

"Об одном приложении теории струй кальция в расплаве железа"

А.С.Борисов, О.Б.Шаров, Injection Alloys Group.

Рассматривается получение интегралов и точных решений уравнений гидродинамики для вязкой и невязкой жидкости, обобщающих решение Ландау о затопленной струе. Обсуждается использование полученных решений в прикладных задачах технической гидродинамики. Проводится анализ математической модели поведения наполнителя порошковой проволоки для случая кальций содержащих проволок со сварной полностью герметичной оболочкой в расплаве железа

1. Введение.

Технологии выплавки металла в черной металлургии постоянно совершенствуются. В частности в последние десятилетия внепечная обработка стали была значительно усовершенствована благодаря внедрению в процесс ковшевой обработки технологии использования порошковых проволок. Последнее позволило значительно повысить точность ввода ферроматериалов в расплав, автоматизировать сам процесс ввода, сократить потери и т.д.

Таким образом, переход к проволочным технологиям это безусловно дальнейший шаг в совершенствовании технологий ковшевой обработки с целью доводки металла до необходимого компонентного состава согласно прецизионным требованиям стандартов к выпускаемой продукции. В черной металлургии проволочные технологии начали применяться значительно позже, чем в сварочных процессах, однако, они быстро нашли повсеместное употребление и заняли свою экологическую нишу. В настоящее время без них невозможно организовать ни одно современное производство металла.

Важнейшим вопросом применения проволок является изучение динамики поведения наполнителей в расплаве металла (в дальнейшем речь пойдет об одном порошковом наполнителе специального состава), так как именно от этого зависит эффективность использования наполнителей. Целью настоящей работы являлось создание математической модели поведения наполнителя порошковой проволоки для случая кальций содержащих порошковых проволок со сварной полностью герметичной оболочкой.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим процесс применения порошковой проволоки, содержащий наполнителем гранулированный (или монокристаллический) металлический чистый кальций (>98,5%) для обработки расплава железа при выплавке стали. Данный метод находит в последние годы широкое применение в мире и в РФ в частности (см. например детали в [1]).

В этом случае в ковш, содержащий расплав жидкого железа при температуре около 1600 гр. С, посредством специального устройства -трайб- аппарата совместно с системой телескопической

подачи порошковой проволоки подается пруток запрессованного в стальную герметичную оболочку порошкового или монокристаллического кальция. Наилучшее качество герметичности обеспечивает конструкция оболочки разработанная в [2] и поставляемая на рынок компанией Injection Alloys Group. В ней края оболочки завариваются в процессе ее производства и это существенно улучшает герметичность, что особенно важно для такого наполнителя как кальций, у которого температура плавления составляет около 839 гр.С, а температура кипения, т.е. газификации 1484 гр.С. В процессе ввода проволоки в расплав (ввод стараются сделать как можно более вертикальным с целью механически пробить концом проволоки затвердевшую корку шлака) оболочка проволоки нагревается и нагревает наполнитель настолько, что он становится сначала жидким (температура фазового перехода жидкость -твердое тело для кальция существенно ниже чем температура при которой поддерживается расплав), а потом подверженным интенсивному газовыделению, по мере того как конец проволоки опускается в глубь расплава. При этом в процессе погружения гидростатическое давление окружающего проволоку железа (которое из-за высокой плотности железа является значительным) сдавливает кальций, что предотвращает начало газовыделения из конца проволоки, если наполнитель успеет нагреться до предела газификации (1484 гр.С) за время пока проволока опустится ниже, чем примерно 2м от поверхности шлака (т.е. глубины где гидростатическое давление железа превысит давление насыщенного пара кальция при температуре плавки). По мере дальнейшего погружения в расплав оболочка нагревается настолько, что теряет упругость, становится пластичной и, наконец, достигает точки, где она растворяется и исчезает, а наполнитель освобождается и выбрасывается в расплав. Если смотреть на данный процесс из неподвижной системы координат, начало которой помещено на дно ковша, а ось z направлена вверх вдоль оси симметрии проволоки, то дальнейший процесс ее инжектирования выглядит стационарным. Через телескопическую систему в шлак подаются все новые участки проволоки, на некоторой глубине расплава оболочка плавится и в этом месте из нее в расплав истекает (причем точку истечения можно считать локальной) количество материала кальция равное вошедшему в виде твердой фазы, но на выходе которое по большей части является жидким.

Идеализируя указанную выше картину можно принять, что кальций истекает в расплав жидкого железа с плотностью ρ_{Fe} в виде струи жидкой фазы, имеющей плотность ρ_{Ca} . Последнее предположение весьма правдоподобно, поскольку при характерных скоростях ввода проволоки $\sim 1-2$ м/сек и ее диаметрах ~ 1 см, если допустить, что кальций выносится жидким, значение числа Рейнольдса составит $Re = \rho_{Ca} \cdot v \cdot D / \eta_{Ca} \sim 2 \cdot 10^3 \text{ (м/кг}^3) \cdot 1 \text{ (м/с)} \cdot 10^{-2} \text{ (м)} / 0,5 \text{ (н/м)} = 40$, что говорит о ламинарном характере течения [3]. В тоже время число Вебера $We = Re \cdot v \cdot \eta / \sigma \sim 40 \cdot 1 \cdot 0,5 / 0,4 = 50$, т.е. отношение инерционных сил к силам поверхностного натяжения довольно значительно, что говорит о том, что силы поверхностного натяжения малы, не играют значительной роли и каплеобразование при выносе кальция из оболочки затруднено. Приняв такие допущения, получается картина, которую в случае если ее удастся рассчитать и сравнить результаты расчетов с наблюдаемой, то станет возможным сделать вывод о верности или неправильности принятых предположений. Именно в этом смысле надо понимать дальнейшие расчеты.

Таким образом в дальнейшем принята следующая картина применения порошковой проволоки с кальцием: в ковш обладающий большой емкостью (до 350-370тн стали) и практически бесконечными габаритами (диаметр порядка 3м и высотой до 5м при диаметре вводимой проволоки около $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$), который имеет осесимметричную цилиндрическую геометрию с постоянной скоростью около 1-2 м/с вертикально подается проволока (для определенности считаем вектор начальной скорости кальция параллельным вектору ускорения свободного

падения), имеющая значительно меньший диаметр из свободного расплавленного конца круглого сечения которой на некоторой глубине истекает ламинарной осесимметричной струей жидкий кальций. За счет разницы в плотностях жидкого железа и кальция, поток наполнителя под действием выталкивающей силы вертикально всплывает к поверхности.

Заметим, что температура кальция на выходе из оболочки всегда меньше, чем температура расплава, однако влиянием конвективного фактора на процесс формирования струи и всплытия пренебрегается, считая температуры кальция и железа одинаковыми. На некоторой глубине расплава из струи жидкого кальция при ее подъеме в ковше интенсивно начинает выделяться газообразный кальций, что усложняет описание и меняет характер течения струи. Так как подобные процессы могут проявиться только в областях, где гидростатическое давление расплава понижено, т.е. недалеко от поверхности (глубины <2м), то также пренебрегаем их влиянием на формирование струи. Требуется определить течения кальция и железа как гидродинамических компонент системы.

Запишем систему уравнений в двух жидкостной модели, которая позволяет рассчитать сформулированную выше задачу. Это уравнения Навье -Стокса для каждой из жидких компонент, дополненные уравнениями неразрывности. Таким образом:

$$(u\nabla)u - v_1 \Delta u = -\nabla(p_1/\rho_1) + g; \quad \text{div}(u \cdot \rho_1) = 0 \quad (1)$$

$$(v\nabla)v - v_2 \Delta v = -\nabla(p_2/\rho_2) + g; \quad \text{div}(v \cdot \rho_2) = 0.$$

Здесь принято: u -векторное поле скоростей жидкого кальция; v -векторное поле скоростей железа; ρ_1, ρ_2 -их плотности; p_1, p_2 -их полные давления; g - вектор ускорения свободного падения; v_1, v_2 - кинематические вязкости кальция и железа; Δ – оператор Лапласа; ∇ –вектор градиента потока.

3. Преобразования системы уравнений (1).

Для дальнейшего заметим, что в системе уравнений (1) уравнения для кальция и железа (т.е. для каждой из компонент) идентичны и связаны между собой только граничными условиями. Поэтому если решить в общем виде уравнения, определяющие поведение только одной компоненты, это же общее решение будет являться решением и для другой компоненты. Разница между ними состоит только в выборе входящих констант- граничных условий. Воспользуемся этим и найдем общее решение уравнения в приближении несжимаемой жидкости, например, для кальция. В цилиндрической геометрии с учетом осевой симметрии при выборе оси z параллельно вектору g , получаем следующую систему для каждой из 2-х основных осей координат:

$$v_r(\partial v_r/\partial r) + v_z(\partial v_r/\partial z) + (1/\rho) \cdot (\partial p/\partial r) = v \cdot (1/r(\partial/\partial r)(r(\partial v_r/\partial r)) + \partial^2 v_r/\partial z^2 - v_r/r^2)$$

$$v_r(\partial v_z/\partial r) + v_z(\partial v_z/\partial z) + (1/\rho) \cdot (\partial p/\partial z) = v \cdot (1/r(\partial/\partial r)(r(\partial v_z/\partial r)) + \partial^2 v_z/\partial z^2) + g \quad (2)$$

$$(\partial v_r/\partial r) + (\partial v_z/\partial z) + v_r/r = 0,$$

здесь g может принимать значения $\pm |g|$ в соответствии с тем какова ориентация потока кальция в точке его истечения по отношению к силе тяжести.

Заметим, что аналитические решения системы (2) при $g=0$ для некоторых частных случаев струйных течений известны и уже были получены ранее рядом авторов: Н.А. Слезкиным (1934г.),

Л.Д. Ландау (1943г.), Г.И. Броманом и О.В. Руденко (2010г.) и фактически сложились в отдельное направление теории струй. При этом исторически, вероятно, после работы Л.Д.Ландау, которая перешла в учебные пособия см. [8], (2) приводилась к сферической системе координат и в ней решалась. При ненулевом векторе g представляется, что более удобна цилиндрическая система координат. Насколько известно авторам при наличии g в цилиндрической постановке задача расчета струйного течения не рассматривалась. В связи с этим далее приведено ее решение.

Для дальнейшего действуем аналогично [5] и решение (2) ищем в автомодельных переменных:

$$v_r = U(\xi)/z; \quad v_z = W(\xi)/z; \quad p = \rho g z + \rho \gamma(\xi)/z^2; \quad \xi = r/z \quad (3),$$

что, как обычно, сводит (2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, также выписанную в [5], но без учета сил тяжести:

$$\begin{aligned} U U' - W(\xi U)' - \gamma' &= v * (U''(1 + \xi^2) + U'(1 + 4\xi^2)/\xi - U/(1 - 2\xi^2)/\xi^2) \\ U W' - W(\xi W)' + (\xi^2 \gamma)' / \xi &= v * \xi * (W''(1 + \xi^2) + W'(1 + 4\xi^2)/\xi + 2W) \\ (\xi U)' &= \xi * (W \xi)', \end{aligned} \quad (4)$$

здесь запись $(...)' = d/d\xi$ означает взятие производной по ξ . Система уравнений (4) имеет 3 точных интеграла (вывод соответствующих уравнений приведен в приложениях 1-2):

$$\begin{aligned} U^2 - (\xi W)^2 - 2\gamma - 2v * (d(\xi(U\xi + W))/d\xi) &= C_1 \\ (U\xi)W - (\xi W)^2 + \xi^2 * \gamma - v * (\xi d(U\xi + W)/d\xi) &= C_2 \\ 2v * ((U\xi + W)\xi^2 - 2\omega) + (\omega^2 + C_1(2 + \xi^2) - 2C_2) &= -2C_0 * (1 + \xi^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены следующие обозначения: $d\omega/dx = Z(\xi)$; $dx/d\xi = \xi/(1 + \xi^2)^{1/2}$ (или $e^x = (1 + \xi^2)^{1/2}$);

$$Z(\xi) = \omega(\xi) + \gamma(\xi); \quad \gamma(\xi) = U\xi + W; \quad Z(\xi) = (1 + \xi^2) * W; \quad C_0, C_1, C_2 \text{ - константы интегрирования.}$$

Анализ возможных аналитических решений нижнего уравнения системы (5) (отметим, что оно есть прямое следствие двух верхних уравнений в (5), соответствующий вывод приведен в приложениях 1-2), в дифференциальной форме:

$$d\omega/dx - \omega * (e^{2x} + 1)/(e^{2x} - 1) = (-1/2v) * (\omega^2 + (C_1 e^{2x} + 2C_0 e^x + C_1 - 2C_2)) * (1/(e^{2x} - 1)) \quad (6)$$

выполним в следующем разделе, а здесь укажем лишь, что его общее решение есть гипергеометрическая функция. Преобразование уравнения (6) в форму третьего интеграла уравнения (5) проведено в приложении 2.

4. Анализ возможностей получить решения (6) в квадратурах.

Для анализа возможностей свести (6) к квадратурам проведем его некоторые преобразования. В частности введем новую функцию $\zeta(x)$ вместо $\omega(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega(x) = (+1 \text{ или } -1) * (-C_1 e^{2x} + 2C_0 e^x + \beta) + \delta^2 * \zeta(x), \quad (7)$$

здесь $C_0 = (C_4 - C_5)/2C_3$; $\beta = C_1 - 2C_2$; C_3, C_4, C_5 - промежуточные константы, возникающие при интегрировании (4), они введены в приложении 1; $\delta = 0$ или 1 в зависимости от того каковы коэффициенты C_0, C_1, β . Если все приведенные величины равны нулю, т.е. $C_1 = C_0 = \beta = 0$, то $\delta = 1$.

Если хотя бы одна из этих величин отлична от нуля, то $\delta=0$. Правую часть (6) преобразуем к следующему виду:

$$(-1/(2v*(e^{2x}-1)))*(-(C_1e^{2x}+2C_0e^x+\beta)+\delta^2)^{1/2}*(\zeta^2-1+\delta^2/(-(C_1e^{2x}+2C_0e^x+\beta)+\delta^2)).$$

Если $\delta=0$, она превращается в $(-1/(2v*(e^{2x}-1)))*(-(C_1e^{2x}+2C_0e^x+\beta))^{1/2}*(\zeta^2-1)$, а если все введенные константы есть ноль, то она выглядит как $(-1/(2v*(e^{2x}-1)))*(\zeta^2)$. Иными словами с введением δ правая часть (6) при преобразовании (7) не обращается в ноль никоим образом. Подставив (7) в (6) и собирая подобные слагаемые при линейном по ζ члене, получим аналогичное (6) уравнение, но уже для новой функции $\zeta(x)$ в следующей форме:

$$d\zeta(y)/dy - \zeta*(-C_0e^{3x}-(2C_1+\beta-\delta^2)e^{2x}-3C_0e^x-\beta+\delta^2)/(-(C_1e^{2x}+2C_0e^x+\beta)+\delta^2)^{3/2}= \\ (-1/(2v)*(\zeta^2-1+\delta^2/(\delta^2-(C_1e^{2x}+2C_0e^x+\beta)))). \quad (8)$$

Причем здесь только для данного раздела введено $dy/dx=(\delta^2-(C_1e^{2x}+2C_0e^x+\beta))^{1/2}/(e^{2x}-1)$. Заметим, что если дробно-рациональное выражение при линейном по ζ члене в (8) есть постоянная величина, т.е. либо числитель и знаменатель отдельно, либо их отношение постоянны и не зависят от x , тогда для случая $\delta=0$ (т.е. когда хотя бы одна из констант C_0, C_1, β отлична от нуля) уравнение (8) сводится к уравнению Бернулли с постоянным свободным членом и заменой $\eta=\zeta+A$, где A - константа, которая выбирается из условия обнуления свободного члена, преобразуется к обычному уравнению Бернулли и, следовательно, интегрируется явно. Когда все константы C_0, C_1, β равны нулю (т.е. $\delta=1$), то (8) является уравнением Бернулли и также интегрируется в квадратурах. Таким образом задача поиска квадратур (8) сводится к поиску условий на величины C_0, C_1, β, δ при которых дробно-рациональное выражение при линейном по ζ члене в (8) является постоянной величиной.

4.1 Анализ случая $\delta=0$.

Если хотя бы одна из величин C_0, C_1, β отлична от нуля, то упростить дробно-рациональное выражение при линейном по ζ слагаемом в (8) возможно, если заметить, что многочлены числителя и знаменателя будут иметь одинаковые кубические степени только в том случае, если в числителе стоит куб суммы, а в знаменателе под корнем квадрат той же величины. Это может иметь место только в двух случаях: $C_0=\beta=C_1$ или $\beta=C_1$ и $C_0=-C_1$. При этом в приложении 3 доказано, что для физически мыслимых условий течения в струях выбор граничных условий приводит к дополнительному соотношению между константами: $C_1+C_0=C_2$.

4.1.1 Случай $\beta=C_1$ и $C_0=-C_1$, где C_1 отлична от нуля.

Если требовать выполнения условий в заглавии подраздела получаем для постоянных коэффициентов следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -2C_1\beta &= -3C_1; & C_1+C_0 &= C_2; \\ C_0 &= -C_1; & \text{и } \beta &= C_1-2C_2 \\ \beta &= C_1; & C_0 &= (C_4-C_5)/2C_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) не доопределена, т.к. имеется шесть уравнений для семи неизвестных. Удобно поэтому выразить ее решение через одну величину, например, C_1 . Тогда из третьего и пятого уравнений (если пронумеровать их по столбцам слева направо и сверху вниз) следует $C_2=0$ (это случайно совпадает с требованием доказанным из общих соображений в приложении 3). При этом первое, четвертое уравнения превращаются в тождества. А из второго и шестого уравнений получаем $(C_4-C_5)/C_3=-2C_1$, причем комбинацию в левой части этого выражения можно без ограничения общности переобозначить за новую константу C_3 , что приводит к полному совпадению решений (9) со случаем выбора констант ранее рассмотренным в [5-6], однако при выводе приведенном выше этот выбор является строго обоснованным.

Уравнение (8) в этих обозначениях сводится к системе:

$$d\zeta(y)/dy + \zeta + b \cdot \zeta^2 = b, \quad b = (-C_1)^{0.5}/2v \quad (10)$$

$$dy/dx = 1/(1+e^x).$$

Первое уравнение в (10), как и добивались, есть уравнение Бернулли с постоянным свободным членом в правой части. Преобразованием сдвига ζ на константу A оно приводится к уравнению Бернулли и решается стандартными методами. Его решением являются:

$$\zeta(y) = (1/(C_{01}e^{y*(1+2Ab)} - b/(1+2Ab))) + ((1+(0.25/b^2)^{1/2} - 0.5/b) \quad (11)$$

$$e^y = e^x/(1+e^x); A = ((1+4b^2)^{1/2} - 1)/2b; C_{01} - \text{константа интегрирования.}$$

Если вязкость стремится к нулю, то $b \rightarrow \infty$, откуда $A \rightarrow 1$ и $\zeta(y) \rightarrow -1$. При выборе знака - в (11) перед корнем это дает: $\omega(x) = (-C_1)^{0.5} \cdot (e^x - 1)$ и для поля скоростей получаем, как и следовало ожидать, распределение скоростей в идеальной жидкости (см. [5]):

$$W = (-C_1)^{0.5} / (1 + \xi^2)^{1/2} \quad (12)$$

$$U\xi = (-C_1)^{0.5} / (1 + \xi^2)^{1/2} \cdot ((1 + \xi^2)^{1/2} - 1).$$

4.1.2 Случай $\beta = C_1$ и $C_0 = C_1$, где C_1 отлична от нуля.

Аналогично 4.1.1 получаем систему линейных алгебраических уравнений для констант типа (9) и находим ее решения. Это дает $C_2=0$; $(C_4-C_5)/C_3=2C_1$ и приводит к уравнению для ζ вида: $d\zeta(y)/dy - \zeta + b \cdot \zeta^2 = b$, $b = (-C_1)^{0.5}/2v$; $dy/dx = 1/(e^x - 1)$. После дальнейших преобразований система сводится к

$$\zeta(y) = (1/(C_{02}e^{y*(1+2Ab)} + b/(1-2Ab))) + (-(1+(0.25/b^2)^{1/2} + 0.5/b) \quad (13)$$

$$e^y = e^x/(1-e^x); A = (1 - (1+4b^2)^{1/2})/2b; C_{02} - \text{константа интегрирования.}$$

Если вязкость стремится к нулю, то $b \rightarrow \infty$, откуда $A \rightarrow -1$ и $\zeta(y) \rightarrow -1$. При выборе знака - в (11) перед корнем это дает: $\omega(x) = (-C_1)^{0.5} \cdot (e^x + 1)$ и для поля скоростей получаем распределение вместо (12):

$$W = (-C_1)^{0.5} / (1 + \xi^2)^{1/2} \quad (14)$$

$U\xi = (-1) \cdot (-C_1)^{0.5} / (1 + \xi^2)^{1/2} \cdot ((1 + \xi^2)^{1/2} + 1)$. Заметим, что случай (13)-(14), ранее, насколько известно авторам, не рассматривался.

4.1 Анализ случая $\delta = 1$ (все константы равны нулю $C_0 = C_1 = C_2 = \beta = 0$ или случай Л.Д.Ландау).

При таком выборе комбинация констант единственная, что сводит уравнение (8) к решению следующей задачи:

$$d\zeta(y)/dy - \zeta + b \cdot \zeta^2 / (e^{2x} + 1) = 0, \quad b = 1/2v \quad (15)$$

$$dy/dx = (e^{2x} + 1) / (e^{2x} - 1).$$

Первое уравнение является уравнением типа Бернулли и решается стандартными методами. Решение второго уравнения приводит к ответу: $e^y = e^x - e^{-x} = 2\text{sh}(x)$. Приведем окончательное общее решение (15) без детальных выкладок для краткости:

$$\zeta(x) = \omega(x) = (e^{2x} - 1) / b \cdot (C_{01}e^x - 1) = 2v\zeta^2 / (C_{01} \cdot (1 + \zeta^2)^{0,5} - 1). \quad (16)$$

Данное решение приводит к полю скоростей, которое совпадает со случаем рассмотренным Л.Д.Ландау в 1943г. [8] и ранее независимо Н.А.Слезкиным. Заметим, что (16) полностью совпадает с предельным случаем уже рассмотренного выше решения (11) при $b_1 = (-C_1)^{0,5} \cdot b = (-C_1)^{0,5} / 2v \rightarrow 0$. Действительно, так как при малых b_1 выражение $(1 + 0,25/b_1^2)^{1/2} - 0,5/b_1 \approx b_1$, получаем, что в (11) $(1 / (C_{01}e^{y^*(1+2Ab_1)} - b_1 / (1+2Ab_1))) \approx C_{01}e^y - b_1 = C_{01}e^x / (1 + e^x) - b_1 = b_1 \cdot (A_1e^x - 1) / (e^x + 1)$, где введено новое обозначение: $A_1 = C_{01}/b_1 - 1$. Откуда для решения (11) в этом предельном случае получаем: $\zeta(x) = (e^x + 1) / b_1 \cdot (A_1e^x - 1)$ и, следовательно, $\omega(x) = (-C_1)^{0,5} \cdot (e^x - 1) \cdot \zeta(x)$. Это дает:

$$\omega(x) = 2v \cdot (e^{2x} - 1) / (A_1 \cdot e^x - 1). \quad (17)$$

(17) полностью совпадает с (16) после переобозначения константы A_1 на C_{01} и перехода от x к ξ . Тем самым показано, что полученное ранее решение (11) является более общим случаем чем решение (16), полученное в данном разделе, так как (11) в предельном случае $v \rightarrow 0$, приводит к полю скоростей справедливому для идеальной жидкости, а в случае $v \rightarrow \infty$ к полю скоростей случая Ландау. Данное решение впервые было найдено в основополагающей работе [5] Броманом и Руденко. Явный вид решения (11) в статье [5] к сожалению не приведен, вероятно из-за его громоздкости. Тем не менее соответствующая формула полезна, так как позволяет свести случай малой вязкости или случай почти идеальной жидкости к случаю идеальной, только за счет специального выбора выражения для вязкости (см. далее формулу (18a)).

5. Применение полученных общих результатов для расчета течения кальция в расплаве стали.

Применим полученные результаты для решения исходной задачи (1). В двух жидкостной модели (1) прежде всего отметим, что отношение вязких членов к остальным составляет для кальция:

$$(\eta_{ca} \cdot v / D^2 \cdot \rho_{ca}) / (v^2 / D) = \eta_{ca} / D \cdot \rho \cdot v = 1 / \text{Re} \approx 0,025 \ll 1$$

С другой стороны отношение вязких членов к силам, обеспечивающим всплытие кальция, составляет:

$$(v_{ca} \cdot v / D^2) / (g \cdot \Delta \rho / \rho_{ca}) = \eta_{ca} \cdot v / D^2 \cdot g \cdot \Delta \rho = (v^2 / D \cdot g \cdot \Delta \rho / \rho_{ca}) / \text{Re} \approx 1 / (40 \cdot 10^{-2}) / 40 = 0,0625 \ll 1.$$

Таким образом влияние вязких членов относительно мало и, потому, жидкий кальций можно рассматривать как идеальную жидкость. Заметим, что согласно работе [7] при температурах плавок в 1600гр. С отношение кинематических вязкостей железа и кальция порядка единицы ($v_{Fe} / v_{ca} = \eta_{Fe} / \eta_{ca} \cdot \rho_{Fe} / \rho_{ca} \approx 3/5 = 0,6$), что говорит о том, что и жидкий расплав стали также можно рассматривать как идеальную жидкость в данной задаче.

Таким образом, для дальнейшего обоснованно принять, что в установившемся режиме струя жидкого кальция формирует поток, который вследствие идеальности окружающего его жидкого железа слабо вовлечен в движение. Последнее означает, что векторное поле скоростей расплава $u \approx 0$ и уравнение Навье - Стокса в (1) для железа превращается в условие $\partial p_{Fe} / \partial z = g \cdot \rho_{Fe}$ или $\Delta p_{Fe} = g \cdot \rho_{Fe} \cdot z$. Считая течение кальция как течение идеальной жидкости, получим поле скоростей кальция согласно результатам (12), изложенным выше в форме:

$$W = (-C_1)^{0.5} / (1 + \xi^2)^{1/2} \quad (18)$$

$$U\xi = (-C_1)^{0.5} / (1 + \xi^2)^{1/2} \cdot ((1 + \xi^2)^{1/2} - 1), \quad \xi = r/z.$$

Заметим, что в данных выражениях оказывается возможным учесть также поправки и на не идеальность жидкости кальция, если провести в (18) замену следующего вида:

$$(-C_1)^{0.5} \rightarrow (-C_1)^{0.5} \cdot ((1 + v_{Ca}^2 / (-C_1))^{1/2} + v_{Ca} / (-C_1)^{0.5}) \quad (18a)$$

Это является общим правилом справедливым не только для кальция, но и для любой слабо идеальной жидкости, так как строго следует из структуры решения (11) при условии, что $v / (-C_1)^{0.5} \ll 1$ (когда вязкость мала), именно тогда в общем решении (11) в знаменателе оказывается возможным пренебречь первым слагаемым, что и приводит к полю скоростей идеальной жидкости, но с перенормированной константой, как это сделано в (18a).

Зная распределение скоростей (18)-(18a) найдем давление в почти идеальной жидкости кальция. Для этого воспользуемся уравнением, которое в (5) определяет константу C_1 (понимая под ней выбор C_1 в форме (18a) и не указывая на это явно в дальнейшем для сокращения записей). Подставим в указанное уравнение (18), причем для проведения преобразований учтем, что $U\xi$ в (18) можно записать как: $U\xi = (-C_1)^{0.5} - W$. Тогда для давления кальция как идеальной или почти идеальной жидкости получим, согласно (3) и выражению для C_2 из (5):

$$p = \Delta p_{Oca} + \gamma(\xi) \rho / z^2, \quad \text{где } \gamma(\xi) = (-C_1) \cdot (1 - 1 / (1 + \xi^2)^{1/2}) / \xi^2. \quad (19)$$

Первое слагаемое в (19) есть разность гидростатических давлений кальция и железа на данной глубине z и оно равно $g(\rho_{Fe} - \rho_{Ca})z$. Рассмотрим малые объемы кальция, истекающие из проволоки в установившемся режиме течения и проследим за их движением во времени t , отсчитываемом от момента покидания проволоки. Зная давление (19) для таких объемов (частиц) можем записать динамические уравнения движения в следующей форме (данные уравнения являются характеристиками для системы уравнений в частных производных первого порядка (2), которая получается из (1) при вязкости равной нулю):

$$\begin{aligned} d^2z/dt^2 &= 1/\rho_{Ca} \cdot \partial p / \partial z = g \cdot \Delta \rho / \rho_{Ca} + / - 1/\rho_{Ca} \cdot \partial / \partial z (\rho_{Ca} \cdot (-C_1) \cdot (1 - 1 / (1 + \xi^2)^{1/2}) / \xi^2) = \\ &= g \cdot \Delta \rho / \rho_{Ca} - / + (-C_1) / (r^2 + z^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) в выписанной форме имеет два первых интеграла движения (вывод приведен в приложении 4):

$$dz/dt = g \cdot \Delta \rho / \rho_{Ca} \cdot t + / - (-C_1)^{0.5} / (r^2 + z^2)^{1/2}, \quad (20a)$$

первый интеграл. Причем имеется соответствие между (20) и (20a) так как:

$$d/dt (dz/dt) = d/dt (g \cdot \Delta \rho / \rho_{Ca} \cdot t + / - (-C_1)^{0.5} / (r^2 + z^2)^{1/2}) = g \cdot \Delta \rho / \rho_{Ca} - / + (-C_1) / (r^2 + z^2)^{3/2}.$$

Второй интеграл определяет координату частицы $z=z(t)$ уравнением (вывод в приложении 4):

$$\int_0^{z(t)} dz (r^2+z^2)^{1/4} / ((v_0^2+2az) * (r^2+z^2)^{1/2} + (-C_1) * 2z/r^2)^{1/2} = t$$

здесь $v_0=W(\xi)/z|_{z=0}=+/-(-C_1)^{0.5}/(r^2+z^2)^{1/2}|_{z=0}$; $a= g*\Delta\rho/\rho_{ca}$; + или - выбирается в зависимости от ориентации вектора скорости потока кальция к вектору ускорения свободного падения в момент выброса кальция. Отметим также, что точка выброса кальция может иметь два значения: $z_0=h$ (как это показано на Рис.2) и $z_0=H-h$ (Рис.1). Последнее можно также пояснить различием путей, пройденных концом проволоки при отличии скорости ввода от оптимальной (т.е. такой при которой выброс кальция происходит на дне ковша). Или строго: $H-h=H(1-\Delta v/v_{опт})$ и $H+h=H(1+\Delta v/v_{опт})$ в обозначениях на Рис.1-2. Найдем расход кальция в зависимости от z (т.е. определим линии тока), используя (20a) и считая зависимость t от радиуса слабой:

$Q_{Ca}=0 \int^r 2\pi\rho_{Ca}rdr*(dz/dt) \approx \pi\rho_{Ca}*(g*\Delta\rho/\rho_{Ca}*t*r^2+(-C_1)^{0.5}*((r^2+z^2)^{0.5}-z))$. Откуда получаем приближенное уравнение (см. вывод в приложении 5) для границ струи кальция и линий тока:

$$r= R*((1+2z/R)/(1+2\beta(z/R)^{1/2}*(1+z/R)))^{1/2}, \quad (21)$$

где $\beta=(aR/2v_0^2)^{0.5}$; $v_0=W(\xi)/z|_{z=0}=(-C_1)^{0.5}/(r^2+z^2)^{1/2}|_{z=0}$; $a= g*\Delta\rho/\rho_{ca}$; $R=(Q_{Ca}/2\pi\rho_{Ca}v_0)^{0.5}$; $(-C_1)^{0.5}=R*v_0$.

Заметим, что формула (21) при $\Delta\rho=a=\beta=0$, т.е. при отсутствии выталкивающей силы, дает поведение границы струи и линий тока как это имеет место в теории идеальной жидкости $r= R*(1+2z/R)^{1/2}$ в согласии с [5-6]. Следует отметить, что аппроксимация (21) справедлива для области вдали от точки истечения ($z \gg R$) и предсказывает значительное сужение пятна кальция при его выходе на поверхность по сравнению с отсутствием выталкивающей силы $r(\beta=0)/r(\beta \text{ реальное}) \sim 10^2$ (см. расчет в приложении 5). При наличии разности плотностей между железом и кальцием в случае наличия силы тяжести стенки струи и линии тока сужаются с ростом z из-за значительного возрастания скорости потока при всплытии кальция. Формула (21) обобщает зависимость линий тока в идеальной жидкости на случай наличия силы тяжести. Имеется случай, когда выталкивающее ускорение направлено, противоположено вектору начальной скорости в струе, тогда z с ростом t сначала уменьшается (становясь отрицательным), а потом увеличивается. Формулы линий тока для этого случая также приведены в приложении 5, причем в приложении 4 доказано, что кальций в области отрицательных z в этом случае не проникает в расплав больше чем на $\frac{1}{2}*r$ -т.е. больше чем на половину радиуса струи. Нетрудно также понять, что частицы кальция в этом случае будут проводить в ковше чуть больше времени, чем в случае если вектор скорости истечения со направлен с выталкивающим ускорением. Отсюда следует, что усвоения кальция будут отличаться для этих двух случаев. При этом максимум усвоения будет достигаться, если точка истечения достигает дна ковша, а кривая усвоения кальция в зависимости от скорости ввода не будет симметричной и будет наблюдаться ее «ангармонизм». Приведенные выше формулы позволяют сделать оценку, на сколько могут отличаться усвоения, приняв что усвоение пропорционально времени нахождения кальция в ковше.

Так времена достижения частицами кальция верхней плоскости шлака, где $z=H$ есть:

$H=at_+^2/2+(3)^{0.5}v_0t_+$ и $at_-^2=2H$, разница времен составляет примерно $(3)^{0.5}v_0t_+$, а отношение разницы ко времени составляет примерно $(1,5)^{0.5} v_0/(aH)^{0.5}=(1,5)^{0.5}*((-C_1)+v^2)^{1/2}+v)/R/(aH)^{1/2} \approx 16\%$ (формулы получены и расчеты проведены в приложении 4), что не велико и примерно соответствует

наблюдаемому в измерениях малому «ангармонизму» кривой усвоения вблизи максимума. При этом для больших наполнений проволок кальцием и, следовательно, для более медленных скоростей инъекции проволок эффект «ангармонизма», будет выражен меньше и с ростом скорости инъекции, он будет возрастать линейно. Численное соответствие наблюдаемых величин измерениям желательного было бы проверить.

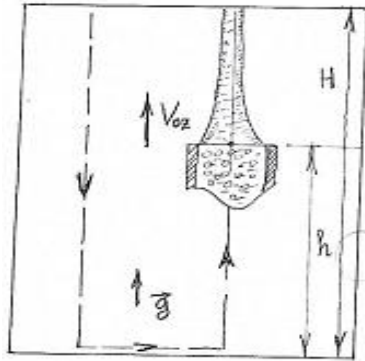


Рис.1 Выброс кальция, случай, когда струя направлена с ускорением свободного падения.

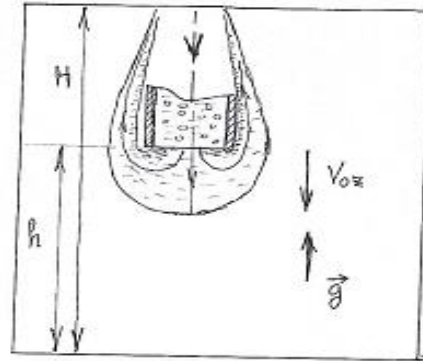


Рис.2 Выброс кальция, случай, когда струя направлена, противоположно ускорению свободного падения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Вывод системы уравнений (5).

Заметим, что правые части в (4) можно свернуть с учетом уравнения неразрывности до $v \cdot (d^2/d\xi^2((1+\xi^2)U+\xi W-U))$ в первом уравнении и до $v \cdot (d/d\xi(\xi \cdot d/d\xi(W+\xi U)))$ во втором. Левые части первого и второго уравнений (4) сворачиваются до $d/d\xi((U^2-(\xi W)^2-2\gamma) \cdot 0,5)$ и $d/d\xi(U(\xi W)-(\xi W)^2+\xi^2\gamma))$ соответственно. Проверяется непосредственной подстановкой. Третье уравнение следуя [5] записываем в виде: $d/d\xi((1+\xi^2)W-(\xi U+W))=\xi W$. Отсюда получаем два первых интеграла (4), что позволяет переписать ее в виде:

$$U^2-(\xi W)^2-2\gamma-2v \cdot (d(\xi(U\xi+W))/d\xi) = C_1 \quad (П1.1)$$

$(U\xi)W-(\xi W)^2+\xi^2 \cdot \gamma-v \cdot (\xi d(U\xi+W)/d\xi) = C_2$, здесь C_1, C_2 некоторые постоянные величины. Элиминируя производные $d(U\xi+W)/d\xi$ из этих двух выражений, приходим к первому интегралу, связывающему давление и компоненты скорости с учетом вязкости.

$$(U - \xi W)^2 - 2(1+\xi^2)\gamma - 2v(W + \xi U) = C_1 - 2C_2$$

Исключаем из (П1.1) член, связанный с давлением, обычным образом, умножая первое уравнение на ξ^2 и складывая его со вторым, умноженным на 2, что дает результат:

$$(\xi^2 U^2 + 2U \cdot (\xi W)) - (\xi W)^2 \cdot (\xi^2 + 2) = 2v \xi (\xi d/d\xi(W + \xi U) + d/d\xi(W + \xi U)) + (\xi^2 \cdot C_1 + 2C_2)$$

Заметим, что левая часть выписанного выражения есть разность квадратов функций: $(\xi U + W)^2 - ((1+\xi^2)W)^2$. Отсюда с учетом уравнения неразрывности, в форме как это было отмечено выше, видно, что в уравнениях (П1.1) для скоростей (давление исключено) фигурируют только комбинации $(1+\xi^2)W$ и $\xi U + W$. Вводим для них новые обозначения $Y = \xi U + W$ и $Z = (1+\xi^2)W$. В них уравнения для скоростей переписываются в виде:

$$2v\xi(Y'+\xi/(1+\xi^2)*Y)=(Y^2-Z^2-(C_1\xi^2+C_2))/(1+\xi^2) \quad (П1.2)$$

$d/d\xi (Z-Y) = \xi/(1+\xi^2)*Z$, запись $(...)' = d/d\xi$ означает взятие производной по ξ .

Последнюю систему можно переформулировать еще более компактно, если ввести $e^x = (1+\xi^2)^{1/2}$, что дает:

$$2v*(dY/dx+Y)=(Y^2-Z^2-(C_1*(e^{2x}-1)+C_2))/(e^{2x}-1) \quad (П1.3)$$

$$d/dx (Z-Y) = Z.$$

Поскольку (П1.3) есть система 2-х дифференциальных уравнений первого порядка, то она может быть сведена к одному уравнению 2-го порядка. Разность квадратов в правой части первого уравнения и почти такая же комбинация под знаком производной во втором наводят на мысль, что удобным способом редуцирования верхнего уравнения ко второму порядку является введение новой функции $d\omega/dx=Z$, где $\omega=Z-Y$. В этом случае нижнее уравнение (П1.3) выполняется тождественно, а верхнее редуцируется в нелинейное уравнение второго порядка, но удачным образом только для одной введенной функции ω :

$$2v*(\omega-d^2\omega/dx^2)+(\omega^2-2\omega*d\omega/dx)/(e^{2x}-1)-(C_1*e^{2x}+2C_2-C_1)/(e^{2x}-1)=0 \quad (П1.4)$$

здесь $d\omega/dx=Z$ и $\omega=Z-Y=\omega'-Y$.

Полученное уравнение является нелинейным уравнением второго порядка теория, которых хорошо развита в связи с задачами возникающими при нелинейных колебаниях систем. Нам однако, показалось удобнее найти эквивалентное (П1.4) уравнение первого порядка, так как это самый простой и наиболее изученный вид уравнений.

Если есть уравнение первого порядка, которое эквивалентно (П1.4), то (П1.4) должно допускать интегрирование при умножении на интегрирующий множитель f , где f некоторая функция x . Потребуем выполнения условия:

$$d/dx(a*\omega'+b*\omega+c*\omega^2+d)=f*((\omega-d^2\omega/dx^2)+(\omega^2-2\omega*d\omega/dx)/(2v*(e^{2x}-1))-(C_1*e^{2x}+2C_2-C_1)/(2v*(e^{2x}-1)))$$

$$\text{где } a, b, c, d \text{ -неизвестные функции } x. \quad (П1.5)$$

Раскрывая производные и приравнявая коэффициенты при разных степенях ω и ее производных в левой и правой частях, получаем для коэффициентов систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a'=-b; \quad c'=(1/2v)/(e^{2x}-1); \quad (П1.6)$$

$$a=-f; \quad c=-(f/2v)/(e^{2x}-1);$$

$$b'=f; \quad d'=-(f/2v)*(C_1*e^{2x}+2C_2-C_1)/(e^{2x}-1); \quad (...)'=d/dx.$$

Из левого столбца получаем $f=A\cosh(x)+B\sinh(x)$, где A и B произвольны и пока не определены. Из верхних двух уравнений правого столбца следует $c(x)=C_3*e^{-x}$, где C_3 константа. Подставим это выражение во второе уравнение правого столбца в результате чего получим $f=-4vC_3*\sinh(x)$. Подставим данное выражение в третье уравнение нижнего столбца, получим $d=C_4+2C_3(C_1\cosh(x)-C_2\sinh(x))$, здесь C_4 новая константа. Так как правая часть (П1.5) в силу (П1.4) есть тождественный ноль, отсюда вместо (П1.4)-(П1.5) получаем:

$$d\omega/dx - \omega \cdot (e^{2x} + 1) / (e^{2x} - 1) + (1/2v) \cdot (\omega^2 + (C_1 e^{2x} + ((C_4 - C_5)/C_3) \cdot e^x + (C_1 - 2C_2)) / (e^{2x} - 1)) = 0, \quad (\text{П1.7})$$

здесь C_5 – константа, которая вошла от интегрирования левой части (П1.5) при равенстве нулю правой. Полученное уравнение есть уравнение Рикатти и оно первого порядка. Оно в цилиндрической системе координат аналог уравнений приведенных в [5-6], но в сферической системе координат.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Рассмотрим уравнение (П1.7). Введем в левую часть вместо производной функцию $d\omega/dx = Z = Z - Y + Y = \omega + Y = \omega + (U\xi + W)$. Перемножим левую и правую части (П1.7) на множитель $e^{2x} - 1 = \xi^2$, откуда следует алгебраическое уравнение:

$$2v \cdot ((\xi U + W) \cdot \xi^2 - 2\omega) + (\omega^2 + C_1 \cdot \xi^2 + 2) - 2C_2 = -2C_0 \cdot (1 + \xi^2), \quad C_0 = (C_4 - C_5)/C_3 \quad (\text{П2.1})$$

вместо дифференциального (П1.7).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Рассмотрим (П2.1) для значения $\xi=0$ или $r=0$, т.е. в нашей задаче для оси струи. Получаем из (П2.1), что $-4v \cdot \omega(0) + \omega^2(0) + 2(C_1 - C_2 + C_0) = 0$. Так как $\omega(0) = Z - Y = Z - (U\xi + W) = (1 + \xi^2) \cdot W - (U\xi + W) = \xi(\xi W - U) = 0$ при $\xi=0$, получаем $C_1 - C_2 + C_0 = 0$. Так как левая часть уравнения для C_2 в (5) обращается в ноль для $\xi=0$, отсюда $C_2=0$. Из этого следует общее соотношение $C_1 = -C_0$, в случаях, когда одна из осей координат помещена на ось струи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.

Прежде всего, воспользуемся соотношением $d^2z/dt^2 = \partial/\partial z(p/\rho)$, которое по сути является уравнением для характеристик в уравнениях Эйлера для случая идеальной жидкости. Подставим в это отношение p/ρ из (19), имея ввиду, что $p/\rho_{Ca} = +/\gamma(\xi)/z^2 + az$, $a = g \cdot \Delta\rho/\rho_{Ca}$, $\gamma(\xi) = (-C_1) \cdot (1 - 1/(1 + \xi^2)^{1/2})/\xi^2$ (выбор знаков определяется ориентацией скорости истечения кальция при $t=0$ по отношению к направлению вектора ускорения свободного падения). Получим после дифференцирования по z :

$$d^2z/dt^2 = 1/\rho_{Ca} \cdot \partial p/\partial z = g \cdot \Delta\rho/\rho_{Ca} - / + (-C_1)/(r^2 + z^2)^{3/2}, \quad (\text{П4.1})$$

обратим внимание, что произошла смена знаков перед вторым слагаемым из-за того, что при течении несжимаемой идеальной жидкости давление падает вдоль оси, что эквивалентно торможению потока, т.е. скорость падает и ускорение отрицательно. Запишем закон сложения скоростей для частицы жидкости кальция при ускорении (П4.1):

$$dz/dt = at + / - (-C_1)^{0.5} / (r^2 + z^2)^{1/2} \quad (\text{П4.2})$$

Здесь второе слагаемое взято согласно (12) и справедливо для идеальной или при замене (18а) почти идеальной жидкости. Продифференцируем по времени (П4.2) учитывая, что в правой части r и z неявные функции времени, а для вычисления dz/dt и dr/dt используем формулы (12), (3) идеальной жидкости $v_z = dz/dt = W/z$ и $v_r = dr/dt = U/z$. Прделав выкладки, получим (П4.1), что говорит о том, что (П4.2) действительно интеграл от (П4.1). С другой стороны умножая (П4.1) справа и слева на dz/dt , и интегрируя по времени, получаем второй интеграл этого уравнения в форме энергии:

$$((dz/dt)^2 - v_0^2)/2 = az + \int_0^z (-C_1) dz / (r^2 + z^2)^{3/2}, \quad (\text{П4.3})$$

откуда следует:

$$dz/dt = (v_0^2 + 2az + \int_0^z 2(-C_1) dz / (r^2 + z^2)^{3/2})^{1/2}. \quad (\text{П4.4})$$

Заметим, что:

$$\int_0^z dz / (r^2 + z^2)^{3/2} = -(1/r) * \partial / \partial r (\int_0^z dz / (r^2 + z^2)^{1/2}) = \text{замена } z = r \sinh v = -(1/r) * \partial / \partial r (\int_0^v \cosh v dv / \cosh v) = -(1/r) * \partial / \partial r (v) = -(1/r) * \partial / \partial r (\ln(z + (z^2 + r^2)^{0.5}) - \ln r) = z/r^2 * (1 / (r^2 + z^2)^{1/2}). \quad (\text{П4.5})$$

Так как правая часть (П4.4) зависит только от z , то в дифференциальном уравнении (П4.4) переменные разделяются, что позволяет простым интегрированием найти закон изменения координат частиц кальция со временем в форме:

$$\int_0^{z(t)} dz (r^2 + z^2)^{1/4} / ((v_0^2 + 2az) * (r^2 + z^2)^{1/2} + (-v_0^2 * 2z)^{1/2}) = t, \quad v_0 = (-C_1)^{0.5} / r. \quad (\text{П4.6})$$

Интеграл в левой части (П4.6) не вычисляется в квадратурах. Удобно поэтому рассмотреть предельные случаи. В дальней от точки истечения зоне, где $z \gg r \sim R$, левая часть (П4.6) упрощается, что приводит к соотношению:

$$\int_0^{z(t)} dz (1 / ((v_0^2 / 2a + z) + (-v_0^2 / a))^{1/2}) = t * (2a)^{0.5}, \quad z \gg r \text{ откуда} \quad (\text{П4.7})$$

при выборе под корнем знака минус $z \approx at^2 / 2$ (пренебрегли поправкой $v_0^2 / 2a$ по сравнению с размером ковша H , т.к. $v_0^2 / 2a H \approx 4 (м/с)^2 / (2 * 45 (м/с^2) * 5 (м)) = 8,8 * 10^{-3} \ll 1$). И при выборе знака плюс $z = at^2 / 2 + (3)^{0.5} v_0 * t$.

Относительная разница во временах достижения одной и той же высоты ковша $z = H$ для частиц кальция стартовавших с одной высоты, но в противоположенных направлениях составит:

$$\Delta t / t = \Delta z / 2z \approx (3)^{0.5} * v_0 * (2H/a)^{0.5} / 2H = (3/2aH)^{0.5} * v_0 = (3)^{0.5} * 2 (м/с) / (2 * 5 (м) * 45 (м/с^2))^{0.5} \approx 16,3\% \quad (\text{П4.8})$$

Заметим, что из (П4.8) следует, эта разница линейно возрастает с ростом скорости частиц кальция в точке выброса или другими словами с ростом скорости инжекции проволоки.

Рассмотрим также случай ближайшей зоны, когда $z \ll r \sim R \neq 0$. В этом случае (П4.6) также упрощается до

$$\int_0^{z(t)} dz (1 / ((v_0^2 / 2a + zr) - (zv_0^2 / a))^{1/2}) = t * (2a/r)^{0.5}, \quad z \ll r,$$

откуда после простых вычислений получается результат:

$z = at^2 / 2 * (1 - v_0^2 / ar) + v_0 * t$. Выбор знака минус в этом соотношении соответствует тому, что начальная скорость и ускорение должны быть противоположены направлены. Тогда получим максимальное расстояние, на которое проникает вглубь расплава железа струя кальция при выходе из проволоки:

$$z_{\max} / r = (1/2) / (1 - ar / v_0^2), \quad \text{где } v_0^2 = (-C_1) / r^2 \quad (\text{П4.9})$$

Подставив численные значения, получим вблизи оси $ar/v_0^2 \sim 90(\text{м/с}^2) \cdot 10^{-3}(\text{м})/4(\text{м/с})^2 \approx 0,02 \ll 1$, т.е. $z_{\text{max}}/r = (1/2)$ с хорошей точностью и кальций проникает вглубь расплава примерно на половину радиуса струи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

Рассмотрим расход жидкости (в нашем случае кальция) через сечение в идеальной жидкости при наличии ускорения a :

$$Q_{\text{Ca}} = 2\pi\rho_{\text{Ca}} \int_0^r r dr \cdot (at + (-C_1)^{0,5} / (r^2 + z^2)^{0,5}), \quad a = g \cdot \Delta\rho / \rho_{\text{Ca}} \quad (\text{П5.1})$$

выполняя элементарное интегрирование во втором слагаемом, а в первом приняв, что t слабо зависит от r (это соответствует большим ускорениям и относительно невысоким начальным скоростям см. формулы Приложения 4) получим уравнение для $r(z)$:

$$((Q/\pi\rho_{\text{Ca}} - r^2 \cdot (2az)) / (2(-C_1)^{0,5} + z) = (r^2 + z^2)^{0,5}; \quad t = (2z/a)^{0,5}; \quad r = r(z) \quad (\text{П5.2})$$

Это уравнение является биквадратным для r и имеет точное решение. Чтобы это показать введем следующие величины:

$$R = Q/2\pi\rho_{\text{Ca}}(-C_1)^{0,5}; \quad x = r/R; \quad y = z/R; \quad \beta = (aR/2v_0^2)^{0,5}.$$

Заметим, что ранее параметр $(-C_1)^{0,5}$ определялся из условия $(-C_1)^{0,5} = v_0 \cdot R$, где v_0 - скорость инъекции проволоки, а R некоторый условный размер, который можно считать близким к радиусу струи. При фиксировании расхода Q величины $R = Q/2\pi\rho_{\text{Ca}}(-C_1)^{0,5}$ и $(-C_1)^{0,5}/v_0 = R$ получают разными и требуется их дополнительное согласование. Это приводит к условиям:

$$R = (Q/2\pi\rho_{\text{Ca}}v_0)^{0,5}; \quad (-C_1)^{0,5} = v_0 \cdot R; \quad v_0 - \text{ скорость инъекции проволоки. } (\text{П5.3})$$

В новых обозначениях вместо (П5.2) получаем уравнение:

$$(1 + y - \beta \cdot x^2 \cdot (y)^{0,5})^2 = y^2 + x^2, \quad (\text{П5.2a})$$

где левая часть полином от x второй степени. Решая квадратное уравнение (П5.2a) относительно x^2 , можно записать

$$x^2 \cdot \beta^2 \cdot y / (0,5 + \beta y^{0,5}(1+y)) = 1 \pm (-1 - \beta^2 y(1+2y) / (0,5 + \beta y^{0,5}(1+y))^2)^{1/2} \quad (\text{П5.4})$$

Так как при $y=0$, x должен быть конечен, выбираем знак минус в правой части (П5.4). Заметим, что для дробно-рациональной функции в правой части при любых положительных β и y справедливо неравенство:

$$\beta^2 y(1+2y) / (0,5 + \beta y^{0,5}(1+y))^2 \leq 1, \text{ т.к. } \beta^2 y(1+2y) \leq \beta^2 y(1+y)^2 \cdot (1 + 0,5/\beta y^{0,5}(1+y))^2 \text{ или}$$

$1/(1+y^2/(1+2y)) \leq (1 + 0,5/\beta y^{0,5}(1+y))^2$, т.е. подкоренное выражение в (П5.4) всегда больше нуля. При больших y дробно-рациональное выражение в правой части (П5.4) мало как $1/y$ и, следовательно, правую часть (П5.4) можно разложить в ряд, ограничиваясь первым членом разложения. Отсюда следует:

$$x \approx ((1+2y)/(1+2\beta y^{0,5}(1+y)))^{1/2} \quad (\text{П5.5})$$

Формула (П5.5) обобщает формулу для границ затопленной струи (и линий тока), которая известна для идеальной жидкости см. например [5], на случай наличия в струе выталкивающей силы. В частности при $a=0$ $\beta=0$, (П5.5) упрощается и дает известное из теории идеальной жидкости соотношение: $r=R(1+2r/R)^{0,5}$.

Интересно уточнить насколько, выталкивающее кальций ускорение сжимает струю, по сравнению с его отсутствием. Для оценок примем: высоту ковша в 5м и радиус проволоки 0,005м, что дает характерный $y \sim H/r = 10^3$. Примем, что скорость инъекции проволоки около 2м/с (120 м/мин, что характерно для проволок Hi-Cal [1]), а расход кальция при инъекции $0,1\text{кг/м} \cdot 2\text{м/с} = 0,2\text{кг/с}$. При таких значениях из (П5.3) получаем, $R = (0,2/6,28 \cdot 1,5 \cdot 10^2 \cdot 2)^{0,5} = 3,2 \cdot 10^{-3}\text{м}$ т.е. примерно половина радиуса применяемой проволоки, $\beta = (45 \cdot 3,2 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 4)^{0,5} = 0,134$, откуда $x(\beta=0)/x(\beta=0,134) = (1+2\beta \cdot y^{0,5} \cdot (1+y)) \approx 92$. Таким образом, из-за силы тяжести пятно кальция на шлаке окажется почти в сто раз меньше, чем в случае ее отсутствия. При этом сам характерный радиус пятна на данной высоте составит согласно (П5.5) $(2001)^{0,5} / 92 \approx 0,5$ начальных радиусов струи, т.е. струя, сжимается по мере всплытия из-за значительного увеличения скорости течения ближе к поверхности ковша.

Аналогично можно рассмотреть случай, когда струя кальция в точке выброса направлена против действия выталкивающей силы. В этом случае ветви зависимости $t=t(z)$ грубо можно определить из формулы $z = at^2/2 - v_0 \cdot t$; $v_0 = (-C_1)^{0,5}/R$. Причем $t > 0$, а $y = z/R$ может принимать отрицательные значения от 0 до $-0,25/\beta^2$ и затем от $-0,25/\beta^2$ до $+\infty$. Проводя дальнейшие преобразования, получается аналог уравнения (П5.5) для границ струи в виде соотношения:

$$x = (1-2y)^{1/2} / (2-y \mp (1-y) \cdot (1+4\beta^2 y)^{0,5})^{1/2},$$

которое предсказывает увеличение радиуса струи при выходе из проволоки, а затем ее сужение, что качественно верно, однако приводит к нефизическому «полумесяцу» линий тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fernando V.Guzman Optimization of injection treatment with High Purity Ca and High Compacted CaSi30/70 in Low Carbon Al-Killed and Al/Si-killed steels. IA Mexico S.A. de C.V.
2. Патент №2401868 Провод для рафинирования расплавленного металла и способ его изготовления.
3. E.-I.Castro-Cederno, A.Jardy, A.Carre ets Thermal modeling of the Injection of Standart and Thermally Insulated Cored Wire Metallurgical and Materials Transactions B, September, 2017
- 4.А.Д. Хорошилов и др. Чистый кальций- чистая сталь. Опыт применения кальций содержащей инъекционной проволоки при внепечной обработки стали. Конференция Сталеплавильщиков 2020, Москва.
5. Г.И.Броман, О.В.Руденко Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения, 2010, УФН, т180 №1 стр 98-104.
6. А.М. Gaifullin, V.V. Zhvick, Laminar submerged jets of incompressible fluid at large Reynolds numbers, 2023, UFN, 66(11), p1142-1153.
7. К.Б.Понфилович, Э.Э.Валеева, Вязкость жидких металлов, УДК532.133, стр.119
8. Л.Д.Ландау,Е.М. Лифшиц, Наука, 1988, т6, Гидродинамика, стр118.

