

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН СЛОЁВ ТОНКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ ДЛЯ МАКСИМИЗАЦИИ НАГРУЗКИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Селюгин С.В.

e-mail: *selyugin@rambler.ru*

Рассмотрена задача максимизации нагрузки потери устойчивости для тонких композитных пластин за счёт выбора наилучшей локальной ориентации слоёв. Пластины – линейно-упруги и подчиняются гипотезе прямых нормалей Кирхгоффа. На основе вариационного принципа, описывающего устойчивость пластины, получены и проанализированы необходимые условия локальной оптимальности второго порядка в этой задаче. Сравнение решений для условий оптимальности первого и второго порядков показывает, что решения для условий второго порядка справедливы только для части решений условий первого порядка. Отобранные таким образом совместные решения (для условий обоих порядков) и ведут к максимизации нагрузки потери устойчивости. Одним из таких решений является совпадение локального направления волокон и главного направления наибольшей по абсолютной величине главной кривизны поверхности пластины, деформированной по собственной форме потери устойчивости. При определенных условиях для констант материала и кривизн деформированной поверхности возможно дополнительное решение с ориентацией волокон вдоль второго главного направления кривизн. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: композитная пластина, углы укладки волокон слоёв, максимизация нагрузки потери устойчивости, вариационный принцип, условия оптимальности второго порядка.

© Селюгин С.В., 2025

1. Введение

Вопросы оптимизации и обеспечения весовой эффективности конструкций из композиционных материалов являются очень актуальными сегодня. В авиации, как известно, до 50% силовой конструкции современного самолёта (A350, B787) изготовлено из таких материалов.

Устойчивость элементов конструкции является важной характеристикой, определяющей несущую способность конструкции. Такими элементами являются сжатые панели крыльевых поверхностей, сдвиговые стенки (лонжероны, нервюры) и т. д.

Условия оптимальности первого порядка в задаче максимизации нагрузки потери устойчивости композитных пластин изучались ранее, в различных постановках, во многих работах. Соответствующий обзор таких работ можно найти в работах Selyugin (2013), Селюгин (2024).

Условия же второго порядка для обсуждаемых задач до настоящего времени, по-видимому, не рассматривались.

Работа посвящена выводу и анализу условий оптимальности второго порядка в задаче максимизации нагрузки потери устойчивости композитной пластины за счёт выбора углов локальной ориентации волокон слоёв.

В Разделе 2 приведены основные допущения работы.

В Разделе 3 представлены и обсуждены полученные ранее необходимые условия локальной оптимальности первого порядка рассматриваемой задачи.

В Разделе 4 получены и проанализированы необходимые условия локальной оптимальности второго порядка рассматриваемой задачи.

В Разделе 5 представлен иллюстрирующий пример.

Раздел 6 содержит выводы работы.

2. Допущения

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоёв (обобщение на нечётное число слоёв может быть легко выполнено при необходимости).

Толщина всей пластины много меньше любого её линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную кусочно-гладким контуром C , нормаль и касательный вектор к этому контуру. Перемещения по координатам x, y, z обозначаются соответственно u, v, w .

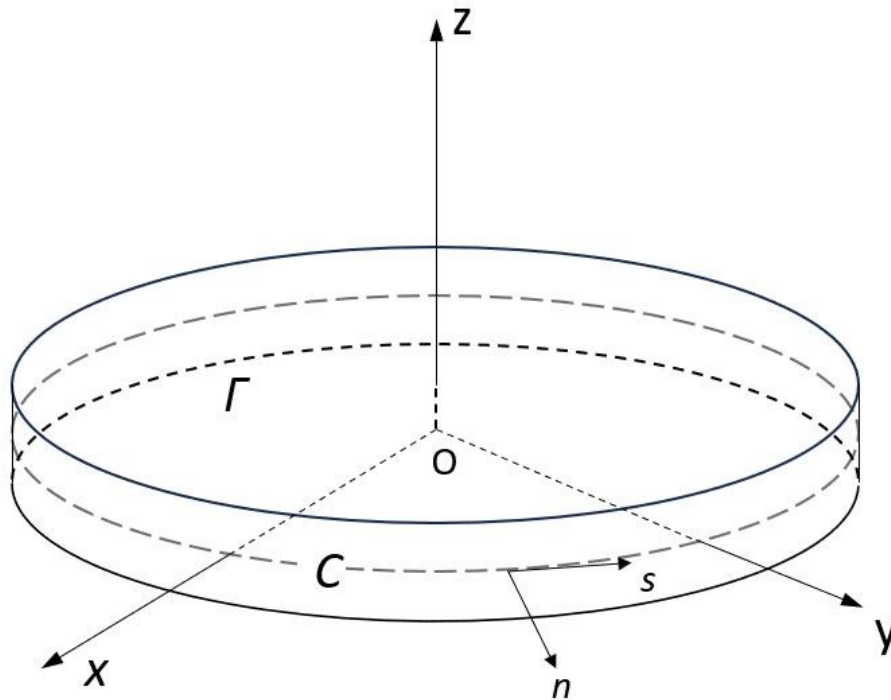


Рис. 1. Тонкая пластина.

Волокна слоёв композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Принята гипотеза Кирхгоффа прямых нормалей к поверхности Γ , означающая равенство нулю xz, yz, zz компонент тензора деформаций Грина.

Возможные краевые условия для пластины – заземление или простое опирание.

Первое (наименьшее) собственное значение потери устойчивости считается некратным (изолированным).

Поведение пластины описывается классической теорией ламинированных пластин (Gibson 1994, Лехницкий 1947, Reddy 2004, Васильев 1988). Соотношения и вариационные принципы, описывающие потерю устойчивости пластины при нагружении по граничному контуру C в плоскости XY , соответствуют подходу (Васидзу 1987).

Везде далее, говоря о деформированной поверхности пластины, будем иметь в виду поверхность собственной формы потери устойчивости.

3. Условия оптимальности первого порядка

Укажем используемые далее условия оптимальности первого порядка (Селюгин 2024).

Известно, что уравнения предельного равновесия при потере устойчивости композитной пластины могут быть получены из соответствующего кинематического вариационного принципа. Этот принцип записывается в виде (см. Васидзу 1987):

$$\delta U = \delta \Pi - \delta W = 0 \quad (1)$$

(δ – символ вариации), где общая потенциальная энергия деформации пластины

$$\begin{aligned} \Pi = \iint dS & \left(\frac{1}{2} D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

а потенциал внешних сил

$$W = -\frac{1}{2} \iint dS \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3)$$

где интегрирование ведется по всей недеформированной срединной поверхности пластины, $D_{ij}, i = 1,2,6; j = 1,2,6$, - элементы матрицы жесткости пластины D , а N_x, N_y, N_{xy} - потоки сил в плоскости пластины, действующие соответственно в направлении x, y и на сдвиг.

Матрица D связывает вектор-столбцы $\vec{M}$ изгибающих M_x, M_y и крутящего M_{xy} моментов и кривизн $\vec{k}$:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}; \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}; \quad \vec{M} = D\vec{k} \quad (4)$$

Вариационный принцип (1) может быть записан и как стационарность отношения общей потенциальной энергии деформации пластины Π и потенциала W некоторых равновесных внешних сил, действующих в конструкции до потери устойчивости (эти силовые факторы обозначены верхним индексом (0)). Имеем

$$\delta \left[\frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] = 0 \quad (5)$$

где

$$W^{(0)} = - \iint dS \left[\frac{1}{2} N_x^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} N_y^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (6)$$

Собственное значение, соответствующее решению прогиба w рассматриваемой задачи устойчивости (называемое далее параметром устойчивости), может быть вычислено как отношение Рэлея:

$$\lambda = \frac{\Pi}{W^{(0)}} \quad (7)$$

Уравнение предельного равновесия следует из указанного вариационного принципа и записывается в виде

$$\begin{aligned} & \left(-D_{11}w_{,xx} - D_{12}w_{,yy} - 2D_{16}w_{,xy} \right)_{,xx} + 2 \left(-D_{16}w_{,xx} - D_{26}w_{,yy} - 2D_{66}w_{,xy} \right)_{,xy} \\ & + \left(-D_{12}w_{,xx} - D_{22}w_{,yy} - 2D_{26}w_{,xy} \right)_{,yy} + \left(N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} \right)_{,x} + \left(N_{xy} w_{,x} + \right. \\ & \left. N_y w_{,y} \right)_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

К этому уравнению должны быть присоединены соответствующие краевые условия.

Вычислим вариацию δ от параметра устойчивости λ (7) как сумму вариаций по прогибу δ_w при постоянных конструктивных параметрах, и только по конструктивным параметрам - углам укладки δ_D . Учтем при этом вариационный принцип (5). Имеем

$$\delta\lambda = \delta_w\lambda + \delta_D\lambda = \delta_D\lambda \quad (9)$$

где изменения прогибов, безусловно, обусловлены изменениями углов укладки по пластине, и вариационный принцип (5) учтен в виде:

$$\delta_w\lambda = 0 \quad (10)$$

В итоге условия оптимальности первого порядка в результате записываются, с учётом основной леммы вариационного исчисления, в виде:

$$\frac{\frac{1}{2}\bar{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \bar{k}}{W^{(0)}} = 0 \quad i=1, \dots, K \quad (11)$$

Вычисляя (10) в осях координат, совпадающих с направлениями главных кривизн деформированной срединной поверхности, окончательно получаем условия оптимальности для углов укладки θ_i , $i=1, \dots, K$, с криволинейными волокнами слоёв, с точностью до положительных множителей, в виде

$$-\sin 2(\theta_i - \psi) \left[\frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] = 0, i=1, \dots, K \quad (12)$$

где $k_1, k_2, \psi, z_i, z_{i-1}$ - наибольшее и наименьшее значение главных кривизн срединной плоскости пластины ($k_1 \geq k_2$), угол между направлением k_1 и осью X, верхняя и нижняя z координаты i -го слоя, $i=1, \dots, K$. Отсчет слоёв при этом ведется от срединной плоскости пластины.

В (12) из первого сомножителя (синус) следуют два корня для угла укладки θ_i , а именно, $\theta_i - \psi = 0$ и $\pi/2$, а из квадратной скобки – еще два, вида

$$\theta_i - \psi = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right) \quad (13)$$

возможных при условии

$$\left| \frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right| \leq 1 \quad (14)$$

В указанное условие входит отношение $\frac{U_2}{4U_3}$, которое для обычных для авиации композиционных материалов близко к единице (например, $\frac{U_2}{4U_3}$ равно 1.09 для графит-эпоксидного материала t300/5208). Как нетрудно видеть, условие (14) может быть выполнено только при главных кривизнах – разных знаков.

4. Условия оптимальности второго порядка

Вычислим вторую вариацию параметра устойчивости λ вследствие изменения углов укладки пластины. Имеем:

$$\delta^2\lambda = \delta[\delta_w\lambda + \delta_D\lambda] = \delta_w(\delta_w\lambda + \delta_D\lambda) + \delta_D(\delta_w\lambda + \delta_D\lambda) = \delta_w^2\lambda + \delta_w(\delta_D\lambda) + \delta_D(\delta_w\lambda) + \delta_D^2\lambda \quad (15)$$

Второй и третий члены в правой части (15), очевидно, равны между собой. Вычислим их, используя вариационный принцип (1), (5) и соотношение (11).

$$\begin{aligned} \delta_w(\delta_D\lambda) &= \delta_w \left(\int d\Gamma \left(\sum_{i=1}^{2K} \frac{\frac{1}{2}\bar{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \bar{k}}{W^{(0)}} \delta\theta_i \right) \right) = \\ &= \delta_w \left(\int d\Gamma \left(\sum_{i=1}^{2K} \frac{\frac{1}{2}\bar{k}^T D \bar{k} + \frac{1}{2}\bar{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \delta\theta_i \bar{k}}{W^{(0)}} \right) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим числитель во внутренней круглой скобке в правой части (16) как D_Δ . Последняя величина означает матрицу изгибной жёсткости, изменённую в результате варьирования углов укладки слоёв. Фактически внутри круглой скобки в (16) стоит параметр устойчивости для матрицы изгибной жёсткости D_Δ . В соответствии с вариационным принципом (5) в результате соотношения (16) получаем нуль, то есть

$$\delta_w(\delta_D\lambda) = 0 \quad (17)$$

Рассмотрим далее величину $\delta_w^2\lambda$. Имеем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \delta_w^2\lambda &= \delta_w(\delta_w\lambda) = \delta_w \left(\delta_w \left(\frac{\Pi}{W^{(0)}} \right) \right) = \delta_w \left(\frac{W^{(0)}\delta_w\Pi - \Pi\delta_w W^{(0)}}{W^{(0)2}} \right) = \\ &= \delta_w \left(\frac{\delta_w\Pi - \lambda\delta_w W^{(0)}}{W^{(0)}} \right) = \frac{W^{(0)}\delta_w(\delta_w\Pi - \lambda\delta_w W^{(0)}) - \delta_w W^{(0)}(\delta_w\Pi - \lambda\delta_w W^{(0)})}{W^{(0)2}} \end{aligned} \quad (18)$$

Последняя круглая скобка в числителе (18), вследствие вариационного принципа (5), равна нулю. Продолжая цепочку соотношений, имеем, с учётом (10):

$$\delta_w^2 \lambda = \frac{\delta_w(\delta_w \Pi - \lambda \delta_w W^{(0)})}{W^{(0)}} = \frac{\delta_w^2 \Pi - \lambda \delta_w^2 W^{(0)}}{W^{(0)}} = \frac{\delta_w^2 \Pi - \lambda \delta_w \frac{\delta_w \Pi}{\lambda}}{W^{(0)}} = 0 \quad (19)$$

Таким образом, получаем в результате

$$\delta^2 \lambda = \delta_D^2 \lambda \quad (20)$$

Интересно отметить, что соотношение $\delta_w^2 \Pi - \lambda \delta_w^2 W^{(0)} = 0$ в (19) – это, фактически, равенство нулю второй вариации по прогибам, вследствие вариации углов укладки, общей потенциальной энергии конструкции (точнее, части этой энергии, возникающей вследствие потери устойчивости). Известная теорема Лагранжа для задач устойчивости (Вольмир 1967) говорит о равенстве нулю как раз второй вариации общей потенциальной энергии конструкции для момента потери устойчивости.

Как известно, необходимое условие максимума некоторого функционала – отрицательная полуопределённость его второй вариации.

С точностью до положительных множителей, вторая вариация параметра устойчивости λ по θ_i даётся выражением, которое должно быть проинтегрировано по площади пластины ($\propto$ - знак пропорциональности):

$$\delta_{\theta_i}^2 \lambda \propto - \left[\frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) \cos 2(\theta_i - \psi) + (k_1 - k_2)^2 \cos 4(\theta_i - \psi) \right] (\delta\theta_i)^2 \quad (21)$$

Выражение (21) при $\theta_i - \psi$, равном 0, будет неположительным при любых значениях главных кривизн и

$$k_1^2 - k_2^2 \geq 0 \quad (22)$$

Далее будем предполагать последнее соотношение выполненным. Случай смены знака левой части (22) будет оговорен особо.

При $\theta_i - \psi$, равном $\pi/2$, (21) приводит (опуская $(\delta\theta_i)^2$) к

$$\delta_{\theta_i}^2 \lambda \propto - \left[-\frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \right] = -(k_1 - k_2)^2 \left[-\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + 1 \right] \quad (22)$$

Соотношение (22) приводит к неположительному значению при

$$-\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + 1 \geq 0$$

или

$$\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \leq 1 \quad (23)$$

Таким образом, при выполнении соотношения (23) для $\theta_i - \psi$, равного $\pi/2$, вторая вариация параметра устойчивости – неположительна.

Как можно видеть, условие (14) на главные кривизны требует, чтобы абсолютная величина левой части (23) была меньше единицы. В том случае, когда (14) выполнено, выполнено и условие (23), что приводит к появлению еще двух корней условий оптимальности первого и второго порядков.

Из (22) следует, что

$$-\left[\frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) \cos 2(\theta_i - \psi) + (k_1 - k_2)^2 \cos 4(\theta_i - \psi) \right] = -(k_1 - k_2)^2 \left[\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \cos 2(\theta_i - \psi) + 2 \cos^2 2(\theta_i - \psi) - 1 \right] \quad (24)$$

В предыдущем разделе было указано соотношение (13), дающее еще два решения для условий оптимальности первого порядка. При этом, очевидно

$$\cos 2(\theta_i - \psi) = -\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \quad (25)$$

Подставляя это решение в (24), получаем в продолжение цепочки (24):

$$-2(k_1 - k_2)^2 \left[-1 + \left(-\frac{U_2}{4U_3} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right)^2 \right] = 2(k_1 - k_2)^2 \sin^2 2(\theta_i - \psi) \geq 0 \quad (26)$$

Это означает, что вторая вариация параметра устойчивости в этом случае – неотрицательна, а, значит, условие максимума – не выполнено.

Итак, необходимое условие локальной оптимальности второго порядка для углов ориентации слоёв укладки пластины при условии (22) – это совпадение угла ориентации волокон слоя с направлением наибольшей главной кривизны. При выполнении соотношения (14) еще одной возможной ориентацией будет $\theta_i - \psi = \pi/2$, то есть по направлению второй главной кривизны.

Для ортотропного материала типа тканый препрег с $U_2 = 0$ условие (14) выполнено всегда для углов ориентации $\pi/2$. Это значит, что углы 0 и $\pi/2$ удовлетворяют условиям оптимальности и первого, и второго порядков. А углы ориентации $\pm \pi/4$, удовлетворяющие условиям оптимальности первого порядка, условиям второго порядка удовлетворять не будут.

Во всех проведенных выше обсуждениях при смене знака у выражения $k_1^2 - k_2^2$ с положительного на отрицательный направления 0 и $\pi/2$ должны поменяться местами. Это означает, что одним из решений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности и первого, и второго порядка, является совпадение локального направления волокон и главного направления наибольшей по абсолютной величине главной кривизны.

5. Пример.

В качестве примера использования полученных выше результатов рассмотрим балку-полоску, сжатую вдоль ее длины. Балка изготовлена из ортотропного материала типа тканый препрег (см. Gibson 1994, гл. 4) с характеристиками $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона 0.25, модуль сдвига $G=5$ ГПа. Направление 0° - вдоль длинной стороны полосы (оно же и направление одной из главных кривизн). Рассмотрены два варианта укладки: $0^\circ/90^\circ$ и $\pm 45^\circ$. Используя сказанное в предыдущем разделе, приходим к выводу, что первый вариант удовлетворяет необходимым условиям оптимальности первого и второго порядка, второй вариант – только первого порядка.

Вычисление элемента D_{11} матрицы изгибной жёсткости первого варианта приводит к его значению на 44% больше, чем для второго варианта укладки. Очевидно, что вследствие этого нагрузка потери устойчивости для первого варианта будет существенно выше, чем таковая для второго варианта.

6. Выводы

Получены и проанализированы необходимые условия локальной оптимальности второго порядка для рассматриваемой задачи максимизации нагрузки потери устойчивости композитной пластины.

Оптимальное решение, удовлетворяющее необходимым условиям и второго, и первого порядков – совпадение в каждой точке пластины главного направления наибольшей по абсолютной величине главной кривизны деформированной поверхности и направления волокон слоя. Кроме того, при определенных условиях для констант материала и кривизн деформированной поверхности возможно дополнительное решение с ориентацией волокон вдоль второго направления главных кривизн.

Приведен пример, иллюстрирующий использование полученных условий оптимальности.

Литература

Васидзу К. 1987. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир.

Васильев В. В. 1988. Механика конструкций из композиционных материалов. Москва.: Машиностроение.

Вольмир А. С. 1967. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 984 стр.

Лехницкий С. Г. 1947. Анизотропные пластинки. Москва, Ленинград, ОГИЗ.

Селюгин С. В. 2024. Анализ и проектирование пластин и панелей из композиционных материалов. М.: МАИ, 156 стр.

Gibson RF 1994. Principles of composite material mechanics. McGraw-Hill, Inc., 425 pp.

Reddy JN 2004. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2nd edition. CRC Press, 831 pp.

Selyugin S. 2013. On Choice of Optimal Anisotropy of Composite Plates against Buckling, with Special Attention to Bending-twisting Coupling. *Struct Multidisc Optim* 48: 279–294