Динамика частиц в гравитационном поле

В. Б. Беляев,

E-mail: wbelayev@yandex.ru

Динамика частиц в гравитационном поле исследуется с использованием механики Лагранжа. Получены динамические уравнения, включающие скорость передачи энергии и импульса гравитационному полю. Рассмотрено движение частиц в поле Шварцшильда и в случае слабой гравитации определена пассивная гравитационная масса фотона и материальной частицы при условии, что ее потенциальная энергия в гравитационном поле мала по сравнению с ее кинетической энергией. Найдена активная гравитационная масса для частного случая системы из двух одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях

Ключевые слова: механика Лагранжа, геодезическая линия, вариационные методы, гравитационная масса

1. Введение.

В общей теории относительности (ОТО) определение импульсов материальных и световых частиц, движущихся в криволинейном пространстве-времени, и сил, действующих на них, имеет целью найти релятивистские поправки к теории тяготения Ньютона для слабого гравитационного поля. Если в качестве составляющих 4-вектора силы, действующей на материальную частицу единичной массы, рассматривать вторые производные координат по пути [1-3], то в ньютоновском пределе величина, играющая роль пассивной гравитационной массы, оказывается зависящей от направления движения частицы [4]. Это же имеет место и для фотона, если с 4-силой отождествлять вторые производные координат по аффинному параметру.

Другим подходом является выбор лагранжиана частицы, определение обобщенных сил как его частных производных по координате в соответствии с механикой Лагранжа. [5-8]. В ОТО физические скорости частиц ставятся в соответствие компонентам контравариантного вектора 4-скорости. Поэтому с физической силой связывается вектор с верхними индексами, ассоциированный с вектором обобщенных сил. В этом случае пассивная гравитационная масса как материальной, так и световой частиц оказывается независящей от направления их движения. Энергией и импульсами частиц считаются компоненты контравариантного 4-вектора энергии-импульса, как это делается в [1] для частицы, движущейся в пространстве-времени Миньковского.

В доказательстве Фока движения света по геодезическим [9] в качестве гамильтониана берется временная составляющая ковариантного вектора 4-скорости. Применение основанного на лагранжевой механике вариационного принципа стационарного интеграла энергии (ВП1) к движению свето-подобной частицы в гравитационном поле [5-8] не приводит к нарушению изотропности светового пути. В [10] был предложен обобщенный принцип Ферма, в котором используется вариация интеграла временной компоненты вектора 4-скорости, дающий траекторию движения света, совпадающую с геодезической.

2. Уравнения Лагранжевой механики

В общей теории относительности рассматривается четырехмерное псевдориманово пространство-время с координатами x^i и метрическими коэффициентами g_{ij}, интервал в котором записывается в виде

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \ . \tag{2.1}$$

Обозначим $u^i = dx^i / d\mu$ вектор 4-скорости частицы, где μ - изменяемый параметр. Получим уравнения ее динамики в общем виде.

Лагранжиану частицы L соответствуют ковариантные обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} \tag{2.2}$$

и обобщенные силы

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}. \tag{2.3}$$

Движение частицы определяется принципом стационарного действия Гамильтона $\delta S = 0$ при

$$S = \int_{\mu_0}^{\mu_1} L d\mu \,, \tag{2.4}$$

где μ_0 , μ_1 - значения параметра μ в точках, которые соединяет искомая траектория движения. Условие экстремума S приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\mu}\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{2.5}$$

С учетом выражений для обобщенных импульсов (2.2) и сил (2.3) эти уравнения переписываются в виде

$$\frac{dp_\lambda}{d\mu} - F_\lambda = 0 \,. \tag{2.6}$$

Лагранжиан выбирается так, что с физическими энергией и импульсом частицы связываются контравариантные импульсы

$$p^j = g^{j\lambda} p_\lambda \,. \tag{2.7}$$

Гравитационной силе, действующей на нее, ставится в соответствие ассоциированный (2.3) вектор

$$F^l = g^{l\lambda} F_\lambda \tag{2.8}$$

Переходя к ним в уравнениях (2.6), находим

$$g_{\lambda i} F^i = g_{\lambda i}\frac{dp^i}{d\mu} + \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i \,. \tag{2.9}$$

Умножив эти уравнения на $g^{k\lambda}$ и суммируя по дважды встречающемуся индексу λ, получаем

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i. \tag{2.10}$$

Наличие второго члена в правой части отражает то, что в гравитационном поле сохраняется не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем (см. [1] § 96). Его компоненты выражают скорость изменения приобретенных гравитационным полем энергии и импульса при движении в нем частицы

$$\frac{d\vec{p}^k}{d\mu} = g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j} u^j p^i \cdot . \tag{2.11}$$

Интегрирование этой величины по μ дает энергию и импульс, полученных гравитационным полем на некотором промежутке ее траектории. В результате уравнение (2.10) может быть записано в виде

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + \frac{d\vec{p}^k}{d\mu}. \tag{2.12}$$

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что сила, действующая на частицу равна по величине и противоположна по знаку силе, действующей источник гравитации со стороны частицы. Это эквивалентно выполнению третьего закона Ньютона.

3. Динамика материальной частицы

Рассмотрим динамику материальной частицы. Лагранжиан материальной частицы с массой покоя m следующий

$$L_m = cm\sqrt{g_{ij}u^i u^j}, \tag{3.1}$$

Для материальных частиц параметр μ совпадает с интервалом: $\mu=s$. С физическими энергией и импульсом частицы связываются контравариантные импульсы (2.7), принимающие вид

$$p^i = cmu^i. \tag{3.2}$$

Такой выбор обусловлен тем, что только в этом случае компоненты 4-вектора импульса совпадают по знаку с компонентами вектора 4-скорости. Первая компонента определяет энергию частицы

$$E = cp^1. \tag{3.3}$$

Гравитационная сила, действующая на материальную частицу, ввиду (2.8) определяется формулой

$$Q^k = cF^k = \frac{1}{2}c^2 m g^{k\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j, \tag{3.4}$$

Согласно общей теории относительности движение материальной частицы определяется уравнениями геодезической линии. Для материальной частицы при лагранжиане (3.1) они могут быть получены из принципа стационарного действия Гамильтона [9] и тождественны уравнениям (2.6).

4. Материальная частица в поле Шварцшильда

Гравитационное поле сферического тела вне его источника в сферических координатах $x^i = (ct, r, \theta, \varphi)$ описывается метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{4.1}$$

где постоянная

$$\alpha = \frac{2\gamma M}{c^2} \tag{4.2}$$

задается гравитационной постоянной γ и гравитационной массой тела M.

Получим вектор 4-скорости материальной частицы, движущейся в нем. Уравнения (2.6) для времени-подобного интервала при лагранжиане (3.1) для i=1,3,4 примут вид

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)u^1\right] = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2u^3\right)-r^2\sin\theta\cos\theta u^{42}=0\,, \qquad (4.4)$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\sin^2\theta\, u^4\right)=0 \qquad (4.5)$$

Дополнительно из выражения для метрики (4.1) следует

$$\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(u^1\right)^2-\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\left(u^2\right)^2-r^2\left[\left(u^3\right)^2+\sin^2\theta\left(u^4\right)^2\right]=1 \qquad (4.6)$$

Из уравнения (4.3) находим

$$\frac{cdt}{ds}=\eta\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \qquad (4.7)$$

где η - постоянная. Выберем систему координат так, что движение частицы происходит в плоскости $\theta=\frac{\pi}{2}$, что дает

$$\frac{d\theta}{ds}=0\,. \qquad (4.8)$$

Тогда (4.5) приносит

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{A}{r^2}\,, \qquad (4.9)$$

где A - постоянная. Подставляя (4.7)-(4.9) в (4.6), получаем

$$\frac{dr}{ds}=\pm\sqrt{\eta^2-\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\,. \qquad (4.10)$$

Деление (4.10) на (4.7) дает

$$\dot{r}=\pm c\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2}\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\,. \qquad (4.11)$$

Для мировых линий с неограниченным r значение η определяется величиной радиальной скорости на бесконечности $\dot{r}=V$ и составит

$$\eta_1=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}\,. \qquad (4.12)$$

Если траектория свободно движущейся частицы такова, что радиальная координата имеет конечное экстремальное значение r_{ext}, то уравнение (4.11) ввиду условия $\dot{r}(r_{ext})=0$ приносит

$$\eta_2=\left[\left(1+\frac{A^2}{r_{ext}^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r_{ext}}\right)\right]^{1/2} \qquad (4.13)$$

Для неограниченных по радиусу траекторий, имеющих ось симметрии, выполняется $\eta_1=\eta_2$.

Подставляя найденные компоненты вектора 4-скорости в выражение для вектора гравитационной силы (3.4), действующей на материальную частицу, находим его единственную ненулевую компоненту

$$Q^2=\frac{c^2m\alpha}{r^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta^2 r}{r-\alpha}\right)+\frac{cA^2}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right). \qquad (4.14)$$

При слабой гравитации, неограниченном радиальном движении ($A=0,\eta=\eta_1$) и $\alpha/r<<V^2/c^2$ она преобразуется к виду

$$\tilde{Q}^2 = -\frac{c^2 m\alpha}{2r^2}\left(\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2}\right). \tag{4.15}$$

Однако при рассмотрении нерадиального движения ($A \neq 0$) во избежание появления фиктивной составляющей силы, обусловленной использованием сферической системы координат, следует использовать изотропную форму метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (ct,x,y,z). К ней можно перейти с помощью преобразования

$$r = \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r} \ , \tag{4.16}$$

$$x = \bar{r}\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \bar{r}\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \bar{r}\sin\theta\,, \tag{4.17}$$

которое приносит

$$ds^2 = c^2\left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4 (dx^2+dy^2+dz^2). \tag{4.18}$$

Будем рассматривать движение в плоскости z=0 и искать силу, действующую на частицу, в точке с координатами (ct,x,0,0), соответствующими θ=φ=0 в сферической системе отсчета. Получаемым при преобразованиях координат в плоскости

$$x = \bar{r}\cos\varphi, \qquad y = \bar{r}\sin\varphi \tag{4.19}$$

в рассматриваемой точке соответствуют ненулевые пространственные компоненты вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат

$$u_r^2 = \frac{dx}{d\mu} = \frac{d\bar{r}}{d\mu}, \qquad u_r^3 = \frac{dy}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\mu}\bar{r} \tag{4.20}$$

при μ=s для материальной частицы. Из преобразования (4.16) следует

$$dr = \left(1-\frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)d\bar{r}. \tag{4.21}$$

Ввиду ковариантности уравнений геодезических можно перейти от их решений для метрики Шварцшильда в сферических координатах (4.7)-(4.10) к решению для метрики (4.18), сделав в них преобразование (4.16)-(4.17) и подставив в (4.20). В результате находим ненулевые компоненты вектора 4-скорости:

$$u_r^1 = \eta\left(\frac{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 , \tag{4.22}$$

$$u_r^2 = \pm\frac{1}{\left(1-\dfrac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)}\left[\eta^2 - \left(1+\frac{A^2}{\bar{r}^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right)\left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2\right]^{1/2} , \tag{4.23}$$

$$u_r^3 = \frac{A}{\bar{r}\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4} \tag{4.24}$$

Подставляя полученные компоненты вектора 4-скорости в выражение для силы (3.4) получаем единственную ее ненулевую компоненту

$$Q^2_{rect} = -\frac{c^2 m\alpha}{2\overline{r}^2\left(1+\frac{\alpha}{4\overline{r}}\right)^3}\left(\eta^2\left[\left(1-\frac{\alpha}{4\overline{r}}\right)^{-3}+\left(1-\frac{\alpha}{4\overline{r}}\right)^{-2}\right]-\left(1+\frac{\alpha}{4\overline{r}}\right)^{-2}\right). \qquad (4.25)$$

Это выражение не зависит от постоянной *A*, определяемой угловой скоростью (4.9), в случае частицы, движущейся по неограниченной мировой линии, чему соответствует постоянная η (4.12) При слабой гравитации и $\alpha / r << V^2 / c^2$ компонента силы Q^2_{rest} совпадет с выражением для силы в сферических координатах при радиальном движении (4.15). Оно является законом гравитации Ньютона при пассивной гравитационной массе материальной частицы

$$m_p^g = m\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2}. \qquad (4.26)$$

Однако в общем случае ввиду нековариантности вектора силы (3.4) при преобразованиях координат (4.16), (4.17) в формуле для силы в поле Шварцшильда в сферических координатах (4.14) полученное выражение не совпадет с (4.25) и для радиального движения частицы. В качестве примера рассмотрим гравитационную силу, действующую на неподвижную материальную частицу. Этому случаю соответствуют постоянные $A=0, \eta=\eta_2$ и расстояние от центра $r=r_{ext}$. Ненулевая компонента вектора силы (4.14) ввиду (4.13) составит

$$Q^2 = -\frac{c^2\alpha m}{2r^2}. \qquad (4.27)$$

Полученная для метрики в изотропных прямоугольных координатах компонента (4.25) при подстановке (4.16) примет вид

$$Q^2_{rest} = -\frac{c^2 m\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2\overline{r}}\right)}{2\overline{r}^2\left(1-\frac{\alpha}{4\overline{r}}\right)\left(1+\frac{\alpha}{4\overline{r}}\right)^6}. \qquad (4.28)$$

При подстановке (4.16) без учета малых величин порядка выше α / r она может быть записана в виде

$$Q^2_{rest} = -\frac{c^2 m\alpha}{2r^2}\left(1+\frac{\alpha}{4r}\right). \qquad (4.29)$$

Поэтому об аналогии с ньютоновской гравитацией и пассивной гравитационной массе материальной частицы можно говорить только в пределе слабой гравитации.

5. Частный случай системы, состоящей из двух движущихся тел

Рассмотрим систему из двух тел A и B с одинаковой массой *M*. Предполагаем, что они движутся в противоположных направлениях в системе отсчета $K' = (t', x', y', z')$ с одинаковыми по величине скоростями *v* и -*v*. Будем считать, что в момент времени $t' = 0$ их расположение таково, что для определения создаваемой этой системой гравитации в рассматриваемой области расстоянием δr между ними можно пренебречь.

При слабой гравитации метрика (4.18) в приближенном виде становится следующей

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{\overline{r}}\right)dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{\overline{r}}\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \qquad (5.1)$$

Применим к ней преобразования Лоренца

$$t=\frac{t'+\frac{\tilde v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\tilde v^2}{c^2}}},\ x=\frac{x'+\tilde v t'}{\sqrt{1-\frac{\tilde v^2}{c^2}}},\ y=y',\ z=z' \tag{5.2}$$

при условии $\alpha/\delta r << \tilde v^2/c^2$. Оно означает, что искажения пространства и времени, вызываемые наличием Лоренц-фактора будут на порядок больше того, что вызывает гравитация. Поэтому влияние гравитации на преобразования Лоренца в данном случае можно считать несущественным и применять их к метрике (5.1). Преобразование координат при

$$\bar r'=\sqrt{\left(\frac{x'+\tilde v t'}{\sqrt{1-\frac{\tilde v^2}{c^2}}}\right)^2+y'^2+z'^2} \tag{5.3}$$

приносит

$$ds^2=c^2\left(1-\frac{c^2+\tilde v^2}{c^2-\tilde v^2}\frac{\alpha}{\bar r'}\right)dt'^2-\frac{4c^2\tilde v}{c^2-\tilde v^2}\frac{\alpha}{\bar r'}dt'dx'-\left(1+\frac{c^2+\tilde v^2}{c^2-\tilde v^2}\frac{\alpha}{\bar r'}\right)dx'^2-\left(1+\frac{\alpha}{\bar r'}\right)(dy'^2+dz'^2). \tag{5.4}$$

В системах отсчета K_A, K_B, связанных с рассматриваемыми телами, гравитация каждого из них в отдельности описывается в соответствующей системе метрикой (5.1). Перейдем от этих систем к системе координат K', с помощью преобразований Лоренца при

$$\tilde v=v \tag{5.5}$$

и

$$\tilde v=-v. \tag{5.6}$$

Если представить метрические коэффициенты в виде $g_{ij}=\eta_{ij}+h_{ij}$, где η_{ij} - соответствуют метрике Миньковского, то в случае слабой гравитации при рассмотрении общего поля, создаваемого n подсистемами [1] с метрическими коэффициентами $g_{ij}^n=\eta_{ij}+h_{ij}^n$, выполняется соотношение $h_{ij}\approx\sum_n h_{ij}^n$. Суммируя поля, получаемые после подстановок (5.5) и (5.6) в метрику (5.4), находим интервал пути для времени близком к $t'=0$ в системе из двух тел:

$$ds^2=c^2\left(1-\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\bar r'}\right)dt'^2-\left(1+\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\bar r'}\right)dx'^2-\left(1+\frac{\alpha_1}{\bar r'}\right)(dy'^2+dz'^2) \tag{5.7}$$

при $\alpha_1=2\alpha$.

Получим ускорение материальной частицы в момент времени, когда она покоится в системе отсчета K'. Будем использовать уравнения геодезических

$$\frac{du^i}{ds}+\Gamma^i_{kl}u^k u^l=0, \tag{5.8}$$

где $\Gamma^l_{ij}=\frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ - символы Кристоффеля. Для пространственных координат с индексами k=2,3,4 находим

$$\frac{du^k}{ds}=\frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}(u^1)^2. \tag{5.9}$$

При умножении на коэффициент c^2m правая часть этого выражения совпадет с гравитационной силой (3.4), так как неподвижная частица не передает импульс (2.11) гравитационному полю:

$$\frac{d\vec{p}^k}{ds} = 0. \qquad (5.10)$$

Уравнения (5.9) без учета малых величин большего порядка приносят координатные ускорения

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}\frac{c^2 x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\bar{r}'^3},\ \ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2 y'\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\bar{r}'^3},\ \ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z'\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\bar{r}'^3}. \qquad (5.11)$$

в момент времени $t' = 0$. Если пространственный радиус-вектор частицы перпендикулярен линии движения тел ($x' = 0$), то полученный результат соответствует ньютоновской гравитации при активной гравитационной массе материальной частицы

$$M_1^g = M_1\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}, \qquad (5.12)$$

где $M_1 = 2M$. При v=V эта формула тождественна соотношению между массой покоя частицы и ее пассивной гравитационной массой (4.26). Наличие Лоренц-фактора в качестве коэффициента при координате x' обусловлено тем, что движение частицы рассматривается в системе отсчета, относительно которой источники гравитации движутся вдоль этой координаты.

6. Принцип стационарного интеграла энергии фотона

Для определения динамики фотона в гравитационном поле будем использовать ВП1 [5-8]. Рассмотрим интервал в псевдоримановом пространстве-времени с метрическими коэффициентами $\tilde{g}_{ij}$:

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij}dx^i dx^j, \qquad (6.1)$$

где $\tilde{g}_{11} = \rho^2 g_{11}$, $\tilde{g}_{1p} = \rho g_{1p}$, $\tilde{g}_{pq} = g_{pq}$ при p,q=2,3,4. Движению света соответствует условие ds=0. При $g_{11} \neq 0$ переменная ρ задается выражением

$$\rho = \frac{-g_{1p}u^p + \sigma\sqrt{(g_{1p}g_{1q} - g_{11}g_{pq})u^p u^q}}{g_{11}u^1}, \qquad (6.2)$$

где σ принимает значения ± 1, а 4-скорости u^i определяются при условии, что μ является аффинным параметром Далее будут рассматриваться вариации функции (6.2) вблизи ее значения ρ=1, которому соответствуют метрические коэффициенты $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$. Если $g_{11} = 0$ и хотя бы для одного p выполняется $g_{1p} \neq 0$, то получим

$$\rho = -\frac{g_{pq}u^p u^q}{2g_{1k}u^1 u^k}, \qquad (6.3)$$

где k принимает значения 2,3,4.

Лагранжиан свободно движущейся частицы берется в виде

$$L = -\rho. \qquad (6.4)$$

Для обоих значений ρ (6.2), (6.3) ковариантные обобщенные импульсы (2.2) и силы (2.3) примут вид

$$p_\lambda = \frac{u_\lambda}{u^1 u_1}, \qquad (6.5)$$

$$F_\lambda = \frac{1}{2u_1 u^1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j . \qquad (6.6)$$

Следует отметить, что величины F_λ формируют вектор, который не является тензором. Выбранный Лагранжиан соответствует соотношению

$$\rho = u^\lambda \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} - L , \qquad (6.7)$$

являющимся интегралом движения [11] и, соответственно, ρ будет энергией системы, объединяющей фотон и гравитационное поле, задаваемое метрикой (2.1).

Уравнения движения находятся из принципа стационарного действия Гамильтона (2.4), которое ввиду (6.4) может быть записано в форме

$$S = -\int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho d\mu \ . \qquad (6.8)$$

Величина ρ ненулевая, ее вариации оставляют интервал светоподобным. Уравнения движения будут уравнениями Эйлера-Лагранжа (2.5).

Контравариантный вектор обобщенных импульсов записывается в виде

$$p^\lambda = \frac{1}{u^1 u_1} u^\lambda . \qquad (6.9)$$

В пространстве Миньковского при аффинном параметре $\mu = ct$ физические энергия и импульс фотона с частотой ν составляют контравариантный 4-вектор импульса $\pi^i = (h\nu / c) u^i$, где h - постоянная Планка. При произвольном аффинном параметре он переписывается в виде

$$\pi^i = \frac{h\nu}{c} \frac{u^i}{u^1} . \qquad (6.10)$$

И для псевдориманова пространства-времени аналогичные энергия и импульс фотона в координатной системе отсчета связываются с контравариантными импульсами. Полагая, что ν_0 - некоторое фиксированное значение частоты фотона, такое, что выполняется $\nu = \nu_0 / u_1$, и сравнивая выражения для π^i и p^i, получаем

$$\pi^i = \frac{h\nu_0}{c} p^i . \qquad (6.11)$$

Лаграгжиан (6.4) соответствует частице с единичной энергией. Для фотона он выбирается следующим:

$$L_{ph} = \frac{h\nu_0}{c} L . \qquad (6.12)$$

В этом случае компонентам ассоциированного вектора обобщенных сил

$$F^k = \frac{1}{2u_1 u^1} g^{k\lambda} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} u^i u^j \qquad (6.13)$$

ставятся в соответствие гравитационные силы

$$Q^l = h\nu_0 F^l , \qquad (6.14)$$

действующие на фотон.

7. Согласованность ВП1 для фотона и обобщенного принципа Ферма

Принцип Ферма для стационарного гравитационного поля [1,12] формулируется следующим образом

$$\delta t=\frac{1}{c}\delta\int\frac{1}{g_{11}}\left(dl-g_{1k}dx^k\right)=0\,, \tag{7.1}$$

где элемент пространственного расстояния вдоль луча есть

$$dl^2=\left(\frac{g_{1p}g_{1q}}{g_{11}}-g_{pq}\right)dx^p dx^q \tag{7.2}$$

Обозначив

$$df=\frac{1}{g_{11}}\left(dl-g_{1k}dx^k\right) \tag{7.3}$$

и сравнивая это выражение с (6.2), при σ=1 записываем

$$\frac{df}{d\mu}=\rho u^1\,. \tag{7.4}$$

Поэтому вариация интеграла (7.1) равносильна вариации

$$S_F=\int\limits_{\mu_0}^{\mu_1}\rho u^1 d\mu \tag{7.5}$$

В [10] предложен обобщенный принцип Ферма с применением принципа минимума Понтрягина из теории оптимального контроля. Данный подход распространяет принцип Ферма для стационарного гравитационного поля на нестационарные метрики. Получены динамические уравнения

$$Q=u^1\ , \tag{7.6}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}^q}\right)-\frac{\partial Q}{\partial x^q}-\frac{\partial Q}{\partial x^1}\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}^q}=0 \tag{7.7}$$

и показано, что их решения являются изотропными геодезическими.

Докажем, что эти уравнения тождественны уравнениям Эйлера-Лагранжа (2.5) при лагранжиане (6.4). Функция Q [10] совпадает с выражением для производной $df/d\mu$, получаемым из уравнения (7.3), при условии, что метрические коэффициенты зависят также и от времени. Поэтому из уравнения (7.4) следует выражение для энергии

$$\rho=\frac{Q}{u^1}\,. \tag{7.8}$$

Ввиду (6.9) уравнения (2.5) для пространственных координат приносят

$$\frac{1}{u^1}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial Q}{\partial u^q}\right)-\frac{1}{\left(u^1\right)^2}\frac{\partial Q}{\partial u^q}\frac{du^1}{d\mu}-\frac{1}{u^1}\frac{\partial Q}{\partial x^q}=0. \tag{7.9}$$

Для временной координаты (λ=1) из уравнений Эйлера-Лагранжа в форме (2.6) при обобщенных импульсах (6.5) и силах (6.6) следует

$$\frac{du^1}{d\mu}+\frac{u^1}{2u_1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}u^i u^j=0\,. \tag{7.10}$$

Сравнивая это уравнение и следующее из (2.3), (6.4) и (6.6) соотношение

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^\lambda}=-\frac{1}{2u_1u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j\,, \tag{7.11}$$

ввиду (7.8) получаем

$$\frac{du^1}{d\mu}=\left(u^1\right)^2\frac{\partial(Q/u^1)}{\partial x^1}=u^1\frac{\partial Q}{\partial x^1}\,. \tag{7.12}$$

Подстановка этого выражения в уравнения (7.9) и умножение их на u^1 дает уравнения (7.7). То есть, тождественность уравнений, полученных с помощью обобщенного принципа Ферма и ВП1 для свето-подобной частицы доказана. Ввиду эквивалентности решений, полученных из первого принципа, изотропным геодезическим, решения, следующие из второго принципа, также им эквивалентны. По сравнению с принципом Ферма, ВП1 дает систему уравнений, которая имеет на одно уравнение больше. Это позволяет однозначно определить аффинный параметр и вектор энергии-импульса частицы.

8. Общий вид выражения для силы

Уравнение (2.12) для действующей на фотон силы (6.13) принимает вид

$$\frac{dp^k}{d\mu}+g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l}u^l p^i=g^{k\lambda}\frac{1}{2u_1u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^iu^j. \qquad (8.1)$$

Произведем замену аффинного параметра

$$d\widehat{\mu}=d\mu\cdot u_1u^1. \qquad (8.2)$$

Выражение для импульсов (6.9) примет вид

$$p^\lambda=\widehat{u}^\lambda, \qquad (8.3)$$

где 4-скорость определяется как $\widehat{u}^\lambda=\dfrac{dx^\lambda}{d\widehat{\mu}}$. Подстановка (8.2) в выражение (8.1) приносит

$$\frac{dp^k}{d\widehat{\mu}}+g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l}\widehat{u}^l p^i=\frac{1}{2}g^{k\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}\widehat{u}^i\widehat{u}^j. \qquad (8.4)$$

Правая часть этой формулы с точностью до коэффициента совпадает с силой (3.4), действующей на материальную частицу единичной энергии. Она является ковариантной для линеаризованных метрик. Поскольку любая метрика может быть линеаризована в малой окрестности любой несингулярной точки, то это означает, что сила, действующая на частицу и вектор скорости передачи энергии и импульса гравитационному полю $\dfrac{d\vec{p}^k}{d\mu}$ ковариантны в локальной области.

9. Динамика фотона в поле Шварцшильда

Рассмотрим динамику светоподобной частицы в статическом центрально-симметричном гравитационном поле, описываемом метрикой Шварцшильда (4.1).

Обобщенные импульсы (6.5) для циклических координат *t*, φ являются постоянными движения

$$B=\frac{cdt}{d\mu}, \qquad (9.1)$$

$$C=r^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{d\mu}\left(1-\alpha/r\right)^{-1}. \qquad (9.2)$$

При *B*=1 ввиду (6.9) и (6.11) временная компонента вектора 4-скорости соответствует величине энергии фотона

$$E_{ph}=c\pi^1 \qquad (9.3)$$

на удалении от центра гравитации $E_{ph0} = h\nu_0$. Рассматривая движение в плоскости θ=π/2 получим угловую компоненту вектора 4-скорости

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{C}{r^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \tag{9.4}$$

Для изотропных кривых (ds=0) из (4.1) находим

$$\frac{dr}{d\mu} = \pm\left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \left(\frac{C}{r}\right)^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^3\right]^{1/2}. \tag{9.5}$$

Единственной ненулевой компонентой ассоциированного вектора обобщенных сил (6.13) является

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2r}\right) \tag{9.6}$$

При радиальном движении (C=0) она равна

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{9.7}$$

что совпадает с удвоенной силой, действующей на частицу в ньютоновской гравитации. Ввиду (6.14) она соответствует пассивной гравитационной массе фотона

$$m_p^{ph} = \frac{2h\nu_0}{c^2}. \tag{9.8}$$

Этот результат согласуется с мысленным экспериментом по «взвешиванию» фотона [13], в котором он совершает периодическое движение в вертикальном направлении между двумя горизонтальными отражающими поверхностями.

При рассмотрении нерадиального движения во избежание появления фиктивной составляющей силы, обусловленной сферичностью системы координат, воспользуемся формой метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (4.18). Так же как и для материальной частицы, будем рассматривать движение в плоскости z=0 и искать силу, действующую на светоподобную частицу в точке с координатами (ct,x,0,0), что соответствует значению угловой координаты φ=0 в сферической системе отсчета. Поскольку 4-скорости являются ковариантными векторами, то от решений уравнений движения светоподобной частицы (9.1), (9.4), (9.5) к компонентам вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат можно перейти с помощью преобразований (4.20). Его ненулевые компоненты с учетом (4.16) и (4.21) примут вид

$$u^1 = 1,\; u^2 = \pm\frac{\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3}\left[1 - \frac{C^2\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}^2\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6}\right]^{1/2},\; u^3 = \frac{C\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2}{\bar{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^6}. \tag{9.9}$$

Подставляя эти значения и

$$u_1 = \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}}{1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2, \tag{9.10}$$

в (6.13), находим единственную ненулевую компоненту вектора силы, действующей на светоподобную частицу:

$$F^2 = -\frac{\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\bar{r}}\right)}{\bar{r}^2\left(1 + \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^5\left(1 - \frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)} \tag{9.11}$$

Она преобразуется к виду

$$F^2 = -\frac{\alpha\left(1-\dfrac{\alpha}{8\bar{r}}\right)}{r^2\left(1-\dfrac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)}. \qquad (9.12)$$

Обобщенная сила, действующая на фотон, не зависит от направления его движения. Это выражение отличается от формулы (9.7), соответствующей радиальному движению в сферических координатах, что является следствием нековариантности вектора F^l. Однако в пределе слабой гравитации ($r \gg \alpha$) эти выражения асимптотически сходятся и дают закон тяготения Ньютона при пассивной гравитационной массе фотона (9.8), равной удвоенной гравитационной массе материальной частицы эквивалентной ему энергии. Этот результат следует и из квантовой теории гравитации при использовании пропагатора гравитационного поля [14].

Гравитационное поле потока электромагнитного излучения определяется из решения уравнений Эйнштейна $R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R = \chi T^i_j$ для тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T^{EM}_{ij} = \frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} - F^k_i F_{jk}$, где F_{ij} - тензор электромагнитного поля. В случае слабой гравитации из анализа ускорения материальной частицы в нем следует, что активная гравитационная масса пучка света или светового пакета в два раза больше аналогичной массы стержня равной ему энергии [15-17]. Следует отметить, однако, что гравитационное взаимодействие между электромагнитным излучением и материальными частицами отличается от этого взаимодействия между фотонами. Равенство активной и пассивной гравитационных масс фотона означает выполнение 3-го закона Ньютона при гравитационном взаимодействии света и материальных частиц и законов сохранения энергии и импульса.

10. Гравитационное красное смещение

Покажем, что значения энергии материальной частицы (3.3) и фотона (9.3) в поле Шварцшильда соответствуют гравитационному красному смещению. Оно определяется изменением соотношения между энергией статической материальной частицы и фотона [18]. В качестве материальной частицы может рассматриваться отдельный атом.

Найдем энергию материальной частицы, неподвижной в поле Шварцшильда. Ей будет соответствовать точка с максимальным радиусом траектории, задаваемой постоянной $\eta = \eta_2$ (4.13) при A=0, которая составит

$$\eta = \left(1-\frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^{1/2}. \qquad (10.1)$$

Подставляя это значение в выражение для 1-й компоненты вектора 4-скорости (4.7), при $r = r_{ext}$ получим

$$u^1 = \left(1-\frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^{-1/2}, \qquad (10.2)$$

что ввиду (3.2) соответствует энергии неподвижной материальной частицы

$$E = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} E_0, \qquad (10.3)$$

где $E_0 = mc^2$ - ее энергия покоя в собственной системе отсчета.

Энергия фотона (9.3) ввиду (6.9) и (6.11) составляет

$$E_{ph} = \frac{h\nu_0}{u_1}. \tag{10.4}$$

В поле Шварцшильда при временной компоненте вектора 4-скорости $u^1 = 1$ она примет вид

$$E_{ph} = h\nu_0 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1}. \tag{10.5}$$

Здесь ν_0 соответствует частоте фотона в точке траектории на удалении от центра гравитации ($r \to \infty$). При обозначении энергии фотона в этой точке E_{ph0} это выражение переписывается как

$$E_{ph} = E_{ph0} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1}. \tag{10.6}$$

Отношение энергии фотона к энергия неподвижной материальной частицы следующее:

$$\frac{E_{ph}}{E} = \frac{E_{ph0}}{E_0} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2}. \tag{10.7}$$

Его изменение проявляется в гравитационном красном смещении частоты фотонов, испущенных в точке с меньшим расстоянием от центра по сравнению с точкой их поглощения атомами.

11. Выводы

Динамика частиц в криволинейном пространстве-времени рассмотрена с использованием механики Лагранжа. Установлено соответствие между энергией и импульсом частицы, и контравариантным вектором обобщенных импульсов. Полученные динамические уравнения включают в себя скорость изменения вектора энергии-импульса, компоненты которого выражают приобретенные гравитационным полем энергию и импульс при движении в нем частицы. При рассмотрении динамики отдельной частицы этот вектор является аналогом псевдотензора, используемого в законах сохранения ОТО в тензорном виде.

Хотя полученные обобщенные силы не являются ковариантными величинами, в пределе слабой гравитации, описываемой метрикой Шварцшильда, они выражают ньютоновский закон гравитации для движущихся точечных тел и светового пучка. При этом, пассивная гравитационная масса фотона не зависит от направления его движения. Совпадая с активной гравитационной массой направленного электромагнитного излучения, она равна удвоенной массе материальной частицы эквивалентной его энергии. Нековариантность вектора обобщенных сил и вектора, составленного из скоростей передачи энергии и импульса гравитационному полю при движении в нем частицы, имеет ту же природу, что и нековариантность псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, с помощью которого были рассчитаны подтвержденные экспериментально изменения орбитального периода двойной звездной системы в результате потери энергии, вызванной излучением гравитационных волн [1,19]. Однако в локальной области при условии линеаризации метрики эти величины являются ковариантными.

Рассмотрена система из двух близко расположенных одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях, с малой гравитационной энергией по сравнению с их кинетической энергией. Она описана с помощью метрики, полученной путем применения преобразований Лоренца к метрике Шварцшильда. Ее гравитационное воздействие на материальную частицу зависит от угла между радиус вектором частицы и линией движения тел.

Применение ВП1 и обобщенного принципа Ферма для свето-подобной частицы в гравитационном поле приводит к общему решению, которое является изотропной геодезической линией. ВП1 определяет систему уравнений, имеющую по сравнению с результатом обобщенного принципа Ферма на одно уравнение больше. Это позволяет однозначно определить вектор энергии-импульса частицы. В поле Шварцшильда соотношение между энергией фотона и неподвижной материальной частицы соответствует характеристике гравитационного красного смещения.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 тт. Т. 2 Теория поля, М.: Физматлит, 2003. 536 с.
2. Вайнберг С. Гравитация и космология: М.: Мир, 1975. 696 с.
3. Ритус В.И., Лагранжевы уравнения движения частиц и фотонов в шварцшильдовском поле // УФН. 2015. Т. 185. № 11. С. 1229-1234.
4. Окунь Л.Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // УФН. 1989. Т. 158. № 7. С. 511-530.
5. Беляев В.Б. Динамика в общей теории относительности: вариационные методы: М.: УРСС, 2017. 216 с.
6. Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Extended space model is consistent with the photon dynamics in the gravitational field // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1251. P. 012048.
7. Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Photon dynamics in the gravitational field in 4D and its 5D extension // Rom. Rep. Phys. 2019. Vol. 71. No. 4. P. 109.
8. Ципенюк Д.Ю., Беляев В.Б. // Оболочечные структуры в микрофизических объектах в 5-D модели расширенного пространства, РЭНСИТ. 2019. Т. 11. № 3 С. 249-260.
9. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения: 2-е изд., доп. М.: ГИФМЛ, 1961. 564 с.
10. Frolov V.P. Generalized Fermat’s principle and action for light rays in a curved spacetime // Phys. Rev. D. 88(6) (2013) 06403910.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 тт. Т. 1: Механика, М.: Физматлит, 2004. 224 с.
12. Perlick V. Gravitational lensing from a spacetime perspective // Living Rev. Relativity. 2004. Vol. 7. P. 9.
13. Ривлин Л.А. Фотоны в волноводе (несколько мысленных экспериментов) // УФН. 1997. Т. 167. № 3. С. 309-322.
14. Окунь Л.Б. Теория относительности и теорема Пифагора // УФН. 2008. Т. 178. № 6. С. 653–663.
15. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология: М.: Наука, 1974. 520 с.
16. Tolman R.C., Ehrenfest P., Podolsky B. On the gravitational field produced by light // Phys. Rev. 1931. Vol. 37. No. 5. Pp. 602-607.
17. Faraoni V., Dumse R.M. The gravitational interaction of light: from weak to strong fields // Gen. Relativ. Gravit. 1999. Vol. 31. No. 1. Pp. 91-105.
18. Окунь Л.Б., Селиванов К.Г., Телегди В. Гравитация, фотоны, часы // УФН. 1999. Т. 169. № 10. С. 1141-1147.
19. Weisberg J.M., Huang Y. Relativistic measurements from timing the binary pulsar PSR B1913+16 // The Astrophysical Journal. 2016. Vol. 829. No. 1. P. 55.