О парадоксе Ришара

(в изложении Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя. Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.), далее по тексту именуемом - «Первоисточник».)

Начнем с пространной цитаты из Первоисточника, чтобы не быть обвиненными в том, что мы вырываем отдельные фразы из контекста:

«Чтобы читателю было легче понять идею доказательства Гёделя, мы (следуя Гёделю) приведем вначале схему рассуждения, посредством которого получается логическая антиномия (противоречие), известная под названием «парадокса Ришара» (по имени описавшего ее в 1905 г. французского математика).

Возьмем какой-нибудь язык, ... средствами которого можно описывать и определять все чисто арифметические свойства чисел. Рассмотрим определения, которые можно сформулировать на этом языке. Ясно, что некоторые термины, относящиеся к арифметическим свойствам, нам определить явным образом все равно не удастся (с чего-то надо начать и в определениях во избежание ситуаций, известных под названиями «порочного круга» и «бесконечного спуска»), хотя, конечно, мы можем в принципе понимать смысл этих слов и без определений. Для нашей цели несущественно, какие именно термины принять в качестве исходных, неопределяемых; мы можем, например, считать, что мы понимаем смысл предложений «целое число делится на другое целое число», «целое число является произведением двух целых чисел» и т. п. Свойство быть простым числом тогда можно определить следующим образом: «не делиться ни на одно целое число, кроме самого себя и числа 1»; свойство быть точным квадратом: «быть произведением некоторого целого числа на то же число» и т. п.

Легко видеть, что каждое такое определение состоит лишь из конечного числа слов, а потому и из конечного числа букв алфавита. Поэтому мы можем ввести для таких словесных определений отношение порядка, считая одно определение предшествующим другому, если число букв, из которых состоит первое определение, меньше числа букв, составляющих второе определение; в тех же случаях, когда два определения состоят из одного и того же числа букв, одно из них считать предшествующим другому в обычном лексикографическом (алфавитном, словарном) порядке. Исходя из такого упорядочения можно теперь расположить все определения рассматриваемого вида в последовательность, сопоставив каждому из них единственное натуральное число — номер в этой же последовательности. Тогда самое короткое (и стоящее ранее других в алфавитном порядке) определение получит номер 1, следующее за ним в этом «словаре определений» — номер 2 и т. д.

Поскольку каждому определению теперь сопоставлено некоторое натуральное число, то может оказаться, что в некоторых случаях число, сопоставленное какому-нибудь определению, само будет обладать определяемым свойством.

Пусть, например, определяющее выражение «не делиться ни на одно натуральное число, кроме самого себя и числа 1» оказалось в нашей последовательности на 17-м месте; ясно, что сопоставленное ему число 17 само подпадает под это определение. Пусть, с другой стороны, определяющее выражение «быть произведением некоторого натурального числа на то же самое число» получило номер 15; само число 15, очевидно, не является точным квадратом и потому данным свойством не обладает. Назовем числа, не обладающие свойствами, определяемыми предложениями, которым они соответствуют в описанной нами нумерации, *ришаровыми*. Таким образом, « x — ришарово число» — это просто сокращение выражения « x не обладает свойством, определяемым предложением, имеющим номер x в данной словарной последовательности определяющих предложений». (Скажем, число 17 из нашего первого примера не является ришаровым, а число 15 из второго примера — ришарово.)

Теперь мы уже можем сформулировать парадокс Ришара. Определяющее выражение для свойства быть ришаровым числом описывает, очевидно, некоторое арифметическое свойство натуральных чисел. Значит, само определяющее выражение входит в описанную выше последовательность определяющих выражений. Но тогда оно имеет в этой последовательности некоторый номер, который мы обозначим через n . Зададим теперь вполне естественный вопрос (немедленно приводящий к антиномии Ришара): является ли

число n рижаровым? Читатель, конечно, сразу увидит, что противоречие теперь неизбежно. В самом деле, число n является рижаровым в том и только в том случае, если оно не обладает свойством, описываемым предложением, имеющим номер n , т. е. не обладает свойством быть рижаровым! Короче говоря, n рижарово тогда и только тогда, когда оно не рижарово, т. е. утверждение « n — рижарово число» является одновременно истинным и ложным.

Следует заметить, что это противоречие в известном смысле есть трюк, который нам удался благодаря не вполне точному соблюдению правил игры. Дело в том, что мы фактически использовали одно допущение, которое, однако, предпочли в явном виде не формулировать. Мы согласились рассматривать определения *чисто арифметических* свойств натуральных чисел, т. е. свойств, формулируемых в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п. Затем, однако, без дополнительных оговорок мы включили в ту же последовательность определений предложение, сформулированное посредством упоминания о некотором *способе записи* арифметических свойств. Строго говоря, определение свойства быть рижаровым числом просто не принадлежит к той последовательности определений, которая вначале описывалась, так как это определение использует такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности. Таким образом, если мы будем четко различать утверждения *самой* арифметики (относящиеся к числам, а отнюдь не к записям, в которые такие числа входят, т. е. к равенствам, неравенствам и вообще формулам) и утверждения *относительно* арифметики (т. е. как раз утверждения об арифметических формулах), то мы не получим никакого парадокса Рижара.» (1 стр.69-72)

Если отсечь лишнее, то причиной возникновения парадокса Рижара, по мнению Авторов Первоисточника, следует считать то, что сначала «мы согласились рассматривать определения *чисто арифметических* свойств натуральных чисел, т. е. свойств, формулируемых в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п. Затем, однако, без дополнительных оговорок мы включили в ту же последовательность определений предложение», которое «использует такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности».

Не знаю, как другим, а мне трудно согласиться с таким логическим заключением.

Почему?

Давайте начнем разбираться по порядку. И начнем с понятий, терминов и дефиниций. Понятий о свойствах чисел.

Понятие арифметического свойства числа (речь здесь идет, надо полагать, о натуральных числах), складывается из названия (имени) этого свойства, обозначаемого словом – термин, и описания, определения содержания, сути свойства, обозначаемого словом – дефиниция. Например:

Простое число - натуральное число, которое делится только 1 и на само себя.

Где, «***простое число***», - это термин (имя, название свойства, но ни коим образом не «сокращение выражения»), определяющего суть, содержание свойства);

а, «***натуральное число, которое делится только 1 и на само себя***», - это дефиниция (описание, определение содержания, сути свойства);

и все вместе (термин + дефиниция) – понятие.

Точный квадрат, - это натуральное число, являющееся «***произведением некоторого натурального числа на то же самое***» натуральное «число».

Подводим промежуточный итог: дефиниции или *определения чисто арифметических* свойств натуральных чисел это (согласно мнению Авторов Первоисточника) утверждения, формулируемые в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п.

Обратим теперь наше внимание на понятие - «Ришарово число».

Ришаровы числа, - числа (натуральные?)*, не обладающие свойствами, определяемыми предложениями, которым они соответствуют в нумерованной последовательности определяющих предложений.

* - На самом деле здесь речь идет уже не о всех натуральных числах, а только о той их части, которая была использована для нумерации дефиниций свойств натуральных чисел. Для остальных натуральных чисел их отношение к Ришаровым числам данное определение, как можно заметить при более внимательном рассмотрении, не устанавливает. Но и не говорит об этом прямо. Фактически перед нами первая реальная, хотя и не столь явная, небрежность в формулировке данного определения. О второй чуть ниже.

Два замечания относительно данного понятия:

1. Дефиниция данного понятия не содержит *определения чисто арифметических* свойств натуральных чисел, формулируемых в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п. (Сравните: «*Определяющее выражение для свойства быть ришаровым числом описывает, очевидно, некоторое арифметическое свойство натуральных чисел.*» (1 стр. 71) Для кого-то это может и «очевидно», а для меня так и нет... Укажите пальцем, пожалуйста, на термины *арифметическое сложение, умножение и т. п.* в данной дефиниции... Не слышу ответа?)
2. Дефиниция данного понятия **не** «использует такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности», вопреки тому, что указывают Авторы Первоисточника.

Надеюсь, эти два соображения достаточно наглядны и не требуют углубленного разбора.

Интересный вопрос: а что же тогда содержит данная дефиниция... ? Но об этом чуть позже.

Данная дефиниция действительно **не** «использует такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности». Эти понятия использует предложенный лексикографический метод упорядочивания *определений чисто арифметических* свойств натуральных чисел, устанавливающий порядок, закрепляемый нумерацией этих определений. Но не дефиниция «Ришарового числа».

Что же, поскольку дефиниция Ришарового числа **не** «использует такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности» (не будем излишне заострять внимание на неточной адресации Авторов Первоисточника, сочтем это за досадную оплошность), а единственный кто, использует эти метаматематические понятия является *лексикографическая (алфавитная, словарная)* процедура упорядочивания определений свойств натуральных чисел, то ее (эту процедуру) тогда и следует полагать виновной в возникновении парадокса Ришара.

При этом следует учитывать, что сама *лексикографическая (алфавитная, словарная)* процедура упорядочивания дефиниций свойств натуральных чисел, при внешне кажущейся строгости и однозначности устанавливаемой ею отношения порядка, в реальности данной способностью не обладает. Напротив она закрепляет, фиксирует в известной мере случайный, и в то же время произвольный результат формулирования *чисто арифметических* свойств натуральных чисел в терминах некоего языка. Ведь вполне понятно, что используя одни слова - синонимы вместо других, изменяя порядок следования слов в определении, но не искажая и не разрушая при этом семантику утверждения, меняя систему пунктуации мы будем получать семантически идентичные, но лексически существенно различные конструкции дефиниций, которые будут занимать различные места в упорядоченном списке *чисто арифметических* свойств

натуральных чисел, устанавливаемом предложной Ришаром лексикографической процедурой. (Надо учитывать так же возможность альтернативных формулировок дефиниций, например, через процедуру умножения, а не через деление, и наоборот, и т.д.)

Из выше сказанного следует, что если мы сможем заменить лексикографическую процедуру упорядочивания, использующую такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности, на иную процедуру, пусть даже так же устанавливающую в известной мере случайно-произвольный порядок на множестве определений чисто арифметических свойств натуральных чисел, но не использующую указанных метаматематических понятий, то парадокс Ришара возникать не должен. Не так ли?

Прделаем мысленный эксперимент. Предположим, что мы записали на карточках лексические конструкции дефиниций свойств натуральных чисел, сложили их в мешок, и начали их в случайном порядке доставать, закрепляя этот порядок присвоением карточкам номеров в порядке их появления из мешка. (Следует отметить, что у нас может возникнуть любая последовательность дефиниций, в том числе с некоторой, пусть и небольшой вероятностью, последовательность, которую нам установила бы лексикографическая процедура). Зададимся вопросом, возникнет ли при этом парадокс Ришара? Ответ,- «нет», если в мешке будут только карточки с дефинициями чисто арифметических свойств натуральных чисел, и,- «да», если в мешке окажется карточка с дефиницией «числа Ришара». Значит дело все же не неких метаматематических понятиях, а в дефиниции «числа Ришара».

Попробуем еще раз сформулировать, что мы понимаем под термином - «Ришарово число» (с учетом того, что «Ришаровы числа» выбираются не из всего множества натуральных чисел, а только из тех, которые пошли на нумерацию определений в нашем списке).

Ришаровы числа, - натуральные числа, использованные для нумерации определений свойств натуральных чисел, не обладающие арифметическими свойствами, определяемыми утверждениями, которым они соответствуют в установленном нами нумерованном списке свойств натуральных чисел.

Обратим внимание, что такая формулировка дефиниции, как впрочем, и формулировка дефиниции, использованная Авторами Первоисточника, предполагает/предусматривает наличие в теле каждого нумерованного утверждения из нашего списка определения некоего (вообще-то по изначальной договоренности - «чисто арифметического»**) свойства натуральных чисел; и напротив не предполагает/не предусматривает возможность отсутствия такого. То есть формулировка дефиниции исходит из истинности метаматематического утверждения: «Все нумерованные утверждения в нашем списке содержат в своем теле определение некоего арифметического свойства натурального числа». Хотя и делает это скрыто, не акцентируя внимания на данном моменте.

** - По тексту данной главы Первоисточника встречаются три термина:

- чисто арифметическое свойство числа:

- арифметическое свойство числа:

- свойство числа:

причем определение (дефиниция) худо-бедно формулируется только для первого (худо-бедно потому, что вероятно не все, что формулируется с использованием терминов: сложение, вычитание, умножение, деление и т.д.), точно относится дефинициям чисто арифметических свойств чисел). Для двух остальных даже намек на попытку определение семантики, смысла, стоящего за этими терминами, не просматривается. Их можно рассматривать и как вполне самостоятельные термины (до определения сути, смысла которых просто не дошли руки), так и как сокращения термина чисто арифметическое свойство числа (на вкус читающего), что вольно или невольно вносит смысловую какофонию в текст Первоисточника.

Обратим так же внимание на то, что дефиниции «Ришарова числа», не смотря на проведенные и предполагаемые «модернизации», по прежнему не содержит и не будет содержать **определения чисто**

арифметических свойств натуральных чисел, формулируемых в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п. (вопреки утверждению Авторов первоисточника).

Что же тогда она - дефиниция «Ришарова числа», содержит?

В моем понимании дефиниция «Ришарова числа» содержит референтную ссылку с плавающим (в зависимости от значения рассматриваемого числа) адресом, которая в большинстве случаев действительно приводит к дефиниции определенного арифметического свойства, наличие которого может быть реально проверено у рассматриваемого числа, и позволяет решить вопрос об отнесении рассматриваемого числа к Ришаровым числам.

В большинстве, но не во всех.

Исключением является как раз тот случай, когда мы:

а) включаем дефиницию «Ришарова числа» в список нумерованных утверждений (или говоря иначе, - когда позволяем карточке с этим определением попасть в наш виртуальный черный мешок);

и

б) рассматриваем вопрос об отнесении к «Ришаровым числам» именно числа, нумерующего данную дефиницию.

Наша логическая конструкция в этом случае становится противоречивой: дефиниция «Ришарова числа», входящая в наш нумерованный список предполагает, что каждое из утверждений нумерованного списка содержит *определение чисто арифметического* свойства натуральных чисел, формулируемого в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п., но сама, будучи элементом нашего нумерованного списка, такого определения не содержит.

Перед нами вторая реальная (хотя, опять же, по возможности, завуалированная) небрежность действий с дефиницией «Ришарова числа»: Авторы Первоисточника (как, по-видимому, и сам Ришар), формулируют ее как дефиницию, существующую вне нашего нумерованного списка определений. При этом, как дефиницию, предполагающую/предусматривающую наличие в каждом нумерованном утверждении в нашем списке определения некоего «чисто арифметического» свойства натуральных чисел, но самой по себе внутри своего тела такого определения не содержащей. А затем «ничто же сумняшися» и ничего не изменяя имплементируют ее в наш нумерованный список.

При таком раскладе при рассмотрении вопроса об отнесении к «Ришаровым числам» числа, сопоставленного дефиниции «Ришарова числа», референтная ссылка превращается в самореферентную ссылку, понуждающую нас в поисках арифметического свойства безрезультатно ходить по порочному кругу, образованному этой самореферентной ссылкой, не имея возможности найти его, ввиду отсутствия такового.

Каков может быть выход из ситуации? У нас нет возможности изменить дефиницию «Ришарова числа» таким образом, чтобы в ее теле присутствовало *определение чисто арифметического* свойства натуральных чисел. Но мы можем изменить ее так чтобы она предусматривала возможность того, что не все утверждения в нашем нумерованном списке содержат в своем теле *определение чисто арифметического* свойства натуральных чисел. В этом случае определение «Ришарова числа» могло бы выглядеть, например, как-то так:

Ришаровы числа, - натуральные числа, использованные для нумерации определений чисто арифметических свойств натуральных чисел, не обладающие свойством, определяемым

утверждением, которому они соответствуют в установленном нами нумерованном списке свойств натуральных чисел. (Если мы хотим, что бы номер дефиниции «Ришарового числа» не относился к Ришаровым числам.)

Или так:

Ришаровы числа, - натуральные числа, использованные для нумерации определений *чисто арифметических свойств* натуральных чисел, не обладающие свойством, определяемым утверждением, которому они соответствуют в установленном нами нумерованном списке свойств натуральных чисел, а так же числа, использованные для нумерации определений свойств натуральных чисел, не содержащих в своем теле *определений чисто арифметических свойств* натуральных чисел. (Если мы хотим, что бы номер дефиниции «Ришарового числа» относился к Ришаровым числам.)

Но в любом случае при таких (корректных, на мой взгляд) определениях «Ришаровых чисел», никакого парадокса не возникает. Вот и все. И дело здесь не метаматематических терминах, а в тщательности формулирования определений. А парадокс Ришара – всего лишь иллюзия, провоцируемая небрежным обращением с дефинициями. Возможно, преднамеренным небрежным обращением.

Кстати, на еще одном небрежно сделанном утверждении базируется и само доказательство Теоремы Геделя «О неполноте». На одном небрежно сделанном ложном утверждении. (Подробнее можно посмотреть здесь <https://doi.org/10.24108/preprints-3112874>).

Литература:

1. Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя : Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.