Построение области допустимых ограничений для многопараметрической распределительной задачи в транспортной сети

Ф. М. Кемпер[1, a]

[1] Пенсионер,
ул. Осташковская, 26, кв 132, 127224 Москва, Россия
E-mail: [a] fkemper@mail.ru

Аннотация. В этой статье рассматривается многопараметрическая распределительная задача на простом графе без лимитов на перемещения ресурсов. И для нее устанавливаются необходимые и достаточные условия существования решений в виде набора линейных неравенств, связывающих предложения ресурсов и потребности в них. Затем предлагается алгоритм построения всех независимых линейных ограничений. Полученный результат зависит только от структуры исходного графа. Табл. 4, библиогр. 20.

Ключевые слова: двудольные графы, потоки в сетях.

Введение

В статье строятся явные аналитические выражения для области допустимых ограничений у многопараметрической распределительной задачи в транспортной сети на двудольном графе.

Эта статья является развитием результатов статьи [1] и содержит дальнейший анализ многопараметрической транспортной задачи на двудольном графе. Работа возникла из практической многопараметрической задачи распределения транспортных средств по предварительному нечетко заданному набору работ. Этот метод также может применяться:

- в задаче анализа насыщения потребителей набором имеющихся ресурсов;
- в задаче достаточности ресурсов для покрытия набора заданных потребностей;
- в задаче распределения бюджета по различным расходным статьям;
- в задаче планирования оптимального складирования и хранения запасов ресурсов до распределения их по потребителям.

Последняя задача актуальна при периодическом создании запасов ресурсов в труднодоступных регионах, с которыми регулярная, постоянная связь невозможна. Разработка каждой этой задачи требует отдельных исследований.

В этой статье для распределительной сети на двудольных графах (задача распределения ресурса) удалось получить конструктивное описание аналитических выражений и эффективную вычислительную схему построения всех независимых линейных условий между параметрами сети. Структура и количество линейных условий на параметры сети зависит только от структуры исходного графа и поэтому устойчиво к вариациям запасов в источниках и потребностей у потребителей.

Перед построением конкретного плана перевозок задача распределения ресурса от поставщиков по потребителям требует предварительной оценки достаточности запаса ресурса у каждого поставщика для удовлетворения всех потребностей в нем, что является задачей планирования. Т.е. необходимо решить вопрос существования решения у будущей задачи распределения, а именно, совместна ли система всех ограничений на параметры задачи. Наличие явного аналитического вида этих ограничений существенно упрощает эту задачу, позволяет применить к ней эффективные вычислительные методы. Так же сильно упрощается многопараметрический анализ исходной распределительной задачи. Поэтому результат этого исследования имеет и прикладное применение.

Задачи анализа потоков в сетях имеют более чем полувековую историю. В классических руководствах [2–8] рассматриваются алгоритмы решения стационарной задачи нахождения максимального потока в сети при фиксированных значениях ограничений на потоки в ребрах, вершинах. В современных работах строятся алгоритмы решения задачи о макс потоке и ее различные обобщения с фиксированными значениями пропускных способностей [9–11]. При анализе задач потоков в сетях исследователи акцентируют основное внимание на явном решении экстремальных залач о потоках минимальной стоимости и их обобщениях.

Вопрос существования решений пропускается или является побочным результатом при решении оптимизационной задачи с конкретными значениями ограничений [12]. Полный набор условий существования потоков в конкретной сети, как видно из результата [2], есть довольно большой набор однородных линейных неравенств. И конструктивное выделение из них подмножества независимых неравенств представляет довольно сложную задачу. Поэтому при многопараметрическом анализе сети (вариации ее параметров) приходится при каждом значении набора параметров решать задачу о максимальном потоке двойственной сети [2]. Есть попытки использовать вариацию параметров в задаче о расстояниях в сети, например [9]. В [13] предлагаются модели критических уровней и периодической проверки, которые предполагают контроль за состоянием запасов и адаптивное пополнение их путем заказов, размер которых определяется в соответствии с выбранной стратегией. В [14] рассматриваются вероятностные модели для пропускной способности ребер графа многопользовательской сетевой системы. В [10] рассматриваются специфические эмпирические способы моделирования и вариации параметров в городских транспортных сетях. В [15] используются нечеткие переменные (fuzzy set) для параметров транспортной сети. В [16] рассматриваются сети с изменяющейся структурой их графа. В [11] для многостадийной модели распределения транспортных потоков по сети используется метод выпуклой оптимизации.

Известно [17], что любую транспортную сеть можно преобразовать в равносильную сеть на двудольном графе. Поэтому изучение таких сетей приобретает особое значение.

1. Постановка задачи

Простой граф $G = (X, Y, \Gamma)$ это граф, определяемый двумя непересекающимися множествами X и Y и многозначным отображением Γ множества X в Y [8] (глава 10).

X=$\{x_i,\ i = 1..n\}$, Y=$\{y_j,$ j=1..m$\}$. Дуга $(x_i, y_j) \in G \iff y_j \in \Gamma x_i$.

В каждой вершине x_i есть запас продукта в количестве $a_i = a(x_i) > 0$, потребность каждой вершины y_j это $b_j = b(y_j) > 0$. Пропускные способности всех ребер неограничены. Спрашивается, при каких соотношениях между параметрами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ весь запас продукта можно распределить между потребителями, насытив их полностью. Т.е. при каких соотношениях между параметрами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ совместна система (1), где $\varphi(x_i, y_j)$ — поток по дуге (x_i, y_j).

$$\begin{cases} a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \quad (1).$$

Будем рассматривать связный граф G. Ясно, что ограничения для несвязного графа есть объединение ограничений для его каждой связной компоненты.

2. Система односторонних неравенств на потоки

Сначала рассмотрим систему (2) и условия ее разрешимости.

$$\begin{cases} a_i \leqslant \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j \geqslant \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \quad (2)$$

Дополним граф G до транспортной сети S, добавив вход s, выход t и дуги $(s, x_i), (y_j, t), i = 1..n, j = 1..m$.

Каждой дуге поставим в соответствие пару чисел – нижнюю и верхнюю границы потока по этой дуге. Для (s, x_i): (a_i, ∞), для (x_i, y_j): $(0, \infty)$, для (y_j, t): $(0, b_j)$. Тогда система (2) разрешима $\iff \exists$ поток по сети S.

В [6–8, 18] имеется такая

Теорема 1 (Hoffman). *Пусть каждой дуге u некоторой транспортной сети отнесены два целых числа $a(u)$ и $b(u)$ $[0 \leqslant a(u) \leqslant b(u)]$. Пусть $\aleph$ - семейство тех подмножеств множества всех вершин сети, которые либо не* *содержат ни s, ни t, либо содержат s и t одновременно. Существует поток φ, удовлетворяющий условию $a(u) \leqslant \varphi(u) \leqslant b(u)$, тогда и только тогда, когда $b(U_L^-) \geqslant a(U_L^+)$ для всех $L \in \aleph$. Здесь U_L^- — дуги, заходящие в L, U_L^+ — дуги, исходящие из L. Для любого набора дуг U $a(U) = \sum_U a(u)$, $b(U) = \sum_U b(u)$.*

Замечание 1. Прямое использование результата этой теоремы приводит к построению экспоненциального числа ограничений, многие из которых зависимы друг от друга. Для рассматриваемых в этой статье сетей число этих ограничений в большинстве случаев будет резко сокращено.

Для нашей задачи удобнее вместо множеств L рассматривать множества $D = S \setminus L$ того же типа, что и в теореме выше. Для них $b(U_L^-) = b(U_D^+)$ и $a(U_L^+) = a(U_D^-)$. Тогда неравенства теоремы принимают вид

$$a(U_D^-) \leqslant b(U_D^+) \quad (3)$$

Набор неравенств (3) задает набор ограничений между параметрами a_i и b_j, при которых система (2) разрешима. Каждое ограничение определяется своим множеством D.

Какие множества D имеет смысл рассматривать? Прежде всего, D должно определять непустое ограничение. Далее, все $b(U_D^+)$ должны быть конечны, иначе при бесконечном $b(u)$ получим тривиальное ограничение, т.е. все $(s, x_i) \notin U_D^+$ и $(x_i, y_j) \notin U_D^+$. Кроме того, если $u = (x_i, y_j) \in U_D^-$, то $a(u) = 0$ и не дает вклад ни в одно из ограничений. Поэтому считаем, что все $(x_i, y_j) \notin U_D^-$.

Определение 1. Ограничение (множество D) будем называть существенным, если оно обладает указанными выше свойствами.

Найдем условия, при которых ограничения (3) существенны.

Лемма 1. *Если ограничение существенно, то $x_i \in D \iff \Gamma x_i \subseteq D$.*

Доказательство. Если $x_i \in D$ и $y_j \in \Gamma x_i$, но $y_j \notin D$, то $(x_i, y_j) \in U_D^+$, $b(x_i, y_j) = \infty$ и ограничение для D несущественно. Получили противоречие.

Если $\Gamma x_i \subseteq D$ и $x_i \notin D$, то $\exists y_j \in \Gamma x_i \subseteq D$. Тогда $(x_i, y_j) \in U_D^-$, что противоречит существенности ограничения.

Итак, для каждого $x_i \in D$ так же и $\Gamma x_i \subseteq D$ и наоборот. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если ограничение существенно, то $D \subseteq G$.*

Доказательство. Если $s \in D$, $t \in D$ и $x_i \notin D$, то $(s, x_i) \in U_D^+$ и ограничение для D несущественно. Получили противоречие.

Если $s \in D$, $t \in D$ и $\forall x_i \in D$, то, по предыдущей лемме, $\Gamma(X) = Y \subseteq D$ и $D = S$. Но у S нет входящих и исходящих дуг — ограничение отсутствует, хотя оно должно быть существенным.

Т.к. по теореме 1 s, t одновременно входят или не входят в D, то будем считать, что $D \subseteq G$ без потери каких либо ограничений. Лемма 2 доказана.

Ясно, что для всех x_i $\Gamma x_i \neq \varnothing$ и для всех y_j $\exists x_i$ такое, что $y_j \in \Gamma x_i$. Иначе вершины x_i, y_j висячие, не участвуют ни в одном ограничении и их можно не учитывать.

Утверждение 1. *Ограничения (3) существенны тогда и только тогда, когда $D \subseteq G$ и $x_i \in D \iff \Gamma x_i \subseteq D$.*

Доказательство. В прямую сторону доказано в предыдущих леммах.

Если $D \subseteq G, \{x_i\} \subseteq D$, $\Gamma\{x_i\} \subseteq D$, то $U_D^- = \{(s, x_i)\}, U_D^+ = \{(y_j, t) | y_j \in \Gamma\{x_i\}\}$, откуда $a(s, x_i) > 0$, $b(y_j, t) < \infty$ и ограничение существенно. Утверждение 1 доказано.

Поищем случаи, когда одни ограничения являются следствием других.

Утверждение 2. *Если $\Gamma X_i = \Gamma X_j = Y_0$, то ограничение, соответствующее $D_0 = \{X_i \cup X_j, Y_0\}$, сильнее каждого из ограничений для $D_k = \{X_k, Y_0\}, k \in \{i, j\}$.*

Доказательство. Ограничения для D_0, D_k имеют вид

$$\textstyle\sum_{X_i \cup X_j} a_p \leqslant \sum_{Y_0} b_r$$
$$\textstyle\sum_{X_k} a_p \leqslant \sum_{Y_0} b_r$$

Так как $\sum_{X_k} a_p \leqslant \sum_{X_i \cup X_j} a_p$, то получаем требуемое. Утверждение 2 доказано.

Замечание 2. Поэтому для всех X_i с одним общим ΓX_i будем учитывать только ограничение, соответствующее объединению таких X_i с $D_{\max}(Y_0) = \{\cup X_i, Y_0 | \Gamma X_i = Y_0, \forall X_i \subseteq X, Y_0 \subseteq Y\}$.

Утверждение 3. *Если $\Gamma X_0 \subset \Gamma X_1$, то ограничение для $D_{01} = \{X_0 \cup X_1, \Gamma X_1\}$ сильнее ограничения $\{X_1, \Gamma X_1\}$. В то же время остается в силе ограничение $\{X_0, \Gamma X_0\}$.*

Доказательство. По условию $\Gamma X_1 = \Gamma X_0 \cup Y_1$.
Ограничения имеют вид $\sum_{X_0 \cup X_1} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r,\ \sum_{X_1} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r,\ \sum_{X_0} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_0} b_r$.
Но $\sum_{X_1} a_p \leqslant \sum_{X_0 \cup X_1} a_p$ — получаем первое утверждение.

$\sum_{\Gamma X_0} b_r \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r$ и $\sum_{X_0} a_p \leqslant \sum_{X_1} a_p$, откуда следует второе утверждение. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Если* $\Gamma X_1 \setminus \Gamma X_2 \neq \varnothing$, $\Gamma X_2 \setminus \Gamma X_1 \neq \varnothing$ *и* $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, *то ограничения для* $\{X_1, \Gamma X_1\}$, $\{X_2, \Gamma X_2\}$, $\{X_1 \cup X_2, \Gamma(X_1 \cup X_2)\}$ *независимы.*

Доказательство. Пусть $X_1 \cap X_2 = X_0$, $\Gamma X_0 = Y_0$, $\Gamma X_1 \setminus \Gamma X_2 = Y_1$, $\Gamma X_2 \setminus \Gamma X_1 = Y_2$. Тогда $X_1 = X_{10} \cup X_0$, $X_2 = X_{20} \cup X_0$, $\Gamma X_1 = Y_1 \cup Y_0$, $\Gamma X_2 = Y_2 \cup Y_0$, $X_1 \cup X_2 = X_{10} \cup X_{20} \cup X_0$, $\Gamma(X_1 \cup X_2) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0$.
И ограничения $\sum_{X_1} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r$, $\sum_{X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_2} b_r$, $\sum_{X_1 \cup X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma(X_1 \cup X_2)} b_r$ принимают вид $\sum_{X_{10} \cup X_0} a_p \leqslant \sum_{Y_1 \cup Y_0} b_r$, $\sum_{X_{20} \cup X_0} a_p \leqslant \sum_{Y_2 \cup Y_0} b_r$, $\sum_{X_{10} \cup X_{20} \cup X_0} a_p \leqslant \sum_{Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0} b_r$.
Но $\sum_{X_{k0} \cup X_0} a_p \leqslant \sum_{X_{10} \cup X_{20} \cup X_0} a_p$ и $\sum_{Y_k \cup Y_0} b_r \leqslant \sum_{Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0} b_r, k \in \{1, 2\}$.
Значит, исходные ограничения независимы. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Если* $\Gamma X_1 \cap \Gamma X_2 = \varnothing$, *то ограничение для* $\{X_1 \cup X_2, \Gamma(X_1 \cup X_2)\}$ *является следствием ограничений для* $\{X_1, \Gamma X_1\}$, $\{X_2, \Gamma X_2\}$.

Доказательство. Так как $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $\sum_{X_1 \cup X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma(X_1 \cup X_2)} b_r$ равносильно $\sum_{X_1} a_p + \sum_{X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r + \sum_{\Gamma X_2} b_r$, т.е. сумме ограничений для $\{X_1, \Gamma X_1\}$, $\{X_2, \Gamma X_2\}$. Утверждение 5 доказано.

3. Алгоритм

3.1. Предварительная обработка. Согласно предыдущему разделу порождать новые независимые ограничения могут только подмножества из X с пересекающимися Γ множествами. В этом алгоритме такие ограничения строятся последовательным добавлением вершин из X.

Шаг 1. Так как все коэффициенты в ограничениях (3) равны 1 или 0, то храним каждое ограничение в паре битовых строк с длинами n и m, где $n = |X|, m = |Y|$. Нумерация битов в этих строках идет справа налево и соответствует нумерации вершин в X. Для каждого ограничения $D_i = \{\{x_{ik}\}, \{y_{il}\} | \Gamma(\{x_{ik}\}) = \{y_{il}\}\}$ в строки заносятся 1_k и 1_l, где $1_t - 1$ на месте t в строке. Для всех ограничений получаем массив пар битовых строк R.

Шаг 2. Для графа G строим матрицу смежности $M(G)$, строки которой соответствуют вершинам из X а столбцы - вершинам из Y.

Шаг 3. Сортируем матрицу $M(G)$ лексикографически по строкам, чтобы все вершины из X с одним Γ оказались рядом. Проходим матрицу $M(G)$ и заменяем все вершины x_k с общим Γ одной псевдовершиной x' с $a(x') = \Sigma_k a_k$. Получаем редуцированный граф G'. Далее, для упрощения изложения, будем вместо G' писать просто G.

Шаг 4. Для X графа G вводим расстояние ρ между вершинами x_i : $\rho(x_i, x_j) = 1$ при $\Gamma x_i \cap \Gamma x_j \neq \varnothing$, иначе $\rho(x_i, x_j) = 0$. Строим симметричную матрицу соседства $M(X) = M(G) \times M^T(G)$, а по ней — граф смежности $QX = (X, \{[x_i, x_j] | \rho(x_i, x_j) = 1\})$. Здесь $M^T(G)$ — матрица, транспонированная к матрице $M(G)$.

Шаг 5. Для графа QX строим матрицу смежности $Q(X)$: $Q_{ij}(X) = min(1, M_{ij}(X))$.

Шаг 6. Упорядочиваем все вершины графа QX, проходя его способом поиска в ширину [5](22.2). При этом все компоненты связности графа QX будут пройдены последовательно, одна за другой.

3.2. Основной цикл. На каждом шаге в массив строк R добавляем все ограничения для x_j в подграфе $QX_j = \{\{x_k\} | k \leqslant j\}$, считая что ограничения для всех QX_k с $k < j$ уже занесены в массив строк R.

Цикл по всем x_j графа QX, (итерация j):

Предусловие Массив R перед шагом j лексикографически упорядочен по битовым строкам X, где каждая строка — набор вершин из подграфа $X_j = \{\{x_k\} | k < j\}$.

Шаг 1. Для вершины x_j выбираем из графа QX отсортированный список *prev_conn* всех связанных с ней предыдущих вершин $\{x_k | \rho(x_k, x_j) = 1, k < j\}$,.

Шаг 2. По списку *prev_conn* получаем из R отсортированный список ограничений *prev_limits*, куда входят вершины из *prev_conn*. (Это можно сделать за один проход, так как массив R и список *prev_conn* упорядочены одинаково).

Шаг 3. Добавляем в массив R ограничение $\{x_j, \Gamma x_j\}$..

Шаг 4. Добавляем текущее $\{x_j, \Gamma x_j\}$. во все ограничения списка *prev_limits*, расширяя влево строки этих ограничений.

Шаг 5. Если в списке *prev_limits* имеются ограничения с одинаковыми частями Y, то убираем из этого списка то ограничение, которое ближе к его началу.

Шаг 6. Если часть Y ограничения p из списка *prev_limits* совпадает с частью Y у ограничения r из массива R, то убираем исходное ограничение r из массива R.

Шаг 7. Добавляем список *prev_limits* в конец массива R.

Постусловие Упорядоченность массива R сохраняется.

Конец Цикла

В конце алгоритма получаем набор существенных ограничений в виде массива R структур из двух битовых строк.

Если граф редуцирован, то восстанавливаем во всех ограничениях псевдовершины x' на $\Sigma_k x_k$, для которых $\Gamma x_k = \Gamma x'$.

Массив R непосредственно отображается на систему линейных неравенств между параметрами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$

$$A_1 a \leqslant B_1 b \qquad (4)$$

где a и b — векторы параметров $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, A_1 — матрица размером $s_1 \times n$, B_1 — матрица размером $s_1 \times m$, s_1 — число ограничений.

Реализация алгоритма на языках Python, Java доступна в [19].

3.3. Анализ алгоритма.

Утверждение 6. *Алгоритм строит все существенные ограничения.*

Доказательство. По предложению 1 все существенные ограничения имеют вид $\{X_0, \Gamma X_0\}$.

На итерации 1 цикла для подграфа QX_1 имеем только одно существенное ограничение $\{x_1, \Gamma x_1\}$, которое добавляется на шаге 3.

Предположим, что для подграфа QX_{j-1} в R входят все его существенные ограничения.

На итерации j на шаге 3 в R добавили $\{x_j, \Gamma x_j\}$.

Рассмотрим любое $\{X_0, \Gamma X_0\}$ с $X_0 = \{x_p | p \leqslant j\}$. Пусть $X_1 = X_0 \setminus \{x_j\} = \{x_p | p < j\}$. $X_1 \subset X_0$, тогда $\Gamma X_1 \subset \Gamma X_0$ либо $\Gamma X_1 = \Gamma X_0$.

При $X_1 \subset X_0$ $\{X_1, \Gamma X_1\}$ уже добавлено на предыдущих итерациях и $\{X_0, \Gamma X_0\} = \{X_0 \cup \{x_j\}, \Gamma X_0 \cup \Gamma X_1\}$ добавлено на шаге 4.

При $\Gamma X_1 = \Gamma X_0$ $\Gamma x_j \subseteq \Gamma X_0$ и $\exists x_q$ с $q < j$ такая, что $\Gamma x_q \cap \Gamma x_j \neq \varnothing$. Иначе $\Gamma X_0 \cap \Gamma x_j = (\cup_q \Gamma x_q) \cap \Gamma x_j = \cup_q (\Gamma x_q \cap \Gamma x_j) = \varnothing$ — получили противоречие. Значит, x_q сосед x_j, $\{X_1, \Gamma X_1\}$ отобрано на шаге 2, $\{X_0, \Gamma X_0\}$ получено на шаге 4.

В алгоритме выполняются все утверждения 1–5. Утверждение 6 доказано.

Независимость существенных ограничений-неравенств.

Лемма 3 (Фаркаш [20]). *Пусть $f_1(x), f_2(x), ..., f_r(x)$ и $f_0(x)$ — однородные линейные функции m вещественных переменных $x_1, x_2, ..., x_m$. Предположим, что соотношения $f_1(x) \geqslant 0, f_2(x) \geqslant 0, ..., f_r(x) \geqslant 0$ влекут за собой неравенство $f_0(x) \geqslant 0$. Тогда существуют неотрицательные постоянные $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, для которых выполняется тождество $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + ... + \lambda_r f_r(x) \equiv f_0(x)$.*

Если в лемме Фаркаша коэффициенты всех функций рациональные числа (у нас они все равны 1), то и все λ_i рациональны, т.к. лемма Фаркаша справедлива для любого упорядоченного поля [21].

Умножив все λ_i на наименьший общий знаменатель, получим условие Фаркаша в виде $L_1 f_1(x) + L_2 f_2(x) + ... + L_r f_r(x) \equiv L_0 f_0(x)$., где все L_i натуральные числа. У всех существенных неравенств-ограничений все ненулевые коэффициенты равны 1. Поэтому для зависимости одного ограничения от других при взятии их линейной комбинации с положительными коэффициентами, мы должны получить неравенство, в котором все ненулевые коэффициенты в обеих сторонах равны одному и тому же натуральному числу.

Утверждение 7. *Все существенные неравенства-ограничения линейно независимы.*

Доказательство. По построению алгоритмом существенного ограничения каждая текущая вершина x_j сосед в графе QX предыдущей вершины x_{j-1} и т.д.. Т.е. все $\Gamma x_j \cap \Gamma x_{j-1} \neq \varnothing$.

Допустим, имеется несколько (> 1) ограничений и неравенство f_0 зависит от других неравенств.

Если в f_0 входит только a_j, то f_0 соответствует ограничению $\{x_j, \Gamma x_j\}$ и может зависеть только от ограничений вида $\{X_0, \Gamma X_0, |\{x_j\} \subset X_0, \Gamma x_j \supseteq \Gamma X_0\}$, что возможно тодько при $\Gamma x_j = \Gamma X_0$ и, по замечанию 1, такое $\{x_j, \Gamma x_j\}$ не входит в число существенных.

Итак, пусть a_j и $a_{j+1} \in f_0$ и f_0 зависит от других неравенств-ограничений $\{f_p\} \cup \{f_q\} \cup \{f_r\}$, $a_j \in \{f_p\} \cup \{f_q\}$, $a_{j+1} \in \{f_p\} \cup \{f_r\}$, $b_k \in \Gamma a_j \cap \Gamma a_{j+1}$. Тогда $(\Sigma L_p + \Sigma L_q) a_j + (\Sigma L_p + \Sigma L_r) a_{j+1} + \ldots \leqslant (2\Sigma L_p + \Sigma L_q + \Sigma L_r) b_k + \ldots$ и по выводу из леммы Фаркаша $\Sigma L_p + \Sigma L_q = \Sigma L_p + \Sigma L_r = 2\Sigma L_p + \Sigma L_q + \Sigma L_r$, откуда $\Sigma L_p = \Sigma L_q = \Sigma L_r = 0$. А значит и все исходные $L_\alpha = 0$, т.к. они неотрицательны. Утверждение 7 доказано.

Оценка числа операций. Основные элементарные операции в алгоритме: поиск предыдущей вершины в графе QX для списка *prev_conn* на шаге 1; поиск по строке x ограничений в R на шаге 2; поиск по строке y ограничений на шагах 5,6; добавление ограничений в R на шагах 3,7; расширение ограничений в *prev_limits* на шаге 4.

Пусть длина R перед итерацией j равна r_{j-1}. Тогда порядок числа элементарных операций на шаге 1: j, на шаге 2: $\leqslant r_{j-1} \log j$, на шаге 3: 1, на шаге 4: $\leqslant r_{j-1}$, на шаге 5: $\leqslant r_{j-1} \log r_{j-1}$, на шаге 6: $\leqslant r_{j-1} \log r_{j-1}$, на шаге 7: $\leqslant r_{j-1}$. Отсюда получаем $r_j \leqslant 2r_{j-1} + 1$, т.е. $r_j \leqslant 2^j - 1$. Число всех операций на итерации j: $\leqslant 2(2^j - 1)\log(2^j - 1) + (2^j - 1)\log j + 2(2^j - 1) + 1$. Всего число операций на всех итерациях: $\leqslant C\Sigma_{j=1}^n 2^j j + 2^j \log j + 2^j \sim Cn2^n$, где $n = |X|$, C константа. Число ограничений $r \leqslant 2^n - 1$.

Как показывают нижеследующие примеры, хотя полученная оценка и достижима, но диапазон разброса реального числа операций весьма велик.

4. Примеры

Пример 1 ((конфигурация '1–1')). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n\}, \Gamma x_i = y_i$. Алгоритм обрабатывает каждую связную компоненту графа отдельно, связная компонента состоит из одной дуги и число ограничений — n.

Пример 2 ((конфигурация 'Напор')). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n\}, \Gamma x_i = \{y_j | j = 1..i\}$. Так как все $\Gamma x_{j-1} \subset \Gamma x_j$, то алгоритм на шаге j ограничение для x_j обьединяет с копией ограничения, полученного на шаге $j - 1$. Всего ограничений n: $\{\{x_i\}, \{y_i\} | i = 1..k\}, k = 1..n$.

Пример 3 ((конфигурация 'Пила')). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n{+}1\}, \Gamma x_i = \{y_i, y_{i+1}\}$. Конфигурация является простой цепью от y_1 до y_{n+1}. Алгоритм на каждой итерации дублирует ограничения, куда входит x_{j-1}, вводя в них x_j + само ограничение для x_j. Всего ограничений получается $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример 4 ((конфигурация 'Паук')). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 0..n\}, \Gamma x_i = \{y_0, y_i\}$. Для всех $X_0 \subseteq X$ все ΓX_0 пересекаются по y_0, но различны. Поэтому всего ограничений столько же, сколько и подмножеств в X. Т.е. $2^n - 1$.

4.1. Оценка числа ограничений. Приведенные примеры конфигураций сети показывают, что рост числа ограничений может варьироваться в весьма широких пределах, от линейного, до экспоненциального. Теоретическая оценка меры того, как в среднем растет число ограничений, требует отдельного рассмотрения.

Для получения приближенной вычислительной оценки среднего числа ограничений необходимо обработать значительную часть набора сетей какого-либо размера. В сети размера $n \times m$, где $n = |X|,\ m = |Y|$, у каждой вершины из X Γ может быть любым подмножеством в Y, т.е. всего $2^m - 1$. Общее число различных сетей равно $(2^m - 1)^n$ и при $m = n$ имеет порядок 2^{n^2}. При $n = 10$ получаем порядок 2^{100}, что выходит за пределы вычислительных возможностей.

Поэтому обработаны полностью сети следующих размеров (n, m): (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,4), (4,5), (4,6). Программа расчета доступна в [19]. Результат показан в таблицах 1, 2, 3.

В таблицах 3 и 4 E — математическое ожидание количества ограничений для конкретного размера сети, σ — его среднее отклонение.

Из этих расчетов видно, что для сетей $n \times m$ при $n < m$ максимальное число ограничений в каждой сети равно $2^n - 1$, что соответствует теоретической оценке пункта 3.3.

Сети других размеров обработаны выборочно путем случайной выборки, повторенной 10^7 раз для каждого размера. Результаты этих расчетов добавлены в таблицу 3 и показаны в таблице 4. Максимальное число ограничений для каждой такой сети также равно $2^n - 1$.

Таблица 1. К-во ограничений (r) и к-во сетей (Nets) для $|X| = 3$

$\lvert Y \rvert$:	3		4		5		6		7		8	
r	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%
1	7	2,0	15	0,4	31	0,1	63	0,0	127	0,0	255	0,0
2	108	31,5	450	13,3	1620	5,4	5418	2,2	17388	0,8	54450	0,3
3	168	49,0	1470	43,6	9120	30,6	48006	19,2	230328	11,2	1043790	6,3
4	60	17,5	1128	33,4	11820	39,7	94920	38,0	656460	32,0	4136328	24,9
5	-	-	216	6,4	4320	14,5	52920	21,2	514080	25,1	4359096	26,3
6	-	-	72	2,1	2160	7,3	34920	14,0	423360	20,7	4356072	26,3
7	-	-	24	0,7	720	2,4	13800	5,5	206640	10,1	2631384	15,9
sum	343	100	3375	100	29791	100	250047	100	2048383	100	16581375	100

Таблица 2. К-во ограничений (r) и к-во сетей (Nets) для $|X| = 4$

$\lvert Y \rvert$:	4		5		6	
r	Nets	%	Nets	%	Nets	%
1	15	0,0	31	0,0	63	0,0
2	1050	2,1	3780	0,4	12642	0,1
3	8160	16,1	50430	5,5	264936	1,7
4	17400	34,4	183480	19,9	1478400	9,4
5	15000	29,6	270480	29,3	3266760	20,7
6	5904	11,7	196440	21,3	3525480	22,4
7	2256	4,5	122760	13,3	3075240	19,5
8	768	1,5	64800	7,0	2199120	14,0
9	72	0,1	20400	2,2	1036440	6,6
10	-	-	7920	0,9	591840	3,8
11	-	-	1440	0,2	158400	1,0
12	-	-	1440	0,2	120960	0,8
13	-	-	-	-	9360	0,1
14	-	-	-	-	3600	0,0
15	-	-	120	0,0	9720	0,1
sum	50625	100	923521	100	15752961	100

В то же время видно, что среднее число ограничений E с разбросом 3σ не превосходит $n \times m$. В этот разброс по неравенству Чебышева входит почти 90% всех сетей конкретного размера.

Полученные результаты показывают, что во всех случаях σ колеблется в пределах 20–25% от E независимо от размера сети. Т.е. это показывает, что распределение длин всегда имеет хвосты, которые могут

Таблица 3. Математическое ожидание (E) и стандартное отклонение (σ)

$\|Y\|$:	3		4		5		6		7		8	
$\|X\|$	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ
3	2,82	0,74	3,41	0,94	3,94	1,09	4,42	1,17	4,84	1,20	5,19	1,18
4	-	-	4,53	1,19	5,52	1,51	6,48	1,76	7,38	1,93	8,21	2,03
5	-	-	-	-	7,02	1,82	8,56	2,25	10,08	2,61	11,55	2,89
6	-	-	-	-	-	-	10,60	2,68	12,85	3,24	15,10	3,73
7	-	-	-	-	-	-	-	-	15,63	3,83	18,78	4,55
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,55	5,33

Таблица 4. Математическое ожидание (E) и стандартное отклонение (σ) для сетей $n \times m$

8×9		9×10		10×11		11×12		12×13		13×14	
E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ
26,83	6,27	37,55	8,53	51,62	11,49	69,83	15,31	93,19	20,20	122,83	26,41

только увеличиваться, пока не достигнут теоретических границ минимума (1) и максимума ($2^n - 1$). После этого σ начнет уменьшаться и E стабилизируется, так как распределение длин ограничений сети имеет колокол-образный вид. Но достичь этого не хватает вычислительных мощностей.

5. Система равенств на потоки

$$\begin{cases} a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases} \iff (2) \wedge \begin{cases} a_i \geqslant \sum_j \varphi(x_i, y_j) \\ b_j \leqslant \sum_i \varphi(x_i, y_j) \end{cases}$$

Значит, ограничения для системы равенств состоят из ограничений для системы неравенств (2), изученные ранее, и ограничений для двойственной сети T, у которой, по сравнению с сетью S, направления дуг изменены на обратные, $s \to t$, $t \to s$. Ограничители по дугам будут: для (s, y_j) — (b_j, ∞), для (y_j, x_i) — $(0, \infty)$, для (x_i, t) — (0, a_i).

Ограничения для T получаем описанным выше способом и объединяем их с ограничениями для S.

Утверждение 8. *Ограничение $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$ существует тогда и только тогда, когда (X, Y) связная компонента графа G.*

Доказательство. По алгоритму мы получаем, что существенные ограничения имеются только внутри каждой связной компоненты исходного графа.

В частности, ограничение у всей связной компоненты для S $\Sigma_X a_i \leqslant \Sigma_Y b_j$ и ограничение для T $\Sigma_Y b_j \leqslant \Sigma_X a_i$ объединяются в $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$, так же это следствие исходной системы равенств.

Верно и обратное: если имеется пара ограничений $\Sigma_X a_i \leqslant \Sigma_Y b_j$ и $\Sigma_Y b_j \leqslant \Sigma_X a_i$, т.е $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$, то (X, Y) связная компонента графа G. Действительно, в этом случае $\Gamma X = Y$ и $\Gamma Y = X$. Утверждение 8 доказано.

6. О существовании нетривиальных ограничений

Утверждение 9. *Система ограничений (4) всегда имеет нетривиальные решения.*

Доказательство. Все элементы матриц A_1, B_1 числа 0 или 1. Выбираем произвольный положительный набор $\{a_i\}$ и пусть $c = \Sigma_i a_i$. Выбираем все $b_j = c$. Тогда каждый элемент вектора $A_1 a \leqslant c$, а каждый элемент вектора $B_1 b \geqslant c$. Утверждение 9 доказано.

Если выбрать набор $\{a_i\}$ из натуральных чисел, то получим и все b_j натуральными. Поэтому верно

Следствие 1. *Система ограничений (4) всегда имеет решения в натуральных числах.*

Замечание 3. Из общих результатов о системах линейных неравенств [22] следует, что область решений системы (4) составляет выпуклый многогранный конус.

Ограничения области параметров системы равенств на потоки кроме ограничений (4) включают еще и ограничения для двойственной сети

$$B_2 b \leqslant A_2 a \qquad (5)$$

где a и b — те же векторы параметров $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, A_2 — матрица размером $s_2 \times n$, B_2 — матрица размером $s_2 \times m$, s_2 — число ограничений для двойственной сети.

Системы уравнений (4) и (5) противоположны, объединенная система относится к типу двусторонних неравенств. Полученную объединенную систему неравенств можно эффективно исследовать на существование ненулевых решений с помощью метода минимизации суммы квадратов невязок [22, 23].

Заключение

Построенный алгоритм получения полной системы независимых ограничений на параметры многопараметрической распределительной задачи легко программируется и позволяет эффективно подбирать размеры запасов, потребностей продукта и анализировать их вариации.

Алгоритм статьи реализован в виде примера экспериментальной программы на распространенных языках программирования, которая в аналитическом виде строит полный набор ограничений-неравенств для прямого или дуального графов.

Текст программы доступен в [19].

Там же находится экспериментальная процедура расчета всех ограничений и их совместимости для конкретного набора ресурсов.

Литература

1. **Кемпер Ф. М.** Алгоритм формирования существенных ограничений транспортной задачи с запретами. Математические методы решения экономических задач. Сборник 8. С. 126–134. Москва: Наука, 1979. 139 с.
2. **Форд Л., Фалкерсон Д.** Потоки в сетях, пер. с англ. Москва: ИЛ, 1966. 278 с.
3. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва: Мир, 1974. 520 с.
4. **Филлипс Д., Гарсия-Диас А.** Методы анализа сетей, пер. с англ. Москва: Мир, 1984. 496 с.
5. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.** Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. Москва: Вильямс, 2013. 1328 с.
6. **Berge C.** Graphs. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991. 413 p.
7. **Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B.** Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications. NY, Prentice Hall, 1993. 846 p.
8. **Берж К.** Теория графов и ее применение, пер. с франц. Москва: ИЛ, 1962. 320 с.
9. **Родионов В. В.** Параметрическая задача о кратчайших расстояниях // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 1173–1177.
10. **Швецов В. И.** Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10.
11. **Гасникова Е. В., Гасников А. В., Ярмошик Д. В. и др.** О многостадийной транспортной модели и достаточных условиях ее потенциальности // Математическая теория игр и её приложения. 2023. Т. 15. № 2. С. 3–17.
12. **Йенсен П., Барнес Д.** Потоковое программирование, пер. с англ. Москва: Радио и связь, 1984. 392 с.
13. **Лотоцкий В. А., Мандель А. С.** Модели и методы управления запасами. Москва: Наука, 1991. 188 с.
14. **Малашенко Ю. Е., Новикова Н. М.** Модели неопределенности в многопользовательских сетях. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. http://www.ccas.ru/depart/malashen/papper/pp.htm
15. **Боженюк А. В., Герасименко Е. М.** Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона. 2013. № 1. http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583

16. **Колесников К. Г., Масалкин А. А., Москвин Б. В.** Параметрическая оптимизация информационного обмена в сети связи с динамически изменяющейся структурой // Труды военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. 2019. № 668. С. 31–36.
17. **Lawler E. L.** Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. NY, Holt, Rinehart and Winston, 1976. 374 p.
18. **Hoffman A. J.** Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis // Combinatorial Analysis, edited by R. Bellman and M. Hall, pp. 113–128. Providence, American Mathematical Society, 1960. 311 p.
19. `https://github.com/Gilbert00/TransportNet`
20. **Даффин Р., Питерсон Е., Зенер К.** Геометрическое программирование, пер. с англ. Москва: Мир, 1972. 311 с.
21. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. Москва: Наука, ГРФМЛ, 1968. 488 с.
22. **Зоркальцев В. И., Киселева М. А.** Системы линейных неравенств. Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. 128 с.
23. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.