

Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

26.02.2025

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t .

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
 $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (1)$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x . Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \quad (2)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, t) &= \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \\ v_1(\sigma, t) &= \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx, \\ u_2(\sigma, t) &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ v_2(\sigma, t) &= \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

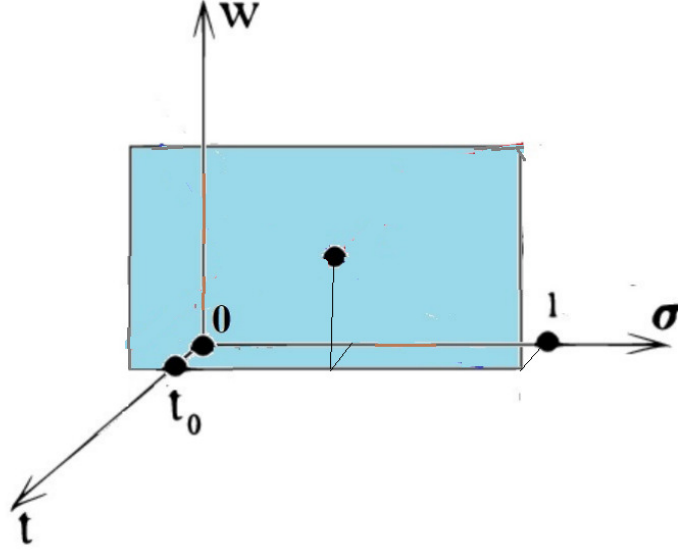


Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ .*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma - 1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $\left\{ (\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U \right\}$. Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1. *Прямоугольник $\left\{ (\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U \right\}$ будем называть критическим прямоугольником.*

Замечание 1. *Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1 + t_0^2} = \frac{1}{(1 + t_0^2)t_0}$. Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью $t_0 = 14.134725141\dots$ получается ширина $0.0003523461812\dots$*

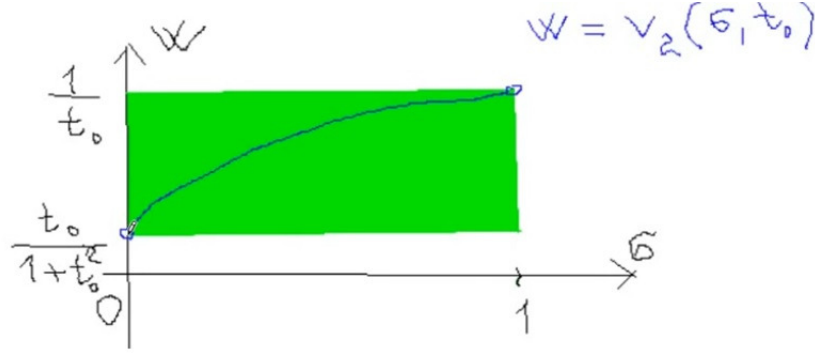


Рис. 2: Критический прямоугольник

Определение 2. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ , т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Но тогда для σ_0 имеет место неравенство

$$v_1(\sigma_0, t_0) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} > 0.$$

Более того, если σ - произвольное критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \int_1^{\infty} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Лемма 2. Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной σ .

Доказательство. Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma'$ - критическое значение. Надо показать, что $v_1(\sigma, t_0) \geq v_1(\sigma + \sigma', t_0)$.

Очевидно, что

$$\Psi(\sigma + \sigma', x) = \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x).$$

Тогда

$$v_1(\sigma + \sigma', t_0) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Так как σ и $\sigma + \sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma, t_0) > 0$ и $v_1(\sigma + \sigma', t_0) > 0$, поэтому для некоторого достаточно большого X_0 и любого $X > X_0$ имеют место неравенства

$$\int_1^X \Psi(\sigma, x) dx > 0 \text{ и } \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx > 0.$$

Обозначим $\mathfrak{R}[a, b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Нам будет полезна [2, с. 352]

Теорема (вторая теорема о среднем для интеграла). *Если $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ и g - монотонная на $[a, b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

Так как функция $\frac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x , то по второй теореме о среднем для интеграла найдётся точка $\xi = \xi(X) \in [1, X]$ такая, что

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A + \gamma B,$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{X^{\sigma'}}, A = A(\xi) = \int_1^\xi \Psi(\sigma, x) dx \text{ и } B = B(\xi) = \int_\xi^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Ясно, что $0 < \gamma < 1, A + B > 0, A + \gamma B > 0$.

Рассмотрим множество

$$M = \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A(\xi) + \gamma B(\xi) \right\}.$$

Выше установлено, что это множество непусто. Оно замкнуто как прообраз одноточечного множества $\{0\}$ непрерывной функции $\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx - (A(x) + \gamma B(x))$ на замкнутом отрезке $[0; X]$. Кроме того, оно ограничено снизу 1, сверху X , поэтому $\inf M = \min M, \sup M = \max M$. Обозначим $\underline{\xi} = \min M, \bar{\xi} = \max M$.

Итак, $M \subseteq [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$.

Утверждение леммы 2 эквивалентно утверждению о том, что для любого $\xi \in M$ имеет место неравенство

$$A + \gamma B \leq A + B. \quad (5)$$

Докажем следующее

Предложение. Если неравенство 5 верно для одного какого-то элемента множества M , то оно верно и для любого $\xi \in M$.

Если $\underline{\xi} = \bar{\xi}$, то неравенство справедливо для $\xi = \bar{\xi}$.

Пусть $\underline{\xi} < \bar{\xi}$.

Возьмём произвольные $\xi_1, \xi_2 \in M$ такие, что $\xi_1 < \xi_2$.

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \begin{cases} \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi_1}^X \Psi(\sigma, x) dx \\ \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi_2}^X \Psi(\sigma, x) dx \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi_2}^X \Psi(\sigma, x) dx &= \int_1^{\xi_1} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi_1}^X \Psi(\sigma, x) dx. \\ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x) dx &= \gamma \left(\int_{\xi_1}^X \Psi(\sigma, x) dx - \int_{\xi_2}^X \Psi(\sigma, x) dx \right) = \gamma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Psi(\sigma, x) dx = 0.$$

Пусть неравенство 5 выполнено для некоторого $\xi_0 \in M$.

Возьмём теперь произвольное $\xi \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} A(\xi) + \gamma B(\xi) &= \int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \gamma \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = \\ &= \left(\int_1^{\xi_0} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_0}^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx \right) + \gamma \left(\int_{\xi}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_0}^X \Psi(\sigma, x) dx \right) = \\ &= A(\xi_0) + \gamma B(\xi_0) \leq A(\xi_0) + B(\xi_0) = \\ &= \left(\int_1^{\xi_0} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_0}^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx \right) + \left(\int_{\xi}^{\xi_0} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi_0}^X \Psi(\sigma, x) dx \right) = \\ &= \int_1^{\xi} \Psi(\sigma, x) dx + \int_{\xi}^X \Psi(\sigma, x) dx = A(\xi) + B(\xi). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Приступим теперь к доказательству неравенства 5 и, тем самым, леммы 2.

При $\xi = 1 \in M$ получается $A = 0$, но $A + \gamma B > 0$, откуда $\gamma B > 0$, значит, $\gamma B < B$, поэтому неравенство 5 верно.

Если $\xi = X \in M$, то получается $B = 0$, тогда $A + \gamma B = A + B$, значит, неравенство 5 справедливо и в этом случае.

Пусть $1 < \xi < X$.

Если $A \leq 0$, то $B > 0$, иначе было бы $A + B \leq 0$. В этом случае неравенство 5 выполняется.

Рассмотрим теперь случай $A > 0$. Если при этом $B \geq 0$, то неравенство 5 имеет место.

Остался случай $A > 0, B < 0$. Оказывается, он невозможен. В самом деле, введём функцию $\Phi(x) = \int_x^X \Psi(\sigma, x) dx$. Так как $\Phi(1) = v_1(\sigma, t_0) > 0, \Phi(\xi) = B < 0$, то

существует точка $\xi' \in (1; \xi)$ такая, что $\Phi(\xi') = 0$. Но тогда $\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx =$
 $= A(\xi') + \Phi(\xi') = \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx$. Если бы имели место неравенства $A > 0, B < 0$, то
 тогда $\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A + \gamma B > A + B = \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx$. Получается противоречие.

Итак, для любого $X > X_0$ доказано неравенство 5, значит,

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leq \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Тогда легко доказывается методом от противного неравенство

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leq \int_1^\infty \Psi(\sigma, x) dx. \quad (6)$$

□

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы, а именно $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то есть соответствует точке пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $w_0 = v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$.

Согласно лемме 2, график $w = v_2(\sigma, t_0)$ правой части возрастает и полностью содержится в критическом прямоугольнике. Согласно лемме 1, график $w = v_1(\sigma, t_0)$ левой части не возрастает внутри критического прямоугольника, значит, эти графики имеют не более одной точки пересечения, причём только внутри критического прямоугольника. Так как графики, как указано выше, пересекаются в точке (σ_0, w_0) , то эта точка является единственной точкой пересечения.

Как известно, в комплексной плоскости, если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $Res = \frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $\sigma_1 = 1 - \sigma_0, w_1 = v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Следовательно, если при этом $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$, то точка (σ_1, w_1) тоже является точкой пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$, отличной от точки (σ_0, w_0) . Но выше было установлено, что эти графики могут пересекаться только в одной точке. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = \frac{1}{2}$. $\square$

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

- [1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел*. Изд-во Московского университета, 1984.
- [2] Зорич В.А. *Математический анализ. Часть I*. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.