

Доказательство гипотезы Коллатца

Proof of the Collatz Conjecture

В. В. Трушников
Vladimir V. Trushnikov

19 марта 2025 г.

УДК 511.13

Аннотация: В статье представлено простое доказательство гипотезы Коллатца, основанное на свойствах умножения и деления десятичных дробей.

abstract: The article presents a simple proof of the Collatz conjecture based on the properties of multiplication and division of decimal fractions.

Ключевые слова: Алгоритм, натуральное число, десятичная дробь гипотеза Коллатца, сиракузская проблема.

Keywords: Algorithm, natural number, decimal fraction, Collatz conjecture, Syracuse problem.

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.

Введение: Гипотеза Коллатца, известная также как « $3n+1$ »-гипотеза или как сиракузская проблема утверждает, что с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3n+1$, а в случае чётного следуя формуле $n/2$, мы в итоге придём к единице.

Формулу алгоритма « $3n+1$ » запишем в виде « $3X+1$ », при сохранении условия, что X натуральное. В алгоритме « $3X+1$ » конечной целью является единица, но перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2^n . Для ряда 2^n выполним действия, обратные

алгоритму « $3X+1$ », тем самым выясним, при достижении каких значений 2^n алгоритм сворачивается в 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратного алгоритма Коллатца для ряда 2^{2n} (Таблица 1).

N	2^{2n}	$2^{2n} - 1$	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
и т.д.	...	...	...

Таблица 1: Таблица обратного алгоритма Коллатца для ряда 2^{2n} .

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемое формулой $(2^{2n} - 1)/3$, которые в итоге приводят к значению 2^{2n} и сворачиванию числа к 1. Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие - успешными решениями алгоритма. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число $(2^{2n} - 1)$ при всех $n > 1$ кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n}$$

Это значит, зная решение для предыдущего числа n , решение для следующего $n+1$ можно определить по формуле:

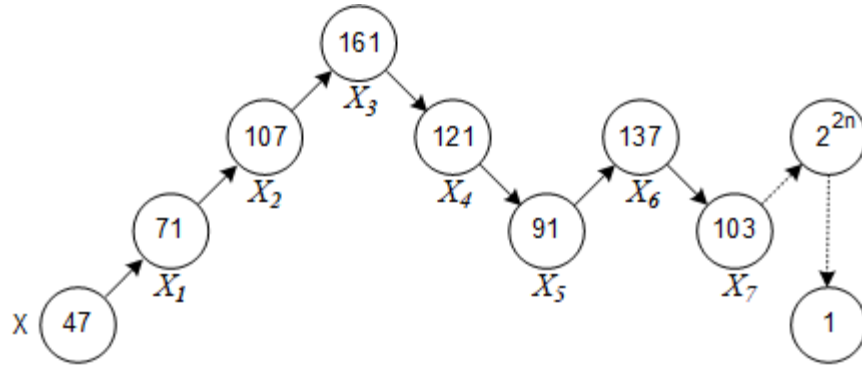
$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3}$$

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. Между успешными решениями ограниченное количество шагов, значит мы неизбежно их преодолеем. Каждое новое число на пути алгоритма есть очередной шаг к цели, а действие $+1$ в формуле $3X+1$ гарантирует непрерывность процесса движения к этой цели. Успешное решение алгоритма это просто один из очередных шагов. Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единиц маршрутов, можно считать завершённым и текущий.

Формула $(3X+1)/2$ производит движение вперёд, в сторону увеличения текущего числа, а формула $(3X+1)/2^n$, где $n>1$, назад, в сторону его уменьшения. Мы должны доказать что представленный алгоритм, неважно в какую сторону, вперёд-назад, исключает повторения.

Доказательство

Пусть X произвольное исходное число. Например 47. Отследим начало маршрута исходного числа.



В результате действия алгоритма, число всякий раз меняется. Представим структуру новообразованного числа суммой двух слагаемых: целой части KX , кратной исходному и дробной от исходного.

В свою очередь дробная часть от исходного будет описываться формулой $(X+1)k+r$, где коэффициент $k<1$, а r -вещественный остаток от целого натурального дробной части, т.е.: $X_n = KX + (X + 1)k + r$

Итак, исходное число: X

$$\text{Шаг1(вперёд): } X_1 = \frac{3X+1}{2} \Rightarrow X_1 = X + (X + 1)0,5$$

$$\text{Шаг2(вперёд): } X_2 = \frac{3X_1+1}{2} \Rightarrow X_2 = 2X + (X + 1)0,25 + 1,0$$

$$\text{Шаг3(вперёд): } X_3 = \frac{3X_2+1}{2} \Rightarrow X_3 = 3X + (X + 1)0,375 + 2,0$$

$$\text{Шаг4 (назад): } X_4 = \frac{3X_3+1}{4} \Rightarrow X_4 = 2X + (X + 1)0,53125 + 1,5$$

$$\text{Шаг5 (назад): } X_5 = \frac{3X_4+1}{4} \Rightarrow X_5 = X + (X + 1)0,8984375 + 0,875$$

Шаг6(вперёд): $X_6 = \frac{3X_5+1}{2} \Rightarrow X_6 = 2X + (X + 1)0,84765625 + 2,3125$

Шаг 7(назад): $X_7 = \frac{3X_6+1}{4} \Rightarrow X_7 = 2X + (X + 1)0,1357421875 + 2,484375$

При перемножении двух дробных чисел меньших единицы, записанных в десятичной форме, количество знаков после запятой всегда увеличивается. При делении нечётных чисел меньших единицы на два, количество знаков после запятой также увеличивается. Каждый раз это отражается на структуре коэффициента k , при дробной части числа. Не важно в какую сторону ведёт нас алгоритм, вперёд-назад, количество знаков после запятой в значении коэффициента k очередного числа всегда больше предыдущего, значит совпадения чисел при исполнении алгоритма для любого натурального числа исключены. Что и требовалось доказать.

Вывод: С какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X + 1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге выйдем на маршрут успешного решения алгоритма, приводящего к единице.

Гипотеза Коллатца « $3n+1$ » доказана.