

К теории плавления тонкостенных порошковых проволок.

Борисов А. ^{*)}; Найденов Р. ^{*)}

^{*)} Injection Alloys Group

Предложен полуэмпирический метод расчета оптимальной скорости инъекции порошковой проволоки в сталеразливочный ковш пригодный для тонкостенных порошковых проволок с герметичными стальными оболочками. Для кальцийсодержащих наполнителей расчеты по данному методу не вышли за рамки $\pm 15\%$ отклонений от наблюдавшихся на ковшах большой емкости (до 350тн) скоростей, для которых у проволок Hi-Cal [1] зафиксированы максимумы в усвоения кальция (т.е. для их оптимальных значений). В рамках метода предложена простая аналитическая модель расчета кристаллизующегося вокруг оболочки устойчивого твердого металлического образования расплава солитонного типа.

Введение.

В настоящее время промышленностью начали осваиваться новые виды порошковых проволок (пп) имеющих стальную, замкнутую (заверенную либо лазерной, либо ТВЧ-сваркой) оболочку различной толщины [1]. Причем наполнителями в таких оболочках могут являться: запрессованный порошковый кальций Са, кальциевый пруток из монолитного материала, смесь механическая Са и Fe, ферросплав SiСа и др. Наличие такого большого набора продуктов приводит к необходимости в случае конкретной пп (т.е. заданных толщины, диаметра и состава наполнителя), проводить работу по оптимизации режимов инъекции данных проволок в сталеплавильные агрегаты в рабочих условиях сталеплавильного производства, что не всегда возможно из-за большого количества внутренних технологических инструкций и загруженности. Сократить данную работу могло бы наличие расчетных программ, которые показали надежность расчетов по ним сравнением с уже выполненными и отработанными практическими режимами инъекции. Заметим, что при оптимизации по скорости ввода пп в ковшевые агрегаты для такого сравнения требуется выполнить расчет динамической картины нагревания и плавления системы оболочка –наполнитель. Это является достаточно сложной задачей в 3-х измерениях и требует в общем случае решения уравнения теплопроводности совместно с уравнениями, описывающими фазовые превращения. Даже с учетом того факта, что в порошковых проволоках, имеется осевая симметрия, такая задача требует применения специальных пакетов прикладных программ и значительных вычислительных мощностей, что практически всегда недоступно ни производителям пп, ни их потребителям. Как это будет показано в дальнейшем полуэмпирический метод обеспечивает вполне приемлемую инженерную (<15%) точность вычислений, если ряд расчетных параметров выбран из совпадения с экспериментами. При таком подходе уравнение теплопроводности удастся заменить на систему небольшого числа дифференциальных уравнений первого порядка (аналогично тому как это делается в разностных методах), что дает возможность использовать для расчетов бухгалтерские, складские пакеты офисных программ в среде Windows такие как Microsoft Office Excel, которые имеются практически в каждой организации.

2. Расчетная модель. В качестве модели примем, что пп представляет из себя бесконечно длинную цилиндрическую оболочку с наполнителем круглого сечения. Пренебрежем тепловыми потоками, которые распространяются вдоль оси симметрии по сравнению с потоками тепла вдоль радиуса. Последнее условие достаточно очевидно, т.к. времена инъекции пп (2-5мин), как правило, значительно меньше времени передачи тепла через стальную оболочку на значительные по сравнению с размерами сталеплавильного агрегата расстояния (десятки мин). Характерная кривая распределенная температурного поля вдоль радиуса пп показана на рис 1 сплошной линией. Отметим наличие на ней участка, где после введения (причем быстрого) пп в расплав вокруг оболочки кристаллизуется “намороженный” слой металла, который по мере движения проволоки в ковш сначала растет в радиусе, а затем достигнув критического значения, начинает плавиться, плавится совсем и только после этого начинает плавиться оболочка. Заметим также, что диаметр пп всегда много меньше размера сталеплавильного ковша и это дает возможность сделать еще одно упрощение в расчетах. В частности мы можем разбить все температурное поле (непрерывная кривая на рис 1) на участки: наполнитель, оболочка, “намороженный” слой, где в силу малых размеров этих

участков по сравнению с диаметром ковша принять температуры постоянными и равными их средним значениям.

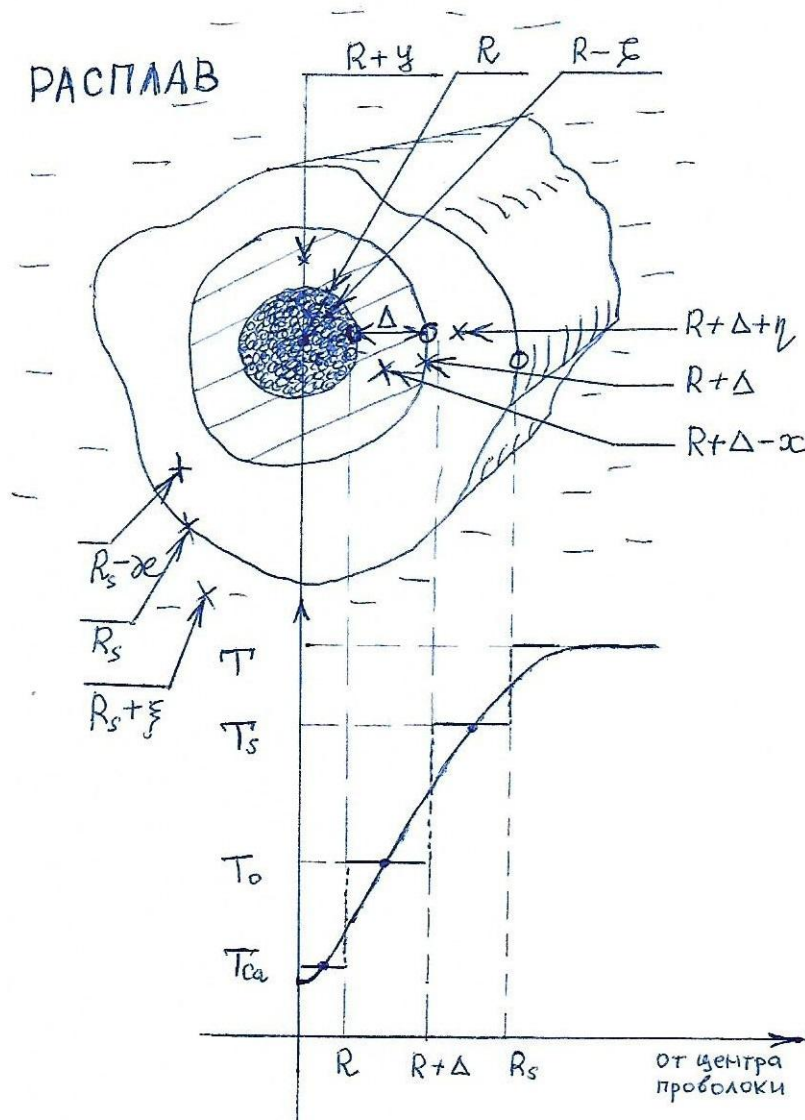


Рис. 1. Пояснения к принятым обозначениям.

Получим систему уравнений, которая определяет среднюю температуру выделенных элементов (усреднение берется вдоль направления радиуса элемента и пренебрегается зависимостью температуры элементов от координаты вдоль оси симметрии) от времени, после мгновенного помещения участка пп заданной длины в расплав. Начнем с подсчета тепла, которое попадает в наполнитель (для определенности будем говорить о кальции, однако это не имеет принципиального значения) и перетекает от оболочки. Примем, что средняя температура наполнителя T_{ca} устанавливается в переходном слое толщиной ζ (см. Рис 1.). Зная поток тепла, в точке с цилиндрической координатой $r=R-\zeta$ (R – радиус стержня наполнителя) $j_{r=R-\zeta} = \lambda_{ca} * (\delta T / \delta r)_{r=R-\zeta}$, можно вычислить скорость, нагревания цилиндрического элемента наполнителя из закона теплопроводности Фурье:

$$dt \frac{dT_0}{dt} (\pi R^2) \rho_{Ca} C_{Ca} L = \int_{r=R-\varepsilon}^R S_R dt = \lambda_{Ca} \frac{T_0 - T_{Ca}}{R - (R - \varepsilon)} 2\pi R L dt$$

Здесь T_0 - температура оболочки, S_R - площадь поперечного сечения через которое в наполнитель длины L входит тепло из оболочки, dt - промежуток времени, в течение которого происходит процесс, λ_{Ca} - коэффициент температуропроводности кальция, ρ_{Ca} - плотность стержня наполнителя, C_{Ca} - его теплоемкость. Дополнительным соотношением к этому уравнению является равенство потоков тепла в переходной слой наполнителя из переходного слоя оболочки, т.е.

$(j_-)_{r=R-\varepsilon} = (j_+)_{r=R+\gamma}$. Последнее условие дает соотношение:

$$\lambda_{Ca} \frac{(T_0 - T_{Ca})/2}{R - (R - \varepsilon)} = \lambda_o \frac{(T_0 - T_{Ca})/2}{R + \gamma - R} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_{Ca}}{\varepsilon} = \frac{\lambda_o}{\gamma}$$

Аналогичные рассуждения для оболочки дают еще два соотношения

$$dt \frac{dT_0}{dt} (\pi ((R+\Delta)^2 - R^2)) \lambda_o \rho_o C_o L = \lambda_o \frac{T_s - T_0}{x} 2\pi (R+\Delta) L dt - \lambda_o \frac{T_0 - T_{Ca}}{\gamma} 2\pi R L dt$$

и $\frac{\lambda_o}{x} = \frac{\lambda_s}{\varepsilon}$

здесь T_s - температура намерзшего слоя, λ_o , ρ_o , C_o - коэффициенты температуропроводности, плотность, теплоемкость материала оболочки, x - толщина переходного слоя оболочки, η - аналогичная величина со стороны «намерзшего» слоя (см Рис1).

Для «намерзшего» слоя получаем уравнения

$$dt L \frac{dT_s}{dt} [\pi (R_s - (R+\Delta)^2)] \rho_s C_s = \lambda_s \frac{T_p - T_s}{\xi} 2\pi R_s L dt - \lambda_s \frac{T_s - T_0}{\varepsilon} 2\pi (R+\Delta) L dt + q_{пл} 2\pi R_s L \frac{dR_s}{dt} dt$$

и $\frac{\lambda_o}{x} = \lambda_s / \eta$ причем считаем, что температуропроводности в расплаве и в «намерзшем» слое не отличаются, что делает их пограничные условия одинаковыми, т.е. приводит к уравнению $\xi = \varepsilon$.

Здесь T_p - температура расплава в ковше, λ_s , ρ_s , C_s температуропроводность, плотность и теплоемкость в «намерзшем» слое расплава, $q_{пл}$ - теплота плавления «наморозенного» слитка.

Еще одно уравнение получим, если учтем, что вся теплота необходимая для расплавления небольшого слоя толщины dR_s закристаллизованного слоя должна поступить из расплава и в момент поступления она тратится только на его плавление, откуда:

$$dq_{пл} = q_{пл} 2\pi R_s dR_s \rho_s L = - \lambda_s \left(\frac{dT_s}{dR_s} \right) 2\pi R_s L dt$$

или $T_s^\circ = \frac{dT_s}{dT} = - \text{sign } q_{пл} \frac{(q_{пл}) \rho_s}{\lambda_s} (R_s^\circ)^2$, здесь $\text{sign } q_s$ - знак теплоты плавления («+» когда идет кристаллизация и «-» для плавления).

Откуда окончательно приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT_o}{dt} &= \frac{\lambda_o}{\Delta \rho_o c_o} \frac{1+\Delta/R}{1+\Delta/R} \frac{T_s - T_o}{\partial c} - \frac{R \lambda_o}{\Delta \rho_o c_o (R+\Delta)} \frac{T_o - T_{ca}}{y} \\ \frac{dT_{ca}}{dt} &= \frac{2 \lambda_{ca}}{\rho_{ca} c_{ca} R} \frac{T_o - T_{ca}}{\xi} \\ \frac{d}{dt} (T_s (R_s^2 - 1)) &= \frac{2 \lambda_s}{c_s \rho_s (R+\Delta)^2 R} \frac{T_p - T_s}{\xi} - \frac{2 \lambda_s}{c_s \rho_s (R+\Delta) R} \frac{T_s - T_o}{\eta} + \frac{2 q_{пл}}{c_s} R_s R_s^{\circ} \\ \frac{dT_s}{dt} &= - \frac{q_{пл} \rho_s}{\lambda_s} R_s^2 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

из условий непрерывности производных на границах разделов:
наполнитель – оболочка, оболочка – замороженный слой, замороженный слой – расплав
получаются дополнительные условия:

$$\frac{\lambda_{ca}}{\xi} = \frac{\lambda_o}{y}; \quad \frac{\lambda_o}{x} = \frac{\lambda_s}{\eta}; \quad \xi = \partial c,$$

где $\lambda_o, \lambda_{ca}, \lambda_s$ – температуропроводности оболочки, кальция, слитка; $\rho_o, \rho_{ca}, \rho_s$ – их плотности, c_o, c_{ca}, c_s – их удельные теплоемкости, $R+\Delta, R, R_s$ – их радиусы, $q_{пл}$ – удельная теплота плавления стали (и оболочки). Как видно эта система содержит 10 неизвестных величин: 3 температуры – T_o, T_{ca}, T_s ; радиус слитка – R_s и 6 величин, которые определяют характерные размеры для вычислений производных от температур T_o, T_{ca}, T_s по радиусу – $x, y, \xi, \eta, \zeta, \partial$.

Обезразмерим систему (1). Для этого введем характерную единицу времени соотношением: $\tau_o = \rho_o * c_o * \Delta^2 \mu / \lambda_o$. Далее примем, что время $z = t / \tau_o$ безразмерное и измеряется в единицах τ_o . Выбрав μ в виде $\mu = x^* (1 + \Delta / 2R) / (1 + \Delta / R)$ (x определяет ширину переходного слоя от одной температуры к другой со стороны оболочки на границе оболочка-замороженный слой см. Рис.1 и пока не определен) добиваемся того, что коэффициент перед первым слагаемым в первом уравнении становится равен единице. Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{t}_o &= (t_s - t_o) - \frac{R}{R+\Delta} \frac{\partial c}{y} (t_o - t_{ca}) \\ \dot{t}_{ca} &= \frac{2 \lambda_{ca} \tau_o}{\rho_{ca} c_{ca} y R} (t_o - t_{ca}) = 2 \frac{\rho_o c_o}{\rho_{ca} c_{ca}} \frac{\Delta}{R} \frac{\partial c}{y} \frac{1+\Delta/R}{1+\Delta/R} (t_o - t_{ca}) \\ \frac{d}{dz} (t_s (r_s^2 - 1)) &= \frac{2 \lambda_s c_o \rho_o}{c_s \rho_s (1+\Delta/R)^2 \lambda_o} \frac{\Delta}{R} \frac{\partial c}{\xi} t_s (1 - t_s) - \frac{2 \rho_o c_o}{\rho_s c_s (1+\Delta/R)} \frac{\Delta}{R} (t_s - t_o) + \frac{2 q_{пл}}{c_s} R_s R_s^{\circ} \\ \dot{t}_s &= - \Omega R_s^2; \quad \frac{\lambda_o}{x} = \frac{\lambda_s}{\eta}; \quad \frac{\lambda_{ca}}{\xi} = \frac{\lambda_o}{y}; \quad \xi = \partial c \\ t_o &= T_o / T_p; \quad t_{ca} = T_{ca} / T_p; \quad t_s = T_s / T_p; \quad z = t / \tau_o \\ r_s &= \frac{R_s}{R+\Delta} \end{aligned} \right. \quad (1')$$

Удобно (1') записать через коэффициенты

$$a = (R/(R+\Delta)) (x/y); \quad b = 2 \frac{p_0 c_0}{p_{c0} c_{c0}} \frac{\Delta}{R} \frac{x}{y} \frac{1+\Delta/R^2}{1+\Delta/R}$$

$$\omega_s = 2 \frac{c_0 p_0}{c_s p_s} \frac{\lambda_s}{\lambda_0} \frac{(1+\Delta/2R)}{(1+\Delta/R)^2} \frac{\Delta}{R} \frac{x}{y} = \omega_0 \frac{\lambda_s}{\lambda_0} \frac{x}{y} \frac{1}{(1+\Delta/R)}$$

$$\omega_0 = 2 \frac{c_0 p_0}{c_s p_s} \frac{1+\Delta/2R}{(1+\Delta/R)^2} \frac{\Delta}{R}; \quad \Omega = \frac{q_{pm} p_s}{c_0 T_p} \left(\frac{p_s \lambda_0}{p_0 \lambda_s} \right) \frac{(R+\Delta)^2 (1+\Delta/R)}{x \cdot \Delta}$$

$$D = \frac{2 q_{pm}}{c_s T_p}; \quad \gamma_0 = \frac{p_0 c_0}{\lambda_0} x \cdot \Delta \frac{1+\Delta/2R}{1+\Delta/R}$$

в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{t}_o = (t_s - t_o) - a(t_o - t_{c0}) \\ \dot{t}_{c0} = b(t_o - t_{c0}) \\ \frac{d}{dz} ((r_s^2 - 1)t_s) = \omega_s(1 - t_s) - \omega_0(t_s - t_o) + D r_s r_s^c \\ \dot{t}_s = -\Omega r_s^2 \\ x = \eta(\lambda_0/\lambda_s); \quad \xi = x; \quad y = \xi(\lambda_0/\lambda_{c0}) \end{cases} \quad (1'')$$

с начальным условиями $t_{c0}(0)=t_o(0)=0$; $t_s(0)=r_s(0)=1$.

Можно строго доказать (не делаем этого для краткости), что 3-е и 4-ое уравнения (1'') дают для t_s кривую уменьшающуюся от 1 до $\min$ значения и затем, стремящуюся к 1 при z стремящимся к бесконечности. Аналогично для r_s получаем кривую возрастающую от 1 до $\max$ значения, а затем спадающую к 1 при z стремящимся к бесконечности. Заменим эти кривые двумя параболлами до некоторого достаточно большого $z=2z_0$ и единицами при $z>2z_0$. Тогда получаем окончательную систему для решения:

$$\begin{cases} \dot{t}_o = (t_s - t_o) - a(t_o - t_{c0}) \\ \dot{t}_{c0} = b(t_o - t_{c0}) \\ t_s = \begin{cases} 1 - \frac{\beta}{2z_0} (2zz_0 - z^2) & 0 < z < 2z_0 \\ 1 & 2z_0 < z \end{cases} \\ r_s = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2z_0} (2zz_0 - z^2) & 0 < z < 2z_0 \\ 1 & 2z_0 < z \end{cases} \\ t_s(0) = t_s(2z_0) = r_s(0) = r_s(2z_0) = 1 \\ x = \eta(\lambda_0/\lambda_s); \quad \xi = x; \quad y = \xi(\lambda_0/\lambda_{c0}) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь введены новые переменные $\alpha, \beta, z_0, r_s^{\max}, t_s^{\min}$ определяющие введенные параболлы. Для введенных величин можно получить систему из пяти алгебраических уравнений, решать которую значительно проще, чем исходные два дифференциальных соотношения для определения t_s и r_s . Систему этих уравнений определяют следующие условия: связь между константами в стационарных точках, при z стремящемся к бесконечности и в точках экстремумов $dr_s/dz = dt_s/dz = 0$. Получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_z}{\omega_0} \left(\frac{\beta z_0}{2} \right) = (t_s^{\min}(z_0) - t_0(z_0)) \\ \beta z_0 = 2 \left(1 - t_s^{\min}(z_0) \right) \\ \alpha = \beta \left(r_s^{\max}(z_0) - 1 \right) / \left(1 - t_s^{\min}(z_0) \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

Также используем равенство разложения решений 2-х дифференциальных уравнений для t_s и r_s из (1'') в окрестности малых z в ряд по степеням z , что даёт (учитываем только степени 1-го порядка по z , т.е. полагаем $r_s = 1 + \alpha \cdot z$ и $t_s = 1 - \beta \cdot z$ и, кроме того, учитываем, что в третьем уравнении (1'') в окрестности малых z является более правильным в левой части уравнения отбросить -1 , что означает учет наличия наполнителя и оболочки для создания более холодного «намороженного» слоя вокруг проволоки в момент ее ввода в расплав. В противном случае «холода» самого намороженного слоя при $z=0$ не хватает, что бы получить искомые значения $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, т.е. чтобы началась кристаллизация расплава вблизи проволоки)

$$\alpha = (1/2\Omega) \cdot (((2-D)^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot \Omega)^{1/2} + (2-D))$$

$$\beta = \Omega \cdot \alpha^2$$

Окончательно получаем, что в системе (2)-(3) имеется 12 уравнений в которых неизвестными являются 15 (т.е. $4+6+5=15$) переменных. Иными словами для однозначного решения три переменные остаются неопределенными. Это есть полуэмпирические константы, которые должны быть введены в расчёт для замыкания системы. Эмпирические постоянные для замыкания системы вводим следующим образом :

$$\tau_0; \quad x/y; \quad x/\xi$$

и эти данные должны быть выбраны из условий лучшего согласования расчета с измерениями.

2.1 Приближенное решение системы (3).

В системе (3) пять неизвестных: α , β , z_0 , $r_s^{\max}$, $t_s^{\min}$. Смысл этих переменных следующий: z_0 определяет безразмерное время (или вертикальную координату вниз под шлак, т.е.

$z_0 \cdot \tau_0 \cdot V$ инъекции), когда слиток затвердевшего вокруг проволоки расплава начинает плавиться и его кристаллизация прекращается; $2z_0$ момент времени его полного расплавления и исчезновения; α и β скорости роста радиуса слитка и скорость падения его температуры при малых временах z :

$$r(z) = 1 + (\alpha/2z_0) \cdot (2z \cdot z_0 - z^2) = 1 + \alpha z - (\alpha/2z_0) \cdot z^2 \approx 1 + \alpha z \text{ при малых } z;$$

$$t(z) = 1 - (\beta/2z_0) \cdot (2z \cdot z_0 - z^2) = 1 - \beta z + (\beta/2z_0) \cdot z^2 \approx 1 - \beta z \text{ при малых } z;$$

$r_s^{\max}$, $t_s^{\min}$ максимальное значение радиуса слитка и минимальное значение его температуры.

Решение выписанной системы алгебраических уравнений удобно начинать с определения α и β , что даёт:

$$\alpha = ((1-D)/2)/\Omega + ((\omega_0/\Omega) + ((1-D)/2)/\Omega)^{0.5}; \quad \beta = \Omega \cdot \alpha^2; \quad r_s^{\max} = 1 + (\alpha z_0/2); \quad t_s^{\min} = 1 - (\beta z_0/2),$$

кроме того, необходимо также решить уравнение для z_0 :

$$z_0 = (\omega_0 / (\omega_s + \omega_0)) * (1 - t_0(z_0)) * (2/\beta).$$

Сложность решения выписанной выше системы состоит в том, что входящая в эти уравнения функция $t_0(z)$ (температура оболочки) сама зависит от решений данной системы, т.к. поток тепла из ковша в оболочку экранируется затвердевшим слоем металла с более низкой температурой. Из выписанного выше можно заметить, что чем больше успеет нагреться оболочка и, следовательно, тем ближе будет значение t_0 при $z=z_0$ к единице, тем меньше будет z_0 - полуширина затвердевшего слоя расплава, экранирующего поток тепла из ковша в проволоку. Тем меньше также будет температура «замороженного» слитка $t_s^{\min}$ отличаться от температуры расплава, т.е. от единицы т.к.:

$$t_s^{\min} = 1 - (\omega_0 / (\omega_s + \omega_0)) * (1 - t_0(z_0)).$$

С другой стороны видно, что скорость нарастания затвердевшего слоя расплава на входе проволоки в ковш α , может иметь только положительное значение. Таким образом, слиток всегда образуется для данной проволоки и температуры расплава. Последнее есть следствие проведенной в (3) корректировки уравнений. Так уравнение для слитка

из (1'') $d/dz((r_s^2 - 1)t_s) = \omega_s(1 - t_s(z)) - \omega_0(t_s(z) - t_0(z)) + D \cdot r_s \cdot (dr_s/dz)$ при малых z превращается в уравнение $\alpha = \omega_0 / (D - 2) + o(z)$ или $\alpha \approx (\omega_0 / 2) * (C_s T_p / (q_{пл} - C_s T_p))$. Даже приняв температуру расплава комнатной $T_p = 3 \cdot 10^2$ гр.С, для $C_s = 7,7 \cdot 10^2$ Дж/кг·К и $q_{пл} = 9 \cdot 10^4$ Дж/кг (см таблицу 3 далее, взятую из [4]) α отрицательно, т.е. слиток не образуется. Иными словами холода одной оболочки не хватает, чтобы быстро охладить близлежащий к ней слой расплава до кристаллизации. Чтобы это исправить в левой части выписанного выше уравнения слитка приходится отбрасывать единицу, получая $\alpha > 0$ (иными словами приходится корректировать теплосодержание слитка, учитывая холод не только оболочки, но и наполнителя). При этом $\alpha = ((1 - D/2)/\Omega) + ((\omega_0/\Omega) + ((1 - D/2)/\Omega)^2)^{0,5}$ положительно при любых температурах расплава и Ω сама линейно зависит от D , т.е. $\Omega = D/2 * \Omega_0$ (здесь введено $\Omega_0 = ((C_s \rho_s / \lambda_s) / (C_o \rho_o / \lambda_o)) * (R/x)(R/\Delta) * (1 + \Delta/R)^3 / (1 + \Delta/2R)$). Минимальная скорость роста α достигается при $D \gg 2$ и $\alpha \rightarrow 0$. Максимально возможный радиус слитка: $r_s^{\max} = 1 + (\alpha/\beta) * (\omega_0 / (\omega_s + \omega_0)) * (1 - t_0(z_0))$ достигается в случае, если оболочка практически не прогрелась (т.е. $t_0(r_0) \ll 1$) и составляет $r_s^{\max} = 1 + (\alpha/\beta) * (\omega_0 / (\omega_s + \omega_0))$.

Рассмотрим уравнение, которое определяет z_0 - протяженность затвердевшего слитка по времени (или его полувысоту $z_0 * \tau_0 * V_{инъекции}$ внутри ковша). Это третье уравнение в выписанной системе. Для простоты возьмем $t_0(z)$ как решение (2) для пустотелой оболочки $t_0(z) = 1 - \exp(-z)$ (см. п.6.1 далее). Отсюда получаем приближенное уравнение для z_0 в виде $z_0 = (2/\beta) * (1 + (\omega_s/\omega_0))^{-1} * \exp(-z_0)$. Его приближенное решение $z_0 \approx (2\omega_0) / ((\beta + 2) * \omega_0 + \beta * \omega_s)$ при $\beta \gg 1$.

В частности для тонкостенных стальных проволок, у которых обычно $\Delta/R \ll 1$ из сказанного выше получаем $(\Omega/D/2) \approx (1 + 2,5 * (\Delta/R)) * (R^2 / (x * \Delta))$, считая, что $C_s \rho_s / \lambda_s \approx C_o \rho_o / \lambda_o$. При $\Delta/R = 0,1$ для $x/R = 1/2$ получаем $\Omega_0 \approx 25 \gg 1$, а $\Omega \approx (9 \cdot 10^4 / 2 * 10^3 * 8 \cdot 10^2) * 25 = 1,4$. Аналогично: $\omega_s \approx \omega_0 \approx 2 * (\Delta/R) * (1 - 1,5 \Delta/R) = 0,17$ и $\alpha * \Omega \approx 2 * (1 - D) = \beta/\alpha$ откуда $\alpha = 1,26$ $\beta = 2,25$. Для $2z_0$ приближенно получаем $2/(1 + \beta) = 0,6$, что дает $r_s^{\max} = 1,19$ т.е. увеличение радиуса проволоки на 19% за счет образования замороженного слоя, а для $t_s^{\min} = 0,66$ т.е. уменьшение температуры слитка на 34% к температуре расплава.

Для стальных стержней без внутренних полостей, у которых $\Delta/R \rightarrow \infty$ аналогичные вычисления дают (для определенности принимаем $R/\Delta = 10$ и $R/x = 2$): $\Omega_0 \approx 40 \gg 1$, а $\Omega \approx 2,24$, $\omega_s \approx x/\Delta \approx 0$, $\omega_0 \approx 1$ и $\alpha = (1 - D)/\Omega + \sqrt{(\omega_0 * \Omega)} \approx 0,98$; $\beta = 2,41$. Для $2z_0$ приближенно получаем $(4/\beta)/(1 + 2/\beta) = 0,94$, что дает

$r_s^{\max}=1,23$ т.е. увеличение радиуса стержня на 23% за счет образования намороженного слоя при значительном, 56%-м росте его ширины (по сравнению со случаем справедливым для тонких оболочек), а $t_s^{\min}=0,57$ т.е. уменьшение температуры слитка на 43% к температуре расплава, что возможно занижено и говорит о том, что используемое приближенное решение является грубоватым для стальных стержней (т.е. для стержней со значительной плотностью) без полости (хотя для других материалов может оказаться вполне приемлемым).

3. Сравнение с экспериментами. Прежде всего отметим, что в экспериментах время плавления оболочек пп прямо определить невозможно. Но если вводить одну и ту же пп в ковш с разными скоростями, график зависимости усвоения Са от скорости будет иметь вид кривой с максимумом. Наше предположение состоит в том, что максимум кривой отвечает оптимальной скорости инъекции и получается для условия, когда плавление оболочки, происходит вблизи дна ковшевого агрегата на максимальной глубине расплава. Задавая глубину расплава Н (т.е. высоту ковша без толщины донной футеровки и свободного борта коша) и скорость инъекции в максимуме кривой $v=v_{\text{опт}}$ из этого предположения получаем связь времени плавления оболочки со скоростью инъекции для данного вида пп: $t_{\text{пл}}=H/v_{\text{опт}}$. Для дальнейшего заметим, что времена нагрева системы кальций-оболочка, плавления наполнителя и оболочки (для определенности берем случай с кальцием) в случае применения различных диаметров и толщин стенок при данной конструкции оболочки порошковой проволоки допускают следующую оценку их иерархии (см. Таблицу 1):

Таблица 1.

D,mm/ Δ ,mm	9,2/0,6	9,6/0,8	11/0,8	10/1	11,6/1	14/1	9,6/1,5
Время нагревания пустотелой оболочки (в единицах t/τ_o).	0,1	0,19	0,19	0,29	0,29	0,29	0,66
Время нагревания наполнителя до Т-ры газификации (в единицах t/τ_o).	0,62	0,59	0,97	0,55	0,85	1,39	-
Время плавления оболочки, t/τ_o .	0,18	0,32	0,32	0,50	0,50	0,504	1,135
Время нагревания оболочки и наполнителя (без учета экранирования намороженным слоем), t/τ_o .	1,94	2,02	3,06	2,12	2,94	4,43	1,85

Как видно для большинства применяемых пп оценки времен нагревания оболочки содержащей наполнитель (даже без учета эффекта экранирования потока тепла «намерзшим» слоем, который только увеличивает время нагревания) значительно превышают оценки времен плавления оболочки в расплаве. Это дает возможность время нагревания оболочки до температуры плавления приближенно считать за время до расплавления оболочки и выброса наполнителя в расплав и тем самым сопоставить расчет с измеренными величинами

$$t_{\text{пл}} \approx t_{\text{нагревания}} = H/v_{\text{опт}}$$

4. Выбор эмпирических параметров. Из соображений симметрии следует, что отношения толщин переходных слоев x/y и x/ξ не должны сильно отличаться и могут зависеть только лишь от диаметров и толщин стенок используемых пп. Наиболее простым предположением будет являться выбор (см также вывод формул (8)-(9)):

$$x/\xi = 1; \quad x/y = 1; \quad \tau_o = \rho_o \cdot c_o \cdot \Delta \cdot x \cdot (1 + \Delta/2R) / (1 + \Delta/R) / \lambda_o \quad (4)$$

Дополнительные проведенные расчеты показали, что условием близким к оптимальному согласованию измерений с расчетами (для рассматриваемого семейства проволок с абсолютно герметичной заваренной оболочкой, например типа Hi-Cal из [1]) в случае выбора (4) является значение величины $x=4,7$ мм.

5. Симметрии. Имеется несколько интересных свойств решений системы уравнений (1')-(1''). Динамика изменения температур системы при допущениях (4) не зависит от λ_{ca} , а определяется только его плотностью и теплоемкостью. Если вместо стали выбрать материал с другой плотностью, а теплоемкость изменить пропорционально, чтобы сохранить произведение $\rho_o \cdot c_o$ постоянным, то динамика нагревания системы не изменится. Динамика системы в безразмерном времени $z=t/\tau_o$ зависит в основном от Δ/R , ρ_{ca} и слабо зависит от R (только через Ω , который определен в системе (1')). Значит пп с близким отношением Δ/R при одинаковом заполнении проволоки кальцием должны иметь близкие значения безразмерного времени плавления оболочки $z_{пл} = t_{пл}/\tau_o$ (но отнюдь не размерного времени плавления выраженного в секундах, т.к. при выборе (4) в него входит величина τ_o , которая прямо пропорциональна толщине оболочки Δ).

6. Решение системы для полый оболочки и оболочки с наполнителем, но без экранирования налипшим слоем расплава. Простейшее решение системы (2)-(3) достигается для случая, когда нет налипания «намерзшего» слоя. Тогда $\rho_s \rightarrow 0$ и $\Omega \rightarrow 0$, что дает $\beta=0$, $z_o=0$ и $r_s=1$, $t_s=1$. В этом случае система допускает явные точные решения:

$$\begin{cases} t_o(z) = -\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} (1-e^{\lambda_1 z}) + \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} (1-e^{\lambda_2 z}) \\ t_{ca}(z) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} (1-e^{\lambda_1 z}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} (1-e^{\lambda_2 z}) \\ \lambda_{1,2} = -0.5 \left[(1+a+b) \pm \sqrt{(1+a+b)^2 - 4e} \right] \\ t_o(0)=t_{ca}(0)=0; \quad z=t/\tau_o. \end{cases} \quad (5)$$

6.1 Пустотелая оболочка. Выражения (5) упрощаются для случая пустотелой оболочки. В этом случае $\rho_{ca} \rightarrow 0$, что приводит к величине $b \gg 1$ и, следовательно, $\lambda_{1,2}$ из (5) к $\lambda_1 \rightarrow -b$ и $\lambda_2 \rightarrow -1$. Подставив эти величины в (5) получим, что формально $t_{ca} \rightarrow t_o$ и

$$t_o(\text{жид}) = 1 - \exp(-z), \quad z=t/\tau_o \quad (6).$$

Отсюда время нагревания пустотелой оболочки до расплавления:

$$t = \tau_o \cdot \ln(1/(1-t_o(\text{жид}))) = (\rho_o \cdot c_o / \lambda_o) \cdot \Delta \cdot x \cdot (1 + \Delta/2R) / (1 + \Delta/R) \cdot \ln(1/(1-0,95)) \quad (6a)$$

Как видно при выбранном условии имеется линейная зависимость времени от параметра $\Delta \cdot x$. В какой-то степени эксперименты отражают эту зависимость, что является дополнительным обоснованием выбора (4).

Интересно сравнить время плавления пустотелой оболочки с аналогичной величиной, но уже для общего случая заполненной кальцием оболочки с учетом «намороженного слоя» (соответствующее решение получено в п.7). Такое сравнение представлено в % в последнем столбце Таблицы 2 для различных проволок типа Hi-Cal [1]. Как видно из таблицы точность приближения расчетов по (6а) падает с ростом диаметра и существенно возрастает с ростом толщины стенки.

Таблица2.

Параметры порошковой проволоки: внешний диаметр/толщина стенки Dmm/ Δ mm	Время плавления пустотелой оболочки согласно (6а), сек	Время плавления оболочки с кальцием (взято из Таблицы 4), сек	Разность значений из столбца3 и столбца2 поделенная на значение в столбце 2, %
9,8/1,5	2,21	2,79	21
10/1,2	1,81	2,50	28
14/1,2	1,86	2,83	34
11,6/1,0	1,55	2,54	39
10/1,0	1,53	2,30	33
9,6/0,8	1,24	2,04	39
11,6/0,8	1,25	2,35	47

6.2 Сплошной стержень круглой формы из однородного материала внесенный в расплав.

Задача о расчете температуры стержня из однородного материала (без внутренних полостей), помещенного во внешнюю среду с более высокой температурой, относится к классической задаче. Она решалась во множестве постановок. Стержень с движением относительно среды- расплава [7], покоящийся стержень [5-6] и т.д. В литературе имеется целый ряд постановок задач, для которых данная проблема решена см. например [6]. Ниже показано, что подход, принятый в п. п. 1 - 6 ранее также позволяет получить результаты для данного случая и они согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Начнем с общей постановки задачи. Пусть имеется твердый однородный стержень без внутренних полостей, который в момент времени $t=0$, начинает вводиться в расплав стали со скоростью V_0 . Расплав поддерживается при постоянной температуре T_p . Начальная температура стержня одинакова по сечению и составляет T_0 , причем $T_0 \ll T_p$. Ось z неподвижной цилиндрической системы координат направим вниз в глубь расплава. Границу расплава (шлак) поместим в плоскость $z=0$. Примем для простоты, что стержень имеет круглое сечение (может быть рассмотрен и общий случай, однако в практических целях в большинстве случаев стержня круглого сечения достаточно). Выпишем уравнения, которые определяют его температуру. Для

того, чтобы это сделать, перейдем в систему координат, связанную с движущимся стержнем. Пусть скалярная функция $T(r, z, t)$ описывает температурное поле внутри стержня и в расплаве в неподвижной системе координат (СК), причем примем, что в момент времени $t=0$ обе системы координат совпадают. Ясно, что в движущейся со скоростью V_0 СК функция T должна быть той же, но относительно переменных подвижной системы координат: $T = T(r', z', t')$, где $r' = r$, $z' = V_0 \cdot t$ и $t' = t + z/V_0$. Уравнение распределения температуры с учетом осевой симметрии в движущейся СК есть $\partial T / \partial t' = \{ (1/r') \partial / \partial r' (r' \partial T / \partial r') + \partial^2 / \partial z'^2 \} T = \square_{r,z'} T$. Каково должно быть уравнение распределения температуры в неподвижной СК? Считаем частную производную $\partial / \partial t'$ для перехода из подвижной СК в неподвижную, зависимость от t и от z . Тогда, учитывая связь $t' = t + z/V_0$ получаем $\partial / \partial t' = \partial / \partial t + V_0 \cdot \partial / \partial z$. Подставим это соотношение в уравнение теплопроводности в подвижной СК и перейдем от координат r', z', t' к r, z, t . Получим, что:

$$\partial T / \partial t + V_0 \cdot \partial T / \partial z = \square_{r,z} T = ((1/r) \cdot \partial / \partial r + \partial^2 / \partial r^2 + \partial^2 / \partial z^2) T \quad (7)$$

6.2.1 Рассмотрим уравнение (7) при $V_0 = 0$. В этом случае подвижная СК совпадает с неподвижной. Начальные и граничные условия к задаче (7) есть $T(0, H, 0) = T_{пл} = \lambda_0 \cdot T_p$ ($\lambda_0 < 1$) здесь $T_{пл}$ - температура плавления материала стержня; $T(r, 0, 0) = T_0 = \text{Const}$ для $r < R$. H в данном случае обозначает глубину, где сердцевина стержня плавится (т.е. происходит полное расплавление участка стержня в расплаве для $z > H$). Учтем, что после того, как это произойдет, тепло начнет поступать в близлежащую точку $H - \delta$, $\delta \rightarrow +0$, и в скором времени это сечение также будет расплавлено. Значит, вдоль оси стержня вверх побежит граница плавления (при этом точки стержня с координатой z нагреваются все больше и больше). Какова будет скорость движения границы плавления? Пусть удельная теплота плавления материала есть $Q_{пл}$. Тогда, чтобы расплавить массу стержня dm , необходимо, чтобы из расплава поступило тепло $dq = Q_{пл} \cdot dm$. Это тепло поступит за счет теплопроводности за время dt , значит $dq = \lambda \cdot (S \cdot \partial T / \partial r + S \cdot \partial T / \partial z) \cdot dt$. Так как $S \cdot \partial T / \partial r \sim T \cdot (S/r) \gg S \cdot \partial T / \partial z \sim T \cdot (S/z)$ для порошковых проволок с диаметром порядка ~ 1 см при $H \sim 1$ м, то $dq = Q_{пл} \cdot dm = Q_{пл} \cdot \rho \cdot S \cdot dz = \lambda \cdot (S \cdot \partial T / \partial r) \cdot dt$. Откуда получаем: $V_{плав} = dz/dt = \lambda / (\rho \cdot Q_{пл}) \cdot (\partial T / \partial r) = \lambda / (\rho \cdot Q_{пл}) \cdot \Delta T / R$, $\Delta T = T_p - T_{пл}$; R - радиус проволоки. В таблице 3 приведен расчет скоростей движения границ для алюминиевого и стального круглых стержней в соответствии с соотношением выше. Как видно в случае со сталью, скорость движения границы плавления более чем в 20 раз меньше.

Таблица 3.

	Единицы	Al	Сталь
ρ	кг/м ³	2700	7800
C_p	Дж/кг·К	1050	770
λ	Вт/м·К	220	50
Δ	мм	6,8	6,8
T_0	К	293	293
$T_{пл}$	К	1206	1799
$\tau_{пл}$	сек	0,309	2,83
$V_{плав}$	мм/сек	20	0,7
$Q_{пл}$	Дж/кг	$3,9 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^4$
T_p	К	1873	1873

Для порошковых проволок типа Ni-Cal (с заваренными стальными оболочками толщиной ~ 1 мм) скорость движения точки плавления оболочки из стали глубокой вытяжки в неподвижной СК

будет примерно в 7 раз выше, чем приведено в таблице 3 (из-за меньшей толщины), но явно недостаточной, чтобы за время инъекции проволоки (порядка 10^2 сек) сдвинуть эту точку на значительное ($>0,5$ м) по сравнению с размером ковша расстояние. Данный фактор может сказаться только для ковшей малой емкости для наполнителей с большим удельным давлением паров (например, Са) при больших свободных бортах. В этом случае к высоте ковша H нужно добавить половину расстояния, на которое сдвинется точка плавления за время инъекции проволоки $h_0 = V_{\text{плав}} \cdot t_{\text{инъекции}}$, чтобы правильно рассчитать оптимальную скорость ввода $V_0 = (H + 0,5 \cdot h_0) / t_{\text{плав}}$, где $t_{\text{плав}}$ - время плавления оболочки с наполнителем.

6.2.2 Случай V_0 не равен нулю. В этом случае граница плавления может бежать вдоль оси стержня как к поверхности расплава, так и от нее в зависимости от скорости инъекции проволоки. На практике скорость движения границы плавления существенно меньше скорости инъекции, т.е. за время инъекции точка плавления практически не сдвинется в неподвижной системе СК. Такой режим условно можно назвать квазистационарным (по аналогии со случаем, когда скорость плавления в точности компенсирует скорость инъекции, что приводит к кажущейся стационарности процесса в неподвижной СК). В этом случае в расплаве устанавливается режим, когда первый член в уравнении (7) равен нулю и должен быть отброшен. Тогда (7) описывает стационарный процесс в неподвижной СК. Этот процесс аналогичен нестационарному при переходе к подвижной СК согласно формуле $t = z/V_0$.

6.3 Покажем, что уравнения системы (1)-(2) сводятся к (7) в пределе $R/\Delta \rightarrow 0$, где R - радиус полости, те для случая сплошного круглого стержня.

Покажем это на примере расчета времени плавления цилиндрической оболочки с толщиной стенки Δ , с радиусом полости $R \rightarrow 0$ в подвижной системе координат. В (1'') для такой оболочки получено уравнение $dt_o/dz = (t_s - t_o) \cdot a \cdot (t_o - t_{ca})$, $a = (R/(R+\Delta)) \cdot (x/y)$. Откуда в соответствии с обозначениями на Рис.1 $dt_o/dz = t_s (R+\Delta) - t_o (R+\Delta-x) - a \cdot (t_o (R+\Delta-x) - t_{ca}(R))$. Считаем t_o непрерывной переменной относительно индексов o, s, ca , которые припишем различным геометрическим точкам пространства вдоль радиуса стержня. Отсюда получим, что $dt_o/dz = t_o' (R+\Delta) \cdot x - a \cdot (t_o (R+\Delta-x) - t_{ca}(R))$; $t_o' (R+\Delta) = dt_o(R+\Delta)/dz$ и, следовательно, $dt_o/dz = t_o' (R+\Delta) \cdot x - a \cdot (t_o (R+y) - t_o(R)) = t_o' (R+\Delta) \cdot x - a \cdot t_o' (R) \cdot y$. Учтем, что $t_o' (R+\Delta) = (1/\Delta R) \cdot t_o' (R) + (\Delta/R) \cdot (\partial/\partial R)(R \cdot (\partial t_o/\partial R)) + o((\Delta/R)^2)$. Откуда $dt_o/dz = x \cdot \Delta \cdot [(1/r) \cdot (\partial/\partial r)(r \cdot (\partial t_o/\partial r))] + t_o' (R) \cdot [x \cdot (1-(\Delta/R)) - y \cdot (1/(1+\Delta/R)) \cdot (x/y)]$. Так как $(1-(\Delta/R)) - (1/(1+\Delta/R)) = o((\Delta/R)^2)$, если $\Delta \ll R$, то для расчета температуры оболочки получаем уравнение теплопроводности (7) в виде:

$$dt_o/dz = \Delta \cdot x \cdot [(1/r) \cdot (\partial/\partial r)(r \cdot (\partial t_o/\partial r))] + o((\Delta/R)^2) \quad \text{или}$$

$$dt_o/dt = (dt_o/dz)/\tau_o \approx (1+\Delta/R)/(1+\Delta/2R) \cdot \lambda_o/(\rho_o \cdot c_o) \cdot [(1/r) \cdot (\partial/\partial r)(r \cdot (\partial t_o/\partial r))] \quad (8).$$

Заметим, что при выводе выше мы использовали приближение тонкостенных проволок $\Delta/R \ll 1$, которое обратно условию в заголовке. Последнее, как оказывается, не имеет значения, т.к. и в противоположном предельном случае $R/\Delta \rightarrow 0$ полученные результаты остаются верными. В этом предельном случае коэффициенты (2) приобретают следующий вид: $a \rightarrow 0$, $b \gg 1$, а первое и второе уравнения системы преобразуются к виду $dt_o/dz = 1 - t_o$, $t_{ca} = t_o$. Решение первого из этих уравнений с начальным условием $t_o(0) = T_o/T_p$ есть $t_o = 1 - (1 - T_o/T_p) \cdot \exp(-t/\tau_o)$. Откуда время плавления стержня радиуса Δ оказывается в соответствии с этой формулой $t_{\text{плав}} = \tau_o \cdot \ln((T_p - T_o)/(T_p - T_{\text{плав}})) = \Delta \cdot x \cdot (1+\Delta/2R)/(1+\Delta/R) \cdot \rho_o \cdot c_o / \lambda_o \cdot \ln[(T_p - T_o)/(T_p - T_{\text{плав}})]$. Перейдем в этой формуле к пределу $R/\Delta \rightarrow 0$. Получим, $t_{\text{плав}} = \rho_o \cdot c_o / (2\lambda_o) \cdot \Delta^2 \cdot \ln((T_p - T_o)/(T_p - T_{\text{плав}}))$ (x выбрали равным Δ). С другой стороны

правильное уравнение теплопроводности (8) в этом пределе есть $dt_o/d(2 \cdot t) = \partial t_o/\partial t = (\lambda_o/\rho_o \cdot c_o) \cdot [(1/r) \cdot (\partial/\partial r)(r \cdot (\partial t_o/\partial r))]$, что говорит о том, что время, полученное из решения системы дифференциальных уравнений (2), надо умножить на 2, чтобы получить верный результат, следующий из уравнения теплопроводности (т.е. $d(2 \cdot t) = \partial t$). С помощью данного математического трюка, удастся восстановить правильный результат даваемый выведенной формулой, хотя формальное условие такого вывода $\Delta/R \ll 1$, являются нарушенным. Откуда:

$$t_{пл} = 2t_{пл.ав.} = \rho_o \cdot c_o / \lambda_o \cdot \Delta^2 \cdot \ln((T_p - T_o)/(T_p - T_{пл.})) \quad (9).$$

Эта формула с точностью до коэффициента совпадает с ранее полученной формулой (6а). В таблице 3 по (9) рассчитано время плавления алюминиевой катанки и стального круглого сечения стержня одинаковых сечений (радиусы 6,8мм). Видно, что время плавления стального стержня примерно в 10 раз больше. При этом время плавления катанки, рассчитанное по (9) без учета намороженного слоя практически точно совпадает со временем плавления, рассчитанным при одинаковых исходных данных в [4] и равным 0,31 сек, с применением сложного программного комплекса численного решения уравнения теплопроводности. Компьютерная программа основанная на решении уравнений (1)-(3) выше дала для данного времени значение 0,32 сек (т.е. отклонение от результата работы [4] около +3,2%) при расчете без учета намороженного слоя и 0,41 сек при его учете.

7. Общее решение системы уравнений (2)-(3). В принципе можно построить явные формулы решения общей системы уравнений (2)-(3). Они получаются громоздкими и потому представляют мало практического интереса. Проще построить прямое численное решение этой системы. В данной работе для этого использовалась неявная схема предиктор – корректор 2-го порядка аппроксимации по времени, которая, как известно, обладает устойчивостью в счете по отношению к ошибкам округления, что очень важно при вычислении быстро растущих функций типа экспоненты [2]. Система алгебраических уравнений (3) решалась следующим образом. В первую очередь вычислялись α и β из четвертого и пятого уравнений в (3), используя рассчитанные константы D , Ω . Для определения z_o первое уравнение (3) преобразовывалось к следующему виду:

$$z_o = 2 \cdot \omega_o / (\beta \cdot (\omega_o + \omega_s)) \cdot (1 - t_o(z_o)), \text{ где для } t_o(z) \text{ использовалась формула (5).}$$

Попытки решить это уравнение методом простых итераций окончились безрезультатно, т.к. в части случаев процесс расходился. А вот решение этого уравнение итерационным процессом по Ньютону практически за 5-6 итераций обеспечивало сходимость до 6-8 значащих цифр и всегда приводило к ответу. Результаты расчетов и их сравнение с опытными данными приведены в Таблице 4.

Если расчет представлен в переменных $D \cdot \Delta \cdot v_{опт}$ от скорости инъекции проволоки V , то характер кривой в выбранных переменных как и для случая пустотелой оболочки в среднем близок к слабо меняющейся величине. Но имеются значительные отличия, которые проявляются в 2-х сильных выбросах от средней кривой. Для большой наглядности данные сведены в таблицу 4 для различных толщин и диаметров применяемых пп (указаны в первом столбце таблицы).

Таблица4.

$D_{mm}/\Delta m$ m	Заполнение, г/м	Δ/R	$\Delta/(R+\Delta)$	τ_o , сек	$z=t_{пл}/\tau_o$	$t_{пл}$, сек	$v_{опт}$, м/мин	$v^3_{опт}$, м/мин	$(v_{опт}-v^3_{опт})/v^3_{опт}$, %
9,8/1,5	54	0,306	0,23	0,71	3,94	2,79	97,95	90-110	- 3
10/1,2	66	0,24	0,19	0,59	4,25	2,50	108,04	111-125	-8
13/1,2	128	0,184	0,16	0,61	4,63	2,83	95,54	105	-9
11,6/1,0	102	0,172	0,15	0,51	4,99	2,54	106,19	100-105	+4
10/1,0	70	0,2	0,17	0,50	4,59	2,30	117,41	110	+7
9,6/0,8	72	0,166	0,14	0,41	4,99	2,04	132,48	135-155	-9
11,6/0,8	110	0,138	0,12	0,42	5,66	2,35	115,04	105-110	+7

В таблице 4 приведены также следующие расчетные величины: τ_o в секундах; безразмерное время до плавления оболочки- z ; оптимальная расчетная скорость инъекции (для ковшей объемом 350тн с $H=4,5$ м)- $v_{опт}$; измеренный экспериментально диапазон, в котором лежит оптимальная скорость инъекции- $v^3_{опт}$ и разность последних двух величин выраженная в % (причем, если указан измеренный диапазон для оптимальной скорости, то для вычислений значений последнего столбца использовалась средняя арифметическая величина взятая для данного диапазона). Как видно из таблицы 4, в целом совпадение имеется (т.е. отклонения в расчетах не превышают инженерную погрешность 15%). Однако, есть отличие в экспериментах с проволокой 14x0,5мм замковой конструкции, (такие проволоки на практике вводятся обычно со скоростями 200-350 м/мин), которое выделяется из общей массы. Вероятной причиной расхождения может быть преждевременное раскрытие замка таких проволок (в силу огромного внутреннего давления в случае с кальцием на оболочку при разогреве наполнителя) ранее момента расплавления оболочки, что не учтено в наших расчетах. Также отличие наблюдается с работой [3], где принята оптимальная скорость равная 140 м/мин для проволоки Hi-Cal (производство Injection Alloys Group) с толщиной стенки 1,1мм и внешним диаметром 9,8мм. Возможно нужна дополнительная проверка корректности этих данных.

Отметим также еще один момент. Представленная модель учитывает эффект образования вокруг вводимой в расплав порошковой проволоки отвердевшего (закристаллизованного) слоя металла, который существует все время введения проволоки в расплав. Такой слой располагается на фиксированной глубине в расплаве и в системе координат связанной с проволокой движется вдоль нее с постоянной скоростью, сохраняя устойчивость формы. Устойчивость его формы, как следует из результатов данной работы, связана с нелинейностью связи между скоростью нагрева слоя и скоростью роста его радиуса (см. четвертое уравнение в системе (1)-(2)). Такие устойчивые образования в математике принято называть солитонами (по аналогии с решениями уравнения Кортевега де Фриза об уединенных волнах). Вероятно, указанный слой также можно отнести к категории подобных явлений (на данный факт впервые обратил внимание авторов Шагов О.Б.). Разумеется уравнения, описывающие данный слой, отличаются от уравнений для других

подобных явлений. Для данной задачи они являются уникальными. Однако то, что их роднит с подобными задачами, это наличие нелинейности, которая приводит к устойчивости образования их формы во времени.

8 Заключение.

1. Предложен полуэмпирический метод расчета динамики нагрева и плавления тонкостенных порошковых проволок с различными наполнителями.
2. Найден набор эмпирических параметров метода, который обеспечил точность расчетов оптимальной скорости ввода проволок с отклонением не более $\pm 15\%$ для случая различных, применяемых промышленностью дизайнов кальций содержащих проволок типа Hi-Cal из [1] при их сравнении с измерениями на ковшах емкостью 350тн (последний столбец Таблица 4).
3. Впервые предложена наглядная аналитическая модель, которая описывает устойчивое отвердевшее образование закристаллизованного металла вокруг порошковой проволоки, наличием нелинейности, что позволяет отнести данное устойчивое образование к категории таких понятий как солитон (т.е. уединенная движущаяся вдоль проволоки структура).

Список литературы.

1. V.Steckly Патент на проволоки Hi-Cal
2. Н.Н. Калиткин. Численные методы. Наука, 1975
3. Fernando V.Guzman Optimization of injection treatment with High Purity Ca and High Compacted CaSi30/70 in Low Carbon Al-Killed and Al/Si-killed steels. IA Mexico S.A. de C.V.
4. Edgar-Ivan Castro (Affival SAS) and other participants of the conference on processing and casting of liquid metals 2017 A Thermal Model of Cored Wire Injection.
5. S.Saedodin, M.S.M. Barforum, An accurate solution for thermal analysis of a cylindrical object using a hyperbolic thermal conductivity model. Thermophysics and Aeromechanics 2017, vol. 24, No.6, p. 937, Russia.
6. M.Necati and others, Finite Difference Methods in Heat Transfer, 2-nd Edition, CRC-Press, Tayler&Francis Group.
7. И.И.Данилюк. О задаче Стефана. УМН, 1985г., т40, выпуск5 стр140 (формула (1.17)).