

Криволинейные и поверхностные интегралы в концепции гиперкомплексных чисел алгебры Клиффорда

Алимжан Холмуратович Бабаев^{1,2}

Кандидат физ. - мат. наук, e-mail: prepadamira@gmail.com

¹Кафедра высоких энергий, Национальный Университет, Ташкент, Узбекистан.

²Кафедра Высшей математики, НГТУ, Новосибирск, Российская Федерация.

ORCID

0000-0002-4071-5524 Alimzhan Babaev

Аннотация

В статье рассматривается обобщение теории функций комплексной переменной для 3-х мерного евклидова пространства и для пространства Минковского: интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, его интегральное представление для производных, теорема Стокса и Остроградского - Гаусса. Также криволинейные и поверхностные интегралы были объединены и обобщены в рамках концепции гиперкомплексных чисел. Была установлена биекция (взаимно однозначное соответствие) между многомерными векторами и гиперкомплексными числами, т.е., в качестве гиперкомплексных чисел и базисных векторов использовались матрицы Паули (σ_i) для 3-х мерного евклидова пространства и матрицы Дирака (γ^i) для пространства Минковского. Результаты вычислений были использованы для исследования законов физики, в частности, было применено дуальное интегрирование – замена поверхностных интегралов по «временным» плоскостям на интегрирование по «чисто пространственным» плоскостям. Доказан закон сохранения 4-х электромагнитного тока в рамках концепции алгебры Клиффорда.

Abstract

The article presents a generalization theory of functions of a complex variable for 3-dimensional Euclidean space and for Minkowski's space: Cauchy's integral theorem, Cauchy's integral formula, its integral representation for derivatives, and Stokes' and Ostrogradsky-Gauss theorems. Also, line and surface integrals were combined and generalized within the framework of the concept of hypercomplex numbers. A bijection (one-to-one correspondence) was established between multidimensional vectors and hypercomplex numbers, i.e., the Pauli matrices (σ_i) for 3-dimensional Euclidean space and the Dirac matrices (γ^i) for Minkowski space were used as hypercomplex numbers and basis vectors. The results of the calculations were used to study the laws of physics; in particular, dual integration was applied – replacing surface integrals over “time” planes with integration over “purely spatial” planes. The law of conservation of 4-electromagnetic currents has been proven within the framework of the Clifford algebra concept.

Ключевые слова

Криволинейный интеграл; поверхностные интеграл; гиперкомплексные числа; интегральная формула Коши; теорема Стокса; формула Остроградского - Гаусса;

Keywords

Line integral; surface integral; hypercomplex number; Cauchy's integral formula; Generalized Stokes theorem; divergence theorem;

1. Введение

На плоскости (E^2) очевидна биекция (взаимно однозначное соответствие) [1] между векторами и комплексными числами. В случае многомерного пространства (E^n , $n > 2$) это соответствие не кажется явным.

В данной статье рассмотрим связь между криволинейными и поверхностными интегралами в 3-х и 4-х мерных евклидовых (псевдоевклидовых) пространствах в рамках алгебры Клиффорда. При этом установим соответствие между гиперкомплексными числами и матрицами Дирака (γ^i – как орты пространства E^4) в пространстве Минковского. В пространстве E^3 , как в частном случае $E^{4,1}$, в качестве базиса используем $\gamma^a \gamma^0 = \sigma_a$, где σ_a – матрицы Паули.

Особенность выбора матриц Дирака в 4-х мерном пространстве заключается в том, что оно – псевдоевклидово с сигнатурой $+- - -$. Все законы физики (СТО, квантовая механика и т.д.) в нулевом приближении происходят именно в пространстве Минковского. Поэтому в качестве ортонормированного базиса векторного пространства (гиперкомплексных чисел) мы будем использовать матрицы Дирака.

3-х мерное евклидово пространство с сигнатурой $- - -$, но для удобства используется $+++$. Поэтому в качестве базисных векторов мы будем использовать матрицы Паули σ_i ($i=0, 1, 2, 3$), где σ_0 – единичная 2×2 матрица.

2. Результаты

2.1. Криволинейные интегралы в 3-х мерном

евклидовом пространстве.

Пусть положительно ориентированная поверхность D , ограниченная контуром l , задана в 3-х мерном евклидовом пространстве (Рисунок 1). Вектор -

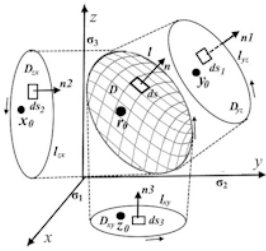


Рисунок 1

- нормаль n к поверхности D составляет углы α, β, γ с осями координат x, y, z .

Проекциями поверхности D на плоскостях xy, yz, zx являются D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} с контурами l_{xy}, l_{yz}, l_{zx} .

Пусть вектор-функция $R(r)$ дана в области V

(объём), ограниченной поверхностью D :

$$R(r) = \sigma_1 X(r) + \sigma_2 Y(r) + \sigma_3 Z(r) \quad (1)$$

Рассмотрим криволинейный $\oint R(r)dl$ и поверхностный $\oint R(r)dS$ интегралы в этой области.

Здесь $r = (x, y, z)$ – радиус - вектор;

$dl = dx + dy + dz = \sigma_1 dx + \sigma_2 dy + \sigma_3 dz$ – элемент дуги;

$dS = dx \wedge dy \cos \alpha + dy \wedge dz \cos \beta + dz \wedge dx \cos \gamma = ndS$ –

элемент поверхности;

$n = \sigma_1 \sigma_2 \cos \gamma + \sigma_2 \sigma_3 \cos \alpha + \sigma_3 \sigma_1 \cos \beta$ – положительно ориентированный нормаль к поверхности D ;

$$dx \wedge dy = \sigma_1 \sigma_2 dx dy = i \sigma_3 dx dy$$

$$dy \wedge dz = \sigma_2 \sigma_3 dy dz = i \sigma_1 dy dz$$

$$dz \wedge dx = \sigma_3 \sigma_1 dz dx = i \sigma_2 dz dx$$

$\nabla = \sigma_1 \partial / \partial x + \sigma_2 \partial / \partial y + \sigma_3 \partial / \partial z$ – оператор набла.

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – матрицы Паули.

Замечание 1.

В зависимости от целесообразности и простоты мы будем использовать поверхностные интегралы либо 1-го, либо 2-го типа, что, надеемся, не будет создавать неудобства у читателя.

Теорема 1.

Справедливы формулы

$$\oint R(r)dl = 0, \text{ если } R(r) \text{ аналитическая} \quad (2.1)$$

$$\oint R(r)dl = 2\pi i f(r_0) n, \text{ если } R(r) = f(r)/(r - r_0) \quad (2.2)$$

и

$$\oint R \cdot dl = \oint (\nabla \wedge R) \cdot dS \quad (3.1)$$

$$\oint R \wedge dl = \oint (\nabla \cdot R) dS \quad (3.2)$$

• и $\wedge$ – символы внутреннего и внешнего произведения векторов [2].

$R(r) = f(r)/(r - r_0)$ означает, что вектор – функция $R(r)$ в точке r_0 имеет полюс [3].

$f(r_0)$ – значение функции $f(r)$ в точке r_0 .

i – мнимая единица.

Замечание 2.

Для простоты будем считать, что область D – односвязная. Мы не будем останавливаться на методах разбиения не односвязных областей на односвязные [4].

Замечание 3.

Очевидно, что

$$(\nabla R) dS = (\nabla \cdot R) dS + (\nabla \wedge R) \cdot dS + (\nabla \wedge R) \wedge dS.$$

Но размерность $(\nabla \wedge R) \wedge dS$ превышает размерность 3-х мерного пространства (>3), т.е., $\oint (\nabla \wedge R) \wedge dS$ не имеет смысла.

Доказательство.

Поверхность D – есть сумма поверхностей D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} .

Поэтому достаточно доказать теорему 1 на одной из проекций, например, на D_{xy} и затем сложить интегралы по всем проекциям.

В координатной форме записи интеграл $\oint R dl$ имеет вид:

$$\oint R dl = \oint R \cdot dl + \oint R \wedge dl,$$

где

$$\oint R \cdot dl = \oint (\sigma_0 X dx + Y dy) \quad (4.1)$$

$$\oint R \wedge dl = \oint (\sigma_3 X dy - Y dx) \quad (4.2)$$

Поверхностный интеграл в векторной форме имеет вид:

$$\oint (\nabla R) dx \wedge dy = \oint (\nabla \cdot R) dx \wedge dy + \oint (\nabla \wedge R) \cdot dx \wedge dy,$$

где

$$\oint (\nabla \cdot R) dx \wedge dy = \oint (\sigma_3 X \partial_x + Y \partial_y) dx dy \quad (5.1)$$

$$\oint (\nabla \wedge R) \cdot dx \wedge dy = \oint (\sigma_0 X \partial_y - Y \partial_x) dx dy \quad (5.2)$$

1) Преобразуем криволинейный интеграл $\oint R \cdot dl$ (4.1) в поверхностный $\oint (\nabla \wedge R) \cdot dx \wedge dy$ (5.2):

$$\begin{aligned} \oint R \cdot dl &= \oint (\sigma_1 X \sigma_2 dx + \sigma_2 Y \sigma_1 dy) = \\ &= \oint (\sigma_2 \partial_y (\sigma_1 X) + \sigma_1 \partial_x (\sigma_2 Y)) \sigma_1 \sigma_2 dx dy = \\ &= \sigma_0 \oint (\partial_y X - \partial_x Y) dx dy \end{aligned}$$

или

$$\oint (\sigma_0 X dx + Y dy) = \sigma_0 \oint (\partial_y X - \partial_x Y) dx dy \quad (6)$$

(6) – есть теорема Грина [5].

Формулы типа (6) справедливы и для интегралов на проекциях D_{yz} и D_{zx} .

Так как поверхность D с контуром l – есть сумма интегралов по поверхностям D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} с контурами l_{xy}, l_{yz}, l_{zx} , то, складывая интегралы по проекциям, получим уравнение (3.1).

2) Преобразуем криволинейный интеграл $\oint R \wedge dl$ (4.2) в поверхностный $\oint (\nabla \cdot R) dx \wedge dy$ (5.1):

$$\begin{aligned} \oint R \wedge dl &= \oint (\sigma_1 X \sigma_2 dy + \sigma_2 Y \sigma_1 dx) = \\ &= \oint (\sigma_1 \partial_x (\sigma_1 X) + \sigma_2 \partial_y (\sigma_2 Y)) \sigma_1 \sigma_2 dx dy = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \oint (\partial_x X + \partial_y Y) dx dy \end{aligned}$$

или

$$\oint (\sigma_3 X dy - Y dx) = \sigma_3 \oint (\partial_x X + \partial_y Y) dx dy \quad (7)$$

Формулы типа (7) справедливы и для интегралов на проекциях D_{yx} и D_{zx} . Складывая интегралы по всем проекциям D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} , получим уравнение (3.2).

Формулы (3) теоремы 1 доказаны.

Формула (3.1) – это теорема Стокса [6].

Чтобы понять смысл формулы (3.2), запишем её в виде $\oint R \wedge dl = \oint \text{div} R dS$.

В терминах физики формула (3.2) означает, что индукция векторного поля ($\oint R \wedge dl$) через контур l равна расходимости ($\oint \text{div} R dS$) поля через поверхность D , ограниченной тем же контуром.

Забегая вперед, предположим, что замкнутая поверхность D (например, сфера) внутри имеет источник расходимости («сток» или «исток»).

Если $\text{div} R = \partial_x X + \partial_y Y > 0$, то вектор индукции направлен наружу, т.е., вектор индукции с n составляет острый угол. Это – исток (силовые линии направлены от сферы). Если $\text{div} R < 0$, то вектор индукции направлен вовнутрь, т.е., этот вектор индукции с n составляет тупой угол. Это – сток (силовые линии направлены

вовнутрь сферы).

Очевидно, что если функция $\mathbf{R}$ аналитическая в области $\mathbf{D}$, то интегралы (3) равны нулю. Проще говоря, источник расходимости отсутствует. (3.2) – это частный случай теоремы Гаусса-Остроградского (для поверхности).

Если функция $\mathbf{R}(x,y)$ аналитическая (по Коши [7]) в $\mathbf{D}$, т.е., она не имеет особых изолированных точек (полюсов), то

$$\oint_{xy} \mathbf{R} d\mathbf{l} = 0 \quad (8)$$

Действительно, так как $\mathbf{R}(x,y)$ определена и ограничена во всех точках $\mathbf{D}$, то она имеет первообразную $\mathbf{F}'_r = \mathbf{R}(\mathbf{r})$ и, естественно, интеграл (8) по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_{xy} \mathbf{R} d\mathbf{l} = \mathbf{F} \big|_a = 0$$

Складывая все интегралы типа (8) по всем проекциям $\mathbf{D}_{xy}$, $\mathbf{D}_{yz}$, $\mathbf{D}_{zx}$, получим формулу (2.1).

Теперь рассмотрим случай, когда функция $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ в области $\mathbf{D}$ имеет изолированную особую точку $\mathbf{r}_0$, т.е., полюс типа

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}(\mathbf{r})/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (9)$$

Преобразуем криволинейный интеграл $\oint_{xy} \mathbf{R} d\mathbf{l}$:

$$\begin{aligned} \oint_{xy} \mathbf{R} d\mathbf{l} &= \oint_{xy} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{l} = \oint_{xy} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{l} = \\ &= \oint_{xy} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{l} + \oint_{xy} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{l} \end{aligned}$$

Так как $(\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0))/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ – есть производная при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$, то первый интеграл равен нулю:

$$\oint_{xy} \mathbf{f}' d\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \big|_a = 0$$

Теперь преобразуем второй интеграл, точнее, $\oint_{xy} \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^{-1} d\mathbf{l}$. По аналогии с теорией функций комплексного анализа, получим

$$\oint_{xy} \frac{d\mathbf{l}}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} = \oint_{xy} \frac{d(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} = \oint_{xy} \frac{\sigma_1 d(\sigma_0 dx + \sigma_1 \sigma_2 dy)}{\sigma_1 (\sigma_0 x + \sigma_1 \sigma_2 y)}$$

или в показательной форме

$$\oint_{xy} \frac{d(\sigma_0 dx + i\sigma_2 dy)}{\sigma_0 x + i\sigma_2 y} = i\sigma_3 \int_0^{2\pi} \frac{|r| \cdot \exp(i\sigma_3 \varphi)}{|r| \cdot \exp(i\sigma_3 \varphi)} d\varphi = 2\pi i \sigma_3 \quad (10)$$

Равенства типа (10) имеют место и для плоскостей zx , yz . Складывая все интегралы типа (10) по всем проекциям $\mathbf{D}_{xy}$, $\mathbf{D}_{yz}$, $\mathbf{D}_{zx}$, получим формулу (2.2).

Так как значение интеграла (10) мнимое, то равенство (2.2) выполняется для мнимой части интеграла $\oint \mathbf{R} d\mathbf{l}$.

Формула (2.2) – это обобщение интегральной формулы Коши [8] на случай 3-х мерного евклидова пространства. Теорема 1 доказана.

2.2. Поверхностные интегралы в 3-х мерном евклидовом пространстве.

Пусть вектор - функция $\mathbf{R}(x,y,z)$ (1) дана в объёме V , ограниченном поверхностью $\mathbf{D}$ (Рисунок 1). Рассмотрим поверхностный интеграл $\oint \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{R} n ds$ в этой области.

Теорема 2.

Справедливы формулы

$$\oint \mathbf{R} d\mathbf{S} = 0, \text{ если } \mathbf{R} \text{ аналитическая} \quad (11.1)$$

$$\oint \mathbf{R} d\mathbf{S} = 2\pi i \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) \mathbf{n}, \text{ если } \mathbf{R} = \mathbf{f}(\mathbf{r})/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (11.2)$$

и

$$\oint \mathbf{R} \wedge d\mathbf{S} = \int \int \int (\nabla \cdot \mathbf{R}) dv \quad (12.1)$$

$$\oint \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int (\nabla \wedge \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{v} \quad (12.2)$$

Доказательство.

Преобразование криволинейного интеграла в поверхностный и наоборот мы уже делали в теореме 1 (формула (3)). Разрежем замкнутую поверхность $\mathbf{D}$ плоскостью, параллельной xu и разделим на поверхностные интегралы по «верхней» и «нижней» поверхностям:

$$\oint \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_{\text{up}} \mathbf{R} d\mathbf{S} + \oint_{\text{down}} \mathbf{R} d\mathbf{S}$$

Далее применим формулу (3) теоремы 1 как к «верхнему», так и к «нижнему» интегралу. Формула (3) справедлива и для «нижнего», и для «верхнего» интеграла. Складывая «нижние» и «верхние» интегралы по всем проекциям $\mathbf{D}_{xy}$, $\mathbf{D}_{yz}$ и $\mathbf{D}_{zx}$, получим формулу (11).

Так как $\mathbf{R}$ всюду в $\mathbf{D}$ аналитическая, тогда существует первообразная $\mathbf{F} (\mathbf{F}'_r = \mathbf{R})$. Она тоже аналитическая в области $\mathbf{D}$.

Согласно теореме 1,

$$\oint_{\text{up}} \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{F}' \wedge d\mathbf{l} = 0$$

Формула (11.1) доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда функция имеет полюс типа

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r})/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Преобразуем поверхностные интегралы (11.2):

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{R} d\mathbf{S} &= \oint \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{S} = \oint \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{S} = \\ &= \oint \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{S} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) \oint \frac{d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y}}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} \end{aligned}$$

или

$$\oint \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{S} = \oint \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) \oint \frac{d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y}}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}, \quad (13)$$

где

$$\oint \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} = \oint (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})) d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y},$$

так как $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{r}_0)}{d\mathbf{r}} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})$ – производная по $\mathbf{r}$, т.е., градиент от вектор - функции.

Первый интеграл в правой части (13) преобразуется в криволинейный интеграл согласно формулам (3) и равен нулю:

$$\begin{aligned} \oint \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} &= \oint \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}_{xy} = \oint \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}_{xy} = \\ &= \oint \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{xy} + \oint \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}_{xy} = \oint \mathbf{f}' \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{f}' \wedge d\mathbf{l} = 0, \end{aligned}$$

так как функция $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ аналитическая во всех точках $\mathbf{D}$ (и по $\mathbf{D}_{\text{up}}$, и по $\mathbf{D}_{\text{down}}$).

Согласно формуле (2.1) теоремы 1, $\oint \mathbf{f}' \cdot d\mathbf{l} = 0$.

Вычислим второй интеграл в правой части (13):

$$\oint \frac{d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y}}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} = \oint \nabla \ln(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{S} = \oint \ln(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{l} \quad (14)$$

Так как $\nabla \ln(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^{-1}$, то $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^{-1}$ разложим в ряд Лорана [9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} &= \frac{1}{\sigma_1(x - x_0) + \sigma_2(y - y_0)} = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{1}{x + i\sigma_2 y - x_0 - i\sigma_2 y_0} = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{1}{z - z_0} = \\ &= \frac{1}{\sigma_1 z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{\sigma_1 z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z} \right)^n = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

Теперь интегрируем этот ряд:

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} \frac{d\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \tau^n} \Big|_{\tau}^{\infty} = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \tau^n}$$

Здесь нам нужен только член с номером $n = 1$: $c_1 = \frac{1}{\sigma_1 \tau}$.

Подставляя значение c_1 в (14), получим

$$\iint_{xy_{up}} \frac{dx \wedge dy}{r - r_0} = \frac{1}{\sigma_1} \oint_{xy} \frac{\sigma_1 dz}{z} = i \sigma_3 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \sigma_3$$

Интегрируя и по «нижней», и по «верхней» поверхностям, мы получим один и тот же результат. Так как полюс один и тот же для обеих поверхностей, то, складывая интегралы, получим:

$$\oint_{xy} dx dy / (r - r)^{-1} = 2\pi i \sigma_3 \quad (15)$$

Равенства типа (15) справедливы и для проекций D_{yz} , D_{zx} . Складывая интегралы типа (15) по всем проекциям D_{xy} , D_{yz} , D_{zx} , получим формулу (11.2).

Формула (11.2) теоремы 2 доказана.

Докажем формулу (12.1).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{R}) dv &= \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{R}) dx \wedge dy \wedge dz = \\ &= \iiint_V (\partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 dx dy dz = \\ &= i \sigma_0 \iiint_V (\partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z) dx dy dz \end{aligned}$$

или

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{R}) dv = i \sigma_0 \iiint_V (\partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z) dv \quad (16)$$

Применяя к (16) формулу Остроградского - Гаусса [10], получим (12.1).

Теперь докажем формулу (12.2).

Трёхкратный интеграл в (12.2) в координатной форме выглядит как

$$\begin{aligned} &\iiint_V (\nabla \wedge \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{v} = \\ &= \iiint_V (\sigma_1 (\partial_x Y - \partial_y X) + \sigma_2 (\partial_x Z - \partial_z X) + \sigma_3 (\partial_y Z - \partial_z Y)) dx dy dz \quad (17) \end{aligned}$$

Преобразуем поверхностный интеграл в (12.2) в трехкратный:

$$\begin{aligned} &\oint_D \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \oint_D (\sigma_1 X + \sigma_2 Y + \sigma_3 Z) \cdot (\sigma_1 \sigma_2 dx dy + \sigma_2 \sigma_3 dy dz + \sigma_3 \sigma_1 dz dx) = \\ &= \oint_D (\sigma_1 (Z dz dx - Y dx dy) + \sigma_2 (X dx dy - Z dy dz) + \\ &\quad + \sigma_3 (Y dy dz - X dz dx)) = \\ &= \iiint_V (\sigma_1 (\partial_y Z - \partial_z Y) + \sigma_2 (\partial_z X - \partial_x Z) + \\ &\quad + \sigma_3 (\partial_x Y - \partial_y X)) dx dy dz \end{aligned}$$

или

$$\oint_D \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\sigma_1 (\partial_y Z - \partial_z Y) + \sigma_2 (\partial_z X - \partial_x Z) + \sigma_3 (\partial_x Y - \partial_y X)) dv \quad (18)$$

Сравнивая (17) и (18), убедимся, что формула (12.2) верна.

Теорема 2 доказана.

2.3. Криволинейные интегралы в пространстве Минковского.

Рассмотрим криволинейный $\int A(r) dl$ и поверхностный $\oint A(r) dS$ интегралы в 4-х мерном псевдоевклидовом пространстве,

где

вектор - функция: $A(r) = \gamma^i A_i(r)$ (19)

$r = \{x^i\} = \{t, x, y, z\}$ - интервал,

$$dl = \gamma_i dx^i \quad (20)$$

матрицы Дирака γ^i в представлении:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{vmatrix}, \gamma^\alpha = i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ \sigma_\alpha & 0 \end{vmatrix}, \alpha = 1, 2, 3. \quad (21)$$

$$\gamma^0 \gamma^\alpha = i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{vmatrix}, \gamma^1 \gamma^2 = -i \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix},$$

$$\gamma^2 \gamma^3 = -i \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}, \gamma^3 \gamma^1 = -i \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}.$$

$$E = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}, \gamma = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$dS = dt \wedge dx + dt \wedge dy + dt \wedge dz + dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx = N ds$ - элемент гиперповерхности;

$N = \gamma^0 \gamma^1 \cos \alpha_{01} + \gamma^0 \gamma^2 \cos \alpha_{02} + \gamma^0 \gamma^3 \cos \alpha_{03} + \gamma^1 \gamma^2 \cos \alpha_{12} +$

$\gamma^2 \gamma^3 \cos \alpha_{23} + \gamma^3 \gamma^1 \cos \alpha_{31}$ - вектор - нормаль;

$\pi/2 - \cos \alpha_{01}, \pi/2 - \cos \alpha_{02}, \dots$ - углы между нормалью N и гиперплоскостями $tx(\gamma^0 \gamma^1)$, $ty(\gamma^0 \gamma^2)$ и т.д.

По-другому, $\cos \alpha_{01}, \cos \alpha_{02}, \dots$ - направляющие косинусы.

$$dt \wedge dx = \gamma^0 \gamma^1 dt dx = \gamma^0 \gamma^1 \cos \alpha_{01} dS,$$

$$dt \wedge dy = \gamma^0 \gamma^2 dt dy = \gamma^0 \gamma^2 \cos \alpha_{02} dS,$$

$$dt \wedge dz = \gamma^0 \gamma^3 dt dz = \gamma^0 \gamma^3 \cos \alpha_{03} dS,$$

$$dx \wedge dy = \gamma^1 \gamma^2 dt dx = \gamma^1 \gamma^2 \cos \alpha_{12} dS,$$

$$dy \wedge dz = \gamma^2 \gamma^3 dy dz = \gamma^2 \gamma^3 \cos \alpha_{23} dS,$$

$$dz \wedge dx = \gamma^3 \gamma^1 dz dx = \gamma^3 \gamma^1 \cos \alpha_{31} dS.$$

Инверсия $(i, j) \gamma^i \gamma^j$ идет согласно формуле

$$\gamma^0 \gamma^\alpha = \varepsilon^{0\alpha\lambda\mu} \gamma^\lambda \gamma^\mu$$

где $\varepsilon^{0\alpha\lambda\mu}$ - абсолютно антисимметричный единичный тензор четвертого ранга [11].

Гиперповерхность D и контур l со своими проекциями на гиперплоскостях tx, ty, tz, xy, yz и zx определены в пространстве Минковского.

Замечание 4.

$\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}$ - «углы» между нормалью N и временной осью t . Так как эти три угла мнимые, то запишем их в виде:

$$\cos \alpha_{01} = \cos(i\eta_1) = \cosh \eta_1 = (1 - \beta_1^2)^{-0.5}$$

$$\cos \alpha_{02} = \cos(i\eta_2) = \cosh \eta_2 = (1 - \beta_2^2)^{-0.5}$$

$$\cos \alpha_{03} = \cos(i\eta_3) = \cosh \eta_3 = (1 - \beta_3^2)^{-0.5}$$

где η - быстрота [12], $\Gamma_\lambda = (1 - \beta_\lambda^2)^{-0.5}$ - лоренц - фактор [13], $\beta_\lambda = v_\lambda / c$, v_λ - проекция скорости v на ось x_λ , c - скорость света в вакууме.

$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ - обычные пространственные углы между нормалью N и пространственными осями x, y, z :

$$\alpha_{12} = \alpha, \alpha_{23} = \beta, \alpha_{31} = \gamma.$$

Тогда нормаль N имеет вид:

$$N = \gamma^0 \gamma^1 \Gamma_1 + \gamma^0 \gamma^2 \Gamma_2 + \gamma^0 \gamma^3 \Gamma_3 + \gamma^1 \gamma^2 \cos \alpha + \gamma^2 \gamma^3 \cos \beta + \gamma^3 \gamma^1 \cos \gamma \quad (22)$$

Теперь докажем теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 для случая пространства Минковского.

Теорема 3.

Справедливы формулы:

$$\oint A dl = 0, \text{ если } A \text{ аналитическая} \quad (23.1)$$

$$\oint A dl = 2\pi N f(r_0), \text{ если } A(r) = f(r)/(r - r_0) \quad (23.2)$$

и

$$\oint A \cdot d\mathbf{l} = \oint (\nabla \wedge A) \cdot d\mathbf{S} \quad (24.1)$$

$$\oint A \wedge dl = \oint (\nabla \cdot A) dS \quad (24.2)$$

Доказательство.

Действительно, если функция $A(r)$ определена и ограничена всюду в D , то она имеет первообразную функцию $F'_r = A(r)$. Тогда

$${}_l\oint Adl = F|_a = 0$$

Пусть функция имеет полюс типа

$$A(r) = f(r)/(r - r_0) \quad (25)$$

Преобразуем интеграл:

$$\oint_l \frac{f(r)}{r-r_0} dl = \oint_l \frac{f(r)-f(r_0)}{r-r_0} dl + f(r_0) \oint_l \frac{1}{r-r_0} dl$$

Первый интеграл в правой части равенства – есть производная $\nabla f(r)$. Интеграл от него равен нулю.

Преобразуем второй интеграл в правой части равенства, точнее, $(r - r_0)^{-1}dl$:

$$\begin{aligned} \oint_l \frac{1}{r-r_0} dl &= \oint_l \frac{\gamma^0 d(t-t_0) + \gamma^1 d(x-x_0) + \gamma^2 d(y-y_0) + \gamma^3 d(z-z_0)}{\gamma^0(t-t_0) + \gamma^1(x-x_0) + \gamma^2(y-y_0) + \gamma^3(z-z_0)} = \\ &= \oint_l \frac{\gamma^0 dt + \gamma^1 dx + \gamma^2 dy + \gamma^3 dz}{\gamma^0 t + \gamma^1 x + \gamma^2 y + \gamma^3 z} = \\ &= \oint_{tx} \frac{\gamma^0 dt + \gamma^1 dx}{\gamma^0 t + \gamma^1 x} + \oint_{ty} \frac{\gamma^0 dt + \gamma^2 dy}{\gamma^0 t + \gamma^2 y} + \oint_{tz} \frac{\gamma^0 dt + \gamma^3 dz}{\gamma^0 t + \gamma^3 z} + \\ &+ \oint_{xy} \frac{\gamma^1 dx + \gamma^2 dy}{\gamma^1 x + \gamma^2 y} + \oint_{zx} \frac{\gamma^1 dx + \gamma^3 dz}{\gamma^1 x + \gamma^3 z} + \oint_{yz} \frac{\gamma^2 dy + \gamma^3 dz}{\gamma^2 y + \gamma^3 z} \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы по всем гиперплоскостям в отдельности, например, как

$$\begin{aligned} \oint_{tx} \frac{\gamma^0 dt + \gamma^1 dx}{\gamma^0 t + \gamma^1 x} &= \oint_{tx} \frac{E dt + \gamma^0 \gamma^1 dx}{E t + \gamma^0 \gamma^1 x} = \\ &= \gamma^0 \gamma^1 \int_0^{2\pi} |r_{01}| \frac{\exp(\gamma^0 \gamma^1 \varphi_{01}) d\varphi_{01}}{|r_{01}| \exp(\gamma^0 \gamma^1 \varphi_{01})} = 2\pi \gamma^0 \gamma^1 \end{aligned}$$

и, складывая подобные интегралы по всем проекциям, получим

$$\oint_l \frac{1}{r-r_0} dl = 2\pi \cdot N$$

Формулы (23.1) и (23.2) доказаны.

Теперь докажем формулы (24.1) и (24.2).

Рассмотрим криволинейные интегралы на плоскостях tx , ty , tz , xy , yz и zx по отдельности.

Согласно произведению векторов Клиффорда:

$${}_l\oint Adl = {}_l\oint A \cdot dl + {}_l\oint A \wedge dl \quad (26)$$

Интеграл ${}_l\oint A \cdot dl$ преобразуем в поверхностный:

$${}_l\oint A \cdot dl = \gamma^0 \gamma^1 {}_l\oint (\partial_0 A_l - \partial_1 A_0) \gamma^0 \gamma^1 dt dx = E {}_l\oint (\partial_0 A_l - \partial_1 A_0) dt dx$$

Тогда

$${}_l\oint A \cdot dl = E {}_l\oint (\partial_0 A_l - \partial_1 A_0) dt dx \quad (27)$$

Складывая все интегралы типа (27) по всем плоскостям, получим формулу (24.1).

Теперь преобразуем криволинейный интеграл ${}_l\oint A \wedge dl$ из формулы (26).

$$\begin{aligned} {}_l\oint A \wedge dl &= {}_l\oint (\gamma^0 A_0 + \gamma^1 A_1) \wedge (\gamma^0 dt + \gamma^1 dx) = \\ &= \gamma^0 \gamma^1 {}_l\oint (A_0 dx - A_1 dt) = {}_l\oint (\nabla \cdot A) dt \wedge dx = \\ &= {}_l\oint (\partial_0 A_0 - \partial_1 A_1) dt \wedge dx = \gamma^0 \gamma^1 {}_l\oint (\partial_0 A_0 - \partial_1 A_1) dt dx \end{aligned}$$

или

$${}_l\oint A \wedge dl = \gamma^0 \gamma^1 {}_l\oint (\partial_0 A_0 - \partial_1 A_1) dt dx \quad (28)$$

Складывая интегралы типа (28) по всем плоскостям, получим формулу (24.2).

Теорема 3 доказана.

2.4. Поверхностные интегралы в пространстве Минковского.

Пусть функция $A(t, x, y, z)$ дана в области V ,

ограниченной гиперповерхностью D . Рассмотрим поверхностный интеграл ${}_D\oint AdS$ на этой гиперповерхности.

Теорема 4.

Справедливы формулы

$${}_D\oint AdS = 0, \text{ если } A \text{ аналитическая} \quad (29.1)$$

$${}_D\oint AdS = 2\pi f(r_0) N, \text{ если } A = f(r)/(r - r_0) \quad (29.2)$$

и

$$\begin{aligned} {}_D\oint A \wedge dS &= \gamma^0 \gamma_{xyz} \iiint (\partial_1 A_l + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3) dx dy dz + \\ &+ \gamma^1 \gamma_{tyz} \iiint (\partial_0 A_0 - \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3) dt dy dz + \\ &+ \gamma^2 \gamma_{txz} \iiint (\partial_0 A_0 + \partial_1 A_1 - \partial_3 A_3) dt dx dz + \\ &+ \gamma^3 \gamma_{txy} \iiint (\partial_0 A_0 - \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2) dt dx dy \end{aligned} \quad (30.1)$$

$$\begin{aligned} {}_D\oint A \cdot dS &= \\ &= {}_{xyz} \iiint (\gamma^1 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) + \gamma^2 (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) + \gamma^3 (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)) dx dy dz + \\ &+ {}_{tyz} \iiint (\gamma^0 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) + \gamma^2 (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3) + \gamma^3 (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)) dt dy dz + \\ &+ {}_{txz} \iiint (\gamma^0 (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) + \gamma^1 (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) + \gamma^3 (\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)) dt dx dz + \\ &+ {}_{txy} \iiint (\gamma^0 (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) + \gamma^1 (\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2) + \gamma^2 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)) dt dx dy \end{aligned} \quad (30.2)$$

Доказательство.

Теорему 4 докажем аналогично теореме 2, но теперь для 4-х мерного пространства Минковского.

Если функция $A(t, x, y, z)$ аналитическая, то

$${}_D\oint AdS = {}_D\oint (\nabla f) dS = {}_l\oint F dl = 0$$

Так как A всюду в D определена, т.е. существует первообразная F ($F'_r = A$), то и она тоже аналитическая в области D .

Формула (29.1) доказана.

Теперь докажем (29.2) так же, как (11.2) теоремы 2.

Пусть функция имеет полюс типа

$$A(r) = f(r)/(r - r_0)$$

Преобразуем поверхностные интегралы (29.2) (по tx , ty , tz , xy , yz , zx):

$$\iint_{tx_{up}} \frac{f(r)}{r-r_0} dt \wedge dx = \iint_{tx_{up}} (\nabla f) dt \wedge dx + f(r_0) \iint_{tx_{up}} \frac{dt \wedge dx}{r-r_0} \quad (31),$$

где

$$\iint_{tx_{up}} \frac{f(r)-f(r_0)+f(r_0)}{r-r_0} dt \wedge dx = \iint_{tx_{up}} (\nabla f(r)) dt \wedge dx,$$

так как $\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{f(r)-f(r_0)}{r-r_0} = \frac{df(r_0)}{dr} = \nabla f(r)$ – производная по r , т.е., градиент от вектор - функции.

Первый интеграл в правой стороне (31) преобразуется в криволинейный интеграл, и он равен нулю, так как функция $f(r)$ аналитическая во всех точках D (и по D_{up} , и по D_{down}).

Вычислим второй интеграл в правой стороне (31). Мы уже вычисляли подобный интеграл в теореме 2 (формулы (14) – (15)).

$$\iint_{tx_{up}} \frac{dx \wedge dy}{r-r_0} = \iint_{tx_{up}} (\nabla \ln(r - r_0)) ds = \oint_{tx_{up}} \ln(r - r_0) dr \quad (32)$$

Так как $\nabla \ln(r - r_0) = (r - r_0)^{-1}$, разложим в ряд Лорана $(r - r_0)^{-1}$:

$$\frac{1}{r-r_0} = \frac{1}{\gamma^0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}}$$

Интегрируем этот ряд:

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\gamma^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{\gamma^0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \tau^n} \quad (33)$$

В (33) нам нужен только член с номером $m=1$: $c_1 = \frac{1}{\gamma^0 z}$.

Подставляя значение c_1 в (32), получим

$$\iint_{tx_{up}} \frac{dx \wedge dy}{r-r_0} = \frac{1}{\gamma^0} \oint_{tx_{up}} \frac{\gamma^0 dz}{z} = \gamma^0 \gamma^1 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \gamma^0 \gamma^1 \quad (34)$$

Интегрируя также и по «нижней» поверхности, получим тот же результат. Так как полюс один и тот же для обеих поверхностей, то складывая интегралы, получим:

$$\oint_{tx} \frac{dx \wedge dy}{r-r_0} = 2\pi \gamma^0 \gamma^1 \quad (35)$$

Равенства типа (35) справедливы и для всех гиперплоскостей. Складывая интегралы типа (35) по всем проекциям, получим формулу (29.2).

Теперь докажем формулу (30.1).

Очевидно, что в 4-х мерном пространстве элементарный объём Ndv состоит из 4-х тривекторов:

$$NdV = dx \wedge dy \wedge dz + dt \wedge dy \wedge dz + dt \wedge dz \wedge dx + dt \wedge dx \wedge dy$$

или

$$NdV = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 dx dy dz + \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 dt dy dz + \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 dt dz dx + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 dt dx dy$$

Тривекторы $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^0 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^0 \gamma^3 \gamma^1$ и $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2$ дуальны [14] псевдовекторам $\gamma^0 \gamma$, $\gamma^1 \gamma$, $\gamma^2 \gamma$ и $\gamma^3 \gamma$:

$$\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^0 \gamma$$

$$\gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^1 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma$$

$$\gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 = -\gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 = -\gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 = \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^2 \gamma$$

$$\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = -\gamma^3 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^3 \gamma$$

Тогда

$$NdV = \gamma^0 \gamma dx dy dz + \gamma^1 \gamma dt dy dz + \gamma^2 \gamma dt dz dx + \gamma^3 \gamma dt dx dy$$

Замечание 5

Модуль («длина») тривекторов, бивекторов и псевдовекторов в данном случае мы приняли за единицу, точнее, за единичную матрицу:

$$|h^i| = |\gamma^i \gamma^j| = |\gamma^i \gamma^j \gamma^k| = |E|$$

Используя дуальность тривекторов и псевдовекторов, внешнее произведение $A \wedge dS$ запишем в координатной форме:

$$\begin{aligned} A \wedge dS &= \gamma^1 A_1 \gamma^2 \gamma^3 dy dz + \gamma^2 A_2 \gamma^3 \gamma^1 dz dx + \gamma^3 A_3 \gamma^1 \gamma^2 dx dy + \\ &+ \gamma^0 A_0 \gamma^2 \gamma^3 dy dz + \gamma^2 A_2 \gamma^0 \gamma^3 dt dz + \gamma^3 A_3 \gamma^0 \gamma^2 dt dy + \\ &+ \gamma^0 A_0 \gamma^3 \gamma^1 dz dx + \gamma^3 A_3 \gamma^0 \gamma^1 dt dx + \gamma^1 A_1 \gamma^0 \gamma^3 dt dz + \\ &+ \gamma^0 A_0 \gamma^1 \gamma^2 dx dy + \gamma^1 A_1 \gamma^0 \gamma^2 dt dy + \gamma^2 A_2 \gamma^0 \gamma^1 dt dx \end{aligned} \quad (36)$$

Преобразуем интеграл $\oint_{D} A \wedge dS$ в трехкратный, например, для псевдовектора $\gamma^0 \gamma = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$:

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma_{xyz} \oint (A_1 dy dz + A_2 dx dz + A_3 dx dy) &= \\ = \gamma^0 \gamma_{xyz} \iiint (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3) dx dy dz. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем и остальные три поверхностных интеграла:

$$\begin{aligned} \gamma^1 \gamma_{tyz} \oint (A_0 dy dz - A_2 dt dz + A_3 dt dy) &= \\ \gamma^2 \gamma_{txz} \oint (A_0 dz dx + A_1 dt dz - A_3 dt dx) &= \\ \gamma^3 \gamma_{txy} \oint (A_0 dx dy - A_1 dt dy + A_2 dt dx) &= \end{aligned}$$

Складывая трехкратные интегралы по всем псевдовекторам ($\gamma^0 \gamma$, $\gamma^1 \gamma$, $\gamma^2 \gamma$, $\gamma^3 \gamma$), получим формулу (30.1).

Теперь докажем формулу (30.2).

$\oint_{D} A \cdot dS$ в координатной форме имеет вид:

$$\oint_{D} A \cdot dS = \oint_{D} (\gamma^0 A_0 + \gamma^1 A_1 + \gamma^2 A_2 + \gamma^3 A_3) \cdot (\gamma^0 \gamma^1 dt dx +$$

$$+ \gamma^0 \gamma^2 dt dy + \gamma^0 \gamma^3 dt dz + \gamma^1 \gamma^2 dx dy + \gamma^2 \gamma^3 dy dz + \gamma^3 \gamma^1 dz dx)$$

или

$$\begin{aligned} &+ \gamma^1 \gamma^2 \oint (\gamma^1 (A_2 dx dy - A_3 dx dz) + \gamma^2 (A_3 dy dz - A_1 dx dy) + \\ &+ \gamma^3 (A_1 dx dz - A_2 dy dz)) + \\ &+ \gamma^2 \gamma^3 \oint (\gamma^0 (A_2 dt dy - A_3 dt dz) + \gamma^2 (A_0 dt dy - A_3 dy dz) + \\ &+ \gamma^3 (A_2 dy dz - A_0 dt dz)) + \\ &+ \gamma^3 \gamma^1 \oint (\gamma^0 (A_3 dt dz - A_1 dt dx) + \gamma^1 (A_3 dz dx - A_0 dt dx) + \\ &+ \gamma^3 (A_0 dt dz - A_1 dz dx)) + \\ &+ \gamma^0 \gamma^1 \oint (\gamma^0 (A_1 dt dx - A_2 dt dy) + \gamma^1 (A_0 dt dx - A_2 dx dy) + \\ &+ \gamma^2 (A_1 dx dy - A_0 dt dy)) \end{aligned} \quad (37)$$

Трёхкратный интеграл $\iiint (\nabla \wedge A) \cdot dv$ в (30.2) в развернутом виде имеет вид:

$$\begin{aligned} &\iiint (\nabla \wedge A) \cdot dv = \\ &= \iiint (\gamma^1 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) + \gamma^2 (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) + \gamma^3 (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)) dx dy dz + \\ &+ \iiint (\gamma^0 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) + \gamma^2 (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3) + \gamma^3 (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)) dt dy dz + \\ &+ \iiint (\gamma^0 (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) + \gamma^1 (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) + \gamma^3 (\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)) dt dz dx + \\ &+ \iiint (\gamma^0 (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) + \gamma^1 (\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2) + \gamma^2 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)) dt dx dy \end{aligned} \quad (38)$$

Интеграл (38) преобразуем в поверхностный, например, как

$$\begin{aligned} &\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \iiint (\gamma^1 (\partial_3 A_2 dx dy dz - \partial_2 A_3 dx dy dz) + \gamma^2 (\partial_1 A_3 dx dy dz - \\ &\partial_3 A_1 dx dy dz) + \gamma^3 (\partial_2 A_1 dx dy dz - \partial_1 A_2 dx dy dz)) = \\ &= \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \oint (\gamma^1 (A_2 dx dy - A_3 dx dz) + \gamma^2 (A_3 dy dz - A_1 dx dy) + \gamma^3 (A_1 dx dz - \\ &A_2 dy dz)) \end{aligned}$$

Сравнивая это с первым интегралом в (37), убедимся, что они идентичны. Также, преобразуя и остальные трехкратные интегралы в (38), получим формулу (30.2).

Теорема 4 доказана.

2.5. Обобщение интегральной формулы Коши.

Теперь рассмотрим случай, когда функция имеет полюс вида

$$A = f(r)/(r - r_0)^{k-1} \quad (39)$$

Теорема 5.

Пусть в точке $r_0(t_0, x_0, y_0, z_0)$ области D функция $A(t, x, y, z)$ имеет полюс типа (39).

Тогда справедлива формула

$$\oint f(r) dl / (r - r_0)^{k-1} = 2\pi f^{(k)}(r_0) N / \Gamma(k+1) \quad (40)$$

Здесь $\Gamma(k+1) = k!$ – гамма-функция целого неотрицательного аргумента [15].

Доказательство.

Принимая r_0 за параметр, продифференцируем интеграл (23.2) по параметру r_0 :

$$\oint \frac{f(r) dl}{(r - r_0)^2} = \frac{1}{1} \frac{d}{dr_0} \oint \frac{f(r) dl}{r - r_0} = \frac{2\pi N}{1} f_{r_0}^{(1)}(r) |_{r_0} = 2\pi N f_{r_0}^{(1)}(r_0)$$

$$\oint \frac{f(r) dl}{(r - r_0)^3} = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dr_0^2} \oint \frac{f(r) dl}{r - r_0} = \frac{2\pi N}{1 \cdot 2} f_{r_0}^{(2)}(r) |_{r_0} = \frac{2\pi N}{1 \cdot 2} f_{r_0}^{(2)}(r_0)$$

$$\oint \frac{f(r) dl}{(r - r_0)^3} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dr_0^3} \oint \frac{f(r) dl}{r - r_0} = \frac{2\pi N}{3!} f_{r_0}^{(3)}(r) |_{r_0} = \frac{2\pi N}{3!} f_{r_0}^{(3)}(r_0)$$

и т.д.

$$\oint \frac{f(r) dl}{(r - r_0)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dr_0^k} \oint \frac{f(r) dl}{r - r_0} = \frac{2\pi N}{k!} f_{r_0}^{(k)}(r) |_{r_0} = \frac{2\pi N}{k!} f_{r_0}^{(k)}(r_0)$$

Тем самым, мы получили формулу 40). Теорема 5 доказана.

Формула (40) – обобщение интеграла типа Коши для многомерной комплексной функции – гиперкомплексной функции для 4-х мерного псевдоевклидова пространства.

Следствие.

Обобщая формулу (40), запишем определение дробной производной [16] или дробного градиента (для функции многих переменных) порядка p через обобщенный интеграл типа Коши:

$$D^p f(t) = \nabla^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \oint_L \frac{f(r) dr}{(r-t)^{p+1}} \quad (41)$$

или

$$D^p f(t) = \nabla^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \oint_D \frac{f(r) dS}{(r-t)^{p+1}} \quad (42)$$

где p – положительное вещественное число.

3. Применение в физике

Рассмотрим формулу (24.1) с точки зрения физики. Запишем правую часть (24.1) в виде:

$$E_D \oint (\nabla \wedge A) \cdot dS = E_D \iint ((\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) dt dx + (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) dt dy + (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) dt dz + (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) dx dy + (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) dy dz + (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) dz dx)$$

или

$$E_D \oint (\nabla \wedge A) \cdot dS = E_D \iint ((\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \Gamma_1 + (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) \Gamma_2 + (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) \Gamma_3 + (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) \cos \alpha + (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) \cos \beta + (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) \cos \gamma) dS$$

Используя обозначение тензора электромагнитного поля [17]

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

последний интеграл запишем в виде:

$$E_D \oint (\nabla \wedge A) \cdot dS = E_D \iint (F_{01} \Gamma_1 + F_{02} \Gamma_2 + F_{03} \Gamma_3 + F_{12} \cos \alpha + F_{23} \cos \beta + F_{31} \cos \gamma) dS \quad (43)$$

Согласно формулам (23), интеграл (43) либо равен нулю (если функция аналитическая), либо равен суммарному 4-х току [18] (если функция имеет полюсы). В общем случае – оно постоянное (константа). Другими словами, поверхностный интеграл по замкнутой поверхности (суммарный электромагнитный 4-х ток) постояен, т.е. 4-х мерный электромагнитный ток сохраняется. Это один из фундаментальных законов физики.

Запишем тензор электромагнитного поля в виде суммы бивекторов:

$$F = \gamma^i \gamma^j F_{ij} = \gamma^i \gamma^j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \\ = \gamma^0 \gamma^1 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) + \gamma^0 \gamma^2 (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) + \gamma^0 \gamma^3 (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) + \\ + \gamma^1 \gamma^2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + \gamma^2 \gamma^3 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \gamma^3 \gamma^1 (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)$$

Применяя дуальность бивекторов ($\gamma^1 \gamma^2 = \gamma^0 \gamma^3 \gamma$, $\gamma^2 \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma$, $\gamma^3 \gamma^1 = \gamma^0 \gamma^2 \gamma$), тензор электромагнитного поля запишем как

$$F = \gamma^0 \gamma^1 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) + \gamma^0 \gamma^2 (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) + \\ + \gamma^0 \gamma^3 (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) + \gamma^0 \gamma^3 \gamma (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + \\ + \gamma^0 \gamma^1 \gamma (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \gamma^0 \gamma^2 \gamma (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)$$

или

$$F = \gamma^0 \gamma^1 ((\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) + \gamma (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)) + \\ + \gamma^0 \gamma^2 ((\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) + \gamma (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)) + \\ + \gamma^0 \gamma^3 (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) + \gamma (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)$$

или в векторном виде

$$F = E + \gamma B \quad (44)$$

Из (44) видно, что бивектор F состоит из трех действительных (полярных) бивекторов

$$E = \gamma^0 \gamma^1 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) + \gamma^0 \gamma^2 (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) + \\ + \gamma^0 \gamma^3 (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0)$$

(напряженности электрического поля [19]) и трех дуальных (аксиальных) бивекторов (псевдобивекторов)

$$B = \gamma^0 \gamma^3 \gamma (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + \gamma^0 \gamma^1 \gamma (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \\ + \gamma^0 \gamma^2 \gamma (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)$$

(индукция магнитного поля [20]).

γ – матричный аналог мнимой единицы ($\gamma^2 = -1$).

Теперь рассмотрим поверхностный интеграл $D \oint (\nabla \wedge A) \wedge dS$:

$$D \oint (\nabla \wedge A) \wedge dS = D \oint (\gamma^0 \gamma^1 F_{01} + \gamma^0 \gamma^2 F_{02} + \gamma^0 \gamma^3 F_{03} + \gamma^1 \gamma^2 F_{12} + \\ + \gamma^2 \gamma^3 F_{23} + \gamma^3 \gamma^1 F_{31}) \wedge (\gamma^0 \gamma^1 dt dx + \gamma^0 \gamma^2 dt dy + \gamma^0 \gamma^3 dt dz + \gamma^1 \gamma^2 dx dy + \\ + \gamma^2 \gamma^3 dy dz + \gamma^3 \gamma^1 dz dx)$$

или

$$D \oint (\nabla \wedge A) \wedge dS = D \oint (\gamma (F_{01} dy dz + F_{02} dz dx + F_{03} dx dy + \\ + F_{12} dt dz + F_{23} dt dx + F_{31} dt dy)) \quad (45)$$

Трудно представить наглядно интегрирование в tx , ty , tz плоскостях. Поэтому вводим понятие интегрирования в дуальном пространстве [21], т.е., интегрирование по плоскостям tx , ty , tz заменим на интегрирование по плоскостям xy , yz , zx /

В 3-х мерном евклидовом пространстве бивектор (антисимметричный тензор второго ранга) $dx \wedge dy$ дуален псевдовектору (аксиальному вектору) ids :

$$dx \wedge dy = \sigma_1 \sigma_2 dx dy = i \sigma_3 ds = idz$$

В 4-х мерном пространстве по аналогии с 3-х мерным пространством антисимметричный тензор второго ранга (бивектор) $dt \wedge dx$ дуален антисимметричному псевдотензору второго ранга (псевдобивектору) $\gamma dy \wedge dz$ [22]:

$$dt \wedge dx = \gamma^0 \gamma^1 dt dx = -\gamma \gamma^0 \gamma^1 dy dz = -\gamma \gamma^2 \gamma^3 dy dz \\ dt \wedge dy = \gamma^0 \gamma^2 dt dx = -\gamma \gamma^0 \gamma^2 dz dx = -\gamma \gamma^3 \gamma^1 dz dx \\ dt \wedge dz = \gamma^0 \gamma^3 dt dx = -\gamma \gamma^0 \gamma^3 dx dy = -\gamma \gamma^1 \gamma^2 dx dy$$

В общем случае говорят, что γb^* дуально b , и при этом выполняется следующее равенство [23]:

$$a \wedge b = a^* \gamma b^* \quad (46)$$

Ниже приведем некоторые полезные следствия формулы (46):

$$(a \wedge b) \wedge (dt \wedge dx) = (a \wedge b)^* (\gamma dy \wedge dz)$$

В частности,

$$\gamma^2 \gamma^3 F_{23} \wedge \gamma^0 \gamma^1 dt dx = -\gamma^2 \gamma^3 F_{23}^* \gamma \gamma^2 \gamma^3 dy dz = \gamma F_{23} dy dz \\ \gamma^3 \gamma^1 F_{31} \wedge \gamma^0 \gamma^2 dt dy = -\gamma^3 \gamma^1 F_{31}^* \gamma \gamma^3 \gamma^1 dz dx = \gamma F_{31} dz dx \\ \gamma^1 \gamma^2 F_{12} \wedge \gamma^0 \gamma^3 dt dz = -\gamma^1 \gamma^2 F_{12}^* \gamma \gamma^1 \gamma^2 dx dy = \gamma F_{12} dx dy$$

Учитывая эти следствия (46), в формуле (45) заменим поверхностные интегралы по плоскостям tx , ty , tz на дуальные поверхностные интегралы по плоскостям yz , zx , xy :

$$D\oint (\nabla \wedge A) \wedge dS = D\oint ((F_{01} + \gamma F_{23}) dydz + (F_{02} + \gamma F_{31}) dzdx + (F_{03} + \gamma F_{12}) dxdy) \quad (47)$$

или

$$D\oint (\nabla \wedge A) \wedge dS = D\oint ((F_{03} + \gamma F_{12}) \cos \alpha + (F_{02} + \gamma F_{31}) \cos \beta + (F_{01} + \gamma F_{23}) \cos \gamma) dS \quad (48)$$

Так как в (48) F_{ij} , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ константы, то интеграл (48) не меняется, т.е. 4-х мерный электромагнитный ток по замкнутой поверхности сохраняется. Тем самым, мы получили один из фундаментальных законов физики (закон сохранения 4-х мерного электромагнитного тока) в интегральной форме.

4. Выводы

1. Теоремы теории комплексного анализа (интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, его интегральное представление для производных) обобщены для 3-х и 4-х мерного евклидова (псевдоевклидова) пространства. В качестве базисных векторов и гиперкомплексных чисел применялись матрицы Паули (σ^i) для 3-х мерного евклидова пространства и матрицы Дирака (γ^i) для 4-х мерного псевдоевклидова пространства (Минковского). Тем самым по определению установлена биекция между базисными векторами и гиперкомплексными числами.

2. Теорема Стокса и Остроградского – Гаусса объединены и обобщены для 4-х мерного псевдоевклидова пространства.

3. Гиперкомплексный анализ (теорема и формула Коши и её следствия для производных) выполнены и для криволинейных, и для поверхностных интегралов.

4. Результаты анализа гиперкомплексных чисел применены для изучения законов физики: в рамках алгебры Клиффорда выведен закон сохранения 4-х мерного электромагнитного тока. Применена замена интегралов по «временным» поверхностям tx , ty , tz на интегралы по «пространственным» поверхностям xu , yz , zx (интегрирование по дуальному пространству).

Благодарности

Выражаю благодарность специалистам и редакторам определенных изданий за “подталкивание” в написании расширенной и углубленной версии статьи по данной теме.

Особо отмечу помощь моей жены – соратницы Любы при создании данной статьи (и вообще, всех моих статей). Она мне помогает, вдохновляет, также “подталкивает вперед” и “заставляет”, когда это необходимо для дела.

И, вообще, спасибо всем моим читателям за проявленный интерес к моей скромной работе.

Литература

- [1] Wikipedia. Bijection. <https://en.wikipedia.org/wiki/Bijection>.
- [2] Chris J. L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation

submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February 1994, pages 4-6.

- [3] Wikipedia. Zeros and poles. https://en.wikipedia.org/wiki/Zeros_and_poles.
- [4] Wikipedia. Simple connected space. https://en.wikipedia.org/wiki/Simply_connected_space.
- [5] Wikipedia. Green's theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_theorem.
- [6] Wikipedia. Stokes's theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Stokes_theorem.
- [7] Wikipedia. Analytic function. https://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_function.
- [8] Wikipedia. Cauchy's integral formula. https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_formula.
- [9] Wikipedia. the Laurent series. https://en.wikipedia.org/wiki/Laurent_series.
- [10] Wikipedia. The divergence theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem.
- [11] Wikipedia. Levi-Civita symbol. https://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol.
- [12] Wikipedia. Rapidity. <https://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity>.
- [13] Wikipedia. Lorentz factor. https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_factor.
- [14] Wikipedia. Multivector. <https://en.wikipedia.org/wiki/Multivector>.
- [15] Wikipedia. Gamma function. https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function.
- [16] Wikipedia. Fractional calculus. https://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_calculus#Fractional_derivatives.
- [17] Wikipedia. Electromagnetic field tensor. https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_tensor.
- [18] Wikipedia. Four-current density. <https://en.wikipedia.org/wiki/Four-current>.
- [19] Wikipedia. An electric field. https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_field.
- [20] Wikipedia. A magnetic field. https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_field.
- [21] Wikipedia. Dual vector space. https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_space.
- [22] Wikipedia. A pseudotensor. <https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudotensor>.
- [23] Wikipedia. the dual numbers. https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_number.