УДК 517.53, 517.54

ТЕОРЕМА РИССА-ФЕЙЕРА И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ

Ступин Д. Л.

Изложена классическая теорема Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов, охарактеризовано множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью, дано одно условие единственности такого многочлена и связь этого результата с условием единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа.

The classical Fejer-Riesz theorem for trigonometric polynomials is expounded, the set of all polynomials with a positive real part in the unit circle is characterized, and one condition for uniqueness of such a polynomial and the connection of this result with the condition for uniqueness of an extremal function in the Krzyz problem is given.

Ключевые слова: Теорема Рисса-Фейера, тригонометрические многочлены, тригонометрические полиномы, многочлены Лорана, полиномы Лорана, многочлены с положительной действительной частью, полиномы с положительной вещественной частью, класс Каратеодори, гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции

Keywords: Fejer-Riesz Theorem, trigonometric Polynomials, Laurent Polynomials, polynomials with positive real part, Caratheodory class, the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions

Введение

Обозначим единичный круг через $\Delta \coloneqq \{z \ : \ z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1\}$, а единичную окружность через $\partial\Delta$.

Функция вещественного аргумента φ

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$$

называется тригонометрическим многочленом степени n, если $|a_n|+|b_n| > 0$. Можно показать, что $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ эквивалентно $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Очевидно, имеет место следующее утверждение:

Лемма 1. *Если* $H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum\limits_{n=1}^{n} h_k z^k$, *где*

$$h_0 \coloneqq a_0 \in \mathbb{R}, \qquad h_k \coloneqq \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

то сужение $\operatorname{Re} H$ *на единичную окружность* $\partial\Delta$ *есть тригонометрический полином*

$$T(\varphi) \coloneqq \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \tag{2}$$

В частности, если $h_k \in \mathbb{R}$ $(b_k = 0)$, $k = 1, \dots, n$, *то*

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi.$$

Если $H \in C$, *то* $T(\varphi) \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Справедливо также обратное утверждение:

Утверждение 1. *Если T — тригонометрический полином, то найдётся многочлен* $H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_k \in \mathbb{C}$, *такой, что* $T(\varphi) = \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$.

Как указывается в [4], в начале девятнадцатого века Л. Фейер [1] первым отметил важность класса тригонометрических полиномов, принимающих только неотрицательные значения на действительной прямой. Его предположение о структуре таких многочленов было доказано Ф. Риссом [2] и сегодня известно как теорема Рисса-Фейера.

В этой статье мы изложим классические теоремы Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов с действительными и с комплексными коэффициентами по отдельности чисто из методических соображений, так как понятно, что первый результат просто частный случай второго. Доказательство теоремы Рисса-Фейера можно найти в [3] и в [5, стр. 154].

Далее, охарактеризуем множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью [1]. Также, в книге [6, стр. 64] имеется задача 4 о многочленах с положительной действительной частью.

Затем, покажем единственность многочлена с положительной вещественной частью и ограничением на коэффициенты $h_0 = 2h_n$, а также укажем на связь этого результата и условия единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа. Отметим, что в [15, стр. 736] доказано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

В заключении, на основе известных свойств функций, экстремальных в проблеме Кшижа сформулируем метод построения функций, по своим свойствам напоминающих экстремальные. Обзор известных свойств функций, экстремальных в проблеме Кшижа мы здесь также приводим.

1. Теорема Рисса-Фейера (действительные коэффициенты)

Рассмотрим пример. Пусть $H(z) = 1 + z$, тогда $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = 1 + \cos\varphi$.

Согласно лемме 1, если многочлен H степени n имеет действительные коэффициенты, то соответствующий ему по формуле (2) тригонометрический полином не будет содержать синусов, то есть $T(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что если P, — полином степени n с действительными коэффициентами и $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, то $T(\varphi) \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Нетрудно также показать, что

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Например, если $P(z) = 1 + z$, то $|P(e^{i\varphi})|^2 = 2 + 2\cos\varphi$.

Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 2. *Если* $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $p_k \in \mathbb{R}$, *и* $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, *то найдутся* $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, *такие, что* $T(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi$. *Числа* a_k *определены единственным образом.*

Сформулируем обратное утверждение.

Теорема 1 (Рисс, Фейер). *Пусть* $T(\varphi) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi \geqslant 0$, $a_n \neq 0$, $\varphi, a_k \in \mathbb{R}$, *тогда найдётся* $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{R}$, $p_n \neq 0$, *такой, что* $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. *Более того,* P *может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае* P *определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказывать теорему 1 отдельно мы не будем, так как теорема 1 есть частный случай теоремы 2, которая сформулирована и доказана в следующем пункте. Тем не менее, случай действительных коэффициентов несомненно очень важен и, поэтому имеет смысл освещать его отдельно.

2. Теорема Рисса-Фейера (комплексные коэффициенты)

Очевидно, что если P, — полином степени n с комплексными коэффициентами и $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, то $T(\varphi) \geqslant 0$, для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. В этом случае, согласно лемме 1, $T(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$ и $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Следовательно, имеет место следующее

Утверждение 3. *Если* $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $p_k \in \mathbb{C}$, $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, *то найдутся* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, *такие, что* $T(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$.

Полиномом Лорана будем называть выражение вида

$$Q(z) = \sum_{k=-n_1}^{n_2} q_k z^k, \qquad n_1 \in \mathbb{N}, \quad n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Сформулируем и докажем утверждение, обратное утверждению 3.

Теорема 2 (Рисс, Фейер). *Если* $T(\varphi) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \geqslant 0$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, $\varphi, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *то найдётся многочлен* $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{C}$, $p_n \neq 0$ *такой, что* $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. *Более того, P может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае P определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказательство. Если $z = e^{i\varphi}$, то $z^k = e^{ik\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, откуда $\cos k\varphi = \dfrac{z^k + z^{-k}}{2}$, $\sin k\varphi = \dfrac{z^k - z^{-k}}{2i}$. После такой замены переменной тригонометрический полином T превращается в многочлен Лорана

$$\begin{aligned} Q(z) &\coloneqq \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \frac{z^k + z^{-k}}{2} - b_k \frac{z^k - z^{-k}}{2i} \right) = \\ &= \sum_{k=n}^{1} \frac{a_k - ib_k}{2} z^{-k} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} z^k = \sum_{k=n}^{1} \bar{h}_k z^{-k} + h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k z^k, \end{aligned} \tag{3}$$

где h_k, $k = 1, \ldots, n$, заданы формулой (1). Рассмотрим многочлен

$$S(z) \coloneqq z^n Q(z) = \bar{h}_n + \bar{h}_{n-1} z + \ldots + \bar{h}_1 z^{n-1} + h_0 z^n + h_1 z^{n+1} + \ldots + h_n z^{2n}.$$

Так как $h_n \neq 0$, то по основной теореме алгебры многочлен S имеет $2n$ корней в комплексной плоскости с учётом кратности. При этом $z = 0$ не является корнем S, так как $h_n \neq 0$. Заметим, что S — возвратный многочлен.

Очевидно, что корни Q и S совпадают. Из свойств комплексного сопряжения следует, что $Q(z) = \overline{Q\left(1/\bar{z}\right)}$. То есть, если z_k — корень Q, $|z_k| > 1$, то $1/\bar{z}_k$ тоже корни Q (случай $|z_k| = 1$ рассмотрен ниже) Стало быть,

$$S(e^{i\varphi}) = \prod_{k=1}^{n} (e^{i\varphi} - z_k) \left(e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right).$$

Заметив, что

$$e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_k} = -\frac{e^{i\varphi}}{\bar{z}_k} \overline{(e^{i\varphi} - z_k)},$$

получим

$$S(e^{i\varphi}) = h_n \frac{(-1)^n e^{in\varphi}}{\bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^{n} |e^{i\varphi} - z_k|^2,$$

то есть

$$T(\varphi) = \frac{h_n}{(-1)^n \bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^{n} |e^{i\varphi} - z_k|^2, \tag{4}$$

так как $T(\varphi) = S(e^{i\varphi})/e^{in\varphi}$. Исходя из последней формулы и замены $z = e^{i\varphi}$ мы можем задать искомый многочлен P следующим образом,

$$P(z) \coloneqq p_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k). \tag{5}$$

Если z_k — корень Q и $|z_k| = 1$, то $z_k = 1/\bar{z}_k$. Покажем, что в этом случае z_k является корнем чётной кратности. Действительно, корень $z_k = e^{i\varphi_k}$ не может быть нечётной кратности так как выражение $e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k}$ принимает чисто комплексные значения в достаточно малой проколотой окрестности точки φ_k. С другой стороны, $u_k(t) := -e^{-i(\varphi+\varphi_k)}(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k})^2 = 2(1 - \cos(\varphi - \varphi_k))$ есть функция действительнозначная и неотрицательная.

Так как по построению все корни P лежат вне открытого единичного круга Δ и $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, то многочлен P определён единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы. ■

Отметим, что если коэффициенты h_k многочлена S действительные, то его корни или действительные или комплексно-сопряженные. Стало быть, в этом случае, все коэффициенты многочлена P — действительные по построению.

Заметим, что если из формулировок теорем 1 и 2 убрать требование о том, чтобы все корни многочлена P, заданного формулой (5), лежали вне Δ, то P определяется неоднозначно, что видно из построений, проведённых в доказательстве этой теоремы.

Из формул (4), (5) и того, что $h_n \neq 0$, а $T(\varphi) \geqslant 0$, при $\varphi \in \mathbb{R}$ вытекает, что

$$|p_n|^2 = \frac{h_n}{(-1)^n \cdot \bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} > 0.$$

Рассмотрим многочлен $\Psi(z) := P(z)/p_n = \psi_0 + \psi_1 z + \ldots + \psi_{n-1} z^{n-1} + z^n$. По теореме Виета получаем

$$\psi_0 = (-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n.$$

Стало быть

$$p_0 = \psi_0 p_n, \qquad |p_n|^2 = \frac{h_n}{\overline{\psi}_0}, \qquad \arg h_n = -\arg \psi_0.$$

где h_n задан формулой (1). Заметим, что модуль произведения всех корней многочлена P не меньше 1, а модуль произведения всех корней многочлена Q есть в точности 1.

Из теоремы 2 вытекает, что если m из n корней полинома P лежат на единичной окружности, то тригонометрический многочлен T имеет $2m$ корней.

Следствие 1. *Тригонометрический многочлен степени n имеет не более чем $2n$ корней.*

3. Возвратные многочлены и теорема Рисса-Фейера

Как видно из формулы (3), любой тригонометрический полином степени n можно записать в эквивалентной форме

$$T(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}.$$

Причём, $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ эквивалентно $\bar{c}_k = c_{-k}$, $k = 0, \ldots, n$, $(c_0 \in \mathbb{R})$.

Если у нас есть многочлен $S_n(z) = s_0 + \ldots + s_n z^n$, то взаимным многочленом к S_n будем называть полином $S_n^*(z) \coloneqq \bar{s}_0 z^n + \ldots + \bar{s}_n$, то есть $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n\,(1/\bar{z})}$. Многочлен S будем называть возвратным, если $S(z) = S^*(z)$.

По аналогии с доказательством теоремы 2 можно показать, что возвратность полинома S_{2n} равносильна существованию многочлена P_n такого, что

$$S_{2n}(z) = P_n(z) P_n^*(z).$$

Понятие возвратности можно перенести на лорановские полиномы, после чего теорему Рисса-Фейера (теорема 2) можно будет сформулировать следующим образом [3]: «пусть $T(z) \coloneqq \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k \geqslant 0$, $c_n \neq 0$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_{-k} = \bar{c}_k$, $k = 1, \ldots, n$, тогда найдётся $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{C}$, такой, что $T(z) = P(z)\overline{P\,(1/\bar{z})}$.».

4. Многочлены с положительной действительной частью

Теорема 3. *Многочлен* $H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_0 > 0$, $h_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, *имеет положительную действительную часть в* Δ *тогда и только тогда, когда найдутся числа* $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, *не равные нулю одновременно, такие, что*

$$h_0 = \sum_{j=0}^{n} |p_j|^2, \qquad h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Более того, $h_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, *равносильно* $p_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$.

Доказательство. Необходимость: докажем, что если $H \in C$, то H имеет коэффициенты (6). По лемме 1, выражение $T(\varphi) \coloneqq \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ есть тригонометрический полином и $T(\varphi) \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 2, найдётся многочлен $P(z) \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{n} p_j z^j$, $p_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) =&T(\varphi) = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^{n} p_k e^{ik\varphi} \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k e^{-ik\varphi} = \\
&= |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&\qquad + (p_0\bar{p}_1 + p_1\bar{p}_2 + \ldots + p_{n-1}\bar{p}_n)e^{-i\varphi} + (p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})e^{i\varphi} + \\
&\qquad + (p_0\bar{p}_2 + p_1\bar{p}_3 + \ldots + p_{n-2}\bar{p}_n)e^{-i2\varphi} + (p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2})e^{i2\varphi} + \\
&\qquad\quad \ldots \\
&\qquad + p_0\bar{p}_n e^{-in\varphi} + p_n\bar{p}_0 e^{in\varphi} = \\
&= |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&\qquad + 2\operatorname{Re}(\{p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1}\}e^{i\varphi}) + \\
&\qquad + 2\operatorname{Re}(\{p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2}\}e^{i2\varphi}) + \\
&\qquad\quad \ldots \\
&\qquad + 2\operatorname{Re}(p_n\bar{p}_0 e^{in\varphi}) = \\
= \operatorname{Re} h(e^{i\varphi}),&
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h(z) :=&|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\ &+2(p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})z + \\ &+2(p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2})z^2 + \\ &\ \ \ldots \\ &+2p_n\bar{p}_0 z^n. \end{aligned}$$

Итак, мы сначала перешли от обычного многочлена H к тригонометрическому $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ при помощи замены $z = e^{i\varphi}$, затем факторизовав T при помощи теоремы Рисса-Фейера получили требуемое представление коэффициентов полинома H, после чего сделали обратную замену $e^{i\varphi} = z$ и восстановили аналитическую функцию h по действительной части функции H (с учётом нормировки $h(0) = 0$), заданной на единичной окружности и продолжили её с единичной окружности на всю комплексную плоскость. Так как согласно внутренней теореме единственности для голоморфных функций аналитическое продолжение единственно, то $H \equiv h$. Что и требовалось.

Достаточность: докажем что если H имеет коэффициенты (6), то $H \in C$. Действительно, пусть H имеет коэффициенты (6). Просмотрев вычисления из доказательства необходимого условия в обратном порядке приходим к $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = T(\varphi)$. Стало быть, $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, согласно утверждению 3. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $H \in C$. Что и требовалось. ■

Если все коэффициенты многочлена H действительные, то вместо теоремы 2 и утверждения 3 можно использовать теорему 1 и утверждение 2.

Теорему 3 можно перефразировать. Каждой точке $(p_0, \ldots, p_n)$ пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ соответствует единственный многочлен H, $\operatorname{Re} H > 0$, степени не выше n. Обратное верно лишь частично — каждому многочлену H, $\operatorname{Re} H > 0$, степени не выше n соответствует как минимум одна точка $(p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Например, многочлену $H(z) = 2(1 + z)$ соответствуют 2 точки: $(1, 1)$ и $(-1, -1)$.

5. Условия единственности многочлена с положительной действительной частью

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Существует единственный с точностью до вращений в плоскости переменной z многочлен $H(z) := h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k$ такой, что $H \in C$ и $h_0 = 2|h_n|$, причём $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, $|\eta| = 1$.*

Доказательство. По теореме 3 существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, такие, что

$$h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2, \qquad h_n = p_n\bar{p}_0.$$

Стало быть, так как по условию $h_0 = 2|h_n|$, то

$$|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2|p_n p_0|,$$

что эквивалентно

$$(|p_0|^2 - 2|p_n p_0| + |p_n|^2) + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

что равнозначно

$$(|p_0| - |p_n|)^2 + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

а это равносильно тому, что $|p_0| = |p_n|$ и $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$. Итак

$$H(z) = 2|p_0|^2 + 2p_n\bar{p}_0 z^n = 2|p_0|^2(1 + \eta z^n), \qquad |\eta| = 1.$$

■

Утверждение 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Существует единственный многочлен*

$$H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k$$

такой, что $H \in C$, $h_n > 0$ и $z_1, \ldots, z_n \in \partial\Delta$ — корни H, причём $H(z) = h_0(1+z^n)$, а $z_1, \ldots, z_n \in \partial\Delta$ — всевозможные корни n-й степени из -1.

Доказательство. Так как по условию $z_1, \ldots, z_n$ — корни H, то

$$H(z) = 2h_n \prod_{k=1}^{n}(z - z_k) = 2h_n((-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n + \ldots + z^n).$$

Также по условию $|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| = 1$, поэтому $h_0 = 2|h_n|$. Применив лемму 2 получаем, что $H(z) = h_0(1 + z^n)$. ■

Утверждение 5. *Если $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathbb{R}$, H и P — многочлены степени n такие, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})}$, то $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_j}) = 0$ эквивалентно $P(e^{i\varphi_j}) = 0$, $j = 1, \ldots, m$.*

Иными словами, наличие у полинома P корней на единичной окружности эквивалентно наличию корней у действительной части многочлена H на единичной окружности.

Если H — полином степени n и $H \in C$, то нули $\operatorname{Re} H$, в общем случае, никак не связаны с нулями H. Рассмотрим примеры нормированных многочленов из C.

Многочлен $H_3(z) \coloneqq 1 + 3/2z + z^2 + 1/2z^3$ ($p_0 = \ldots = p_3 = 1$) имеет один простой корень $z = -1$ на $\partial\Delta$, тогда как $\operatorname{Re} H_3$ имеет 3 нуля кратности 2 на $\partial\Delta$ (в том числе $z = -1$) и $\operatorname{Im} H_3$ имеет 2 простых нуля на $\partial\Delta$ (в том числе $z = -1$).

Многочлен $H_2(z) \coloneqq 1 + 4/3z + 2/3z^2$ ($p_0 = p_1 = p_2 = 1$) не имеет корней на $\partial\Delta$, тогда как $\operatorname{Re} H_2$ имеет 2 нуля кратности 2 на $\partial\Delta$ и $\operatorname{Im} H_2$ имеет 2 простых нуля на $\partial\Delta$.

Нули многочлена $H(z) \coloneqq 1 + z^n$ ($p_0 = p_n = 1$, $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$) есть всевозможные корни n-й степени из -1. $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2. $\operatorname{Im} H$ имеет те же простые корни и ещё n корней на $\partial\Delta$.

Утверждение 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Существует единственный многочлен*

$$H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k$$

такой, что $H \in C$, $h_n > 0$ и $z_1, \ldots, z_n \in \partial\Delta$ — всевозможные корни n-й степени из -1 и $\operatorname{Re} H(z_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, причём $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. По утверждению 4 многочлен $H(z) = h_0(1 + z^n)$ — единственный многочлен, удовлетворяющий условию $H \in C$ и имеющий своими нулями всевозможные корни n-й степени из -1. Очевидно, что $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2 (см. следствие 1). Так как восстановление аналитической функции по её действительной части единственно с точностью до мнимой константы, то с учётом нормировки $H(0) = 0$ получаем требуемое. ■

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если H — многочлен, удовлетворяющий утверждению 4, то из теоремы Виета сразу вытекает, что $h_0 = (-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n 2h_n$, а из теоремы 3, что $h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2$, а $h_n = p_n \bar{p}_0$. Таким образом,

$$h_0 = (-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n 2h_n = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = (-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n 2p_n \bar{p}_0. \tag{7}$$

Так как $h_0 > 0$ и $h_n > 0$, то

$$\arg \prod_{k=1}^{n} z_k = \begin{cases} 0, & n \text{ — чётное}, \\ \pi, & n \text{ — нечётное}, \end{cases} \tag{8}$$

как у первообразных корней n-й степени из -1. В силу принципа сохранения области и того, что $H \in C$

$$|z_k| \geqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

стало быть

$$(-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k \geqslant 1.$$

Кроме того,

$$\arg p_0 = \arg p_n. \tag{10}$$

Утверждение 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h_0 > 0$. Среди всех многочленов*

$$H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k, \qquad \operatorname{Re} H(z) > 0, \quad z \in \Delta,$$

только многочлены $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, $|\eta| = 1$, дают максимум для $|h_n|$.

Доказательство. По теореме 3 существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, такие, что

$$h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2, \qquad h_n = p_n \bar{p}_0.$$

Из неравенства

$$\frac{|h_n|}{h_0} = \frac{|p_0 p_n|}{|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2} \leqslant \frac{|p_0 p_n|}{|p_0|^2 + |p_n|^2}$$

видно, что максимум h_n достигается когда $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$. Далее, равенство в неравенстве
$$(|p_0| - |p_n|)^2 \geqslant 0$$
достигается тогда и только тогда, когда $|p_0| = 2|p_n|$, что эквивалентно $h_0 = 2|h_n|$. ∎

6. Полиномиальные элементы класса Каратеодори

Пусть $t > 0$. Класс Каратеодори C_t определим как множество голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = t$, $H \in C$. Подмножество полиномов степени n из класса C_t обозначим через C_t^n.

Если $H(z) := h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_n \neq 0$, и $H \in C$, то $H/h_0 \in C_1^n$. Из теоремы 3 следует, что
$$\frac{H(z)}{h_0} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{h_0}\sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j\right) z^k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(2\sum_{j=0}^{n-k}\frac{p_{j+k}}{\sqrt{h_0}}\frac{\bar{p}_j}{\sqrt{h_0}}\right) z^k,\ h_0 = \sum_{j=0}^{n}|p_j|^2.$$
Выполнив замену переменных $q_j = p_j/\sqrt{h_0}$, $j = 1, \ldots, n$ видим, что имеет место следующее

Следствие 2. *Принадлежность многочлена $H(z) := h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_0 = 1$, $h_n \neq 0$, $h_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, классу C_1^n эквивалентно существованию комплексных чисел p_j, $j = 0, \ldots, n$, не равных нулю одновременно, таких, что*
$$\sum_{j=0}^{n}|p_j|^2 = 1, \qquad h_k = 2\sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$
Более того, $h_k \in \mathbb{R}$ равносильно $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$.

Следствие 2 можно перефразировать. Каждой точке $(p_0, \ldots, p_n)$ единичной гиперсферы евклидова пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ соответствует единственный многочлен $H \in C_1^n$. Обратное верно лишь частично — каждому многочлену $H \in C_1^n$ соответствует как минимум одна точка $(p_0, \ldots, p_n)$ единичной гиперсферы из $\mathbb{C}^{n+1}$. Например, многочлену $H(z) = 1 + z$ соответствуют 2 точки: $(1, 1)/\sqrt{2}$ и $(-1, -1)/\sqrt{2}$.

Как известно [14, стр. 57], если $h \in C_1$, то $|\{h\}_j| \leqslant 2$, $j \in \mathbb{N}$. Также, в [14] перечисленны функции, для которых $|\{h\}_j| = 2$, но среди этих функций нет многочленов. Стало быть, если многочлен $H \in C_1^n$, то $|h_j| < 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Количество $u = u(n, k)$, переменных p_j в выражении*
$$\sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \ldots, n,$$
вычисляется по формуле
$$u(n, k) = \min(v(n),\, 2s(n, k)) = \begin{cases} v(n), & k \leqslant n/2, \\ 2s(n, k), & k > n/2, \end{cases}$$

где $v(n) := n+1$ *— общее количество переменных, а* $s(n,k) := v(n) - k$ *— количество слагаемых в нашем выражении.*

Доказательство. Выберем $k \in \{0,\dots,n\}$ произвольным образом. Существуют две возможности:

1. Если $n-k < k$, то последовательность переменных, входящих в рассматриваемое выражение выглядит так: $p_0,\dots,p_{n-k},p_k,\dots,p_n$ и, стало быть, переменных тут $2(n-k+1)$;

2. Если $n-k \geqslant k$, то последовательность переменных, входящих в рассматриваемое выражение выглядит так: $p_0,\dots,p_n$ и, стало быть, переменных тут $n+1$.

■

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $H \in C_1^n$, *то*

$$|h_k| \leqslant \frac{s(n,k)}{u(n,k)} = \frac{n+1-k}{\min(n+1,\ 2(n+1-k))} < 1, \quad k = 0,\dots,n.$$

При фиксированном k *равенство достижимо тогда и только тогда, когда*

$$h_k = \eta_k \sum_{j=0}^{n-k} |p_j|^2, \qquad |\eta_k| = 1, \quad p_j = p_{j+k}, \quad p_j = 0, \quad j \in \{n-k,\dots,k\}.$$

Доказательство. Фиксируем номер $k \in \{0,\dots,n\}$ произвольным образом. Согласно следствию 2, задача оценки функционала $|h_k|$ на классе C_1^n эквивалентна задаче оценки выражения

$$\left|\sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k}\bar{x}_j\right| \text{ при условии } \sum_{j=0}^{n} |x_j|^2 = 1.$$

Так как

$$\left|\sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k}\bar{x}_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-k} |x_{j+k}\bar{x}_j| \text{ и } \sum_{j=0}^{n-k} |x_{j+k}\bar{x}_j| = \sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k}\bar{x}_j \text{ при } \arg x_{j+k} = \arg x_j,$$

то мы можем свести нашу задачу к следующей:

$$\sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k}x_j \to \max, \qquad \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{11}$$

Эта задача относится к классу гладких конечномерной задач с ограничениями типа равенств. При решении таких задач обычно используется метод Лагранжа, но мы дадим более простое геометрическое доказательство.

Будем понимать выражение $m := x_k x_0 + \ldots + x_n x_{n-k}$ как евклидово скалярное произведение векторов $a := (x_k,\dots,x_{k+j},\dots,x_n)$ и $b := (x_0,\dots,x_j,\dots,x_{n-k})$ пространства $\mathbb{R}^n$. Чтобы скалярное произведение было максимальным, вектора a и b должны быть коллинеарны и сонаправлены, а значит иметь пропорциональные координаты. Получается $x_{j+k} = \alpha x_j$, $\alpha > 0$. Фиксируем $j \in \{0,\dots,n-k\}$. С другой стороны, выражение m можно рассматривать как скалярное произведение $a := (x_k, \ldots, x_{k+j-1}, x_j, x_{k+j+1}, \ldots, x_n)$ и $b := (x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{k+j}, x_{j+1}, \ldots, x_{n-k})$. Стало быть, $x_{j+k} = \alpha x_j$ и $x_j = \alpha x_{k+j}$, $j \in \{0, \ldots, n-k\}$. откуда следует, что $\alpha = 1$. Таким образом, задача (11) свелась к задаче

$$\sum_{j=0}^{n-k} x_j^2 \to \max, \quad \sum_{j=0}^{n-k} x_j^2 + \sum_{j=j_0}^{n} x_j^2 = 1,\ j_0 := \max(k, n-k+1),\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Ясно, что если множество $\{n-k, \ldots, k\}$ не пусто, то наше целевое выражение $x_0^2 + \ldots + x_{n-k}^2$ будет наибольшим при $x_j = 0$, $j \in \{n-k, \ldots, k\}$, откуда с учётом леммы 3 следует, что

$$|h_k| \leqslant \frac{s(n,k)}{u(n,k)} < 1.$$

■

Приведём примеры при $n = 4$. Пусть $p_0 = \ldots = p_4 = 1/\sqrt{5}$, тогда $H_4 \in C_1$, где

$$H_4(z) := 1 + \frac{8}{5}z + \frac{6}{5}z^2 + \frac{4}{5}z^3 + \frac{2}{5}z^4.$$

Пусть $p_0 = p_1 = p_3 = p_4 = 1/\sqrt{4}$, а $p_2 = 0$, тогда $H_4 \in C_1$, где

$$H_4(z) := 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + z^3 + \frac{1}{2}z^4.$$

Пусть $p_0 = p_4 = 1/\sqrt{2}$, а $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, тогда $H_4 \in C_1$, где

$$H_4(z) := 1 + z^4.$$

Из теоремы Рунге о приближении аналитических функций многочленами следует, что множество полиномиальных элементов C_1 всюду плотно в C_1. Таким образом, из теоремы 4 вытекает

Следствие 3. *Если $h \in C_1$, то $|\{h\}_n| \leqslant 2$.*

7. Гипотеза Кшижа

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж высказал гипотезу [7] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\theta}F(e^{i\varphi}z^n, 1)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{12}$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Задачу о нахождении

$$m_n := \max_{f \in B} |\{f\}_n|,$$

будем называть проблемой Кшижа для номера n. Функцию f будем называть экстремальной в проблеме Кшижа для номера n, если $|\{f\}_n| = m_n$.

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа. Заметим, что проблему Кшижа для номера n мы также можем называть просто проблемой Кшижа, если это не вносит путаницы.

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана для первых шести тейлоровских коэффициентов включительно. Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leqslant 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [8]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [14]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, полагаясь на оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [17]. Для случая $n = 4$ упомянем доказательство В. Шапеля [9]. Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [10]. Автор данной статьи в работе [11] при помощи метода Шапеля получил оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e + 0.00116077$, а в работе [12] оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e$ численным методом.

Фиксируем номер n. Существование экстремалей в проблеме Кшижа для номера n очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, ставящий каждой функции из B её тейлоровский коэффициент с номером n является непрерывным на B.

Через Ω_0 обозначим класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть функции G и g голоморфны в Δ. Функция g называется подчинённой в Δ для функции G, если она может быть представлена в Δ в форме $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию G будем называть мажорантой для g в Δ. Подробности см. в [14].

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [14], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h \in C_1. \tag{13}$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1 и B_t. Очевидно, что при каждом фиксированном $t > 0$ функция $F(z,t)$ является мажорантой для каждой функции класса B_t.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t.

Класс, состоящий из функций $h \in C_1$ с действительными коэффициентами обозначим через C_1^r, а класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами обозначим через B_t^r. При каждом $t \geqslant 0$ формула (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1^r и B_t^r. Аналогичным образом определим классы B^r и Ω_0^r как подклассы классов B и Ω_0 с действительными коэффициентами.

8. Критерий Каратеодори-Тёплица

Обозначим через $C \coloneqq \bigcup\limits_{t>0} C_t$ и приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат [18, 19]:

Теорема 5 (Каратеодори, Тёплиц)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_0 > 0$, $\{h\}_1, \ldots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. *Многочлен*

$$q_n(z) = \{h\}_0 + \sum_{k=1}^{n} \{h\}_k z^k$$

можно продолжить до функции

$$h(z) = q_n(z) + o(z^n) \ \in \ C,$$

тогда и только тогда, когда определители

$$M_k = \begin{vmatrix} 2\{h\}_0 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}}_1 & 2\{h\}_0 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}}_{k-1} & \overline{\{h\}}_{k-2} & \cdots & 2\{h\}_0 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}}_k & \overline{\{h\}}_{k-1} & \cdots & \overline{\{h\}}_1 & 2\{h\}_0 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера $m \leqslant n$, *начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и существуют числа* $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, *и числа* $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ *такие, что*

$$h(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}. \tag{14}$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из $(n+1)$-го комплексного числа $h^{(n+1)} \coloneqq (\{h\}_0, \ldots, \{h\}_n)$. Множество, состоящее из точек $h^{(n+1)} \in \mathbb{C}^{n+1}$ таких, что числа $\{h\}_0, \ldots, \{h\}_n$ являются первыми $n+1$ коэффициентами некоторой функции $h \in C$ будем обозначать через $C^{(n)}$ и называть $(n+1)$-ым телом коэффициентов класса C.

Проблема коэффициентов на классе C ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на числа $\{h\}_0, \{h\}_1, \{h\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{h\}_0 + \{h\}_1 z + \{h\}_2 z^2 + \ldots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса C. Критерий Каратеодори-Тёплица является полным решнием проблемы коэффициентов на классе C.

9. Некоторые свойства экстремальной функции

Некоторые результаты этого пункта позаимствованы из [15]. Для полноты приведём их с доказательствами.

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z и относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для этого номера n, то $\eta f(\zeta z)$, $|\eta| = |\zeta| = 1$, тоже экстремальная. При этом вращение в плоскости переменной z не затрагивает коэффициент $\{f\}_0$. Следовательно, мы можем считать без ограничения общности, что если f — экстремальная, то $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. Всюду далее, говоря о функции f, экстремальной в проблеме Кшижа будем подразумевать, что $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и найдётся $t > 0$ такое, что $f \in B_t$. Также, функцию, экстремальную в проблеме Кшижа для номера n часто будем называть просто экстремальной, если понятно о каком n идёт речь.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из критерия Каратеодори-Тёплица и формулы (13) сразу следует, что любую функцию f из класса B_t можно аппроксимировать функциями вида $g(z) = e^{-h(z)}$, где функция h задана формулой (14), причём $\{f\}_k = \{g\}_k$ для $k = 0, \ldots, n$. Если $f(z) = e^{-h(z)}$ — экстремальная функция, то, как известно [19, **?**], точка $h^{(n+1)}$ принадлежит границе множества $C^{(n+1)}$, что равносильно тому, что $M_n = 0$ (M_n определён формулой (**??**)). Согласно критерию Каратеодори-Тёплица, это означает, что продолжение многочлена Q_n, определённого формулой (**??**), единственно. Следовательно, любая экстремальная функция имеет вид $f(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (14). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Следствие 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция f является экстремальной в проблеме Кшижа и $t := -\ln\{f\}_0$. Тогда найдутся числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = t$, и числа $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$, такие, что $f(z) = e^{-h(z)}$, где функция h задана формулой* (14)*, причём $m \leqslant n$.*

Этот результат хорошо известен с начала XX века (см., например, [17, стр. 171] и [15, стр. 171]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, а функция f, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, является экстремальной в проблеме Кшижа. Заметим, что $h \in C_t$ и из формулы (12) и следствия 4 следует, что

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} F(-e^{i\varphi_k} z, \alpha_k), \qquad f(0) = e^{-t}.$$

Чтобы при помощи следствия 4 найти экстремальную функцию необходимо определить $2n$ действительных параметров. Если f имеет, действительные коэффициенты, то и коэффициенты h тоже будут действительными, поэтому для некоторого k, такого, что $\alpha_k > 0$ и $0 < \varphi_k < \pi$ кроме слагаемого $\alpha_k \frac{1+e^{i\varphi_k} z}{1-e^{i\varphi_k} z}$ формула (14) должна содержать также слагаемое $\alpha_k \frac{1+e^{-i\varphi_k} z}{1-e^{-i\varphi_k} z}$.

Отсюда следует, что если f имеет, действительные коэффициенты, то для отыскания явного представления f, при помощи следствия 4, нужно определить n действительных параметров.

Заметим, что если $n \in \mathbb{N}$, а f и g — голоморфные в Δ функции, то

$$\{f \cdot g\}_n = \{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n. \tag{15}$$

Лемма 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f, g — голоморфные в Δ функции, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и*

$$v(z) \coloneqq f(z)e^{-\varepsilon g(z)}, \tag{16}$$

тогда

$$\{v\}_n = \{f\}_n - \varepsilon\{f \cdot g\}_n + o(\varepsilon). \tag{17}$$

Если коэффициенты функций f и g действительные, то $\{v\}_n \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим вариацию функции f функцией $e^{\varepsilon g(z)}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Устремив ε к нулю имеем:

$$v(z) \coloneqq f(z)e^{-\varepsilon g(z)} = f(z)(1 - \varepsilon g(z) + o(\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon f(z)g(z) + o(\varepsilon).$$

Вычислив теперь $\{v\}_n$ мы получим формулу (17). ■

Теорема 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, $h = -\ln f$, тогда для любой функции $g \in C$*

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n\right) \geqslant 0. \tag{18}$$

В частности

$$\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0, \tag{19}$$

а

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n\right) = 0. \tag{20}$$

Пусть

$$H(z) \coloneqq \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n, \tag{21}$$

тогда

$$H \in C. \tag{22}$$

Более того,

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{23}$$

где $m \leqslant n$, а $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что h определена формулой (14).

Доказательство. 1. Докажем формулу (18). Пусть $g \in C$. Вариация v функции f, заданная формулой (16), при $\varepsilon > 0$ есть внутренняя вариация, то есть $v \in B$. При $\varepsilon \to 0$ справедлива лемма 4, а по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, значит $\operatorname{Re}\{v\}_n \leqslant \{f\}_n$, откуда (см. (17)) и вытекает справедливость формулы (18).

2. Подставив коэффициенты функции $g(z) = \frac{1+z^n}{1-z^n} = 1 + 2z^n + \ldots$ в формулу (18) получим (19).

3. Докажем формулу (20). Возьмём теперь $g = h$. Вариация v функции f, заданная формулой (16), при достаточно малых $\varepsilon < 0$ есть внутренняя вариация, то есть $v = f \cdot f^{\varepsilon} \in B$. Так как по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, то из формулы (17) для $\varepsilon < 0$ получаем

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n\right) \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon > 0$ справедлива формула (18), то есть

$$\mathrm{Re}\,(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) \geqslant 0,$$

откуда делаем вывод, что формула (20) верна.

4. Докажем (22). Положим $g(z) = \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} = 1+2\zeta z+2\zeta^2 z^2+\ldots$ Подставив коэффициенты функции g в формулу (18) получим $\mathrm{Re}\,(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}\zeta + \ldots + \{f\}_0\zeta^n) \geqslant 0$, $|\zeta| \leqslant 1$, что равносильно $\mathrm{Re}\,H(z) \geqslant 0$, $z \in \bar{\Delta}$. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\mathrm{Re}\,H(z) > 0$, $z \in \Delta$, что в свою очередь равносильно (22).

5. Докажем формулу (23). Фиксируем k и возьмём

$$g(z) = \frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z} = 1 + 2e^{i\varphi_k}z + 2e^{2i\varphi_k}z^2 + \ldots,$$

тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$, как при $\varepsilon \geqslant 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > -\alpha_k$). Из леммы 4, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f вытекает для $\varepsilon < 0$, что

$$\mathrm{Re}\,(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k}) \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{Re}\,(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k}) \geqslant 0,$$

что эквивалентно тому, что $\mathrm{Re}\,H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

Из теоремы 3 и теоремы 6 (формула (22)) сразу вытекает

Следствие 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа, причём $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда найдутся $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, такие, что*

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{24}$$

В частности, если $f \in B^r$, то $p_k \in$, $k = 0, \ldots, n$.

Переформулируем теорему 6 для случая когда коэффициенты экстремальной функции действительные.

Теорема 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда, если f имеет действительные коэффициенты, то для любой функции $g \in C^r$*

$$\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n \geqslant 0. \tag{25}$$

В частности, если $h = -\ln f$, то

$$\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n = 0, \tag{26}$$

Пусть многочлен H определён формулой (21), тогда

$$H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

где $m \leqslant n$, а $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что h определена формулой (14).

Доказательство. Формула (25) сразу вытекает из формулы (18).

Если f имеет действительные коэффициенты, то и h тоже, поэтому формула (26) сразу следует из формулы (20).

Докажем формулу (27). Фиксируем k и возьмём

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{-i\varphi_k}z}{1-e^{-i\varphi_k}z} = 1 + 2\cos\varphi_k z + 2\cos 2\varphi_k z^2 + \ldots,$$

тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$, как при $\varepsilon \geqslant 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > -\alpha_k$). Из леммы 4, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f вытекает для $\varepsilon < 0$, что

$$\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k} \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon > 0$

$$\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k} \geqslant 0,$$

что эквивалентно тому, что $H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

Покажем, что формула (18) эквивалентна формуле (22) и, в частности, что формула (20) эквивалентна формуле (23).

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы 6.*

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n) \geqslant 0$$

тогда и только тогда, когда $H \in C$. В частности,

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) = 0$$

тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Импликация $\operatorname{Re}\{f \cdot g\}_n \geqslant 0 \Rightarrow H \in C$ была установлена при доказательстве формулы (22).

Докажем обратную импликацию $H \in C \Rightarrow \operatorname{Re}\{f \cdot g\}_n \geqslant 0$. Фиксируем произвольную функцию $g \in C$. Согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 5) существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, и $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что первые $n+1$ коэффициентов функции g совпадают с соответствующими коэффициентами функции

$$\tilde{g}(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (1 + 2e^{i\varphi_k}z + \ldots + 2e^{in\varphi_k}z^n + \ldots).$$

Применяя формулу (15), получаем:

$$\begin{aligned}\{f \cdot g\}_n = \{f \cdot \tilde{g}\}_n &= \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{in\varphi_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k H(e^{i\varphi_k}). \quad (28)\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Re} H(z) \geqslant 0$, $z \in \bar{\Delta}$, то из формулы (28) следует, что $\operatorname{Re}\{f \cdot g\}_n \geqslant 0$.

Второе утверждение следует из первого при $g = h$ и $z = e^{i\varphi_k}$. Из равенства $\operatorname{Re}\{f \cdot h\}_n = 0$ и формулы (28) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$. По первому утверждению $\operatorname{Re} H(z) \geqslant 0$, $z \in \bar{\Delta}$, откуда получаем, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, для $k = 1, \ldots, m$.

Обратно, из $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \ldots, m$ следует, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, откуда по формуле (28) получаем, что $\operatorname{Re}\{f \cdot h\}_n = 0$. ∎

Если функция f является экстремальной в проблеме Кшижа с номером n то

$$f(z) = e^{-h(z)},$$

где h задана формулой (14), и существуют числа

$$\alpha_k > 0, \quad k = 1, \ldots, m, \qquad 0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi, \qquad m \leqslant n,$$

определяющие f.

Пусть f одна из таких функций. Покажем, что функций $g \in C$, для которых справедлива формула (20) бесконечно много и свойство (20) не является характеристическим свойством экстремальной функции.

Действительно, если

$$g(z) := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \qquad \beta_k \geqslant 0, \quad k = 0, \ldots, m,$$

то ясно, что $g \in C$ и

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0 \{g\}_n\right) = 0$$

по соображениям, аналогичным тем, которые были применены при доказательстве формулы (20).

Пусть теперь

$$g(z) := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \frac{1 + e^{i\theta_k} z}{1 - e^{i\theta_k} z} \not\equiv 0, \qquad \beta_k \geqslant 0, \quad \theta_k \neq \varphi_j \quad j, k = 0, \ldots, m.$$

Покажем, что в этом случае

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0 \{g\}_n\right) > 0.$$

Действительно

$$g(z) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \frac{1 + e^{i\theta_k} z}{1 - e^{i\theta_k} z} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k (1 + 2e^{i\theta_k} z + \ldots + 2e^{in\theta_k} z^n + \ldots).$$

Согласно формуле (15),

$$\{f \cdot g\}_n = \sum_{k=1}^{m} \beta_k (\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\theta_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{in\theta_k}) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k H(e^{i\theta_k}). \tag{29}$$

Так как $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \neq e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, m$, то $\operatorname{Re}\{f \cdot g\}_n > 0$, по формуле (29).

Функция
$$f(z) = e^{-\frac{1-z}{1+z}} = e^{-1} + 2e^{-1}z^n + \dots$$
удовлетворяет соотношению (20), стало быть, по доказанному только что для экстремальной функции $m = n$ кроме того, очевидно, что $e^{i\varphi_k}$ — всевозможные корни n-й степени из -1. Из того, что $m = n$, соотношения (23) и утверждения 6 сразу вытекает справедливость гипотезы Кшижа.

10. Свойства экстремальной функции, связанные с её значением в нуле

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Наличие выпуклой структуры на множестве всех функций g, подчиненных функции
$$M(z,t) \coloneqq \frac{e^{-t} + z}{1 + e^{-t}z} = e^{-t} + (1 - e^{-2t})z + \dots .$$
позволяет получить оценки $|\{g\}_n| \leqslant 1 - e^{-2t}$, причём равенство в этом неравенстве достигается только на вращениях $M(z,t)$ в плоскости переменной z.

Каждая функция f класса B_t подчинена мёбиусову отображению $M(z,t)$, стало быть
$$|\{f\}_n| < 1 - e^{-2t} = 1 - |\{f\}_0|^2. \tag{30}$$
Неравенство строгое, так как $M(z,t) \notin B$.

Отметим, что при $t \in [0,1]$ эта оценка даёт хорошее приближение для предполагаемой верхней границы $|\{f\}_n|$ (гипотеза состоит в том, что $|\{f\}_n| \leqslant 2te^{-t}$, $f \in B_t$, $t \in [0,\, 1]$, см. [12]). При $t = 1$ погрешность максимальна и равна $1 - e^{-2} - 2e^{-1} < 0.129$, погрешность монотонно убывает и стремится к нулю при стремлении t к нулю [13].

Оценка (30) позволяет вычислить значение t_0 такое, что
$$|\{f\}_n| < 1 - e^{-2t_0} = 2e^{-1}.$$
Вычисления дают $t_0 = -\ln\sqrt{1 - 2e^{-1}} \approx 0.665$. Следовательно, если $f \in B$ и $|\{f\}_0| \geqslant \sqrt{1 - 2e^{-1}} \approx 0.514$, то справедливы неравенства $|\{f\}_n| < 2/e$.

Из неравенства (19) и оценки (30) вытекает

Следствие 6. *Если f — экстремальная и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*
$$2\{f\}_0 \leqslant \{f\}_n < 1 - \{f\}_0^2.$$

Из следствия 6 вытекает

Следствие 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, тогда $\{f\}_0 < \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ или $t > -\ln(\sqrt{2} - 1) \approx 0.881$.*

Доказательство. Подставив в (17) функцию $g(z) = \dfrac{1-z^n}{1+z^n} = 1-2z^n+\dots$ получим

$$\{v\}_n = (1-\varepsilon)\{f\}_n + 2\varepsilon\{f\}_0 + o(\varepsilon).$$

Благодаря этой формуле и следствию 6 мы можем видеть, что если $f \in B$ и $\{f\}_n > 0$, то $\{v\}_n > \{f\}_n$ при $t \leqslant t_0$ и $\{v\}_n < \{f\}_n$ при $t > 1$. Здесь t_0 — корень уравнения $1 - e^{-2t_0} = 2e^{-t}$. (Легко показать, что $\{v\}_n > 0$.)

Основное свойство экстремальной функции f состоит в том, что $\{v\}_n \leqslant \{f\}_n$, а мы знаем, что при $\{f\}_n \geqslant \sqrt{2}-1$ имеет место неравенство $\{v\}_n \geqslant \{f\}_n$, следовательно $\{f\}_0 < \sqrt{2}-1$, что и требовалось доказать. ■

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и H — многочлен, определённый формулой (21), то из формулы (7) и следствия 5 сразу вытекает, что

$$\{f\}_n = 2\{f\}_0(-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2p_n\bar{p}_0(-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n. \qquad (31)$$

Так как у экстремальной функции $\{f\}_n > 0$ и $\{f\}_0 > 0$, то формула (8) также имеет место. Как упоминалось в пункте 5, гипотеза Кшижа доказана для номеров $n = 1, \dots, 6$, стало быть, при этих n нам известна экстремальная функция $f = F$, где F задана формулой (12). Таким образом,

$$H(z) = \frac{2}{e}(1+z^n), \qquad n = 1, \dots, 6,$$

а корни H это всевозможные корни n-й степени из -1 как и в (8).

Также имеет место формула (9)

11. О единственности экстремальной функции

Как упоминалось выше, класс B инвариантен относительно вращений в плоскостях переменных z и w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — экстремальная в проблеме Кшижа с номером n, то мы можем считать без ограничения общности, что $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. При таких ограничениях на экстремальную функцию можно ставить вопрос о её единственности.

Теорема 9. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа и $\{f\}_n = 2\{f\}_0 > 0$, тогда f — единственная и $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$, другими словами $f = F(z^n, 1)$.*

Доказательство. По теореме 6 многочлен H, заданный формулой (21) лежит в C, удовлетворяет всем условиям леммы 2, то есть $H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n$ и, стало быть, искомая экстремальная функция удовлетворяет условиям $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$.

Найдём $\{f\}_0$ в виде $\{f\}_0 = e^{-t}$, где $t > 0$. Имеем $f(z) = e^{-t} + 2e^{-t}z^n + o(z^n)$. Следовательно $h := -\ln f \in C$. Применив критерий Каратеодори-Тёплица видим, что при $t > 0$ миноры $M_k > 0$, $k = 1, \dots, n-1$, а $M_n = t^{n-1}(t^2-1) \geqslant 0$. Минор $M_n = 0$ только при $t = 1$, следовательно $\{f\}_0 = e^{-1}$, а $f(z) = e^{-1} + 2e^{-1}z^n + o(z^n)$.

Функция $F(z^n, 1)$, заданная формулой (12) лежит в B, соответствует всем этим требованиям и, согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 5), является единственным продолжением многочлена $e^{-1}+2e^{-1}z^n$ до функции класса B. Что и требовалось доказать. ■

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 10. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, и $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$, тогда $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, f — единственная и $f = F(z^n, 1)$.*

Доказательство. Так как f — экстремальная, то из условий $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и (19) имеем $\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0 > 0$. Из условия $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$ и равенства (20) следует, что $\{f\}_n = -\{f\}_0 \operatorname{Re}\{h\}_n \leqslant 2\{f\}_0$. (Здесь мы использовали оценку $|\{h\}_n| \leqslant 2$, $h \in C_1$. См. [14].) Стало быть, $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, откуда, согласно теореме 9 вытекает единственность f и то, что $f = F(z^n, 1)$. ■

Заметим, что из (24) следует, что $\{f\}_n = \sum\limits_{j=0}^{n} |p_j|^2$, а $\{f\}_0 = p_n\bar{p}_0$. Если показать, что ещё и $|p_1| = \ldots = |p_{n-1}| = 0$, $|p_0| = |p_n| > 0$, то из теоремы 9 следует, что экстремальная функция единственная. В [15, стр. 735] показано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

В частности, имеет место следующее

Утверждение 8. *Если экстремальная функция единственная, то все её коэффициенты действительные.*

Доказательство. В самом деле, если у экстремальной функции f есть хотя бы один комплексный коэффициент, то $f^*(z) \coloneqq \overline{f(\bar{z})}$ тоже будет экстремальной и притом $f(z) \neq f^*(z)$. ■

Теорема 11. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда, если f имеет действительные коэффициенты и $m = n$, где m задано формулой* (23)*, то гипотеза Кшижа справедлива.*

Доказательство. Так как $m = n$, то из формулы (27) получаем, что $z_k = e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \ldots, n$, а из формулы (31), что $\{f\}_n = 2\{f\}_0$. По теореме 9 если $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, то экстремальная функция единственна и, стало быть, это функция $F(z^n, 1)$, где F задана формулой (12). ■

12. Линейная инвариантность

Следующий результат является следствием того, что класс B является линейно инвариантным семейством функций.

Теорема 12 ([16]). *Если $n \in \mathbb{N}$ и $f \in B$ — экстремальная функция, то*

$$(n+1)\{f\}_{n+1} = (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\omega(z) \coloneqq \frac{z+\eta}{1+\overline{\eta}z}$. Так как $f \in B$, то $f_\eta(z) \coloneqq f(\omega(z)) \in B$, при $\eta \in \Delta$. В окрестности точки $\eta = 0$ имеем $(\omega(z))^m = z^m + mz^{m-1}(\eta - \overline{\eta}z^2) + o(|\eta|)$. Следовательно $f_\eta(z) = f(\omega(z)) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \{f\}_m (z^m + mz^{m-1}(\eta - \overline{\eta}z^2)) + o(|\eta|)$ и

$$\begin{aligned}\{f_\eta\}_n = \{f\}_n + (n+1)\{f\}_{n+1}\eta - (n-1)\{f\}_{n-1}\overline{\eta} + o(|\eta|) = \\ = \{f\}_n + ((n+1)\{f\}_{n+1} - (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}})\eta + o(|\eta|),\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Re} u\overline{v} = \operatorname{Re} \overline{u}v$, для всех $u, v \in \mathbb{C}$. Так как f — экстремальная, то

$$\operatorname{Re}\Big(\eta\big((n+1)\{f\}_{n+1} - (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}}\big)\Big) + o(|\eta|) \leqslant 0. \tag{32}$$

Неравенство (32) справедливо при любом $\eta \in \Delta$, следовательно, мы можем выбрать число η настолько малым по модулю, что $o(|\eta|)$ перестанет оказывать влияние на знак левой части неравенства (32). Однако, если

$$(n+1)\{f\}_{n+1} \neq (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}},$$

то мы можем выбрать число η так, что знак левой части неравенства (32) станет положительным, а это противоречит (32), что и требовалось. ∎

При $n = 1$ для экстремальной функции получаем $\{f_\eta\}_1 = \{f\}_1 + 2\{f\}_2\eta + o(|\eta|)$, откуда следует, что $\{f\}_2 = 0$. Действительно $f(z) = F(z,1) = e^{-1}(-2z + 2/3z^3 + \ldots)$.

Эрмерс в [16] указывает, что функция $F(z^n, 1)$ удовлетворяет теореме 12. Ясно также, что все $F(z^n, t)$, $t > 0$ удовлетворяют теореме 12. Существуют и другие функции, удовлетворяющие этому соотношению. Например [16], если n — нечётное число, то любая чётная функция класса B удовлетворяет теореме 12. Более того, если $f \in B$ удовлетворяет теореме 12, то и $cf \in B$ удовлетворяет теореме 12, при $c \in [0, 1]$.

13. Неравенства между коэффициентами

Из формулы (22) и теоремы 6 следует, что $h \in C_1^n$, где

$$h(z) := \frac{H(z)}{\{f\}_n} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\{f\}_{n-k}}{\{f\}_n} z^k,$$

Применив к полиному h теорему 4 сразу получаем следующий результат

Теорема 13. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f экстремальна и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$\frac{|\{f\}_k|}{\{f\}_n} \leqslant \frac{s(n,k)}{u(n,k)} = \frac{n+1-k}{\min(n+1,\ 2(n+1-k))} < 1, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Этот результат можно уточнить для случая $k < n/2$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а функция f — экстремальная. Рассмотрим её внутреннюю вариацию

$$f_{t,\zeta}(z) := f(z)e^{-\varepsilon\frac{1+\zeta z^{n-k}}{1-\zeta z^{n-k}}}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \zeta \in \overline{\Delta}, \quad k < \frac{n}{2}.$$

Имеем $\{f_{t,\zeta}\}_n = \{f\}_n - (\{f\}_n + 2\{f\}_k\zeta)\varepsilon + o(t)$. Из того, что f экстремальная следует, что $\operatorname{Re}\{f_{\varepsilon,\zeta}\}_n \leqslant \{f\}_n$, $\varepsilon > 0$, $\zeta \in \overline{\Delta}$. Если взять достаточно малое значение ε, то становится очевидно, что $\operatorname{Re}(\{f\}_n + 2\{f\}_k\zeta) \geqslant 0$, $\zeta \in \overline{\Delta}$. То есть функция $h/\{f\}_n \in C_1^n$, где $h(\zeta) := \{f\}_n + 2\{f\}_k\zeta$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если функция f экстремальная, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$|\{f\}_k| \leqslant \frac{1}{2}\{f\}_n, \qquad k = 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Отметим, что впервые этот результаты появился в [17] в неявной форме. В [16] этот результат присутствует в явной форме.

14. Функции экстремального типа

Из следствия 7 вытекает, что экстремальную функцию нужно искать в классах B_t, $t > -\ln(\sqrt{2}-1)$. Но $\ln(\sqrt{2}-1) < 1$, а гипотеза Кшижа утверждает, что $t = 1$. Покажем, как свести поиски экстремальной функции к поискам не обязательно экстремальной функции в классах B_t, $t \geqslant 1$.

Теорема 15. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Гипотеза Кшижа верна если и только если в классах B_t, $t \geqslant 1$ не существует f, такая, что $\{f\}_n = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.*

Доказательство. Если экстремальная функция f такова, что $\{f\}_0 > e^{-1}$, то из того, что $\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0 > 2e^{-1}$ следует, что найдётся положительная константа $c < 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$. Ясно, что $c\{f\}_0 < e^{-1}$ и $cf \in B$.

Если экстремальная функция f такова, что $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n \geqslant 2e^{-1}$, то найдётся положительная константа $c \leqslant 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$. Ясно, что $c\{f\}_0 < e^{-1}$ и $cf \in B$.

Таким образом, наличие в классе B функции f с $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n = 2e^{-1}$ эквивалентно тому, что гипотеза Кшижа не верна. При этом, например, из формулы (20) ясно, что $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.

Гипотеза Кшижа будет также не верна если в классе B_1 найдётся функция f, такая, что $\{f\}_n = 2\{f\}_0 = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$. Из теоремы 9 следует, что f не может быть экстремальной. ■

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f — функция экстремальная в проблеме Кшижа, то $cf \in B$, $0 < c < 1$. При этом, хотя cf уже не является экстремальной, для неё тем не менее верны соотношения (18), (19), (20), (22), (23), (31), (8), (9), (10) и теоремы 12, 13 и 14.

Мы не знаем чему равно $\{f\}_n$ для экстремальной функции, но мы можем попытаться найти функцию, упомянутую в теореме 15. Нам нужно найти функцию из $\bigcup\limits_{t\geqslant 1} B_t$, отличную от $F(z,t)$ и такую, что $\{f\}_n = 2/e$. Условие (18) слишком трудное для проверки, поэтому мы его не будем использовать. Остальные условия можно проверить перед тем, как проверять, что $f \in B$.

Будем называть функцию f функцией экстремального типа, если $\{f\}_n = 2/e$, $f \in \bigcup\limits_{t\geqslant 1} B_t$, то есть $0 < \{f\}_0 \leqslant e^{-1}$ и она удовлетворяет соотношениям (19), (20), (22), (23), (31), (8), (9), (10) а также теоремам 12, 13 и 14.

Перейдём к конструктивному построению функций экстремального типа при фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Один из возможных подходов к решению поставленной задачи заключается в том, чтобы при помощи следствия 5 построить многочлен H, заданный формулой (21). Проблема этого подхода состоит в том, что мы имеем $n+1$ параметр $p_0, \ldots, p_n$ на которые наложены условия (31) и (10). При больших n подобрать эти параметры так, чтобы найти функцию экстремального типа может быть очень сложно. Кроме того, мы не контролируем нули тригонометрического многочлена $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Рассмотрим ещё один подход.

1. При помощи утверждения 5 строим многочлен

$$P'(z) = p'_0 + \ldots + p'_n z^n = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

по его корням $z_1, \dots, z_n$, чтобы найти числа $p'_0, \dots, p'_n$. Эти корни выбираем так, чтобы они удовлетворяли условиям (31), (8) и (9). Введя обозначение

$$c \coloneqq |p'_0|^2 + \ldots + |p'_n|^2,$$

мы получим p_k с необходимым нам свойством $|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2/e$ по формуле

$$p_k \coloneqq \sqrt{\frac{2}{ce}} p'_k, \qquad k = 0, \dots, n.$$

2. Используя следствия 2 строим многочлен заданный формулой (21)

$$H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k, \qquad h_0 = \frac{2}{e}. \quad h_n > 0.$$

Ясно, что соотношение (19) выполняется по построению.

3. Пусть f — функция, которую мы строим. По формуле (21)

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1} z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n,$$

откуда (как и в следствии 5)

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \dots, n. \tag{33}$$

4. Используя формулу (33) с учётом теоремы 12, получаем отрезок ряда Тейлора для функции f:

$$f(z) = p_n\bar{p}_0 + (p_{n-1}\bar{p}_0 + p_n\bar{p}_1)z + \ldots + (p_1\bar{p}_0 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})z^{n-1} + \\ + \frac{2}{e}z^n + \frac{n-1}{n+1}\overline{(p_1\bar{p}_0 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})}z^{n+1} + o(z^{n+1}).$$

5. Условия (19), (22), (23), (31), (8), (9), а также условия теорем 12 и 13 выполнены по построению. Если f удовлетворяет условиям (20), (10) и теореме 14, то проверяем, что $f \in \bigcup\limits_{t \geqslant 1} B_t$, то есть отрезок ряда Тейлора функции $h \coloneqq -\ln f$ удовлетворяет критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 5).

Список литературы

[1] Fejér L. Über trigonometrische Polynome. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 53—82.

[2] Riesz F. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 83—87.

[3] Hussen A., Zeyani A. Fejer-Riesz Theorem and Its Generalization. // IJSRP. 2021. V. 11. I. 6.

[4] Rovnyak J. Fejér-Riesz theorem. Encyclopedia of Mathematics. Springer Verlag GmbH, EMS.

[5] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. Chelsea Pub. Co. N.Y. 1975.

[6] Александров И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Издательство Томского университета. Томск. 1976.

[7] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[8] *Levin V. I.* Lösing der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80-81.

[9] *Szapiel W.* A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[10] *Samaris N.* A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.

[11] *Ступин Д. Л.* Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций. // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. Вып. 2. С. 71–84.

[12] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120 EDN: FWRLMA

[13] Ступин Д. Л. Доказательство гипотезы Кшижа в некоторых подклассах. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2006. С. 49–50.

[14] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[15] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // Advances in Mathematics. 2015 V. 273. P. 716–745.

[16] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.

[17] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[18] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[19] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.