Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

19.02.2025

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\sigma = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}}\left(\cos(t\ln x) - i\sin(t\ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}, \\ \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx,$$
$$v_1(\sigma,t) = \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx,$$
$$u_2(\sigma,t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$
$$v_2(\sigma,t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma,t) = u_2(\sigma,t), \\ v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t). \end{cases} \tag{4}$$

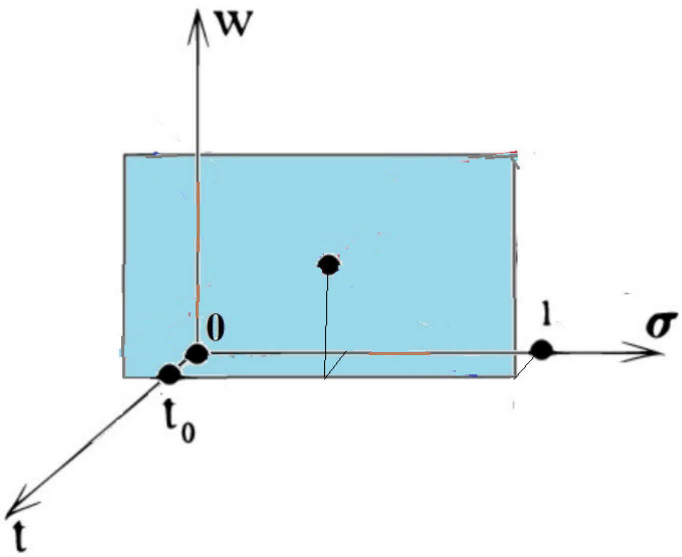

Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma-1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0;1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $\left\{(\sigma, w) \;\middle|\; \sigma \in (0;1), w \in U\right\}$. Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1. *Прямоугольник $\left\{(\sigma, w) \;\middle|\; \sigma \in (0;1), w \in U\right\}$ будем называть критическим прямоугольником.*

Замечание 1. *Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1+t_0^2} = \frac{1}{(1+t_0^2)t_0}$. Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью $t_0 = 14.134725141\ldots$ получается ширина 0.0003523461812...*

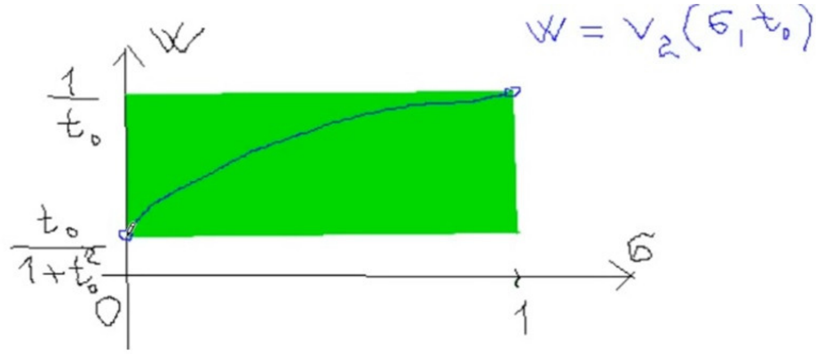

Рис. 2: Критический прямоугольник

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Но тогда для σ_0 имеет место неравенство

$$v_1(\sigma_0, t_0) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} > 0.$$

Более того, если σ - произвольное критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^{\infty} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Лемма 2. *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной σ.*

Доказательство. Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma'$ - критическое значение. Надо показать, что $v_1(\sigma, t_0) \geqslant v_1(\sigma + \sigma', t_0)$.

Очевидно, что

$$\Psi(\sigma + \sigma', x) = \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x).$$

Тогда

$$v_1(\sigma + \sigma', t_0) = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Так как σ и $\sigma + \sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma, t_0) > 0$ и $v_1(\sigma + \sigma', t_0) > 0$, поэтому для некоторого достаточно большого X_0 и любого $X > X_0$ имеют место неравенства

$$\int_1^X \Psi(\sigma, x)dx > 0 \text{ и } \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx > 0.$$

Обозначим $\Re[a,b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$. Нам будет полезна [2, с. 352]

Теорема (вторая теорема о среднем для интеграла)**.** *Если $f, g \in \Re[a,b]$ и g - монотонная на $[a,b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Так как функция $\dfrac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x, то по второй теореме о среднем для интеграла найдётся точка $\xi = \xi(X) \in [1, X]$ такая, что

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx = A + \gamma B,$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{X^{\sigma'}}, A = A(\xi) = \int_1^\xi \Psi(\sigma, x)dx \text{ и } B = B(\xi) = \int_\xi^X \Psi(\sigma, x)dx.$$

Ясно, что $0 < \gamma < 1, A + B > 0, A + \gamma B > 0$.

Рассмотрим множество

$$M = \left\{\xi \in \mathbb{R} : \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx = A(\xi) + \gamma B(\xi)\right\}.$$

Выше установлено, что это множество непусто. Оно замкнуто как прообраз одноточечного множества $\{0\}$ непрерывной функции $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx - (A(x) + \gamma B(x))$ на замкнутом отрезке $[0; X]$. Кроме того, оно ограничено снизу 1, сверху X, поэтому $\inf M = \min M, \sup M = \max M$. Обозначим $\underline{\xi} = \min M, \overline{\xi} = \max M$.

Итак, $M \subseteq [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$.

Утверждение леммы 2 эквивалентно утверждению о том, что для любого $\xi \in M$ имеет место неравенство

$$A + \gamma B \leqslant A + B. \tag{5}$$

Докажем следующее

Предложение. *Если неравенство 5 верно для одного какого-то элемента множества M, то оно верно и для любого $\xi \in M$. Для определённости в качестве такого элемента возьмём $\underline{\xi}$.*

Если $\underline{\xi} = \overline{\xi}$, то неравенство справедливо для $\xi = \overline{\xi}$.

Пусть $\underline{\xi} < \overline{\xi}$.

Возьмём произвольные $\xi_1, \xi_2 \in M$ такие, что $\xi_1 < \xi_2$.

$$\int\limits_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_1}^X \Psi(\sigma, x)dx \\ \int\limits_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_2}^X \Psi(\sigma, x)dx \end{array} \right.$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_2}^X \Psi(\sigma, x)dx = \int\limits_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi_1}^X \Psi(\sigma, x)dx.$$

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x)dx = \gamma \left(\int\limits_{\xi_1}^X \Psi(\sigma, x)dx - \int\limits_{\xi_2}^X \Psi(\sigma, x)dx \right) = \gamma \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x)dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x)dx = 0.$$

Пусть неравенство 5 выполнено для некоторого $\xi_0 \in M$.

Возьмём теперь произвольное $\xi \in M$. Тогда

$$A(\xi) + \gamma B(\xi) = \int\limits_1^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi}^X \Psi(\sigma, x)dx =$$

$$= \left(\int\limits_1^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx \right) + \gamma \left(\int\limits_{\xi}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_0}^X \Psi(\sigma, x)dx \right) =$$

$$= A\Big(\xi_0\Big) + \gamma B\Big(\xi_0\Big) \leqslant A\Big(\xi_0\Big) + B\Big(\xi_0\Big) =$$

$$= \left(\int\limits_1^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx \right) + \left(\int\limits_{\xi}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi_0}^X \Psi(\sigma, x)dx \right) =$$

$$= \int\limits_1^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi}^X \Psi(\sigma, x)dx = A(\xi) + B(\xi).$$

Предложение доказано.
Приступим теперь к доказательству неравенства 5 и, тем самым, леммы 2.

При $\xi = 1 \in M$ получается $A = 0$, но $A + \gamma B > 0$, откуда $\gamma B > 0$, значит, $\gamma B < B$, поэтому неравенство 5 верно.

Если $\xi = X \in M$, то получается $B = 0$, тогда $A + \gamma B = A + B$, значит, неравенство 5 справедливо и в этом случае.

Пусть $1 < \xi < X$.

Если $A \leqslant 0$, то $B > 0$, иначе было бы $A + B \leqslant 0$. В этом случае неравенство 5 выполняется.

Рассмотрим теперь случай $A > 0$. Если при этом $B \geqslant 0$, то неравенство 5 имеет место.

Остался случай $A > 0, B < 0$. Оказывается, он невозможен. В самом деле, введём функцию $\Phi(x) = \int\limits_{x}^{X} \Psi(\sigma, x)dx$. Так как $\Phi(1) = v_1(\sigma, x) > 0, \Phi(\xi) = B < 0$, то существует точка ξ' такая, что $\Phi(\xi') = 0$.

Обозначим

$$A' = A'(\xi') = \int\limits_{1}^{\xi'} \Psi(\sigma, x)dx \text{ и } B' = B'(\xi') = \int\limits_{\xi'}^{X} \Psi(\sigma, x)dx.$$

Имеет место равенство $B' = B'(\xi') = \Phi(\xi') = 0$.

Но тогда $\int\limits_{1}^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx = A'(\xi') + \gamma\Phi(\xi') = A'(\xi') + \gamma B'(\xi')$, то есть $\xi' \in M$. Значит, $0 = \Phi(\xi') = B'(\xi') = \int\limits_{\xi'}^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx = \underbrace{\int\limits_{\xi'}^{\xi} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx}_{=0} + B(\xi) = B(\xi) < 0$. Получается противоречие.

Итак, для любого $X > X_0$ доказано неравенство 5, значит,

$$\int\limits_{1}^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx \leqslant \int\limits_{1}^{X} \Psi(\sigma, x)dx.$$

Тогда легко доказывается методом от противного неравенство

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx \leqslant \int\limits_{1}^{\infty} \Psi(\sigma, x)dx. \tag{6}$$

□

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль* $s_0 = \sigma_0 + it_0$, *где* $t_0 > 0$, *то* $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы, а именно $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то есть соответствует точке пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $w_0 = v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$.

Согласно лемме 2, график $w = v_2(\sigma, t_0)$ правой части возрастает и полностью содержится в критическом прямоугольнике. Согласно лемме 1, график $w = v_1(\sigma, t_0)$ левой части не возрастает внутри критического прямоугольника, значит, эти графики имеют не более одной точки пересечения, причём только внутри критического прямоугольника. Так как графики, как указано выше, пересекаются в точке (σ_0, w_0), то эта точка является единственной точкой пересечения.

Как известно, в комплексной плоскости, если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $Res = \dfrac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $\sigma_1 = 1 - \sigma_0, w_1 = v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Следовательно, если при этом $\sigma_0 \neq \dfrac{1}{2}$, то точка (σ_1, w_1) тоже является точкой пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$, отличной от точки (σ_0, w_0). Но выше было установлено, что эти графики могут пересекаться только в одной точке. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$. □

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

[1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел.* Изд-во Московского университета, 1984.

[2] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.