УДК 517.53, 517.54

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ НЕОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ ФУНКЦИЙ

Ступин Д. Л.
Тверь

Найдена точная оценка модулей тейлоровских коэффициентов на классах функций, ограниченных снизу по модулю.

The sharp estimation of the moduli of Taylor coefficients on classes of functions bounded from below modulo is found.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов.
Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, sharp Taylor coefficient modulus estimates.

1. Введение

Пусть $\Delta := \{z \,:\, z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций F, таких, что $|F(z)| \geqslant 1$, $z \in \Delta$, обозначим через E.

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то есть разложение функции F в ряд Тейлора будем записывать в виде

$$F(z) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \dots$$

Поскольку класс E инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = F(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением тех функций, для которых $F(0) > 1$. Далее, можно положить $\{F\}_0 := e^t$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через E_t. Ясно также, что для любой функции F класса E_t существует $h \in C$ такая, что

$$F(z) = e^{t \cdot h(z)}, \tag{1}$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$. Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами C и E_t.

2. Формула для коэффициентов

Продифференцировав (1) имеем:

$$F'(z) = t \cdot h'(z) \cdot F(z). \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) тейлоровские разложения функций F и h получим следующие формулы

$$\{F\}_0 \coloneqq e^t, \qquad \{F\}_n = \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{h\}_k\{F\}_{n-k}. \tag{3}$$

3. Точные оценки коэффициентов на классах E_t, $t>0$

Пусть

$$h^*(z) \coloneqq \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k.$$

Сформулируем для дальнейших ссылок следующее известное [1] предложение:

Лемма 1. *Если $h \in C$, то $|\{h\}_k| \leqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. Только вращения функция h^* в плоскости переменной z удовлетворяют условию $|\{h\}_k| = 2$, $k \in \mathbb{N}$, на классе C.*

Заметим, что класс E_0 состоит только из одной функции $f(z) \equiv 1$, поэтому без ущерба для сути дела можно считать, что $t > 0$. Получим оценки всех тейлоровских коэффициентов функций класса E_t. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $t > 0$, тогда для любой функции $F \in E_t$ имеют место точные неравенства*

$$|\{F\}_n| \leqslant \frac{2t}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{F^*\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Равенства имеют место только для вращений функции $F^*(z) \coloneqq e^{t\cdot h^*(z)}$ в плоскости переменной z.

Доказательство. Покажем сначала, что $\{F^*\}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Рассуждаем по индукции. Действительно, из формулы (3) следует, что $\{F^*\}_1 = 2t\{F^*\}_0 > 0$, так как $\{F^*\}_0 > 0$. Возьмём произвольный номер n и предположим, что $\{F^*\}_k > 0$ при $k = 0, \ldots, n$, тогда из (3) очевидно, что

$$\{F^*\}_{n+1} = \frac{2t}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\{F^*\}_{n+1-k} > 0.$$

Стало быть, в силу произвольности n, доказано, что $\{F^*\}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Покажем теперь, что $|\{F\}_n| \leqslant \{F^*\}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и равенства достигаются только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z. Снова рассуждаем по индукции. Согласно формуле (3)

$$|\{F\}_1| = t|\{h\}_1|\{F\}_0 \leqslant 2t\{F\}_0 = 2te^t,$$

причём равенство тут достигается только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z. Возьмём произвольный номер n и предположим, что точные оценки (4) справедливы для $|\{F\}_k|$ при $k = 0, \ldots, n$, и равенство достигается только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z, тогда очевидно, что

$$|\{F\}_{n+1}| \leqslant \frac{t}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k|\{h\}_k||\{F\}_{n+1-k}| \leqslant \frac{t}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\{h^*\}_k\{F^*\}_{n+1-k} = \{F^*\}_{n+1}.$$

Из второго неравенства понятно, что равенство здесь достигается только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z. Итак, в силу произвольности n, мы доказали формулу (4) и, таким образом, теорема полностью доказана. ■

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из формулы (4) ясно, что сколь бы большое положительное действительное число m мы не взяли, найдётся положительное действительное число t такое, что $\{F^*\}_n > m$. Отсюда следует, что задача об оценке модулей тейлоровских коэффициентов на классе E не имеет смысла.

4. Формулировка гипотезы Кшижа

Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f, таких, что

$$f = \frac{1}{F}, \tag{5}$$

где $F \in E$, обозначим через B. Формула (5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами B и E.

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [2], что если $f \in B$, то для её тейлоровских коэффициентов $\{f\}_n$ справедливы неравенства

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается на функциях вида $e^{i\psi} f^*(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$f^*(z,t) := e^{-t\,h^*(z)}, \qquad t \in [0, +\infty). \tag{6}$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана только для первых шести тейлоровских коэффициентов [3]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное семейство функций.

Фиксируем $t > 0$. Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f, таких, что $f(z) = 1/F(z)$, $F \in E_t$, обозначим через B_t. Сравните с формулой (5).

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы проанализировать возможность применения формулы, аналогичной формуле (3) на классах B_t.

5. Ещё одна формула для коэффициентов

В классах B_t проблема оценки модулей коэффициентов существенно сложнее, чем в классах E_t. Подтверждению сказанного служит хотя бы тот факт, что за пол века ни одна попытка её полного решения не увенчалась успехом.

Формулу (3) можно записать для класса B_t, $t > 0$, следующим образом:

$$\{f\}_0 \coloneqq e^{-t}, \qquad \{f\}_n = -\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{h\}_k\{f\}_{n-k}. \tag{7}$$

Видимо впервые формула, аналогичная (2) и (7), появилась в статье [4], где в частности получены точные оценки $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ на классах B_t, $t > 0$. Формула (7) позволяет решить проблему Кшижа если $\{h\}_k = 0$ или $\{f\}_k = 0$ при некоторых k. В работе [5] с помощью формулы (7) обобщены некоторые частные случаи, описанные в более ранних работах. Соответствующие ссылки см. в [5].

6. Функции, ограниченные по модулю сверху и снизу

Будем считать t большим при $t > 2$, иначе считаем t малым. Формула (7) не применима на классах B_t для получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов даже при малых и при больших t. Например, при больших t если $\{h^*\}_k$ положительны, то $\{f^*\}_k$ — знакопеременные и наоборот.

С другой стороны, так как в классах E_t такой проблемы нет, то резонно обратить внимание на то, как обстоят дела в подклассах класса E_t, состоящих из функций, ограниченных сверху по модулю. Дело в том, что с точностью до мультипликативной константы каждый ограниченный подкласс класса E_{t_1} является подклассом некоторого класса B_{t_2}, что позволяет легко переносить коэффициентные оценки между упомянутыми подклассами. Например, если $r > 1$ и голоморфная функция F отображает круг Δ в кольцо $K_{1,r} \coloneqq \{z : 1 < |z| < r\}$, а ноль в e^{t_1}, то $f \in B_{t_2}$, где $f(z) \coloneqq F(z)/r$, а $t_2 \coloneqq \ln r - t_1$.

Вообще, можно взять действительные числа ρ и r, удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho < r$ и рассмотреть множество $A_{\rho,r}$ всех голоморфных функций, удовлетворяющих неравенствам $\rho < |f(z)| < r$, $z \in \Delta$. Ясно, что если $f \in A_{\rho,r}$, то $f \in \rho \cdot E$ и $f \in r \cdot B$. Р. Эрмерс в [6, стр. 31] получила точные оценки модулей первых двух коэффициентов на классе функций $A_{\rho,r}$, зависящие от ρ и r.

Пусть $0 < \rho < 1$. Формула (5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $A_{\rho,1}$ и $A_{1,\frac{1}{\rho}}$, где $f \in A_{\rho,1}$ а $F \in A_{1,\frac{1}{\rho}}$. Формула

$$f = \rho F, \tag{8}$$

где $f \in A_{\rho,1}$ а $F \in A_{1,\frac{1}{\rho}}$ также устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $A_{\rho,1}$ и $A_{1,\frac{1}{\rho}}$.

Пусть $s > 0$. Рассмотрим класс $A_{e^{-s},e^{s}}$. Ясно, что формула (5) задаёт автоморфизм на $A_{e^{-s},e^{s}}$.

7. Подчинённые функции

Коснёмся представлений вида (1). Пусть функции F и f голоморфны в Δ. Функция f называется подчинённой в Δ для функции F, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ. Ясно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$.

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [7], однако термин был введён Д. И. Литлвудом [8] и В. Рогозинским [1], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [9, 10, 11, 12, 13]).

В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z,t)$.

Теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчинённых функции $F(z)$. Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$.

Теорема 2 ([1]). *Если $f \in M_F$, то*

$$|\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|, \tag{9}$$

причём оценка (9) точная и равенство в неравенстве (9) достигается только на вращениях функции $F(z)$ в плоскости переменной z.

Теорема 3 ([1]). *Если $f \in M_F$, то*

$$|\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|), \tag{10}$$

причём оценка (10) точная и равенство в неравенстве (10) достигается только на вращениях одной из функций $F(z)$ или $F(z^2)$ в плоскости переменной z.

8. Подкласы функций, ограниченных по модулю сверху и снизу

Во введении мы рассмотрели класс Каратеодори C. Для каждого $t > 0$ определим классы C_t с помощью формулы $C_t \coloneqq t \cdot C$. Другими словами, C_t есть множество функций h с нормировкой $h(0) = t$, отображающих единичный круг Δ в правую полуплоскость Π.

Пусть $s > 0$, а $t \in (0, s)$. Определим класс $C_{t,s}$ как подмножество функций из C_t, отображающих Δ на полосу $\Pi_s \coloneqq \{v \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} v < s\}$.

Утверждение 1. *Функция*

$$h_t^*(z) \coloneqq i\frac{s}{\pi} \ln \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{s}t} z}{e^{i\frac{\pi}{s}t} - z}$$

есть конформное отображение Δ на Π_s с действительными тейлоровскими коэффициентами.

Доказательство. Отображение $w = i\frac{\pi}{s}v$ переводит вертикальную полосу Π_s в горизонтальную полосу $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. При этом ось абсцисс переходит в ось ординат, в частности: $0 \mapsto 0$, $t \mapsto i\frac{\pi}{s}t$, $s \mapsto i\pi$.

Отображение $x = e^w$ переводит нашу горизонтальную полосу в верхнюю полуплоскость. При этом ось ординат переходит в верхнюю единичную полуокружность, в частности: $0 \mapsto 1$, $i\frac{\pi}{s}t \mapsto e^{i\frac{\pi}{s}t}$, $i\pi \mapsto -1$.

Отображение $y = \frac{e^{i\frac{\pi}{s}t}+1}{e^{i\frac{\pi}{s}t}-1}\frac{x-1}{x+1}$ переводит верхнюю полуплоскость в правую полуплоскость. При этом верхняя единичная полуокружность переходит в ось абсцисс, в частности: $1 \mapsto 0$, $e^{i\frac{\pi}{s}t} \mapsto 1$, $-1 \mapsto \infty$.

Наконец отображение $z = \frac{y-1}{y+1}$ переводит нашу правую полуплоскость в Δ. При этом ось абсцисс переходит в ось абсцисс, в частности: $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 0$, $\infty \mapsto 1$.

Искомое отображение $v = h_t^*(z)$ построим как композицию отображений, обратных к упомянутым.

Как видно из наших построений, отображение h_t^* переводит отрезок $[-1,1]$ в отрезок $[0,s]$, в частности: $-1 \mapsto 0$, $0 \mapsto t$, $1 \mapsto s$. Поскольку h_t^* переводит $[-1,1]$ в $[0,s]$, то мы можем рассматривать h_t^* как действительнозначную функцию действительной переменной, стало быть и её тейлоровское разложение имеет действительные коэффициенты. ■

Заметим, что

$$h_t^*(z) = t + 2\frac{s}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{s}t\right)}{k}z^k. \tag{11}$$

Пусть $0 < t < s$. Рассмотрим множество $A_{t,1,e^s}$ всех голоморфных функций f класса A_{1,e^s} с нормировкой $f(0) = e^t$. Ясно, что

$$f_t^*(z) \coloneqq e^{h_t^*(z)}$$

есть мажорирующая функция на классе $A_{t,1,e^s}$, поэтому любая функция f класса $A_{t,1,e^s}$ может быть представлена в виде

$$f(z) = f_t^*(\omega(z)), \qquad \omega \in \Omega_0. \tag{12}$$

Поскольку класс A_{1,e^s} инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w, то изучение подкласса функций, для которых $f(0) > 1$ не уменьшает общности. Изучение класса A_{1,e^s} также не уменьшает общности, так как для любых ρ и r таких, что $0 < \rho < r$ имеем, что $A_{\rho,r} = \rho \cdot A_{1,\frac{r}{\rho}}$ $(s = \ln r - \ln\rho > 0)$.

Из формулы (12) следует, что если $f \in A_{1,e^s}$, то

$$f(z) = e^{h(z)}, \qquad h \in C_{t,s}. \tag{13}$$

По аналогии с выводом формулы (3) из (13) получаем, что

$$\{f\}_0 \coloneqq e^t, \qquad \{f\}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{h\}_k\{f\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

в частности из (11) следует, что

$$\{f_t^*\}_0 \coloneqq e^t, \qquad \{f_t^*\}_n = \frac{2}{n}\frac{s}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\frac{\pi}{s}t\right)\{f_t^*\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Вычисления по формуле (15) дают

$$f_t^*(z) \;=\; e^t \;+\; 2\frac{s}{\pi}e^t\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right)z \;+\; \frac{s}{\pi}e^t\left(2\frac{s}{\pi}\sin^2\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \sin\left(2\frac{\pi}{s}t\right)\right)z^2 \;+\; \ldots \tag{16}$$

9. Точная оценка первого коэффициента

Пусть $s > 0$, а $t \in (0, s)$.

Теорема 4. *Если $f \in A_{1,e^s}$, то*

$$|\{f\}_1| \leqslant 2\frac{e^{s-\frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{s^2}}}, \tag{17}$$

причём оценка (17) точная и равенство в неравенстве (17) достигается только на вращениях функции $f^*_{t_1}$ в плоскости переменной z, где $t_1 = s - \frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}$.

Более того, если $f \in A_{1,e^s,t}$, $0 < t < s$, то

$$|\{f\}_1| \leqslant 2\frac{s}{\pi}e^t \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right), \tag{18}$$

причём оценка (18) точная и равенство в неравенстве (18) достигается только на вращениях функции f^*_t в плоскости переменной z.

Доказательство. По теореме 2 справедливо неравенство $|\{f\}_1| \leqslant |\{f^*_t\}_1|$. Теорема 2 также содержит описание множества функций f, для которых достигается равенство $|\{f\}_1| = |\{f^*_t\}_1|$. По формуле (16) имеем $\{f^*_t\}_1 = 2\frac{s}{\pi}e^t\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right)$. Заметив наконец, что $\{f^*_t\}_1 > 0$ при $t \in (0, s)$, мы получим формулу (18). Таким образом второе утверждение нашей теоремы полностью доказано.

Докажем теперь справедливость формулы (17). Для этого исследуем функцию

$$g_1(t) := 2\frac{s}{\pi}e^t\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right)$$

на максимум на интервале $(0, s)$. Имеем: $g_1(t) \geqslant 0$, $t \in [0, s]$, $g_1(0) = g_1(s) = 0$ и

$$g_1'(t) = 2\frac{s}{\pi}e^t\left(\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \frac{\pi}{s}\cos\left(\frac{\pi}{s}t\right)\right),$$

Уравнение $g_1'(t) = 0$ равносильно уравнению

$$\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \frac{\pi}{s}\cos\left(\frac{\pi}{s}t\right) = 0. \tag{19}$$

Поделив это уравнение на $\cos\left(\frac{\pi}{s}t\right)$ мы получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \frac{\pi}{s} = 0.$$

(Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{s}t\right) = 0$ при $t_k = s/2 + sk$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу того, что $0 < t_k < s$ нам подходит только $t_0 = s/2$, которое не является корнем уравнения (19).) Решая уравнение (19) найдём, что

$$t_k = sk - \frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

являются стационарными точками функции g_1. В нашем случае $0 < t < s$, поэтому

$$t_1 = s - \frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}$$

есть единственная подходящая точка, так как $0 < t_0 < s$. Далее, t_1 является точкой максимума для функции g_1, поскольку

$$g_1''(t_1) = -2e^{t_1}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{s^2}} < 0.$$

Наконец

$$g_1(t_1) = 2\frac{e^{s-\frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{s^2}}},$$

поэтому оценка (17) справедлива. Случаи равенства в неравенстве (17) уже были разобраны в первой части доказательства. ∎

10. Точная оценка второго коэффициента

Имеет место следующий результат [6]:

Теорема 5. *Если $f \in A_{1,e^s}$, то*

$$|\{f\}_2| \leqslant 2\frac{e^{s-\frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{s^2}}}, \tag{20}$$

причём равенство в неравенстве (20) достигается только на вращениях функции $f^*_{t_1}(z^2)$ в плоскости переменной z, где $t_1 = s - \frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}$.

Дополним этот результат для класса A_{1,e^s}, получив оценку $|\{f\}_2|$ на его подклассах $A_{1,e^s,t}$, $0 < t < s$:

Теорема 6. *Если $f \in A_{1,e^s,t}$, $0 < t < s$, то*

$$|\{f\}_2| \leqslant \begin{cases} 2\frac{s}{\pi}e^t\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right), & 0 < t \leqslant t_1, \\ 2\frac{s}{\pi}e^t\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right)\left(\frac{s}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{s}t\right)\right), & t_1 < t < s, \end{cases} \tag{21}$$

где $t_1 = s - 2\frac{s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{s}$. При $0 < t < t_1$ равенство в неравенстве (21) достигается только на вращениях функции $f^*_t(z^2)$ в плоскости переменной z. При $t_1 < t < s$ равенство в неравенстве (20) достигается только на вращениях функции $f^*_t(z)$ в плоскости переменной z.

Доказательство. По теореме 3 для доказательства этого утверждения, достаточно найти значения t, при которых $|\{f^*_t\}_1| > |\{f^*_t\}_2|$.

1. Неравенство $\{f^*_t\}_1 > \{f^*_t\}_2$ при $0 < t < s$ равносильно неравенству

$$\frac{s}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s}t\right) \leqslant 1.$$

Соответствующее уравнение имеет следующие решения

$$t_k = \frac{s}{\pi}((-1)^k - 1)\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{\pi^2}}} + sk, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Условию $0 < t_k < s$ удовлетворяет только решение t_1. Итак, $\{f_t^*\}_1 > \{f_t^*\}_2$ при $0 < t < t_1$, где

$$t_1 = s - 2\frac{s}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}}.$$

2. Неравенство $\{f_t^*\}_1 > -\{f_t^*\}_2$ при $0 < t < s$ равносильно неравенству

$$\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s}t\right) \geqslant -1.$$

Соответствующее уравнение имеет следующие решения

$$t_k = \frac{s}{\pi}((-1)^{k+1} - 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}} + sk, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ни одно из которых не удовлетворяет условию $0 < t_k < s$. Итак, $\{f_t^*\}_1 > -\{f_t^*\}_2$ при $0 < t < s$.

Таким образом, мы показали, что $|\{f_t^*\}_1| > |\{f_t^*\}_2|$ при $0 < t < t_1$, то есть формула (21) справедлива. ■

11. Заключение

В этой статье мы рассмотрели классы E и B, а также их подклассы, которые генерируются из классов $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r < +\infty$. Интересно, что $A_{\rho,1} \to B$, при $\rho \to 0$, а $A_{1,r} \to E$, при $r \to \infty$. Как было показано выше, формулы типа (3) не могут быть использованы даже на классах $A_{1,r} \to E$ для получения точных оценок коэффициентов при $n \geqslant 2$. С другой стороны, классы $A_{\rho,r}$ имеют больше свойств чем, например, класс B, что можно использовать для изучения класса B.

Кшиж выдвинул свою гипотезу [2] располагая только оценками модулей первых двух коэффициентов на классе B, поэтому мы можем выдвинуть следующее предположение: если $f \in A_{1,e^s}$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2\frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

причём равенство в неравенстве (22) достигается только на вращениях функции $f_{t_1}^*(z^n)$ в плоскости переменной z, где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$.

Заметим, что $e^{-s}A_{1,e^s}$ является подклассом класса B и оценка (22) переходит для класса $e^{-s}A_{1,e^s}$ в оценку

$$|\{f\}_n| \leqslant \frac{2}{e},$$

то есть высказанное только что предположение в пределе даёт гипотезу Кшижа. Действительно,

$$2\frac{e^{-\frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}} \to \frac{2}{e} \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

а $e^{-s}A_{1,e^s} \to B$ при $s \to \infty$.

Список литературы

[1] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[2] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[3] Ступин Д. Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. // Вестник российских университетов. Математика. (2024). Т. 29. № 145. С. 98–120.

[4] Гальперин И. М. Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций. // УМН. 1965. Т. 20. Вып. 1(121). Стр. 197–202.

[5] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // Advances in Mathematics. 2015 V. 273. P. 716–745.

[6] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.

[7] Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. V. 35. N. 7. P. 1–35.

[8] Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

[9] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[10] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.

[11] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[12] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2010. С. 52–60.

[13] Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.