

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КШИЖА

Ступин Д. Л.

Изложено доказательство гипотезы Кшижа, основанное на применении вариационного метода, а также использовании двух классических результатов и некоторых их следствий. Упомянутые результаты это критерий Каратеодори-Тёплица продолжаемости полинома до функции класса Каратеодори и теорема Рисса-Фейера о тригонометрических многочленах.

Ключевые слова: критерий Каратеодори-Тёплица, теорема Рисса-Фейера, тригонометрические многочлены, тригонометрические полиномы, многочлены с положительной действительной частью, полиномы с положительной вещественной частью, класс Каратеодори, гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции

Keywords: Fejer-Riesz Theorem, trigonometric Polynomials, polynomials with positive real part, Caratheodory class, the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions

Введение

Обозначим единичный круг через $\Delta := \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, а единичную окружность через $\partial\Delta$. Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f , таких, что $0 < |f(z)| \leq 1, z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж высказал гипотезу [1] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\theta} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (1)$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Задачу о нахождении

$$m_n := \max_{f \in B} |\{f\}_n|,$$

будем называть проблемой Кшижа для номера n . Функцию f будем называть экстремальной в проблеме Кшижа для номера n , если $|\{f\}_n| = m_n$.

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|, n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа. Заметим, что проблему Кшижа для номера n мы также можем называть просто проблемой Кшижа, если это не вносит путаницы.

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана для первых шести тейлоровских коэффициентов включительно. Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [2]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [3]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, полагаясь на оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [4]. Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t была добыта в работе [5]. Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на множестве функций из B_t с вещественными коэффициентами получена в работе [6]. Для случая $n = 4$ упомянем доказательство В. Шапеля [7]. Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [8]. Автор данной статьи в работе [9] при помощи метода Шапеля получил оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.00116077$, а в работе [10] оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e$ численным методом.

Исследования по проблеме Кшижа можно поделить на несколько основных направлений. Одно из направлений это оценки начальных коэффициентов, упомянутые в предыдущем абзаце. Можно также выделить так называемые асимптотические оценки (см. [11, 12]). Далее следует упомянуть оценки, полученные при помощи интегральной формулы Коши для всех натуральных n . В статье [13] получена оценка $|\{f\}_n| \leq 1 - \frac{1}{3\pi} + \frac{4}{\pi} \sin \frac{1}{12} = 0.999877\dots$, а в диссертации [14, стр. 19] оценка $|\{f\}_n| \leq \frac{4}{5} + \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{20} = 0.999178\dots$ Ещё одно направление это изучение свойств предполагаемой экстремальной функции и поиск функций класса B , имеющих эти свойства. К этому направлению можно отнести, например, работы [4, 15, 16] и настоящую статью.

Фиксируем номер n . Существование экстремалей в проблеме Кшижа для номера n очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, ставящий каждой функции из B её тейлоровский коэффициент с номером n является непрерывным на B .

Через Ω_0 обозначим класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω , таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть функции G и g голоморфны в Δ . Функция g называется подчинённой в Δ для функции G , если она может быть представлена в Δ в форме $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию G будем называть мажорантой для g в Δ . Подробности см. в [3].

Класс, состоящий из функций с положительной в Δ вещественной частью обозначим через C . Этот класс будем называть классом Каратеодори. Фиксируем $t > 0$. Множество функций h из C , нормированных условием $h(0) = t$ обозначим через C_t и будем называть нормированным классом Каратеодори или просто классом Каратеодори, если это на вызовет недоразумений. Заметим, что $C := \bigcup_{t>0} C_t$.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t . Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-th(z)}, \quad h \in C_1. \quad (2)$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1 и B_t . Очевидно, что при каждом фиксированном $t > 0$ функция $F(z, t)$ является мажорантой для каждой функции класса B_t .

1. Критерий Каратеодори-Тёплица

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат [17, 18]:

Теорема 1 (Каратеодори, Тёплиц). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_0 > 0$, $\{h\}_1, \dots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. Многочлен

$$q_n(z) = \{h\}_0 + \sum_{k=1}^n \{h\}_k z^k$$

можно продолжить до функции

$$h(z) = q_n(z) + o(z^n) \in C$$

тогда и только тогда, когда определители

$$M_k = \begin{vmatrix} 2\{h\}_0 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \{h\}_1 & 2\{h\}_0 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \{h\}_{k-1} & \{h\}_{k-2} & \cdots & 2\{h\}_0 & \{h\}_1 \\ \{h\}_k & \{h\}_{k-1} & \cdots & \{h\}_1 & 2\{h\}_0 \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера $m \leq n$, начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, и числа $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что

$$h(z) := \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}. \quad (3)$$

Рассмотрим пространство \mathbb{C}^{n+1} , $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из $(n+1)$ -го комплексного числа $h^{(n+1)} := (\{h\}_0, \dots, \{h\}_n)$. Множество, состоящее из точек $h^{(n+1)} \in \mathbb{C}^{n+1}$ таких, что числа $\{h\}_0, \dots, \{h\}_n$ являются первыми $n+1$ коэффициентами некоторой функции $h \in C$ будем обозначать через $C^{(n)}$ и называть $(n+1)$ -ым телом коэффициентов класса C .

Проблема коэффициентов на классе C ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на числа $\{h\}_0, \{h\}_1, \{h\}_2, \dots$ для того, чтобы ряд $\{h\}_0 + \{h\}_1 z + \{h\}_2 z^2 + \dots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса C . Критерий Каратеодори-Тёплица является полным решением проблемы коэффициентов на классе C .

2. Некоторые свойства экстремальной функции

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z и относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для этого номера n , то $\eta f(\zeta z)$,

$|\eta| = |\zeta| = 1$, тоже экстремальная. При этом вращение в плоскости переменной z не затрагивает коэффициент $\{f\}_0$. Следовательно, мы можем считать без ограничения общности, что если f — экстремальная, то $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. Всюду далее, говоря о функции f , экстремальной в проблеме Кшижа будем подразумевать, что $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и найдётся $t > 0$ такое, что $f \in B_t$. Также, функцию, экстремальную в проблеме Кшижа для номера n часто будем называть просто экстремальной, если понятно о каком n идёт речь.

Из критерия Каратеодори-Тёплица и формулы (2) сразу следует, что любую функцию f из класса B_t можно аппроксимировать функциями $g(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (3), причём $\{f\}_k = \{g\}_k$, $k = 0, \dots, n$. Если $f(z) = e^{-h(z)}$ — экстремальная функция, то, как известно [19], точка $h^{(n+1)}$ принадлежит границе $C^{(n)}$, то есть $M_n = 0$, что согласно критерию Каратеодори-Тёплица означает единственность продолжения. Стало быть любая экстремальная функция имеет вид $f(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (3) и, таким образом, справедливо следующее следствие:

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если функция f является экстремальной в проблеме Кшижа, то найдутся числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, $\sum_{k=1}^m \alpha_k = t$, $t = -\ln\{f\}_0$, $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$, такие, что $f(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (3), а $m \leq n$.

Заметим, что если $n \in \mathbb{N}$, а f и g — голоморфные в Δ функции, то

$$\{f \cdot g\}_n = \{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f, g — голоморфные в Δ функции, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)}, \quad (5)$$

тогда

$$\{v\}_n = \{f\}_n - \varepsilon \{f \cdot g\}_n + o(\varepsilon). \quad (6)$$

Если коэффициенты функций f и g действительные, то $\{v\}_n \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим вариацию v функции f функцией $e^{\varepsilon g}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Устремив ε к нулю имеем:

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)} = f(z)(1 - \varepsilon g(z) + o(\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon f(z)g(z) + o(\varepsilon).$$

Вычислив теперь $\{v\}_n$ мы получим формулу (6). ■

Следующий результат позаимствован из [16, стр. 726]. Для полноты приведём его с доказательством также взятым из [16].

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $h = -\ln f$, тогда для любой функции $g \in C$

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n) \geq 0. \quad (7)$$

В частности

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n \{h\}_0 + \{f\}_{n-1} \{h\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{h\}_n) = 0. \quad (8)$$

Пусть

$$H(z) := \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \dots + 2\{f\}_0z^n, \quad (9)$$

тогда

$$H \in C. \quad (10)$$

Более того,

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (11)$$

где $m \leq n$, а $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что h определена формулой (3).

Доказательство. 1. Докажем формулу (7). Пусть $g \in C$. Вариация v функции f , заданная формулой (5), при $\varepsilon > 0$ есть внутренняя вариация, то есть $v \in B$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива лемма 1, а по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, значит $\operatorname{Re}\{v\}_n \leq \{f\}_n$, откуда (см. (6)) и вытекает справедливость формулы (7).

2. Докажем формулу (8). Возьмём теперь $g = h$. Вариация v функции f , заданная формулой (5), при достаточно малых $\varepsilon < 0$ есть внутренняя вариация, то есть $v = f \cdot f^\varepsilon \in B$. Так как по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, то из формулы (6) для $\varepsilon < 0$ получаем

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \dots + \{f\}_0\{h\}_n) \leq 0,$$

а для $\varepsilon > 0$ справедлива формула (7), то есть

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \dots + \{f\}_0\{h\}_n) \geq 0,$$

откуда делаем вывод, что формула (8) верна.

3. Докажем (10). Положим $g(z) = \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} = 1+2\zeta z+2\zeta^2 z^2+\dots$. Подставив коэффициенты функции g в формулу (7) получим $\operatorname{Re}(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}\zeta + \dots + \{f\}_0\zeta^n) \geq 0$, $|\zeta| \leq 1$, что равносильно $\operatorname{Re} H(z) \geq 0$, $z \in \bar{\Delta}$. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, что в свою очередь равносильно (10).

4. Докажем формулу (11). Фиксируем k и возьмём

$$g(z) = \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z} = 1 + 2e^{i\varphi_k} z + 2e^{2i\varphi_k} z^2 + \dots,$$

тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$, как при $\varepsilon \geq 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > -\alpha_k$). Из леммы 1, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f вытекает для $\varepsilon < 0$, что

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_02e^{ni\varphi_k}) \leq 0,$$

а для $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_02e^{ni\varphi_k}) \geq 0,$$

что эквивалентно тому, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

Покажем, что формула (7) эквивалентна формуле (10) и, в частности, формула (8) эквивалентна формуле (11).

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2.

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \dots + \{f\}_0\{g\}_n) \geq 0$$

тогда и только тогда, когда $H \in C$. В частности,

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \dots + \{f\}_0\{h\}_n) = 0$$

тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \dots, m$.

Доказательство. То, что $\operatorname{Re} \{f \cdot g\}_n \geq 0$ влечёт $H \in C$, показано при доказательстве формулы (10).

Покажем, что $H \in C$ влечёт $\operatorname{Re} \{f \cdot g\}_n \geq 0$. Фиксируем произвольно $g \in C$, тогда согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 1) существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, и $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$, такие, что первые $n+1$ коэффициентов функции g совпадают с соответствующими коэффициентами функции

$$\tilde{g}(z) := \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k z}}{1 - e^{i\varphi_k z}} = \sum_{k=1}^m \alpha_k (1 + 2e^{i\varphi_k z} + \dots + 2e^{in\varphi_k z^n} + \dots).$$

Согласно формуле (4),

$$\begin{aligned} \{f \cdot g\}_n &= \{f \cdot \tilde{g}\}_n = \\ &= \sum_{k=1}^m \alpha_k (\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_0 2e^{in\varphi_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^m \alpha_k H(e^{i\varphi_k}). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $\operatorname{Re} H(z) \geq 0$, $z \in \bar{\Delta}$, то $\operatorname{Re} \{f \cdot g\}_n \geq 0$, по формуле (12).

Второе утверждение следует из первого при $g = h$, а $z = e^{i\varphi_k}$. Действительно, из $\operatorname{Re} \{f \cdot h\}_n = 0$ (по формуле (12)) вытекает, что $\sum_{k=1}^m \alpha_k H(e^{i\varphi_k}) = 0$, а так как $\operatorname{Re} H(z) \geq 0$, $z \in \bar{\Delta}$, (согласно первому утверждению) то $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \dots, m$. Из того, что $\sum_{k=1}^m \alpha_k H(e^{i\varphi_k}) = 0$ по формуле (12) вытекает, что $\operatorname{Re} \{f \cdot h\}_n = 0$. ■

3. Теорема Рисса-Фейера

Пусть $n \in \mathbb{N}$. По теореме 2 полином H , составленный из первых $n+1$ коэффициентов функции, экстремальной в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , имеет положительную действительную часть в круге Δ . Выведем некоторые свойства полиномиальных элементов класса C , чтобы изучить упомянутую экстремальную функцию.

Функция вещественного аргумента φ

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi), \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n,$$

называется тригонометрическим многочленом степени n , если $a_n^2 + b_n^2 > 0$.

Очевидно, имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. Если $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$, где

$$h_0 := a_0 \in \mathbb{R}, \quad h_k := \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n,$$

то сужение $\operatorname{Re} H$ на единичную окружность $\partial\Delta$ есть тригонометрический полином

$$T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi).$$

Если $H \in C$, то $T(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Как указывается в [20], в начале девятнадцатого века Л. Фейер [21] первым отметил важность класса тригонометрических полиномов, принимающих только неотрицательные значения на действительной прямой. Его предположение о структуре таких многочленов было доказано Ф. Риссом [22] и сегодня известно как теорема Рисса-Фейера.

Очевидно, что если P , — полином степени n с комплексными коэффициентами и $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, то $T(\varphi) \geq 0$, для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. В этом случае, согласно лемме 2, $T(\varphi) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$ и $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Следовательно, имеет место следующее

Утверждение 1. Если $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $p_k \in \mathbb{C}$, $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то найдутся $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, такие, что $T(\varphi) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$.

Сформулируем утверждение, обратное утверждению 1.

Теорема 4 (Рисс, Фейер). Если $T(\varphi) := \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \geq 0$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, $\varphi, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, то найдётся многочлен $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{C}$, $p_n \neq 0$ такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Более того, P может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае P определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.

Доказательство теоремы Рисса-Фейера можно найти в [23] и в [24, стр. 154].

Из теоремы 4 вытекает, что если m из n корней полинома P лежат на единичной окружности, то тригонометрический многочлен T имеет $2m$ корней.

Следствие 2. Тригонометрический многочлен степени n имеет не более чем $2n$ корней.

4. Многочлены с положительной действительной частью

Теорема 5. Многочлен $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$, $h_0 > 0$, $h_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, имеет положительную действительную часть в Δ тогда и только тогда, когда найдутся числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$h_0 = \sum_{j=0}^n |p_j|^2, \quad h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \bar{p}_j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Более того, $h_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, равносильно $p_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$.

Доказательство. Необходимость: докажем, что если $H \in C$, то H имеет коэффициенты (13). По лемме 2, выражение $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ есть тригонометрический полином и $T(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 4, найдётся многочлен $P(z) := \sum_{j=0}^n p_j z^j$, $p_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n$, такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) &= T(\varphi) = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^n p_k e^{ik\varphi} \sum_{k=0}^n \bar{p}_k e^{-ik\varphi} = \\ &= |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 + \\ &\quad + (p_0 \bar{p}_1 + p_1 \bar{p}_2 + \dots + p_{n-1} \bar{p}_n) e^{-i\varphi} + (p_1 \bar{p}_0 + p_2 \bar{p}_1 + \dots + p_n \bar{p}_{n-1}) e^{i\varphi} + \\ &\quad + (p_0 \bar{p}_2 + p_1 \bar{p}_3 + \dots + p_{n-2} \bar{p}_n) e^{-i2\varphi} + (p_2 \bar{p}_0 + p_3 \bar{p}_1 + \dots + p_n \bar{p}_{n-2}) e^{i2\varphi} + \\ &\quad \dots \\ &\quad + p_0 \bar{p}_n e^{-in\varphi} + p_n \bar{p}_0 e^{in\varphi} = \\ &= |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(\{p_1 \bar{p}_0 + p_2 \bar{p}_1 + \dots + p_n \bar{p}_{n-1}\} e^{i\varphi}) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(\{p_2 \bar{p}_0 + p_3 \bar{p}_1 + \dots + p_n \bar{p}_{n-2}\} e^{i2\varphi}) + \\ &\quad \dots \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(p_n \bar{p}_0 e^{in\varphi}) = \\ &= \operatorname{Re} h(e^{i\varphi}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h(z) &:= |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 + \\ &\quad + 2(p_1 \bar{p}_0 + p_2 \bar{p}_1 + \dots + p_n \bar{p}_{n-1})z + \\ &\quad + 2(p_2 \bar{p}_0 + p_3 \bar{p}_1 + \dots + p_n \bar{p}_{n-2})z^2 + \\ &\quad \dots \\ &\quad + 2p_n \bar{p}_0 z^n. \end{aligned}$$

Итак, мы сначала перешли от обычного многочлена H к тригонометрическому $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ при помощи замены $z = e^{i\varphi}$, затем факторизовав T при помощи теоремы Рисса-Фейера получили требуемое представление коэффициентов полинома H , после чего сделали обратную замену $e^{i\varphi} = z$ и восстановили аналитическую функцию h по действительной части функции H (с учётом нормировки $h(0) = 0$), заданной на единичной окружности и продолжили её с единичной окружности на всю комплексную плоскость. Так как согласно внутренней теореме единственности для голоморфных функций аналитическое продолжение единственно, то $H \equiv h$.

Достаточность: докажем что если H имеет коэффициенты (13), то $H \in C$. Действительно, пусть H имеет коэффициенты (13). Просмотрев вычисления из доказательства необходимого условия в обратном порядке приходим к

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = T(\varphi).$$

Стало быть, $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, согласно утверждению 1. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$. ■

5. Условия единственности многочлена с положительной действительной частью

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Существует единственный с точностью до вращений в плоскости переменной z многочлен $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$ такой, что $H \in C$ и $h_0 = 2|h_n|$, причём $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, $|\eta| = 1$.

Доказательство. По теореме 5 существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, такие, что

$$h_0 = |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2, \quad h_n = p_n \bar{p}_0.$$

Стало быть, так как по условию $h_0 = 2|h_n|$, то

$$|p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 = 2|p_n p_0|,$$

что эквивалентно

$$(|p_0|^2 - 2|p_n p_0| + |p_n|^2) + |p_1|^2 + \dots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

что равнозначно

$$(|p_0| - |p_n|)^2 + |p_1|^2 + \dots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

а это равносильно тому, что $|p_0| = |p_n|$ и $p_1 = \dots = p_{n-1} = 0$. Итак

$$H(z) = 2|p_0|^2 + 2p_n \bar{p}_0 z^n = 2|p_0|^2(1 + \eta z^n), \quad |\eta| = 1.$$

■

Утверждение 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Существует единственный многочлен

$$H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$$

такой, что $H \in C$, $h_n > 0$ и $z_1, \dots, z_n \in \partial\Delta$ — корни H , причём $H(z) = h_0(1 + z^n)$, а $z_1, \dots, z_n \in \partial\Delta$ — всевозможные корни n -й степени из -1 .

Доказательство. Так как по условию z_1, \dots, z_n — корни H , то

$$H(z) = 2h_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) = 2h_n ((-1)^n z_1 \dots z_n + \dots + z^n).$$

Также по условию $|z_1| \cdot \dots \cdot |z_n| = 1$, поэтому $h_0 = 2|h_n|$. Применив лемму 3 получаем, что $H(z) = h_0(1 + z^n)$. ■

Утверждение 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Существует единственный многочлен

$$H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$$

такой, что $H \in C$, $h_n > 0$ и $z_1, \dots, z_n \in \partial\Delta$ — всевозможные корни n -й степени из -1 и $\operatorname{Re} H(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$, причём $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. По утверждению 2 многочлен $H(z) = h_0(1 + z^n)$ — единственный многочлен, удовлетворяющий условию $H \in C$ и имеющий своими нулями всевозможные корни n -й степени из -1 . Очевидно, что $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2 (см. следствие 2). Так как восстановление аналитической функции по её действительной части единственно с точностью до мнимой константы, то с учётом нормировки $H(0) = 0$ получаем требуемое. ■

6. О единственности экстремальной функции

При ограничениях, наложенных нами выше на экстремальную функцию можно ставить вопрос о её единственности. Следующий результат перекликается с основным результатом статьи [16, стр. 735].

Теорема 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа и $\{f\}_n = 2\{f\}_0 > 0$, тогда f — единственная и $\{f\}_1 = \dots = \{f\}_{n-1} = 0$, другими словами $f = F(z^n, 1)$.

Доказательство. По теореме 2 многочлен H , заданный формулой (9) лежит в C , удовлетворяет всем условиям леммы 3, то есть $H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n$ и, стало быть, искомая экстремальная функция удовлетворяет условиям $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, $\{f\}_1 = \dots = \{f\}_{n-1} = 0$.

Найдём $\{f\}_0$ в виде $\{f\}_0 = e^{-t}$, где $t > 0$. Имеем $f(z) = e^{-t} + 2e^{-t}z^n + o(z^n)$. Следовательно $h := -\ln f \in C$. Применив критерий Каратеодори-Тёплица видим, что при $t > 0$ миноры $M_k > 0$, $k = 1, \dots, n-1$, а $M_n = t^{n-1}(t^2 - 1) \geq 0$. Минор $M_n = 0$ только при $t = 1$, следовательно $\{f\}_0 = e^{-1}$, а $f(z) = e^{-1} + 2e^{-1}z^n + o(z^n)$.

Функция $F(z^n, 1)$, заданная формулой (1) лежит в B , соответствует всем этим требованиям и, согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 1), является единственным продолжением многочлена $e^{-1} + 2e^{-1}z^n$ до функции класса B . Таким образом $f(z) = F(z^n, 1)$. ■

7. Доказательство гипотезы Кшижа

Теорема 7. Если $n \in \mathbb{N}$, $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq \frac{2}{e},$$

причём равенство в этом неравенстве достигается только на функциях

$$e^{i\theta} F(e^{i\varphi} z^n, 1), \quad \varphi, \theta \in \mathbb{R},$$

где функция F задана формулой (1).

Доказательство. Фиксируем произвольный номер n и произвольную экстремальную функцию f . По следствию 1 существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, $m \leq n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = t$, $t = -\ln\{f\}_0$, и $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что

$$f(z) = e^{-\sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1+e^{i\varphi_k} z}{1-e^{i\varphi_k} z}}.$$

Функция $F(z^n, 1)$ удовлетворяет соотношению (8), стало быть, из теоремы 3 следует, что $m = n$, а $e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n$, — всевозможные корни n -й степени из -1 , так как по теореме 3

$$F(z^n, 1) = e^{-\frac{1-z^n}{1+z^n}} = e^{-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+e^{i\varphi_k} z}{1-e^{i\varphi_k} z}}.$$

Рассмотрим многочлен H , заданный формулой (9). Из теоремы 2 следует, что $H \in C$ и $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, а по утверждению 3 существует единственный многочлен $H \in C$ степени n действительная часть которого имеет своими корнями все корни n -й степени из -1 и

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n = h_0(1 + z^n),$$

где h_0 — положительный постоянный множитель. Таким образом,

$$\{f\}_n = 2\{f\}_0.$$

По теореме 6 функция $f(z) = F(z, 1)$ — единственная экстремальная в проблеме Кшижа функция класса B , удовлетворяющая условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0$. ■

Заключение

Проблемы геометрической теории функций комплексной переменной так или иначе связанные с гипотезой Кшижа освещены в работах [25, 26, 7, 27, 28, 29, 15, 30, 31].

Список литературы

- [1] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.
- [2] Levin V. I. Lösung der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80-81.
- [3] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.
- [4] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.
- [5] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. Issue 5–6. P. 223–230.
- [6] Ступин Д. Л. Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 79–92.
- [7] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.
- [8] Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.
- [9] Ступин Д. Л. Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. Вып. 2. С. 71–84.

-
- [10] Ступин Д. Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 98–120.
- [11] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions // *Compl. Var.* 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.
- [12] Ступин Д. Л. Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 81–96.
- [13] Horowitz C. Coefficients of nonvanishing functions in H^∞ // *Israel J. Math.* 1978. V. 30, P. 285–291,
- [14] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // *Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond.* 1990.
- [15] Peretz R. Some properties of extremal functions for Krzyz problem // *Compl. Var.* 1991. V. 16. Issue 1. P. 1–7.
- [16] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // *Advances in Mathematics.* 2015 V. 273. P. 716–745.
- [17] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo.* 1911. V. 32. P. 193–217.
- [18] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // *Применение функционального анализа в теории приближений.* Тверь. 2012. С. 45–74.
- [19] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 277–297.
- [20] Rovnyak J. Fejér-Riesz theorem. *Encyclopedia of Mathematics.* Springer Verlag GmbH, EMS.
- [21] Fejér L. Über trigonometrische Polynome. // *J. Reine Angew. Math.* 1916. I. 146. P. 53–82.
- [22] Riesz F. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. // *J. Reine Angew. Math.* 1916. I. 146. P. 83–87.
- [23] Hussen A., Zeyani A. Fejer-Riesz Theorem and Its Generalization. // *IJSRP.* 2021. V. 11. I. 6.
- [24] Tsuji M. *Potential theory in modern function theory.* Chelsea Pub. Co. N.Y. 1975.
- [25] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions, Dep., Univ. Nijmegen. 1992.
- [26] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions // *Indag. Math., New Ser.* 1993. V. 4. N. 4. P. 471–478.

-
- [27] Kiepiela K., Pietrzyk M., Szynal J. Meixner polynomials and nonvanishing holomorphic functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. V. 133, Issue 1-2. P. 423–428.
- [28] Ganczar A. Michalska M., Szynal J. The conjecture parallel to the Krzyz conjecture // Demonstratio Math. Warsaw Technical University Institute of Mathematics. 2003. V. 36. N. 1. P. 65–75.
- [29] Peretz R. The Krzyz Problem and Polynomials with Zeros on the Unit Circle // Compl. Var. 2002. V. 47. Issue 3. P. 271–276.
- [30] Peretz R. The Krzyz Conjecture Theory and Methods World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2021. 620 p.
- [31] Agler J., McCarthy J. E. The Krzyz Conjecture and an Entropy Conjecture // J.d'Analyse Mathematique. 2021. V. 144. P. 207–226.