

О траекториях одной динамической системы, описывающей автоколебания микросейсм

В.Б. Тлячев^{*1}, Д.С. Ушко¹

¹Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

^{*}E-mail: tlyachev@adygnet.ru

Рассмотрены некоторые аспекты автоколебаний источников микросейсм, представленные математической моделью гликолиза Селькова. Работа уточняет некоторые выводы, сделанные в ранее опубликованной статье из журнала «Геосистемы переходных зон». В частности, показано, что динамическая система, моделирующая микросейсм, имеет единственное состояние равновесия, местоположение которого меняется в зависимости от значений параметра, характеризующего концентрацию трещин. Доказано, что система имеет простой неустойчивый узел или фокус, окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом.

Ключевые слова: микросейсм, математическая модель Селькова, автоколебания, круг Пуанкаре, состояние равновесия, ось концентраций трещин.

On the trajectories of a dynamic system describing the auto-oscillation of microseisms

V.B. Tlachev^{*1}, D.S. Ushkho¹

¹Adygea State University, Maykop, Russia

^{*}E-mail: tlyachev@adygnet.ru

Abstract: Some aspects of self-oscillation of microseismic sources, represented by the mathematical model of Sel'kov glycolysis, are considered. The work clarifies some of the conclusions made in a previously published article from the journal "Geosystems of Transition Zones". In particular, it is shown that the dynamic system modeling microseisms has a single equilibrium state, the location of which varies depending on the values of the parameter characterizing the crack concentration. It is proved that the system has a simple unstable node or focus surrounded by at least one stable limit cycle.

Keywords: microseismus, Sel'kov mathematical model, auto-oscillation, Poincaré disk model, equilibrium state, crack concentration axis.

Введение и постановка задачи

Построение и использование математических моделей в различных науках существенно расширяют инструментарий и доказательность исследуемых процессов и явлений природы. В работе [1] впервые к исследованию геологических процессов применена математическая модель Селькова. Отметим, что указанная статья опубликована с замечанием о дискуссионности. Авторам [1] удалось описать взаимодействие между двумя видами трещин системой нелинейных уравнений Селькова. При этом они достаточно подробно и ясно не только обосновали построение математической модели в области теории землетрясений, но и исследовали процессы генерации

микросейсм, закономерности, которые их сопровождают. Это весьма важно в прикладном аспекте. Компьютерное моделирование позволило авторам исследовать процесс образования автоволн источников микросейсм. Однако, как известно, компьютерное (численное) моделирование не позволяет в наиболее общем виде исследовать все зависимости от параметров. Для этого существуют определенные математические теории, в частности качественная теория дифференциальных уравнений [2].

В данной заметке представлено математически строгое, основанное на теории динамических систем, доказательство некоторых утверждений, которые не получили определенного (должного) освещения в работе [1].

Авторами работы [1] отмечается, что автоколебания источников микросейсм наиболее полно описываются моделью гликолиза Селькова, которую в безразмерных величинах можно представить в виде следующей автономной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + ay + bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = c - ay - bx^2y, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c – положительные параметры, $x(t)$ – концентрация трещин относительно небольшой длины, которые считаются инициаторами роста более крупных трещин; $y(t)$ – концентрация относительно крупных трещин, генерирующих сигналы микросейсм.

Состоянием равновесия системы (1) в ограниченной части фазовой плоскости является точка $F\left(c; \frac{c}{a+bc^2}\right)$. В результате переноса начала координат в точку F система (1) переходит в систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{bc^2 - a}{a + bc^2}x + (a + bc^2)y + \frac{bc}{a + bc^2}x^2 + 2bcxy + bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-2bc^2}{a + bc^2}x - (a + bc^2)y - \frac{bc}{a + bc^2}x^2 - 2bcxy - bx^2y. \end{cases} \quad (2)$$

Следуя монографии [2] с целью установления характера состояния равновесия F определим для системы (2) величины σ и Δ :

$$\sigma = \frac{-b^2c^4 + (b - 2ab)c^2 - a - a^2}{\Delta}, \quad \Delta = a + bc^2. \quad (3)$$

Из (3) видно, что $\Delta > 0$. Корнями уравнения $\sigma = 0$ относительно c являются выражения

$$c_1 = \sqrt{\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 8a}}{2b}} \quad \text{и} \quad c_2 = \sqrt{\frac{1 - 2a + \sqrt{1 - 8a}}{2b}}, \quad \text{где} \quad 0 < a < \frac{1}{8}.$$

Замечание 1. Нами рассматриваются только вещественные корни, что важно с точки зрения реальных приложений.

С помощью преобразований Пуанкаре [2] исследуем поведение траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости в целях установления характера их расположения в ограниченной части плоскости. В частности, результаты такого исследования нами используются в качестве инструмента для решения проблемы центра-фокуса применительно к состоянию равновесия F , а также доказательства существования предельного цикла вокруг F .

Результаты исследования

Решение проблемы центра-фокуса для точки F требует изучения поведения траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Это можно сделать с помощью преобразований Пуанкаре [2].

Преобразование Пуанкаре вида $\begin{cases} x = 1/z, \\ y = u/z \end{cases}$ переводит систему (1) в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -bu - bu^2 + (1-a)uz^2 + cz^3 - au^2z^2 \equiv P(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = -buz + z^3 - auz^3 \equiv Q(u, z). \end{cases} \quad (4)$$

Состояниями равновесия системы (4) при условии $z = 0$ являются точки: $W_1(u = 0; z = 0)$, $W_2(u = -1; z = 0)$.

Переход к новым координатам с помощью формул $\begin{cases} x = v/z, \\ y = 1/z \end{cases}$ позволяет перевести систему

(1) в систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3, \\ \frac{dz}{dt} = bv^2z + az^3 - cz^4. \end{cases} \quad (5)$$

Замечание 2 [2]. Система (5), полученная из системы (1) рассматривается только с целью установления характера состояния равновесия $(0;0)$.

В случае $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\substack{v=0 \\ z=0}} \neq 0$ все бесконечно удаленные состояния равновесия системы (1)

удовлетворяют системе $\begin{cases} z = 0, \\ P(u, z) = 0. \end{cases}$ Таким образом, система (1) имеет три бесконечно удаленных

состояния равновесия: $W_1(u = 0; z = 0)$, $W_2(u = -1; z = 0)$, $W_3(v = 0; z = 0)$, при этом W_1 – сложное состояние равновесия, для которого $\sigma = -b \neq 0$.

Применим к системе (4) преобразование $\begin{cases} \bar{u} = z, \\ \bar{z} = u, \end{cases}$ которое приводит её к новой системе:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = -b\bar{u}\bar{z} + \bar{u}^3 - a\bar{u}^3\bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = -b\bar{z} - b\bar{z}^2 + (1-a)\bar{u}^2\bar{z} + c\bar{u}^3 - a\bar{u}^2\bar{z}^2. \end{cases} \quad (6)$$

Изменим масштаб времени в системе (6) по формуле $\tau = -bt$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \bar{u}\bar{z} - \frac{1}{b}\bar{u}^3 + \frac{a}{b}\bar{u}^3\bar{z} \equiv P_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \frac{(a-1)}{b}\bar{u}^2\bar{z} - \frac{c}{b}\bar{u}^3 + \frac{a}{b}\bar{u}^2\bar{z}^2 \equiv \bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{cases} \quad (7)$$

Решением уравнения $\bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}) = 0$ является ряд $\varphi(\bar{u}) = \frac{c}{b}\bar{u}^3 + \dots$, который позволяет получить выражение

$$P_2(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) = -\frac{1}{b}\bar{u}^3 + \dots \quad (8)$$

Из (8) по теореме 65 [2] следует, что точка W_1 – топологическое седло, достаточно малая окрестность которого состоит из четырех гиперболических секторов.

Прямыми вычислениями можно показать, что точка W_2 – простой неустойчивый узел.

Определим тип состояния равновесия точки W_3 . Так как правые части уравнений системы (5) не содержат линейных членов (вторая, третья и четвертая степени), то воспользуемся методом Фроммера [3].

Рассмотрим дифференциальное уравнение траекторий для системы (5) в виде

$$\frac{dz}{dv} = \frac{bv^2z + az^3 - cz^4}{bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3}. \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$\bar{P}_3(v, z) = bv^2z + az^3, \quad \bar{Q}_2(v, z) = bv^2 + az^2. \quad (10)$$

По терминологии [3] направления, вдоль которых интегральные кривые могут входить в особую точку (0,0) уравнения (9), называются критическими. Критические направления находим с учетом (10) при решении уравнения $z + Q_2(v, z) = 0$ [3]. Единственным вещественным корнем данного уравнения является $z = 0$, так как $a > 0$, $b > 0$. По классификации [3] $z = 0$ – обыкновенное простое критическое направление. Далее, следуя [3] рассмотрим функцию

$$\psi(u, v) = \frac{bv^2z + az^3 - cz^4}{bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3} - u, \quad (11)$$

где $z = uv$. Подставляя это значение z имеем:

$$\psi(u, v) = \frac{bvu + avu^3 - bu - au^3 - bvu - (a-1)vu^3}{b + au^2 + bv + (a-1)vu^2 - cv^2u^3}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что $\psi(u, 0) = -u$, то есть

$$\psi'_u(0, 0) = -1. \quad (13)$$

Согласно [3] равенство (13) свидетельствует о том, что только одна интегральная кривая уравнения (9) проходит через особую точку (0,0). Тем самым нами показано, что к состоянию равновесия W_3 системы (5) примыкают только две траектории: одна при $t \rightarrow +\infty$, а другая – при $t \rightarrow -\infty$, обе совпадают с экватором $z = 0$ сферы Пуанкаре. Таким образом, достаточно малая окрестность точки W_3 состоит из двух гиперболических секторов, ограниченных одной ω -сепаратрисой и одной α -сепаратрисой, поэтому справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. Если $c \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$, то система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три состояния равновесия: $W_1(u = 0, z = 0)$ – сложное (топологическое) седло, окрестность которого состоит из четырех гиперболических секторов, $W_2(u = -1, z = 0)$ – простой неустойчивый узел, $W_3(v = 0, z = 0)$ – сложное состояние равновесия, окрестность которого состоит из двух гиперболических секторов.

Исследуем характер состояния равновесия $F\left(c; \frac{c}{a + bc^2}\right)$. Так как $\Delta > 0$, то начало

координат системы (2) является простым состоянием равновесия типа «узел», «фокус» или «центр» [2,4]. Если при этом $c \in (0; c_1) \cup (c_2; +\infty)$, то $\sigma < 0$, следовательно, точка (0;0) – простой устойчивый узел или фокус (по терминологии [4] топологический узел), если $c \in (c_1, c_2)$, то точка с координатами (0;0) – простой неустойчивый топологический узел, если $c = c_1$ или $c = c_2$, то точка (0;0) – негрубый фокус или центр [2,5]. К сожалению, в настоящее время в теории динамических систем для систем вида (2) нет необходимых и достаточных коэффициентных условий центра с

чисто мнимыми характеристическими числами. В нашем случае проведенное выше исследование поведения траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости позволяет утверждать, что в рассматриваемом случае состояние равновесия F не может быть центром.

Обратимся к рис.1, на котором изображены главные изоклины системы (1) в круге Пуанкаре.

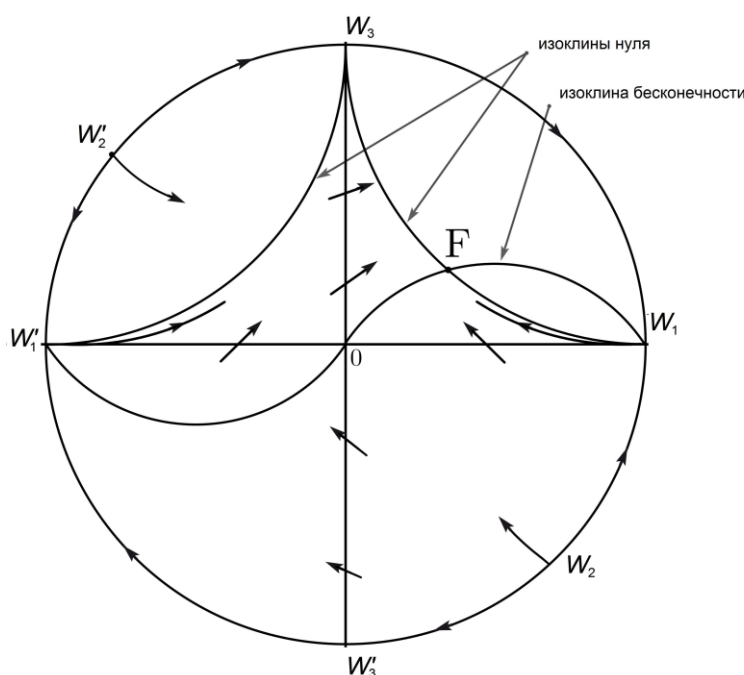


Рис. 1. Прямая $y = 0$ и полуоси вертикальной оси координат являются трансверсалиями по отношению к траекториям системы (1). α -сепаратрисы седла W_1 целиком расположены в верхней полуплоскости.

Так как $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=0} = c$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=0} = ay$ и параметры a, c положительны, то ось ox и полуоси оси

oy являются трансверсалиями по отношению к вектору поля системы (1). В соответствии с рис. 1 дуга любой траектории системы (1), расположенной в ограниченной части фазовой плоскости при достаточно больших положительных значениях t , принадлежит первому квадранту. Поскольку к состоянию равновесия W_3 примыкают лишь две траектории – одна ω -сепаратриса и одна α -сепаратриса, совпадающие с экватором сферы Пуанкаре, то никакая положительная полутраектория системы (1) при $t \geq T$, где T – сколь угодно большое положительное число, не входит ни в одну из точек W_1 и W_3 . Рассмотрим произвольную положительную полутраекторию L^+ , пересекающую ось ординат. Согласно монографии [4] для L^+ существует ω -предельное множество, которое может быть одного из типов: а) одно состояние равновесия; б) одна замкнутая траектория; в) совокупность состояний равновесия и траекторий, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Предположение о существовании центра в точке F допускает наличие у системы (1) хотя бы одного состояния равновесия, отличного от F . Таким образом, при $c = c_{1,2}$ точка F – негрубый фокус, причем устойчивый. При $c \in (c_1, c_2)$ предельное множество для положительной полутраектории L^+ есть не что иное, как устойчивый предельный цикл. Таким образом, имеет место

Утверждение 2. Если $0 < a < \frac{1}{8}$, $c \in (c_1, c_2)$, то в ограниченной части фазовой плоскости система (1) имеет простой неустойчивый узел или фокус, окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом.

Фазовый портрет системы (1) изображен на рис. 2.

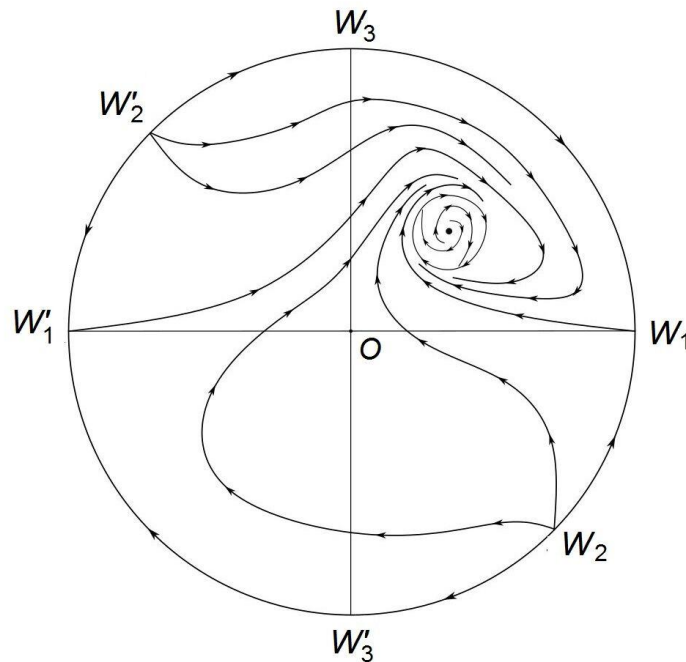


Рис. 2. Расположение траекторий системы (1) в круге Пуанкаре, то есть на всей фазовой плоскости.

Замечание 3. Наличие грубых устойчивых предельных циклов на фазовой плоскости является определяющим признаком автоколебательной системы. Следовательно, изученная система (1) действительно является математической моделью реальной автоколебательной системы [2].

Замечание 4. Придерживаясь терминологии, принятой в современной качественной теории динамических систем второго порядка, точку $(0;0)$ мы называем состоянием равновесия системы (5), а для дифференциального уравнения (9) траекторий этой же системы – особой точкой.

Заключение

В заключение отметим следующее:

- 1) утверждение авторов [1] о том, что система (6) [1], а в нашем случае система (1) может иметь два состояния равновесия, ошибочно. Изменение параметра v (см. (6) [1]), а в в данной работе параметра c , приводит только лишь к изменению местоположения единственного состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости;
- 2) на рис. 2 статьи [1] траектория пересекает ось концентраций tr -трещин дважды, что невозможно в силу трансверсальности оси ox для траекторий системы;
- 3) в формуле (18) статьи [1] имеется неточность, правильное ее написание таково:

$$v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a}}{b}}.$$

Литература

1. Маковецкий В.И., Дудченко И.П., Закупин А.С. **2017**. Автоколебательная модель источников микросейсм. *Геосистемы переходных зон*. 1(4): 37–46.
<https://doi.org/10.30730/2541-8912.2017.1.4.037-046>
Makovetsky V.I., Dudchenko I.P., Zakupin A.S. **2017**. Autooscillation model of microseism's sources. *Geosystems of Transition Zones*, vol. 1, N 4, p. 37–46. *Geosistemy perehodnykh zon* = Geosystems of Transition Zones, 1(4): 377–385. (In Russ.). <https://doi.org/10.30730/2541-8912.2017.1.4.037-046>
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. **1966**. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. М.: Наука, 568 с.
Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.L. **1973**. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. New York, Toronto, John-Wiley, 548 p. URL:
<https://archive.org/details/qualitativetheor0000unse/page/n9/mode/2up> (accessed 28.10.2024).
3. Фроммер М. **1941**. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. *Успехи математических наук*, 9: 212–253.
Frommer M. **1928**. Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. *Mathematische Annalen*, 99(1): 222–272.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-41390-6>
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. **1976**. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 496 с.
Bautin N.N., Leontovich E.A. **1976**. [Methods and techniques of qualitative research of dynamical systems on a plane]. М.: Nauka, 496 p. (In Russ.).
5. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. **1982**. *Нелинейные колебания в системах второго порядка*. Минск: Изд – во БГУ, 208 с.
Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovsky A.P. **1982**. [Nonlinear oscillations in second-order systems]. Minsk: Publishing house of BSU, 208 p. (In Russ.).

Сведения об авторах

ТЛЯЧЕВ Вячеслав Бесланович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики, Адыгейский государственный университет, ORCID: 0000-0001-6431-316X, e-mail: tlyachev@adygnet.ru.

УШХО Дамир Салихович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Адыгейский государственный университет, ORCID: 0000-0002-1311-5785, e-mail: damirubyh@mail.ru.

TLYACHEV Vyacheslav Beslanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Theoretical Physics, Adyghe State University, ORCID: 0000-0001-6431-316X, e-mail: tlyachev@adygnet.ru.

USHKHO Damir Salikhovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Adyghe State University, ORCID: 0000-0002-1311-5785, e-mail: damirubyh@mail.ru.