристалла. Москва, Либроком, 2010. -176 с.
4. Эйлер Л. Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов. в Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. Под ред. Полак Л. С.— Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит. , 1959. – 932 с.
5. Эйлер Л. Соображения по поводу некоторых общих законов природы, которые наблюдаются в действии любых сил. в Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. Под ред. Полак Л. С.— Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит. , 1959. – 932 с.
6. Лагранж Ж. Применение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики. в Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. Под ред. Полак Л. С. — Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит. , 1959. – 932 с.
7. Tsiganov A. V. Integrable Systems on a Sphere, an Ellipsoid and a Hyperboloid. Regul. Chaot. Dyn., 2023, 28, pp. 805–821.<https://doi.org/10.1134/S1560354723520088>
8. Vergel A., Losada J. C., Benito R. M., Borondo F. Chaos indicator and integrability conditions from geometrodynamics. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2023, v. 121, p. 107197.<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107197>
9. Baranzini, S., Canneori, G. M. Chaotic Phenomena for Generalised N-centre Problems. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Arch Rational Mech Anal., 2024, 248, 39. <https://doi.org/10.1007/s00205-024-01981-1>
10. Lucia U., Grisolia G. Non-holonomic constraints: Considerations on the least action principle also from a thermodynamic viewpoint. Results in Physics, 2023, Volume 48, 106429.<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106429>.
11. Boscaggin A., Dambrosio W., Muñoz-Hernández E. A Maupertuis-type principle in relativistic mechanics and applications. Calculus of Variations. Var., 2023, v. 62, no. 95.<https://doi.org/10.1007/s00526-023-02430-9>.

12. Quan Le Thien, McKay S., Pynn R., Ortiz G. Spin-textured neutron beams with orbital angular momentum. *Phys. Rev. B*, 2023, v. 107, iss. 13, p. 134403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.107.134403>.
13. Romano G., Barretta R. Advancements in Continuum Mechanics and Electrodynamics by a spacetime geometric approach. *Acta Mech.*, 2024, 235, 4357–4399. <https://doi.org/10.1007/s00707-024-03931-0>
14. Gao Y., Zhou Yu. Hamilton Dynamics in Chemical Reactions: the Maupertuis Principle, Transition Paths and Energy Landscape. *Commun. Math. Anal. Appl.*, 2023, Vol. 2, No. 3, pp. 245-288. <https://doi.org/10.4208/cmaa.2023-0003>
15. Wen Y. L., Wang Y., Tian L. M. et al. Demonstration of the quantum principle of least action with single photons. *Nat. Photon.*, 2023, 17, p. 717–722. <https://doi.org/10.1038/s41566-023-01212-1>
16. Pires F. S. T. de L., da Rosa A. W., Lima N. W., Chaib J. P. M. de C. Louis de Broglie's discussion on the equivalence between relativistic principles of entropy maximization and least action. *Revista Brasileira De Ensino De Física*, 2023, 45, e20230074. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0074>
17. Kennedy I. R., Hodzic M. Applying the Action Principle of Classical Mechanics to the Thermodynamics of the Troposphere. *Appl. Mech.* 2023, 4, p. 729–751. <https://doi.org/10.3390/applmech4020037>
18. Holm D.D. *Geometric Mechanics. Part I: Dynamics and Symmetry*. World Scientific, 2008, 354 pp.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. Москва: Физматлит, 2004.
20. Biro T. S. *Variational Principles in Physics from Classical to Quantum Realm*. Springer. 2023. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-27876-1>
21. Ланцош К. Вариационные принципы механики. - Москва: Физматгиз, 1965. -408 с.
22. Полак Л. С. Вариационные принципы механики: Их развитие и применения в физике. Москва: Либроком, 2010
23. Basdevant J.-L. *Variational Principles in Physics*. Springer Nature Switzerland, 2023. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-21692-3>
24. Cline D. *Variational Principles in Classical Mechanics*. Rochester: University of Rochester River Campus Libraries, 2021.
25. Routh E. J. *An Elementary Treatise on the Dynamics of a system of Rigid Bodies*. Лондон. 1877. <https://archive.org/details/elementarytreati00rout>

26. Киттель Ч. Введение в физику твёрдого тела. Москва: Наука, 1978
27. Родригес Б. О. О применении принципа наименьшего действия к составлению уравнений движения в независимых переменных. в Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. Под ред. Полак Л. С. — Москва: Гос. изд-во физ. -мат. лит. , 1959. — 932 с.
28. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: МЦНМО, 2012. -344 с.
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. Москва: Наука, -2003. -536 с.