

УДК 519.852.35+519.172.5

DOI 10.17223/20710410/X/1

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ У РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Ф. М. Кемпер

E-mail: fkemper@mail.ru

В этой статье рассматривается распределительная задача на простом графе без лимитов на перемещения ресурсов. И для нее устанавливаются необходимые и достаточные условия существования решений в виде набора линейных неравенств, связывающих предложения ресурсов и потребности в них. Затем предлагается алгоритм построения всех независимых линейных ограничений. Полученный результат зависит только от структуры исходного графа.

This article considers an allocation problem on a simple graph without limits on resource movements. And for it, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions are established in the form of a set of linear inequalities connecting the supply of resources and the need for them. An algorithm for constructing all independent linear constraints is then proposed. The result obtained depends only on the structure of the original graph.

Ключевые слова: *двудольные графы, потоки в сетях*

REQUIRED AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR EXISTENCE SOLUTIONS FROM DISTRIBUTION PROBLEMS WITH CONSTRAINTS

F. M. Kemper

This article considers an allocation problem on a simple graph without limits on resource movements. And for it, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions are established in the form of a set of linear inequalities connecting the supply of resources and the need for them. An algorithm for constructing all independent linear constraints is then proposed. The result obtained depends only on the structure of the original graph.

Keywords: *bipartite graphs, network flows*

Введение

Задачи анализа потоков в сетях имеют более чем полувековую историю. В классических руководствах [1–7] рассматриваются алгоритмы решения стационарной задачи нахождения максимального потока в сети при фиксированных значениях ограничений на потоки в ребрах, вершинах. В современных работах строятся алгоритмы решения задачи о макс потоке и ее различные обобщения с фиксированными значениями

пропускных способностей [8–10]. При анализе задач потоков в сетях исследователи акцентируют основное внимание на явном решении экстремальных задач о потоках минимальной стоимости и их обобщениях.

Вопрос существования решений пропускается или является побочным результатом при решении оптимизационной задачи с конкретными значениями ограничений [11]. Полный набор условий существования потоков в конкретной сети, как видно из результата [1], есть довольно большой набор однородных линейных неравенств. И конструктивное выделение из них подмножества независимых неравенств представляет довольно сложную задачу. Поэтому при многопараметрическом анализе сети (вариации ее параметров) приходится при каждом значении набора параметров решать задачу о максимальном потоке двойственной сети [1]. Есть попытки использовать вариацию параметров в задаче о расстояниях в сети, например [8]. В [12] предлагаются модели критических уровней и периодической проверки, которые предполагают контроль за состоянием запасов и адаптивное пополнение их путем заказов, размер которых определяется в соответствии с выбранной стратегией. В [13] рассматриваются вероятностные модели для пропускной способности ребер графа многопользовательской сетевой системы. В [9] рассматриваются специфические эмпирические способы моделирования и вариации параметров в городских транспортных сетях. В [14] используются нечеткие переменные (fuzzy set) для параметров транспортной сети. В [15] рассматриваются сети с изменяющейся структурой их графа. В [10] для многостадийной модели распределения транспортных потоков по сети используется метод выпуклой оптимизации.

Общие результаты [16, 17] описания набора всех линейных условий на параметры сети для существования в ней потока приводят к почти полному перебору и их трудоемкость экспоненциальна. Возникает вопрос, каков будет результат для сетей частного вида.

Известно [18], что любую транспортную сеть можно преобразовать в равносильную сеть на двудольном графе. Поэтому изучение таких сетей приобретает особое значение.

В этой статье для распределительной сети на двудольных графах (задача распределения ресурса) - удалось получить конструктивное описание аналитических выражений и эффективную вычислительную схему построения всех независимых линейных условий. Структура и количество линейных условий на параметры сети зависит только от структуры исходного графа и поэтому устойчиво к вариациям запасов в источниках и потребностей у потребителей.

Перед построением конкретного плана перевозок задача распределения ресурса от поставщиков по потребителям требует предварительной оценки достаточности запаса ресурса у каждого поставщика для удовлетворения всех потребностей в нем, что является задачей планирования. Т.е. необходимо решить вопрос существования решения у будущей задачи распределения, а именно, совместна ли система всех ограничений на параметры задачи. Поэтому результат этого исследования имеет и прикладное применение.

1. Постановка

Простой граф $G = (X, Y, \Gamma)$ это граф, определяемый двумя непересекающимися множествами X и Y и многозначным отображением Γ множества X в Y [7] (глава 10).

$$X = \{x_i, i = 1..n\}, Y = \{y_j, j = 1..m\}. \text{ Дуга } (x_i, y_j) \in G \iff y_j \in \Gamma x_i.$$

В каждой вершине x_i есть запас продукта в количестве $a_i = a(x_i) > 0$, потребность каждой вершины y_j это $b_j = b(y_j) > 0$. Пропускные способности всех ребер неограни-

чены. Спрашивается, при каких соотношениях между $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ весь запас продукта можно распределить между потребителями, насытив их полностью. Т.е. при каких условиях совместна система (1), где $\varphi(x_i, y_j)$ – поток по дуге (x_i, y_j) .

$$\begin{cases} a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \quad (1).$$

Будем рассматривать связный граф G . Ясно, что ограничения для несвязного графа есть объединение ограничений для его каждой связной компоненты.

2. Система неравенств

Сначала рассмотрим систему (2) и условия ее разрешимости.

$$\begin{cases} a_i \leq \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j \geq \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \quad (2)$$

Дополним граф G до транспортной сети S , добавив вход s , выход t и дуги $(s, x_i), (y_j, t), i = 1..n, j = 1..m$.

Каждой дуге поставим в соответствие пару чисел – нижнюю и верхнюю границы потока по этой дуге. Для (s, x_i) : (a_i, ∞) , для (x_i, y_j) : $(0, \infty)$, для (y_j, t) : $(0, b_j)$. Тогда система (2) разрешима $\iff \exists$ поток по сети S .

В [5–7, 17] имеется такая

Теорема 1 (Hoffman). Пусть каждой дуге u некоторой транспортной сети отнесены два целых числа $a(u)$ и $b(u)$ [$0 \leq a(u) \leq b(u)$]. Пусть $\aleph$ – семейство тех подмножеств множества всех вершин сети, которые либо не содержат ни s , ни t , либо содержат s и t одновременно. Существует поток φ , удовлетворяющий условию $a(u) \leq \varphi(u) \leq b(u)$, тогда и только тогда, когда $b(U_L^-) \geq a(U_L^+)$ для всех $L \in \aleph$. Здесь U_L^- – дуги, заходящие в L , U_L^+ – дуги, исходящие из L .

Для нашей задачи удобнее вместо множеств L рассматривать множества $D = S \setminus L$ того же типа, что и в теореме выше. Для них $b(U_L^-) = b(U_D^+)$ и $a(U_L^+) = a(U_D^-)$. Тогда неравенства теоремы принимают вид

$$a(U_D^-) \leq b(U_D^+) \quad (3)$$

Найдем условия, при которых ограничения (3) существенны.

Лемма 1. Если ограничение существенно, то $x_i \in D \iff \Gamma x_i \subseteq D$.

Доказательство. Если $x_i \in D$ и $y_j \in \Gamma x_i$, но $y_j \notin D$, то $(x_i, y_j) \in U_D^+$, $b(x_i, y_j) = \infty$ и ограничение для D несущественно. Получили противоречие.

Если $\exists x_i \notin D$, $y_j \in \Gamma x_i$ и $y_j \in D$, то $(x_i, y_j) \in U_D^-$, $a(x_i, y_j) = 0$. Такие дуги не влияют на ограничение для D и подобные x_i исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Итак, для каждого $x_i \in D$ так же и $\Gamma x_i \subseteq D$ и наоборот. ■

Лемма 2. Если ограничение существенно, то $D \subseteq G$.

Доказательство. Если $s \in D$, $t \in D$ и $x_i \notin D$, то $(s, x_i) \in U_D^+$, $b(s, x_i) = \infty$ и ограничение для D несущественно. Получили противоречие.

Если $s \in D$, $t \in D$ и $\forall x_i \in D$, то, по предыдущей лемме, $\Gamma(X) = Y \subseteq D$ и $D = S$. Но у S нет входящих и исходящих дуг – ограничение отсутствует, хотя оно должно быть существенным.

Т.к. по теореме 1 s, t одновременно входят или не входят в D , то будем считать, что $D \subseteq G$ без потери каких либо ограничений. ■

Ясно, что для всех x_i $\Gamma x_i \neq \emptyset$ и для всех y_j $\exists x_i$ такое, что $y_j \in \Gamma x_i$. Иначе вершины x_i, y_j висят, не участвуют ни в одном ограничении и их можно не учитывать.

Предложение 1. Ограничения (3) существенны тогда и только тогда, когда $D \subseteq G$ и $x_i \in D \iff \Gamma x_i \subseteq D$.

Доказательство. В прямую сторону доказано в предыдущих леммах.

Если $D \subseteq G, \{x_i\} \subseteq D, \Gamma\{x_i\} \subseteq D$, то $U_D^- = \{(s, x_i)\}, U_D^+ = \{(y_j, t) | y_j \in \Gamma x_i\}$, а $a(s, x_i) < \infty, b(y_j, t) < \infty$ и ограничение существенно. ■

Поискем случаи, когда одни ограничения являются следствием других.

Предложение 2. Если $\Gamma X_i = \Gamma X_j = Y_0$, то ограничение, соответствующее $D_0 = \{X_i \cup X_j, Y_0\}$, сильнее каждого из ограничений для $D_k = \{X_k, Y_0\}, k \in \{i, j\}$.

Доказательство. Ограничения для D_0, D_k имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{X_i \cup X_j} a_p &\leq \sum_{Y_0} b_r \\ \sum_{X_k} a_p &\leq \sum_{Y_0} b_r \end{aligned}$$

Так как $\sum_{X_k} a_p \leq \sum_{X_i \cup X_j} a_p$, то получаем требуемое. ■

Замечание 1. Поэтому для всех X_i с одним общим ΓX_i будем учитывать только ограничение, соответствующее объединению таких X_i с $D_{\max}(Y_0) = \{\cup X_i, Y_0 | \Gamma X_i = Y_0, \forall X_i \subseteq X, Y_0 \subseteq Y\}$.

Предложение 3. Если $\Gamma X_0 \subset \Gamma X_1$, то ограничение для $D_{01} = \{X_0 \cup X_1, \Gamma X_1\}$ сильнее ограничения $\{X_1, \Gamma X_1\}$. В то же время остается в силе ограничение $\{X_0, \Gamma X_0\}$.

Доказательство. По условию $\Gamma X_1 = \Gamma X_0 \cup Y_1$.

Ограничения имеют вид $\sum_{X_0 \cup X_1} a_p \leq \sum_{\Gamma X_1} b_r, \sum_{X_1} a_p \leq \sum_{\Gamma X_1} b_r, \sum_{X_0} a_p \leq \sum_{\Gamma X_0} b_r$.

Но $\sum_{X_1} a_p \leq \sum_{X_0 \cup X_1} a_p$ – получаем первое утверждение.

$\sum_{\Gamma X_0} b_r \leq \sum_{\Gamma X_1} b_r$ и $\sum_{X_0} a_p \leq \sum_{X_1} a_p$, откуда следует второе утверждение. ■

Предложение 4. Если $\Gamma X_1 \setminus \Gamma X_2 \neq \emptyset, \Gamma X_2 \setminus \Gamma X_1 \neq \emptyset$ и $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, то ограничения для $\{X_1, \Gamma X_1\}, \{X_2, \Gamma X_2\}, \{X_1 \cup X_2, \Gamma(X_1 \cup X_2)\}$ независимы.

Доказательство. Пусть $X_1 \cap X_2 = X_0, \Gamma X_0 = Y_0, \Gamma X_1 \setminus \Gamma X_2 = Y_1,$

$\Gamma X_2 \setminus \Gamma X_1 = Y_2$. Тогда $X_1 = X_{10} \cup X_0, X_2 = X_{20} \cup X_0, \Gamma X_1 = Y_1 \cup Y_0, \Gamma X_2 = Y_2 \cup Y_0,$
 $X_1 \cup X_2 = X_{10} \cup X_{20} \cup X_0, \Gamma(X_1 \cup X_2) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0$.

И ограничения $\sum_{X_1} a_p \leq \sum_{\Gamma X_1} b_r, \sum_{X_2} a_p \leq \sum_{\Gamma X_2} b_r, \sum_{X_1 \cup X_2} a_p \leq \sum_{\Gamma(X_1 \cup X_2)} b_r$ принимают вид $\sum_{X_{10} \cup X_0} a_p \leq \sum_{Y_1 \cup Y_0} b_r, \sum_{X_{20} \cup X_0} a_p \leq \sum_{Y_2 \cup Y_0} b_r, \sum_{X_{10} \cup X_{20} \cup X_0} a_p \leq \sum_{Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0} b_r$.

Но $\sum_{X_{k0} \cup X_0} a_p \leq \sum_{X_{10} \cup X_{20} \cup X_0} a_p$ и $\sum_{Y_k \cup Y_0} b_r \leq \sum_{Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0} b_r, k \in \{1, 2\}$.

Значит, исходные ограничения независимы. ■

Предложение 5. Если $\Gamma X_1 \cap \Gamma X_2 = \emptyset$, то ограничение для $\{X_1 \cup X_2, \Gamma(X_1 \cup X_2)\}$ является следствием ограничений для $\{X_1, \Gamma X_1\}, \{X_2, \Gamma X_2\}$.

Доказательство. Так как $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, то $\sum_{X_1 \cup X_2} a_p \leq \sum_{\Gamma(X_1 \cup X_2)} b_r$ равносильно $\sum_{X_1} a_p + \sum_{X_2} a_p \leq \sum_{\Gamma X_1} b_r + \sum_{\Gamma X_2} b_r$, т.е. сумме ограничений для $\{X_1, \Gamma X_1\}, \{X_2, \Gamma X_2\}$. ■

3. Алгоритм

3.1. Предварительная обработка

Согласно предыдущему разделу порождать новые независимые ограничения могут только подмножества из X с пересекающимися Γ множествами. В этом алгоритме такие ограничения строятся последовательным добавлением вершин из X .

Алгоритм 1 Предварительная обработка

- 1: Так как все коэффициенты в ограничениях (3) равны 1 или 0, то храним каждое ограничение в паре битовых строк с длинами n и m , где $n = |X|$, $m = |Y|$. Нумерация битов в этих строках идет справа налево и соответствует нумерации вершин в X . Для каждого ограничения $D_i = \{\{x_{ik}\}, \{y_{il}\} | \Gamma(\{x_{ik}\}) = \{y_{il}\}\}$ в строки заносятся 1_k и 1_l , где $1_t = 1$ на месте t в строке. Для всех ограничений получаем массив пар битовых строк R
 - 2: Для графа G строим матрицу смежности $M(G)$, строки которой соответствуют вершинам из X а столбцы - вершинам из Y
 - 3: Для X графа G вводим расстояние ρ между вершинами x_i : $\rho(x_i, x_j) = 1$ при $\Gamma x_i \cap \Gamma x_j \neq \emptyset$, иначе $\rho(x_i, x_j) = 0$. Строим симметричную матрицу соседства $M(X) = M(G) \times M^T(G)$, а по ней - граф смежности $QX = (X, \{[x_i, x_j] | \rho(x_i, x_j) = 1\})$. Здесь $M^T(G)$ - матрица, транспонированная к матрице $M(G)$
 - 4: Для графа QX строим матрицу смежности $Q(X)$: $Q_{ij}(X) = \min(1, M_{ij}(X))$
 - 5: Упорядочиваем все вершины графа QX , проходя его способом поиска в ширину [4](22.2). При этом все компоненты связности графа QX будут пройдены последовательно, одна за другой.
-

3.2. Основной цикл

На каждом шаге в массив строк R добавляем все ограничения для x_j в подграфе $QX_j = \{\{x_k\} | k \leq j\}$, считая что ограничения для всех QX_k с $k < j$ уже занесены в массив строк R .

В конце алгоритма получаем набор существенных ограничений в виде массива R структур из двух битовых строк.

Реализация алгоритма на языках Python, Java доступна в [19].

3.3. Анализ алгоритма

Предложение 6. Алгоритм строит все существенные ограничения.

Доказательство. По предложению 1 все существенные ограничения имеют вид $\{X_0, \Gamma X_0\}$.

На итерации 1 цикла для подграфа QX_1 имеем только одно существенное ограничение $\{x_1, \Gamma x_1\}$, которое добавляется на шаге 3.

Предположим, что для подграфа QX_{j-1} в R входят все его существенные ограничения.

На итерации j на шаге 3 в R добавили $\{x_j, \Gamma x_j\}$.

Рассмотрим любое $\{X_0, \Gamma X_0\}$ с $X_0 = \{x_p | p \leq j\}$. Пусть $X_1 = X_0 \setminus \{x_j\} = \{x_p | p < j\}$. $X_1 \subset X_0$, тогда $\Gamma X_1 \subset \Gamma X_0$ либо $\Gamma X_1 = \Gamma X_0$.

При $X_1 \subset X_0$ $\{X_1, \Gamma X_1\}$ уже добавлено на предыдущих итерациях и $\{X_0, \Gamma X_0\} = \{X_0 \cup \{x_j\}, \Gamma X_0 \cup \Gamma X_1\}$ добавлено на шаге 4.

При $\Gamma X_1 = \Gamma X_0$ $\Gamma x_j \subseteq \Gamma X_0$ и $\exists x_q$ с $q < j$ такая, что $\Gamma x_q \cap \Gamma x_j \neq \emptyset$. Иначе $\Gamma X_0 \cap \Gamma x_j = (\cup_q \Gamma x_q) \cap \Gamma x_j = \cup_q (\Gamma x_q \cap \Gamma x_j) = \emptyset$ - получили противоречие. Значит, x_q сосед x_j , $\{X_1, \Gamma X_1\}$ отобрано на шаге 2, $\{X_0, \Gamma X_0\}$ получено на шаге 4.

Алгоритм 2 Основной цикл

-
- 1: **Для всех** x_j графа QX , итерация j
 - 2: **Предусловие** Массив R перед шагом j лексикографически упорядочен по битовым строкам X , где каждая строка – набор вершин из подграфа $X_j = \{\{x_k\} | k < j\}$
 - 3: **Шаг 1.** Для вершины x_j выбираем из графа QX отсортированный список $prev_conn$ всех связанных с ней предыдущих вершин $\{x_k | \rho(x_k, x_j) = 1, k < j\}$,
 - 4: **Шаг 2.** По списку $prev_conn$ получаем из R отсортированный список ограничений $prev_limits$, куда входят вершины из $prev_conn$. (Это можно сделать за один проход, так как массив R и список $prev_conn$ упорядочены одинаково)
 - 5: **Шаг 3.** Добавляем в массив R ограничение $\{x_j, \Gamma x_j\}$.
 - 6: **Шаг 4.** Добавляем текущее $\{x_j, \Gamma x_j\}$ во все ограничения списка $prev_limits$, расширяя влево строки этих ограничений
 - 7: **Шаг 5.** Если в списке $prev_limits$ имеются ограничения с одинаковыми частями Y , то убираем из этого списка то ограничение, которое ближе к его началу
 - 8: **Шаг 6.** Если часть Y ограничения p из списка $prev_limits$ совпадает с частью Y у ограничения r из массива R , то убираем исходное ограничение r из массива R
 - 9: **Шаг 7.** Добавляем список $prev_limits$ в конец массива R
 - 10: **Постусловие** Упорядоченность массива R сохраняется
-

В алгоритме выполняются все предложения 1-5. ■

Линейная независимость существенных ограничений-неравенств

Лемма 3 (Фаркаш [20]). Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ и $f_0(x)$ — однородные линейные функции m вещественных переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Предположим, что соотношения $f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0$ влекут за собой неравенство $f_0(x) \geq 0$. Тогда существуют неотрицательные постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, для которых выполняется тождество $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_r f_r(x) \equiv f_0(x)$.

Если в лемме Фаркаша коэффициенты всех функций рациональные числа (у нас они все равны 1), то и все λ_i рациональны, т.к. лемма Фаркаша справедлива для любого упорядоченного поля [16].

Умножив все λ_i на наименьший общий знаменатель, получим условие Фаркаша в виде $L_1 f_1(x) + L_2 f_2(x) + \dots + L_r f_r(x) \equiv L_0 f_0(x)$, где все L_i натуральные числа. У всех существенных неравенств-ограничений все ненулевые коэффициенты равны 1. Поэтому для линейной зависимости одного ограничения от других при взятии их линейной комбинации, мы должны получить неравенство, в котором все ненулевые коэффициенты в обеих сторонах равны одному и тому же натуральному числу.

Предложение 7. Все существенные неравенства-ограничения линейно независимы.

Доказательство. По построению алгоритмом существенного ограничения каждая текущая вершина x_j сосед в графе QX предыдущей вершины x_{j-1} и т.д.. Т.е. все $\Gamma x_j \cap \Gamma x_{j-1} \neq \emptyset$.

Допустим, имеется несколько (> 1) ограничений и неравенство f_0 зависит от других неравенств.

Если в f_0 входит только a_j , то f_0 соответствует ограничению $\{x_j, \Gamma x_j\}$ и может зависеть только от ограничений вида $\{X_0, \Gamma X_0, \{x_j\} \subset X_0, \Gamma x_j \supseteq \Gamma X_0\}$, что возможно

только при $\Gamma x_j = \Gamma X_0$ и, по замечанию 1, такое $\{x_j, \Gamma x_j\}$ не входит в число существенных.

Итак, пусть a_j и $a_{j+1} \in f_0$ и f_0 зависит от других неравенств-ограничений $\{f_p\} \cup \{f_q\} \cup \{f_r\}$, $a_j \in \{f_p\} \cup \{f_q\}$, $a_{j+1} \in \{f_p\} \cup \{f_r\}$, $b_k \in \Gamma a_j \cap \Gamma a_{j+1}$. Тогда $(\Sigma L_p + \Sigma L_q)a_j + (\Sigma L_p + \Sigma L_r)a_{j+1} + \dots \leq (2\Sigma L_p + \Sigma L_q + \Sigma L_r)b_k + \dots$ и по выводу из леммы Фаркаша $\Sigma L_p + \Sigma L_q = \Sigma L_p + \Sigma L_r = 2\Sigma L_p + \Sigma L_q + \Sigma L_r$, откуда $\Sigma L_p = \Sigma L_q = \Sigma L_r = 0$. А значит и все исходные $L_\alpha = 0$, т.к. они неотрицательны. ■

Оценка числа операций

Основные элементарные операции в алгоритме: поиск предыдущей вершины в графе QX для списка $prev_conn$ на шаге 1; поиск по строке x ограничений в R на шаге 2; поиск по строке y ограничений на шагах 5,6; добавление ограничений в R на шагах 3,7; расширение ограничений в $prev_limits$ на шаге 4.

Пусть длина R перед итерацией j равна r_{j-1} . Тогда порядок числа элементарных операций на шаге 1: j , на шаге 2: $\leq r_{j-1} \log j$, на шаге 3: 1, на шаге 4: $\leq r_{j-1}$, на шаге 5: $\leq r_{j-1} \log r_{j-1}$, на шаге 6: $\leq r_{j-1} \log r_{j-1}$, на шаге 7: $\leq r_{j-1}$. Отсюда получаем $r_j \leq 2r_{j-1} + 1$, т.е. $r_j \leq 2^j - 1$. Число всех операций на итерации j : $\leq 2(2^j - 1) \log(2^j - 1) + (2^j - 1) \log j + 2(2^j - 1) + 1$. Всего число операций на всех итерациях: $\leq C \Sigma_{j=1}^n 2^j j + 2^j \log j + 2^j \sim Cn2^n$, где $n = |X|$, C константа. Число ограничений $r \leq 2^n - 1$.

Как показывают нижеследующие примеры, хотя полученная оценка и достижима, но диапазон разброса реального числа операций весьма велик.

4. Примеры

Пример 1 (конфигурация '1-1'). $X = \{x_i | i = 1..n\}$, $Y = \{y_i | i = 1..n\}$, $\Gamma x_i = y_i$. Алгоритм обрабатывает каждую связную компоненту графа отдельно, связная компонента состоит из одной дуги и число ограничений — n .

Пример 2 (конфигурация 'Напор'). $X = \{x_i | i = 1..n\}$, $Y = \{y_i | i = 1..n\}$, $\Gamma x_i = \{y_j | j = 1..i\}$. Так как все $\Gamma x_{j-1} \subset \Gamma x_j$, то алгоритм на шаге j ограничение для x_j объединяет с копией ограничения, полученного на шаге $j - 1$. Всего ограничений n : $\{\{x_i\}, \{y_i\} | i = 1..k\}$, $k = 1..n$.

Пример 3 (конфигурация 'Пила'). $X = \{x_i | i = 1..n\}$, $Y = \{y_i | i = 1..n + 1\}$, $\Gamma x_i = \{y_i, y_{i+1}\}$. Конфигурация является простой цепью от y_1 до y_{n+1} . Алгоритм на каждой итерации дублирует ограничения, куда входит x_{j-1} , вводя в них x_j + само ограничение для x_j . Всего ограничений получается $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример 4 (конфигурация 'Паук'). $X = \{x_i | i = 1..n\}$, $Y = \{y_i | i = 0..n\}$, $\Gamma x_i = \{y_0, y_i\}$. Для всех $X_0 \subseteq X$ все ΓX_0 пересекаются по y_0 , но различны. Поэтому всего ограничений столько же, сколько и подмножеств в X . Т.е. $2^n - 1$.

4.1. Оценка числа ограничений

Приведенные примеры конфигураций сети показывают, что рост числа ограничений может варьироваться в весьма широких пределах, от линейного, до экспоненциального. Теоретическая оценка меры того, как в среднем растет число ограничений требует отдельного рассмотрения.

Для получения приближенной вычислительной оценки среднего числа ограничений необходимо обработать значительную часть набора сетей какого-либо размера. В сети размера $n \times m$, где $n = |X|$, $m = |Y|$, у каждой вершины из X Γ может быть любым

подмножеством в Y , т.е. всего $2^m - 1$. Общее число различных сетей равно $(2^m - 1)^n$ и при $m = n$ имеет порядок 2^{n^2} . При $n = 10$ получаем порядок 2^{100} , что выходит за пределы вычислительных возможностей.

Поэтому обработаны полностью сети следующих размеров (n, m) : (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,4), (4,5), (4,6). Программа расчета доступна в [19]. Результат показан в таблицах 1, 2, 3. Из этих расчетов видно, что для сетей $n \times m$ при $n < m$ максимальное

Т а б л и ц а 1

Длина R (r) и к-во сетей (Nets) для X = 3												
Y :	3		4		5		6		7		8	
r	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%
1	7	2,0	15	0,4	31	0,1	63	0,0	127	0,0	255	0,0
2	108	31,5	450	13,3	1620	5,4	5418	2,2	17388	0,8	54450	0,3
3	168	49,0	1470	43,6	9120	30,6	48006	19,2	230328	11,2	1043790	6,3
4	60	17,5	1128	33,4	11820	39,7	94920	38,0	656460	32,0	4136328	24,9
5	-	-	216	6,4	4320	14,5	52920	21,2	514080	25,1	4359096	26,3
6	-	-	72	2,1	2160	7,3	34920	14,0	423360	20,7	4356072	26,3
7	-	-	24	0,7	720	2,4	13800	5,5	206640	10,1	2631384	15,9
sum	343	100	3375	100	29791	100	250047	100	2048383	100	16581375	100

Т а б л и ц а 2

Длина R (r) и к-во сетей (Nets) для $ X = 4$						
$ Y :$	4		5		6	
r	Nets	%	Nets	%	Nets	%
1	15	0,0	31	0,0	63	0,0
2	1050	2,1	3780	0,4	12642	0,1
3	8160	16,1	50430	5,5	264936	1,7
4	17400	34,4	183480	19,9	1478400	9,4
5	15000	29,6	270480	29,3	3266760	20,7
6	5904	11,7	196440	21,3	3525480	22,4
7	2256	4,5	122760	13,3	3075240	19,5
8	768	1,5	64800	7,0	2199120	14,0
9	72	0,1	20400	2,2	1036440	6,6
10	-	-	7920	0,9	591840	3,8
11	-	-	1440	0,2	158400	1,0
12	-	-	1440	0,2	120960	0,8
13	-	-	-	-	9360	0,1
14	-	-	-	-	3600	0,0
15	-	-	120	0,0	9720	0,1
sum	50625	100	923521	100	15752961	100

число ограничений в каждой сети равно $2^n - 1$, что соответствует теоретической оценке пункта 3.3.

Сети других размеров обработаны выборочно путем случайной выборки, повторенной 10000000 раз для каждого размера. Результаты этих расчетов добавлены в таблицу 3 и показаны в таблице 4. Максимальное число ограничений для каждой такой сети также равно $2^n - 1$.

Т а б л и ц а 3

Математическое ожидание (E) и стандартное отклонение (σ)												
$ Y :$	3		4		5		6		7		8	
$ X $	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ
3	2,82	0,74	3,41	0,94	3,94	1,09	4,42	1,17	4,84	1,20	5,19	1,18
4	-	-	4,53	1,19	5,52	1,51	6,48	1,76	7,38	1,93	8,21	2,03
5	-	-	-	-	7,02	1,82	8,56	2,25	10,08	2,61	11,55	2,89
6	-	-	-	-	-	-	10,60	2,68	12,85	3,24	15,10	3,73
7	-	-	-	-	-	-	-	-	15,63	3,83	18,78	4,55
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,55	5,33

Т а б л и ц а 4

Математическое ожидание (E) и стандартное отклонение (σ) для сетей $n \times m$											
8×9		9×10		10×11		11×12		12×13		13×14	
E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ
26,83	6,27	37,55	8,53	51,62	11,49	69,83	15,31	93,19	20,20	122,83	26,41

Полученные результаты показывают, что во всех случаях σ колеблется в пределах 20-25% от E независимо от размера сети. Т.е. это показывает, что распределение длин всегда имеет хвосты, которые могут только увеличиваться, пока не достигнут теоретических границ минимума (1) и максимума ($2^n - 1$). После этого σ начнет уменьшаться и E стабилизируется, так как распределение длин ограничений сети имеет колокол-образный вид. Но достичь этого не хватает вычислительных мощностей.

5. Система равенств

$$\begin{cases} a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \iff (2) \ \& \ \begin{cases} a_i \geq \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j \leq \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases}$$

Значит, ограничения для системы равенств состоят из ограничений для системы неравенств (2), изученные ранее, и ограничений для двойственной сети T , у которой, по сравнению с сетью S , направления дуг изменены на обратные, $s \rightarrow t$, $t \rightarrow s$. Ограничители по дугам будут: для $(s, y_j) - (b_j, \infty)$, для $(y_j, x_i) - (0, \infty)$, для $(x_i, t) - (0, a_i)$.

Ограничения для T получаем описанным выше способом и объединяем их с ограничениями для S .

Предложение 8. Ограничение $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$ существует тогда, когда (X, Y) связная компонента графа G .

Доказательство. По алгоритму мы получаем, что существенные ограничения имеются только внутри каждой связной компоненты исходного графа.

В частности, ограничение у всей связной компоненты для S $\Sigma_X a_i \leq \Sigma_Y b_j$ и ограничение для T $\Sigma_Y b_j \leq \Sigma_X a_i$ объединяются в $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$, также это следствие исходной системы равенств.

Верно и обратное: если имеется пара ограничений $\Sigma_X a_i \leq \Sigma_Y b_j$ и $\Sigma_Y b_j \leq \Sigma_X a_i$, т.е. $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$, то (X, Y) связная компонента графа G . Действительно, в этом случае $\Gamma X = Y$ и $\Gamma Y = X$. ■

Заключение

Построенный алгоритм получения независимых условий решения распределительной задачи легко программируется и позволяет эффективно подбирать размеры запасов, потребностей продукта и анализировать их вариации.

Алгоритм статьи реализован в виде программы, которая в аналитическом виде строит полный набор ограничений-неравенств для прямого или дуального графов.

Программа доступна в [19].

Там же находится процедура расчета всех ограничений для конкретного набора ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форд Л., Фалкерсон Д. Потoki в сетях, пер. с англ. Москва: ИЛ, 1966. 278 с.
2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва: Мир, 1974. 520 с.
3. Филлипс Д., Гарсия-Диас А. Методы анализа сетей, пер. с англ. Москва: Мир, 1984. 496 с.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. Москва: Вильямс, 2013. 1328 с.
5. Berge C. Graphs. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991. 413 p.
6. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications. NY, Prentice Hall, 1993. 846 p.
7. Берж К. Теория графов и ее применение, пер. с франц. Москва: ИЛ, 1962. 320 с.
8. Родионов В. В. Параметрическая задача о кратчайших расстояниях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 5. С. 1173–1177.
9. Швецов В. И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10.
10. Гасникова Е. В., Гасников А. В., Ярмошук Д. В. и др. О многостадийной транспортной модели и достаточных условиях ее потенциальности // Математическая теория игр и её приложения. 2023. Т. 15. № 2. С. 3–17.
11. Йенсен П., Барнес Д. Потокoвое программирование, пер. с англ. Москва: Радио и связь, 1984. 392 с.
12. Лотоцкий В. А., Мандель А. С. Модели и методы управления запасами. Москва: Наука, 1991. 188 с.
13. Малащенко Ю. Е., Новикова Н. М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. <http://www.ccas.ru/depart/malashen/papper/pp.htm>
14. Боженьюк А. В., Герасименко Е. М. Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона. 2013. № 1. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583>
15. Колесников К. Г., Масалкин А. А., Москвин Б. В. Параметрическая оптимизация информационного обмена в сети связи с динамически изменяющейся структурой // Труды военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. 2019. № 668. С. 31–36.
16. Черников С. Н. Линейные неравенства. Москва: Наука, ГРФМЛ, 1968. 488 с.
17. Hoffman A. J. Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis // Combinatorial Analysis, edited by R. Bellman and M. Hall, pp. 113–128. Providence, American Mathematical Society, 1960. 311 p.
18. Lawler E. L. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. NY, Holt, Rinehart and Winston, 1976. 374 p.
19. <https://github.com/Gilbert00/TransportNet>

20. Даффин Р., Питерсон Е., Зенер К. Геометрическое программирование, пер. с англ. Москва: Мир, 1972. 311 с.

REFERENCES

1. Ford L. R., Fulkerson D. R. Flows in Networks. N.J., Princeton University Press, 1962. 278 p.
2. Hu T. C. Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley Publishing Company, 1970. 520 p.
3. Phillips D. T., Garcia-Diaz A. Fundamentals of Network Analysis. N.J., Prentice Hall, 1981. 496 p.
4. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms, 3-d edition. Massachusetts, The MIT Press, 2009. 1328 p.
5. Berge C. Graphs. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991. 413 p.
6. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications. NY, Prentice Hall, 1993. 846 p.
7. Berge C. Theorie des graphes et ses applications. Paris, Dunod, 1958. 320 p.
8. Rodionov V. V. The parametric problem of shortest distances // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1968, Vol. 8, № 5, pp. 336–343.
9. Shvetsov V. I. Algorithms for distributing traffic flows // Automation and Remote Control, 2009, Vol. 70, № 10, pp. 1728–1736.
10. Gasnikova E. V., Gasnikov A. V., Yarmoshik D. V. and others O mnogostadijnoj transportnoj modeli i dostatochnyh uslovijah ee potentsial'nosti // Matematicheskaja teorija igr i ee prilozhenija, 2023, Vol. 15, № 2, pp. 3–17. (in Russian)
11. Jensen P. A., Barnes J. W. Network Flow Programming. NY, John Wiley and Sons, 1980. 392 p.
12. Lototskij V. A., Mandel' A. S. Modeli i metody upravlenija zapasami. Moscow, Nauka, 1991. 188 p. (in Russian)
13. Malashenko Y. E., Novikova N. M. Modeli neopredelennosti v mnogopol'zovatel'skih setyah. Moscow, Editorial URSS, 1999. (in Russian) <http://www.ccas.ru/depart/malashen/papper/pp.htm>
14. Bozhenjuk A. V., Gerasimenko E. M. Razrabotka algoritma nahozhdenija maksimal'nogo potoka minimal'noj stoimosti v nechetkoj dinamicheskoy transportnoj seti // Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, № 1. (in Russian) <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583>
15. Kolesnikov K. G., Masalkin A. A., Moskvina B. V. Parametricheskaja optimizatsija informatsionnogo obmena v seti svjazi s dinamicheski izmenjajushchejsja strukturoj // Trudy voenno-kosmicheskoy akademii imeni A. F. Mozhajskogo, 2019, № 668, pp. 31–36. (in Russian)
16. Chernikov S. N. Linejnye neravenstva. Moscow, Nauka, GRFML, 1968. 488 p. (in Russian)
17. Hoffman A. J. Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis // Combinatorial Analysis, edited by R. Bellman and M. Hall, pp. 113–128. Providence, American Mathematical Society, 1960. 311 p.
18. Lawler E. L. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. NY, Holt, Rinehart and Winston, 1976. 374 p.
19. <https://github.com/Gilbert00/TransportNet>
20. Duffin R. J., Peterson E. L., Zener C. Geometric Programming - Theory and Application. NY, John Wiley and Sons, 1967. 311 p.