SU(2) - симметрия гравитационного поля и объединение фундаментальных взаимодействий

Васильев Н. С.*

В данной работе на основе коэффициентов аффинной связности предложена теория SU(2)-симметрии гравитационного поля. Предпринята попытка обобщить определение оператора ($\hat{\partial}_n$) в криволинейных координатах, связать локальную симметрию гравитационного взаимодействия с определителем метрического тензора, обосновать роль гравитационного поля в спонтанном нарушении симметрии. Рассмотрен переход от SU(3) к SU(2) и U(1)-симметрии. Предложен механизм объединения фундаментальных взаимодействий.

Содержание

*nikolasvs@mail.ru

1 Симметрия гравитационного поля

В настоящее время существуют различные теории симметрии гравитационного поля, позволяющие объединить известные виды взаимодействий в единую физическую модель. К наиболее ярким из них можно отнести известную теорию струн (включая различные ее расширения), которая с помощью формирования структурных объектов (струн, бран и т.д.) позволяет не просто математически описать гравитационное поле, но и естественным образом обосновать его, как часть объединения фундаментальных взаимодействий [1–4]. При объединении и построении калибровочной симметрии гравитационного поля в виде дополнительного направления можно выделить физико-математические теории на основе увеличения размерности пространства-времени [5]. Рассмотрение многомерного пространства дает возможность сформулировать перенормируемую калибровочную теорию гравитационного поля [6]. Не менее перспективные возможности предоставляет суперсимметричное расширение широко известной Стандартной модели (СМ). С помощью группы Пуанкаре и посредством набора рядов из компонент фундаментальных полей (суперпространство), которые должны преобразовываться по тензорному типу, вводится определение, так называемого, суперполя [7–10]. Фактически это готовая конструкция не только для объединения фундаментальных взаимодействи, но и для формирования теории симметрии гравитационного поля. Отдельно необходимо отметить, как ранее, так и сегодня активно разрабатываются и развиваются подходы для включения (пусть и с достаточно большим количеством ограничений) частиц гравитационного взаимодействия в различные объединения на основе SU(8), SO(10) и других групп симметрий [11–12, 20], а также на основе исключительных групп [13–14].

В данной работе предлагается альтернативный подход к построению симметрии гравитационного поля. Применяется математический аппарат Янга-Миллса [15], не выходя за рамки общей теории относительности (ОТО) и четырехмерного пространства-времени.

1.1 SU(2) - симметрия гравитационного поля

Рассмотрим пространство Римана, для которого задан метрический тензор (g_{ik}) и аффинная связность (Γ^i_{km} – коэффициенты связности или символы Кристоффеля). Известно, что аффинную связность в римановом пространстве всегда можно построить единственным образом при условии равенства нулю кручения ($\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$) и неизменности скалярного произведения двух векторов, которые одновременно подвергаются параллельному переносу вдоль какого-либо пути [16]. Тензор Риччи (R_{ik}) можно определить следующим образом [17]

$$R_{ik} = \partial_l \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} = \partial_l \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} \tag{1.1}$$

Альтернация тензора R_{ik} по индексам k и l проведена без удвоения [16–17]. Далее

$$\begin{gathered} R_{ik} = \partial_l(g^{lp}\Gamma_{p,ik}) + (g^{lp}\Gamma_{p,ik})\Gamma^m_{lm} = \Gamma_{p,ik}\partial_l g^{lp} + g^{lp}\partial_l\Gamma_{p,ik} + \\ +g^{lp}\Gamma_{p,ik}\Gamma^m_{lm} = \Gamma_{p,ik}(-\Gamma^l_{nl}g^{np} - \Gamma^p_{nl}g^{ln}) + g^{lp}\partial_l\Gamma_{p,ik} + \\ +g^{lp}\Gamma_{p,ik}\Gamma^m_{lm} = \partial^p\Gamma_{p,ik} - \Gamma_{p,ik}\Gamma^p_{ln}g^{ln} \end{gathered} \tag{1.2}$$

В выражении (1.2) $\partial_l g^{lp} = -\Gamma^l_{nl}g^{np} - \Gamma^p_{ln}g^{ln}$ [17]. Сумма вторых производных от некоторого скаляра в криволинейных координаках имеет следующий вид [17]

$$D_k D^k \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k(\sqrt{-g}g^{kn}\partial_n\phi) \tag{1.3}$$

Учитывая равенство нулю ковариантной производной g_{ik}, т. е. $D_l g_{ik} = 0$ [17], получим

$$D_k D^k \phi = D_k(g^{kn}\partial_n\phi) = g^{kn}(\partial_k\partial_n\phi - \Gamma^m_{kn}\partial_m\phi) = \partial^n\partial_n\phi - \Gamma^n_{kp}g^{kp}\partial_n\phi \tag{1.4}$$

Выражение (1.4) преобразуем следующим образом:

$$\begin{gathered} D_n D^n \phi = (\partial^n\partial_n - \Gamma^n_{km}g^{km}\partial_n + \partial^n(\Gamma_{n,km}g^{km}) - \partial^n(\Gamma_{n,km}g^{km}) + \\ +\Gamma^n_{km}g^{km}\Gamma_{n,pl}g^{pl} - \Gamma^n_{km}g^{km}\Gamma_{n,pl}g^{pl})\phi = ((\partial^n\partial_n - \Gamma^n_{km}g^{km}\partial_n - \\ -\partial^n(\Gamma_{n,km}g^{km}) + \Gamma^n_{km}g^{km}\Gamma_{n,pl}g^{pl}) + \partial^n(\Gamma_{n,km}g^{km}) - \Gamma^n_{km}g^{km}\Gamma_{n,pl}g^{pl})\phi \end{gathered} \tag{1.5}$$

Первые четыре слагаемых, отделенные скобками в (1.5), представляют собой квадрат ковариантной производной, т.е. $(-i\partial^n + i\Gamma^n_{km}g^{km})(i\partial_n - i\Gamma_{n,km}g^{km}) = |-i\partial_n + i\Gamma_{n,km}g^{km}|^2$, где i – мнимая единица. Следовательно,

$$D_n D^n \phi = (|-i\partial_n + i\Gamma_{n,km}g^{km}|^2 + \partial^n(\Gamma_{n,km}g^{km}) - \Gamma^n_{km}g^{km}\Gamma_{n,pl}g^{pl})\phi \tag{1.6}$$

Далее отдельно рассмотрим второе слагаемое выражения (1.6)

$$\begin{gathered} \partial^n(\Gamma_{n,km}g^{km}) = g^{km}\partial^n\Gamma_{n,km} + \Gamma^n_{km}\partial_n g^{km} = \\ = g^{km}\partial^n\Gamma_{n,km} + \Gamma^n_{km}(-\Gamma^k_{pn}g^{pm} - \Gamma^m_{pn}g^{kp}) = \\ = g^{km}\partial^n\Gamma_{n,km} + \Gamma^n_{kn}\Gamma^k_{pm}g^{pm} - \Gamma^n_{km}\Gamma^m_{pn}g^{kp} \end{gathered} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.6), получим

$$D_n D^n \phi = (|\hat{D}_n|^2 + g^{km}\partial^n\Gamma_{n,km} - \Gamma^n_{km}g^{km}\Gamma_{n,pl}g^{pl} + \Gamma^n_{kn}\Gamma^k_{pm}g^{pm} - \Gamma^n_{km}\Gamma^m_{pn}g^{kp})\phi, \tag{1.8}$$

где $\hat{D}_n = -i\partial_n + i\Gamma_{n,km}g^{km}$ согласно (3.10) дополнения 1 и $\Gamma^n_{kn} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} = \frac{1}{2}g^{np}\partial_k g_{np}$ [17]. Учитывая выражение (1.2), имеем

$$D_n D^n \phi = (|\hat{D}_n|^2 + g^{km}R_{km} + \Gamma^n_{kn}\Gamma^k_{pm}g^{pm} - \Gamma^n_{km}\Gamma^m_{pn}g^{kp})\phi, \tag{1.9}$$

где $g^{km}R_{km} = R$ – скалярная кривизна пространства [17]. Заменим в третьем слагаемом $\Gamma^k_{pm}g^{pm} = -\Gamma^l_{nl}g^{nk} - \partial_l g^{kl}$ [17]

$$D_n D^n \phi = (|\hat{D}_n|^2 + R - \Gamma^n_{kn}\Gamma^l_{nl}g^{nk} - \Gamma^n_{kn}\partial_l g^{kl} - \Gamma^n_{km}\Gamma^m_{pn}g^{kp})\phi \tag{1.10}$$

С помощью равенства $g^{np}\partial_k g_{np} = -g_{np}\partial_k g^{np}$ [17] преобразуем четвертое слагаемое выражения (1.10) следующим образом:

$$\begin{gathered} \Gamma^n_{kn}\partial_l g^{kl} = \frac{1}{2}g^{np}(\partial_k g_{np})g_{lm}(\partial^m g^{kl}) = -\frac{1}{2}g_{np}(\partial_k g^{np})g_{lm}(\partial^m g^{kl}) = \\ = \frac{1}{2}g_{nm}(\partial_k g^{np})g_{lp}(\partial^m g^{kl}) = -\frac{1}{2}g_{nk}(\partial_m g^{np})g_{lp}(\partial^m g^{kl}) \end{gathered}$$

В результате получим

$$D_n D^n \phi = (|\hat{D}_n|^2 + R - \Gamma^n_{kn}\Gamma^l_{nl}g^{nk} + \frac{1}{2}g_{nk}\partial_m g^{np}g_{lp}\partial^m g^{kl} - \Gamma^n_{km}\Gamma^m_{pn}g^{kp})\phi \tag{1.11}$$

Далее в соответствии с выражением (1.11) необходимо получить квадрат ковариантной производной в окончательном виде. Для этого воспользуемся матрицами Паули (τ_1, τ_2, τ_3)

$$D_n D^n \phi = ((\tau_0\hat{D}_n + \tau_1 i\Gamma_{m,kn}\xi^k\xi^m + \tau_2\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k\xi_m\partial_n g^{km} + \tau_3 i\Gamma^k_{nk})^2 + R)\phi, \tag{1.12}$$

где τ_0 – единичная матрица, а ξ_k можно интерпретировать как локальный репер на основе геометризации метрического тензора, т. е. $\Gamma^n_{km}\Gamma^k_{pn}g^{pm} = \Gamma^n_{km}g^{kl}\Gamma_{l,pn}g^{pm} \to \Gamma^n_{km}\xi^k\xi^l\Gamma_{l,pn}\xi^p\xi^m$ и $g_{nk}(\partial_m g^{np})g_{lp}(\partial^m g^{kl}) \to \xi_n\xi_k(\partial_m g^{np})\xi_l\xi_p(\partial^m g^{kl})$ [16].

Рассмотрим подробнее квадрат ковариантной производной (1.12), слагаемое $\Gamma_{m,kn}\xi^k\xi^m$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k\xi_m\partial_n g^{km}$ обозначим Γ_n и $\partial_n g$ соответственно:

$$\begin{gathered}(\tau_0\hat{D}_n + \tau_1 i\Gamma_n + \tau_2\partial_n g + \tau_3 i\Gamma^k_{nk})^2 = \tau_0|\hat{D}_n|^2 + \tau_1 i\hat{D}_n\Gamma^n + \\ +\tau_2\hat{D}_n\partial^n g + \tau_3 i\hat{D}_n\Gamma^{kn}_k + \tau_1 i\Gamma_n\hat{D}^n - \tau_0(\Gamma_n)^2 + \tau_1\tau_2 i\Gamma_n\partial^n g - \\ -\tau_1\tau_3\Gamma_n\Gamma^{kn}_k + \tau_2\partial_n g\hat{D}^n + \tau_2\tau_1 i\partial_n g\Gamma^n + \tau_0(\partial_n g)^2 + \tau_2\tau_3 i\partial_n g\Gamma^{kn}_k + \\ +\tau_3 i\Gamma^k_{nk}\hat{D}^n - \tau_3\tau_1\Gamma^k_{nk}\Gamma^n + \tau_3\tau_2 i\Gamma^k_{nk}\partial^n g - \tau_0(\Gamma^k_{nk})^2\end{gathered} \tag{1.13}$$

где $\tau_i\tau_k = \tau_0$ при $i = k$ [18–20]. Учитывая, что $\tau_i\tau_k + \tau_k\tau_i = 0$ при $i \neq k$ [18–20], получим

$$\begin{gathered}(\tau_0\hat{D}_n + \tau_1 i\Gamma_n + \tau_2\partial_n g + \tau_3 i\Gamma^k_{nk})^2 = \tau_0(|\hat{D}_n|^2 - (\Gamma_n)^2 + \\ +(\partial_n g)^2 - (\Gamma^k_{nk})^2) + \tau_1 i(-iD_n)\Gamma^n + \tau_2(-iD_n)\partial^n g + \\ +\tau_3 i(-iD_n)\Gamma^{kn}_k + \tau_1 i\Gamma_n iD^n + \tau_2\partial_n g iD^n + \tau_3 i\Gamma^k_{nk} iD^n = \\ = \tau_0(|\hat{D}_n|^2 - (\Gamma_n)^2 + (\partial_n g)^2 - (\Gamma^k_{nk})^2) + \\ +\tau_1 i((-iD_n)\Gamma^n - \Gamma_n(-iD^n)) + \tau_2((-iD_n)\partial^n g - \partial_n g(-iD^n)) + \\ +\tau_3 i((-iD_n)\Gamma^{kn}_k - \Gamma^k_{nk}(-iD^n))\end{gathered} \tag{1.14}$$

В соответствии с перестановочными соотношениями (3.6) (см. дополнение 1) выражение (1.14) примет вид

$$\begin{gathered}(\tau_0\hat{D}_n + \tau_1 i\Gamma_n + \tau_2\partial_n g + \tau_3 i\Gamma^k_{nk})^2 = \\ = \tau_0(|\hat{D}_n|^2 - (\Gamma_n)^2 + (\partial_n g)^2 - (\Gamma^k_{nk})^2) + \\ +\tau_1 D_n\Gamma^n - \tau_2 iD_n\partial^n g + \tau_3 D_n\Gamma^{kn}_k\end{gathered} \tag{1.15}$$

Таким образом, для квадрата ковариантной производной (1.11) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$D_n\Gamma^n = 0,\ D_n\partial^n g = 0,\ D_n\Gamma^{kn}_k = 0 \tag{1.16}$$

Предположим, что коэффициенты связности (1.12) составляют некоторый вектор ($\bar{A}_n$), который определен в комплексном пространстве, соответствующем SU(2)-симметрии. Задан базис (τ_1, τ_2, τ_3), где матрицы Паули соответствуют базисным векторам [23], тогда $\bar{A}_n = \tau_1 i\Gamma_n + \tau_2\partial_n g + \tau_3 i\Gamma^k_{nk}$. Однако комплексное SU(2)-пространство требуется "привязать" к криволинейным координатам [16]. В указанном пространстве реализуется локальная изотопическая инвариантность, т. е. инвариантность относительно локальных изотопических поворотов, параметры которых меняются от точки к точке. Поэтому SU(2)-пространство необходимо рассматривать, например, как касательное к риманову пространству, причем таким образом, чтобы вектор $\bar{A}_n$ был вектором риманова пространства. Предложенный подход обоснован, поскольку касательное пространство с помощью метрического тензора можно превратить в евклидово и определить для него скалярное произведение векторов [16]. В свою очередь каждый действительный вектор, заданный в ортонормированном базисе, может быть представлен посредством спиновых матриц Паули [16]. В дополнении 2 показана взаимосвязь SU(2)-симметрии при локальных изотопических поворотах с определителем метрического тензора.

Рассмотрим тензор неабелевого гравитационного поля (G_{mn}), соответствующий предложенной SU(2) - симметрии. На основе теории Янга-Миллса и с учетом криволинейной системы координат указанный тензор равен [15, 19–21].

$$G_{mn} = (D_m - \bar{A}_m)\bar{A}_n - (D_n - \bar{A}_n)\bar{A}_m \tag{1.17}$$

Учитывая равенство нулю кручения ($\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$), преобразуем выражение (1.17)

$$\begin{gathered} G_{mn} = (\partial_m\bar{A}_n - \Gamma^k_{mn}\bar{A}_k - \bar{A}_m\bar{A}_n) - (\partial_n\bar{A}_m - \Gamma^k_{nm}\bar{A}_k - \bar{A}_n\bar{A}_m) = \\ = (\partial_m\bar{A}_n - \bar{A}_m\bar{A}_n) - (\partial_n\bar{A}_m - \bar{A}_n\bar{A}_m) = (\partial_m - \bar{A}_m)\bar{A}_n - (\partial_n - \bar{A}_n)\bar{A}_m \end{gathered} \tag{1.18}$$

На основании (1.18) и определения вектора $\bar{A}_n$ приведем производную ($\partial_m - \bar{A}_m$) в соответствие с теорией Янга-Миллса:

$$\begin{gathered} (\partial_m - \bar{A}_m) = (\partial_m - (\tau_1 i\Gamma_m + \tau_2\partial_m g + \tau_3 i\Gamma^k_{mk})) = \\ = (\partial_m - i(\tau_1\Gamma_m - \tau_2 i\partial_m g + \tau_3\Gamma^k_{mk})) = \\ = (\partial_m - i2(\frac{\tau_1}{2}\Gamma_m - \frac{\tau_2}{2}i\partial_m g + \frac{\tau_3}{2}\Gamma^k_{mk})) = \\ = (\partial_m - ig_\gamma(T_1\Gamma_m - T_2 i\partial_m g + T_3\Gamma^k_{mk})) = (\partial_m - ig_\gamma\bar{\Gamma}_m), \end{gathered} \tag{1.19}$$

где g_γ – искусственно введенная константа взаимодейтвия гравитационного (калибровочного) поля.
С помощью производной (1.19) можно привести к соответствующему виду тензор G_{mn}. Поэтому указанный тензор и производная с учетом инвариантности относительно локальных изотопических поворотов подчиняются тем же калибровочным преобразованиям, что и поля Янга-Миллса [15, 19–21]. Это справедливо и для лагранжиана предложенной SU(2)-симметрии гравитационного поля.
Дополнительно следует отметить необходимость условий (1.16), которые для вектора $\bar{A}_n$ (как и для вектора $\bar{\Gamma}_m$) можно выразить следующим образом:

$$D_n\bar{A}^n = \tau_1 iD_n\Gamma^n + \tau_2 D_n\partial^n g + \tau_3 iD_n\Gamma^{kn}_k = 0 \tag{1.20}$$

Изотопический вектор $\bar{\Gamma}_m = \frac{1}{2}(\tau_1\Gamma_m - \tau_2 i\partial_m g + \tau_3\Gamma^k_{mk})$ обычно представляют с помощью взаимно антисопряженных компонент (Γ_-, Γ_+) [19–22], тогда

$$\bar{\Gamma}_m = \tau_+\Gamma_- + \tau_-\Gamma_+ + \tau_3\Gamma^k_{mk}, \tag{1.21}$$

где $\Gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 \pm i\Gamma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_m \pm i(-i\partial_m g)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_m \pm \partial_m g)$ и $\tau_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \pm i\tau_2)$, поэтому у вектора $\bar{\Gamma}_m$ все три компоненты вещественны. Если вектор $\bar{A}_n$ выразить посредством взаимно антисопряженных компонент, то он станет мнимым (комплексным) вектором.

На основании выражения (1.12), (1.19) и условий (1.16) рассмотрим волновое уравнение в гравитационном поле, т. е.

$$D_k D^k\phi = ((\hat{D}_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k)^2 + R)\phi = 0 \tag{1.22}$$

Заменяя на основе уравнений Эйнштейна в выражении (1.22) скалярную кривизну (R) на тензор энергии-импульса материи (T), включая электромагнитное поле ($R = -\zeta T$) [17], имеем

$$D_k D^k\phi = ((\hat{D}_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k)^2 - \zeta T)\phi = 0 \tag{1.23}$$

где ζ – постоянная, которая связана с гравитационной постоянной и др. [17].
Далее проведем факторизацию оператора (1.23) известным методом [19]. С помощью матриц Дирака (γ^k) из выражения (1.23) получим следующее уравнение:

$$(\gamma^k(\hat{D}_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k) - \sqrt{\zeta T})\phi = 0 \tag{1.24}$$

1.2 SU(3) - симметрия гравитационного поля?

Рассмотрим следующую ковариантную производную (см. выражение 1.12, 1.19):

$$\begin{gathered}(\tau_0\hat{D}_n + \tau_1 i\Gamma_n + \tau_2\partial_n g + \tau_3 i\Gamma^k_{nk}) = \\ = \tau_0\hat{\partial}_n + \tau_0 i\Gamma_{n,km}g^{km} + \tau_1 i\Gamma_{m,kn}\xi^k\xi^m + \tau_2\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k\xi_m\partial_n g^{km} + \tau_3 i\Gamma^k_{nk}\end{gathered} \tag{1.25}$$

Заменяя $\partial_n g^{km} = -\Gamma^k_{ln}g^{lm} - \Gamma^m_{ln}g^{kl}$ [17] в четвертом слагаемом выражения (1.25), преобразуем его следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k\xi_m\partial_n g^{km} = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k\xi_m(-\Gamma^k_{ln}g^{lm} - \Gamma^m_{ln}g^{kl}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Gamma_{k,ln}\xi^k\xi^l - \Gamma_{m,ln}\xi^m\xi^l) = \sqrt{2}(-\Gamma_{k,ln}\xi^k\xi^l)\end{gathered}$$

Подставляя указанное значение в выражение (1.25), получим

$$\begin{gathered}(\tau_0\hat{D}_n + \tau_1 i\Gamma_n + \tau_2\partial_n g + \tau_3 i\Gamma^k_{nk}) = \\ = \tau_0\hat{\partial}_n + \tau_0 i\Gamma_{n,km}g^{km} + \tau_1 i\Gamma^m_{kn}\xi^k\xi_m - \tau_2\sqrt{2}\Gamma^k_{ln}\xi_k\xi^l + \tau_3 i\Gamma^k_{nk} = \\ = \tau_0\hat{\partial}_n + \frac{\tau_0}{2}i(2g^{km}\partial_m g_{nk} - g^{km}\partial_n g_{km}) + \\ + \frac{\tau_1}{2}ig^{ml}(\partial_n g_{lk} + \partial_k g_{ln} - \partial_l g_{kn})\xi^k\xi_m - \\ - \frac{\tau_2}{2}\sqrt{2}g^{kp}(\partial_n g_{pl} + \partial_l g_{pn} - \partial_p g_{ln})\xi_k\xi^l + \frac{\tau_3}{2}ig^{kl}\partial_n g_{kl},\end{gathered} \tag{1.26}$$

где $\Gamma_{n,km}g^{km} = g^{km}\partial_m g_{nk} - \frac{1}{2}g^{km}\partial_n g_{km}$, $\Gamma^m_{kn} = \frac{1}{2}g^{ml}(\partial_n g_{lk} + \partial_k g_{ln} - \partial_l g_{kn})$, $\Gamma^k_{ln} = \frac{1}{2}g^{kp}(\partial_n g_{pl} + \partial_l g_{pn} - \partial_p g_{ln})$, $\Gamma^k_{nk} = \frac{1}{2}g^{kl}\partial_n g_{kl}$ [17].

Упрощенно переход от SU(3) к SU(2)–симметрии можно показать, исключив из каждой матрицы Гелл-Манна (λ_a) определенную строку и столбец, точнее необходимо найти миноры ($\tilde{\lambda}_a$) диагональных элементов матриц Гелл-Манна (дополнение 3), применяя те же требования, что и к матрицам Паули (SU(2)-группы). Следует отметить, что получение алгебраических дополнений матриц SU(3)-группы, приведенное в дополнении 3, эквивалентно выделению SU(2)-подгруппы [26-29]. Что в свою очередь позволяет расширить соотношения, полученные для SU(2)-группы, на SU(3)-группу. Тогда ковариантную производную, соответствующую SU(3)-симметрии ($\tilde{\Gamma}_n = \Gamma_{an}\lambda^a/2$), можно представить в следующем виде

$$\begin{gathered}(\hat{\partial}_n - i\tilde{g}_\gamma\tilde{\Gamma}_n) = \hat{\partial}_n - i\tilde{g}_\gamma(\frac{\tau_1}{2}(\Gamma_{1n} + \Gamma_{4n} + \Gamma_{6n}) + \\ + \frac{\tau_2}{2}(\Gamma_{2n} + \Gamma_{5n} + \Gamma_{7n}) + \frac{\tau_3}{2}\Gamma_{3n} + \frac{\tau_0}{2}\frac{\Gamma_{8n}}{\sqrt{3}}),\end{gathered} \tag{1.27}$$

где $\tilde{g}_\gamma$ - константа взаимодействия.

Сравнивания выражение (1.27) и (1.26), получим

$$
\begin{gathered}
(\tau_0\hat{D}_n+\tau_1 i\Gamma_n+\tau_2\partial_n g+\tau_3 i\Gamma^k_{nk})=\\
=\tau_0\hat{\partial}_n-i(\frac{\tau_0}{2}(g^{km}\partial_n g_{km}-2g^{km}\partial_m g_{nk})+\\
+\frac{\tau_1}{2}(g^{ml}\partial_l g_{kn}-g^{ml}\partial_n g_{lk}-g^{ml}\partial_k g_{ln})\xi^k\xi_m+\\
+\frac{\tau_2}{2}\sqrt{2}(-i)(g^{kp}\partial_n g_{pl}+g^{kp}\partial_l g_{pn}-g^{kp}\partial_p g_{ln})\xi_k\xi^l-\frac{\tau_3}{2}g^{kl}\partial_n g_{kl})
\end{gathered}
\tag{1.28}
$$

Учтем константу взиамодействия и постояные равенства (1.27) и (1.28):

$$
\begin{gathered}
(\tau_0\hat{D}_n+\tau_1 i\Gamma_n+\tau_2\partial_n g+\tau_3 i\Gamma^k_{nk})=\\
=\tau_0\hat{\partial}_n-i\sqrt{2}(\frac{\tau_0}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(g^{km}\partial_n g_{km}-2g^{km}\partial_m g_{nk})+\\
+\frac{\tau_1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(g^{ml}\partial_l g_{kn}-g^{ml}\partial_n g_{lk}-g^{ml}\partial_k g_{ln})\xi^k\xi_m+\\
+\frac{\tau_2}{2}(-i)(g^{kp}\partial_n g_{pl}+g^{kp}\partial_l g_{pn}-g^{kp}\partial_p g_{ln})\xi_k\xi^l-\frac{\tau_3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}g^{kl}\partial_n g_{kl})=\\
=\tau_0\hat{\partial}_n-i\tilde{g}_\gamma(\frac{\tau_0}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma_{8n}+\frac{\tau_1}{2}(\Gamma_{1n}+\Gamma_{4n}+\Gamma_{6n})+\\
+\frac{\tau_2}{2}(\Gamma_{2n}+\Gamma_{5n}+\Gamma_{7n})+\frac{\tau_3}{2}\Gamma_{3n})=(\tau_0\hat{\partial}_n-i\tilde{g}_\gamma\tilde{\Gamma}_n),
\end{gathered}
\tag{1.29}
$$

где $\tilde{g}_\gamma$ – искусственно введенная константа гравитационного (калибровочного) взаимодейтвия, соответствующая SU(3)-симметрии (см. таблицу 1.1) [26-29].

Для интерпретации указанной симметрии гравитационного поля (см. выражение (1.29)), рассмотрим вращение во взаимных (локальных) базисах, которое, как известно, осуществляется посредством метрического тензора. Это вращение представляет собой переход между ковариантными и контрвариантными составляющими любого тензора риманова пространства (ассоциированные тензоры) [16-17, 23].

Таблица 1.1. Сопоставление SU(3)-симметрии гравитационного и сильного взаимодействий (r, g, b – соответствующие "цветовые" заряды).

Гравитационное взаимодействие	*Сильное взаимодействие*
$-(g^{kl}\partial_n g_{kl})/\sqrt{2}$	$(r\bar{r}-\bar{b}b)/\sqrt{2}$
$\sqrt{3}(g^{km}\partial_n g_{km}-2g^{km}\partial_m g_{nk})/\sqrt{2}$	$(r\bar{r}+\bar{b}b-2g\bar{g})/\sqrt{2}$
$(g^{ml}\partial_l g_{kn}-g^{ml}\partial_n g_{lk}-g^{ml}\partial_k g_{ln})\xi^k\xi_m/\sqrt{2}$	$\left\{\begin{array}{l}(b\bar{g}+g\bar{b})/\sqrt{2}\\(r\bar{b}+b\bar{r})/\sqrt{2}\\(r\bar{g}+g\bar{r})/\sqrt{2}\end{array}\right.$
$(-i)(g^{kp}\partial_n g_{pl}+g^{kp}\partial_l g_{pn}-g^{kp}\partial_p g_{ln})\xi_k\xi^l$	$\left\{\begin{array}{l}(-i)(r\bar{b}-b\bar{r})/\sqrt{2}\\(-i)(r\bar{g}-g\bar{r})/\sqrt{2}\\(-i)(b\bar{g}-g\bar{b})/\sqrt{2}\end{array}\right.$

Строго говоря, при поднятии или опускании индекса происходит переход между двумя ассоциированными тензорами (ковариантным и контрвариантным) [16-17, 23]. Но, поскольку постулируется эквивалентность указанных тензоров в римановом пространстве, то они рассматриваются как различные аналитические представления одного и того же тензора [16-17,23].

Найдем калибровочное преобразование, которое соответсвует нарушению данного постулата ($A_i = g_{ik}A^k$), т. е. предположим, что $A_i = g_{ik}B^k$ и $B^k = A_i g^{ik}$, где A_i и B^k – некоторый ковариантный и некоторый контравариантный вектор. Рассмотрим ковариантную производную вида

$$\begin{gathered} D_l A_i = \partial_l A_i - \Gamma^k_{il} A_k = \partial_l (g_{ik} B^k) - \Gamma^k_{il}(g_{kn} B^n) = \\ = B^k \partial_l g_{ik} + g_{ik} \partial_l B^k - \Gamma^k_{il} g_{kn} B^n = g_{ik} \partial_l B^k - (\Gamma^n_{il} g_{nk} - \partial_l g_{ik}) B^k \end{gathered} \tag{1.30}$$

Умножая полученное выражение (1.30) на g^{im}, имеем

$$\begin{gathered} g^{im} g_{ik} \partial_l B^k - g^{im}(\Gamma^n_{il} g_{nk} - \partial_l g_{ik}) B^k = \\ = \delta^m_k \partial_l B^k - (g^{im}\Gamma^n_{il} g_{nk} - g^{im}\partial_l g_{ik}) B^k = \\ = \partial_l B^m - (g^{im}\Gamma^n_{il} g_{nk} - g^{im}\partial_l g_{ik}) B^k, \end{gathered} \tag{1.31}$$

где δ^m_k – единичный 4-тензор [16-17].
Сравнивая выражение (1.31) с ковариантной производной $D_l B^m = \partial_l B^m + \Gamma^m_{kl} B^k$, получим следующее калибровочное преобразование:

$$\Gamma^m_{kl} = -(g^{im}\Gamma^n_{il} g_{nk} - g^{im}\partial_l g_{ik}) \tag{1.32}$$

Следовательно, за переход между ковариантным и контравариантным векторами (A_i и B^k) отвечает определенное калибровочное взаимодействие, которое согласно выражению (1.29) и (1.32) можно отнести к полям Янга-Миллса с SU(3)-симметрией. Однако, как было отмечено выше, поднятие или опускание индекса не должно приводить к появлению нового вектора. Поэтому на основе выражения (1.29) и (1.32), а также сопоставления с сильным взаимодействием [26-29] (см. таблицу 1.1) можно предположить, что происходит спонтанное нарушение указанной SU(3)-симметрии. В результате этого нарушения ковариантный и контравариантный вектора вырождаются в вектор с ковариантными или контравариантными компонентами, а SU(3)-симметрия переходит в SU(2)-симметрию.

Рассмотрим известный лагранжиан склярного поля (ϕ) [19-22]:

$$L = \frac{1}{2}\partial_k\phi\partial^k\phi - \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - \frac{1}{2}\eta^2)^2, \tag{1.33}$$

где λ – константа взаимодействия, $\eta = m/\lambda$, m – масса частиц, связанных с полем ϕ.
Учитывая калибровочную инвариантность и вырожденный вакуум ($\phi{=}(\eta+\chi)/\sqrt{2}$), выразим лагранжиан (1.33) с помощью поля (χ) [19-22]

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}\partial_k\chi\partial^k\chi - \frac{1}{2}\lambda^2(\frac{1}{2}(\eta+\chi)^2 - \frac{1}{2}\eta^2)^2 = \\ = \frac{1}{2}\partial_k\chi\partial^k\chi - \frac{1}{2}\lambda^2(\eta^2\chi^2 + \eta\chi^3 + \frac{1}{4}\chi^4) \end{gathered} \tag{1.34}$$

Соответствующее (1.34) уравнение движения имеет вид

$$-\partial_k\partial^k\chi - \frac{1}{2}\lambda^2(2\eta^2\chi + 3\eta\chi^2 + \chi^3) = 0 \tag{1.35}$$

Согласно выражению (1.35) перейдем к массе (m)

$$-\partial_k\partial^k\chi - (m^2\chi + \frac{3}{2}\lambda m\chi^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\chi^3) = 0 \tag{1.36}$$

Преобразуем уравнение (1.36) с позиции нелинейной квантовой теории поля [24]

$$(-\partial_k\partial^k - (m^2 + \frac{3}{2}\lambda m\chi + \frac{1}{2}\lambda^2\chi^2))\chi \rightarrow (-\partial_k\partial^k - (a\lambda\chi + m)^2)\chi,$$

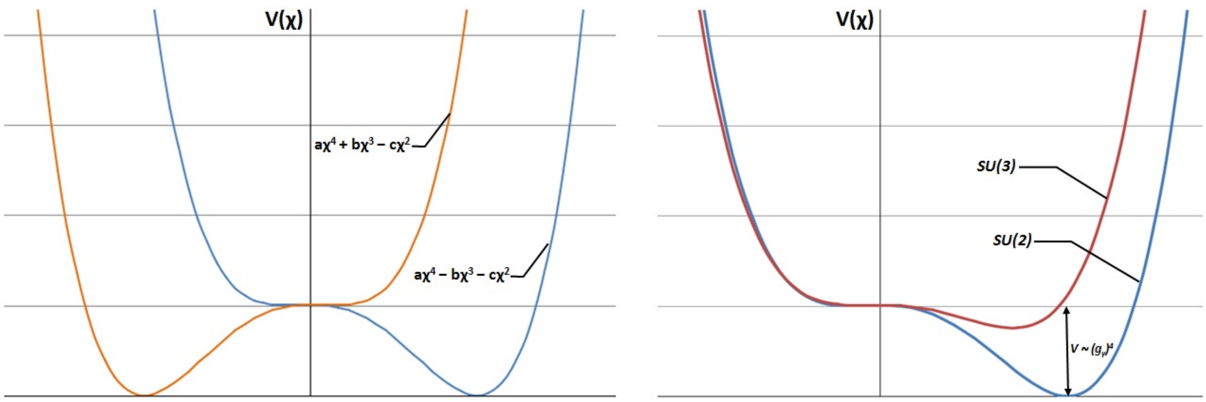
где a – безразмерная константа.
Проведя факторизацию уравнения (1.36) [19, 24-25] и считая $g_\chi = a\lambda$, получим

$$(\gamma^k\hat{D}_k - m)\chi = (-i(\gamma^k\partial_k - ig_\chi\chi) - m)\chi = 0 \tag{1.37}$$

На основе выраженя (1.29), (1.32), (1.37), учитывая самодействие поля (χ), рассмотрим спонтанное нарушение локальной SU(3)-симметрии $(D_l = \partial_l - i\tilde{g}_\gamma\tilde{\Gamma}_l - ig_\chi\chi)$ [20-21]

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}|D_l\chi|^2 - \frac{1}{4}G_{mn}G^{mn} = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_l\chi)^2 + \frac{1}{2}(g_\chi^2\chi^4 + 2\tilde{g}_\gamma\gamma^l\tilde{\Gamma}_l g_\chi\chi^3 + \tilde{g}_\gamma^2|\tilde{\Gamma}_l\chi|^2) - \frac{1}{4}G_{mn}G^{mn} = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_l\chi)^2 + V(\chi) - \frac{1}{4}G_{mn}G^{mn} \end{aligned} \tag{1.38}$$

Используя далее известный подход [20-21], т. е. полагая поле χ и $\tilde{\Gamma}_l$ постоянными и переходя от лагранжиана (1.38) к соответствующему гамильтониану, рассмотрим функцию вида $V(\chi) = \frac{1}{2}(-g_\chi^2\chi^4 - 2\tilde{g}_\gamma\gamma^l\tilde{\Gamma}_l g_\chi\chi^3 - \tilde{g}_\gamma^2|\tilde{\Gamma}_l\chi|^2)$ и у первого слагаемого изменим знак (рис. 1).



а б

Рис. 1: а – функция $V(\chi)$ при преобразовании $(b\chi^3 \rightarrow -b\chi^3)$, б – минимум $V(\chi)$ при SU(3) и SU(2)-симметрии $(g_{\gamma SU(2)} > g_{\gamma SU(3)})$.

На рисунке 1 показана функция $V(\chi)$ при преобразовании $(b\chi^3 \rightarrow -b\chi^3)$ $(a, b, c$ – константы), а также в случае SU(3) и SU(2)-симметрии. Необходимо отметить, что при спонтанном нарушении SU(3)-симметрии в результате взаимодействия поля χ с полем $\tilde{\Gamma}_l$ образуется потенциальная яма, глубина которой пропорциональна $(g_\gamma)^4$. Константу g_χ считаем постоянной и не зависящей от симметрии взаимодействующего поля. Поскольку $g_{\gamma SU(2)} > g_{\gamma SU(3)}$ (рис. 1), то переход от SU(3) к SU(2)-симметрии является обоснованным.

1.3 Спонтанное нарушение симметрии

Изменив знак у слагаемого χ^2, рассмотрим лагранжиан (1.38) в виде

$$L = \frac{1}{2}(\partial_k\chi)^2 + \frac{1}{2}(g_\chi^2\chi^4 + 2\tilde{g}_\gamma\gamma^k\tilde{\Gamma}_k g_\chi\chi^3 - \tilde{g}_\gamma^2|\tilde{\Gamma}_k\chi|^2) - \frac{1}{4}G_{mn}G^{mn} \tag{1.39}$$

Приведем к сумме квадратов квадратичную форму из выражения (1.39):

$$g_\chi^2\chi^4 + 2\tilde{g}_\gamma\gamma^k\tilde{\Gamma}_k g_\chi\chi^3 - \tilde{g}_\gamma^2|\tilde{\Gamma}_k|^2\chi^2 = \begin{pmatrix}\chi^2 & \chi\gamma^k\tilde{\Gamma}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_\chi^2 & \tilde{g}_\gamma g_\chi \\ \tilde{g}_\gamma g_\chi & -\tilde{g}_\gamma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^2 \\ \chi\gamma^k\tilde{\Gamma}_k\end{pmatrix}$$

Для этого необходимо решить следующее характеристическое уравнение [23]:

$$\begin{vmatrix} g_\chi^2 - \alpha & \tilde{g}_\gamma g_\chi \\ \tilde{g}_\gamma g_\chi & -\tilde{g}_\gamma^2 - \alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{1.40}$$

Раскрывая определитель (1.40), получим уравнение $\alpha^2 + (\tilde{g}_\gamma^2 - g_\chi^2)\alpha - 2(\tilde{g}_\gamma g_\chi)^2 = 0$. Его корни обозначим, как $\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{g}_\gamma, g_\chi)$ и $-\alpha_2 = \alpha_2(\tilde{g}_\gamma, g_\chi)$. При условии, что β – постоянный угловой параметр, и учитывая (1.20), лагранжиан (1.39) примет вид

$$L = \frac{1}{2}(\partial_k\check{\chi})^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1\check{\chi}^4 - \alpha_2|\check{\Gamma}_k\check{\chi}|^2) - \frac{1}{4}\check{G}_{mn}\check{G}^{mn}, \tag{1.41}$$

где $\check{\chi}^2 = \chi^2 cos\beta + \chi\gamma^k\tilde{\Gamma}_k sin\beta$, $\gamma^k\check{\Gamma}_k\check{\chi} = -\chi^2 sin\beta + \chi\gamma^k\tilde{\Gamma}_k cos\beta$ и $tg\beta = (g_\chi^2 - \alpha_1)/(\tilde{g}_\gamma g_\chi)$. Дополнительные условия для $\check{\chi}$, $\check{\Gamma}_k$ и β (1.41) можно получить, исходя из следующего:

$$\partial_k\chi = \pm\frac{\check{\chi}cos\beta - (\gamma^k\check{\Gamma}_k sin\beta)/2}{\sqrt{\check{\chi}^2 cos\beta - \check{\chi}\gamma^k\check{\Gamma}_k sin\beta}}\partial_k\check{\chi} = f(\check{\chi}, \check{\Gamma}_k)\partial_k\check{\chi},$$

где $\chi = \pm\sqrt{\check{\chi}^2 cos\beta - \check{\chi}\gamma^k\check{\Gamma}_k sin\beta}$, тогда $\partial_k\chi = \partial_k\check{\chi}$, если $f(\check{\chi}, \check{\Gamma}_k) = 1$.
Следовательно, взаимодействие χ с полем $\tilde{\Gamma}_k$ индуцирует у последнего спонтанное нарушение SU(3)-симметрии с последующим переходом в SU(2)-симметрию ($\tilde{\Gamma}_k \to \check{\Gamma}_k \sim \bar{\Gamma}_k$) и увеличение постоянной взаимодействия ($\tilde{g}_\gamma \to \alpha_2 \sim g_\gamma$), т. е. $(\hat{\partial}_k - i\tilde{g}_\gamma\tilde{\Gamma}_k) \to (\hat{D}_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k)$.

Отдельно необходимо рассмотреть $|D_k\chi|^2$, где $D_k = \partial_k - ig_aA_k - ig_bB_k - ig_\chi\chi$, для некоторого поля A_k и B_k, g_a и g_b – соответствующие постоянные взаимодействия. Раскрывая квадрат данной ковариантной производной, получим

$$|D_k\chi|^2 = (\partial_k\chi)^2 + g_\chi^2\chi^4 + 2g_\chi\gamma^k(g_aA_k + g_bB_k)\chi^3 + (g_aA_k + g_bB_k)^2\chi^2 \tag{1.42}$$

Изменив знак у слагаемого χ^2 в выражении (1.42), приведем к сумме квадратов квадратичную форму

$$g_\chi^2\chi^4 + 2g_\chi\gamma^k(g_aA_k + g_bB_k)\chi^3 - (g_aA_k + g_bB_k)^2\chi^2 =$$
$$= \begin{pmatrix}\chi^2 & \chi\gamma^kA_k & \chi\gamma^kB_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_\chi^2 & g_\chi g_a & g_\chi g_b \\ g_\chi g_a & -g_a^2 & -g_ag_b \\ g_\chi g_b & -g_ag_b & -g_b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^2 \\ \chi\gamma^kA_k \\ \chi\gamma^kB_k\end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение примет следующий вид

$$\begin{vmatrix} g_\chi^2 - \alpha & g_\chi g_a & g_\chi g_b \\ g_\chi g_a & -g_a^2 - \alpha & -g_ag_b \\ g_\chi g_b & -g_ag_b & -g_b^2 - \alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{1.43}$$

Преобразовав определитель, получим кубическое уравнение:

$$\alpha^3 - (g_\chi^2 - g_a^2 - g_b^2)\alpha^2 - 2g_\chi^2(g_a^2 + g_b^2)\alpha = 0 \tag{1.44}$$

Один из его корней равен нулю (1.44), что можно интерпретировать, как появление поля взаимодействующего с χ и поля, выпадающего из этого взаимодействия.

Далее рассмотрим лагранжиан некоторого поля $\bar{B}_k$ с SU(2)-симметрией [18-19, 21]

$$L = |D_k\chi^* D^k\chi| - m^2\chi^*\chi + L_B, \tag{1.45}$$

где $D_k = \partial_k - ig_b\bar{B}_k - ig_{\chi^*}\chi^*$ и $D^k = \partial^k - ig_b\bar{B}^k - ig_\chi\chi$, для упрощения считаем, что $g_{\chi^*} = g_\chi$.

$$\begin{gathered} L = \partial_k\chi^*\partial^k\chi + ig_\chi\gamma^k(\partial_k\chi^*)\chi^2 + ig_b(\partial_k\chi^*)\bar{B}^k\chi - ig_\chi(\chi^*)^2\gamma_k\partial^k\chi + \\ + g_\chi^2(\chi^*)^2\chi^2 + g_\chi g_b(\chi^*)^2\gamma_k\bar{B}^k\chi - ig_b\bar{B}_k\chi^*\partial^k\chi + g_b g_\chi\gamma^k\bar{B}_k\chi^*\chi^2 + \\ + g_b^2|\bar{B}_k|^2\chi^*\chi - m^2\chi^*\chi + L_B \end{gathered} \tag{1.46}$$

Известно, что 4-вектор $j^k = i\left(\chi^*\frac{\partial L}{\partial(\partial_k\chi^*)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_k\chi)}\chi\right)$ [18-19], тогда для лагранжиана вида $L = |D_k\chi^*|^2 - m^2\chi^*\chi = \partial_k\chi^*\partial^k\chi - ig_\chi(\chi^*)^2\gamma_k\partial^k\chi + ig_\chi\gamma^k(\partial_k\chi^*)\chi^2 + g_\chi^2(\chi^*)^2\chi^2 - m^2\chi^*\chi$, где $D_k = \partial_k - ig_\chi\chi^*$, указанный 4-вектор равен

$$j_k = i(\chi^*(\partial_k\chi + ig_\chi\chi^2) - (\partial_k\chi^* - ig_\chi(\chi^*)^2)\chi)$$

Учитывая соотношение $m\psi_k = \hat{\partial}_k\psi$ и $\hat{\partial}^k\psi_k = m\psi$ [18, 21], получим

$$j_k = m(\chi^*\chi_k + \chi_k^*\chi) - g_\chi(\chi^*\chi^2 + (\chi^*)^2\chi) = mj'_k$$

Используя полученное выражение, преобразуем лагранжиан (1.46)

$$\begin{gathered} L = \partial_k\chi^*\partial^k\chi - mg_\chi\gamma^k\chi_k^*\chi^2 - mg_\chi(\chi^*)^2\gamma^k\chi_k - mj'_k g_b\bar{B}^k + \\ + g_\chi^2(\chi^*)^2\chi^2 + (g_b^2|\bar{B}_k|^2 - m^2)\chi^*\chi + L_B, \end{gathered} \tag{1.47}$$

Слагаемые (1.47) с множителем m можно интерпретировать как массивные члены соответствующих бозонов, слагаемые с разными степенями χ^* и χ - как функцию $V(\chi, \chi^*)$. Массивный член $mj'_k g_b\bar{B}^k$ выражения (1.47) после вторичного квантования переходит в оператор взаимодействия поля $\bar{B}^k$ с полем χ [18-19]. Вероятность, например, испускания массивной частицы пропорциональна $mg_b|\int j'_k\bar{B}^k\sqrt{\rho}d^3x|^2$, где ρ – определитель пространственного метрического тензора, $\sqrt{\rho}d^3x$ – 3-объем в криволинейных координатах [17-18] (дополнение 4). Считаем, что 4-вектор j'_k и поле $\bar{B}^k$, а также ρ (действительный неотрицательный) квадратично интегрируемы, тогда согласно неравенству Коши-Шварца [23]

$$\left|\int\limits_V \bar{B}^k j'_k\sqrt{\rho}d^3x\right|^2 \leqslant \int\limits_V |\bar{B}^k|^2\sqrt{\rho}d^3x \int\limits_V |j'_k|^2\sqrt{\rho}d^3x$$

Поскольку SU(2)-симметричное поле $\bar{B}^k = (\tau_1 B^{1k} + \tau_2 B^{2k} + \tau_3 B^{3k})/2$, то

$$\left|\int\limits_V \bar{B}^k j'_k\sqrt{\rho}d^3x\right|^2 \leqslant \frac{\tau_0}{4}\int\limits_V ((B^{1k})^2 + (B^{2k})^2 + (B^{3k})^2)\sqrt{\rho}d^3x \int\limits_V |j'_k|^2\sqrt{\rho}d^3x \tag{1.48}$$

Учитывая лагранжиан (1.47), выражение (1.48) можно интерпретировать как вероятность испускания трех массивных частиц поля $\bar{B}^k$.

Сравнивая лагранжиан (1.39) и (1.45), возникает следующее противоречие: первый из них описывает самодействующее нейтральное поле χ, второй – самодействующее заряженное поле χ^*. Разрешить данное противоречие можно, рассмотрев лагранжиан вида [19, 40]

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}(D_k\chi^* - D_k\chi)(D^k\chi - D^k\chi^*) - \frac{1}{2}m^2(\chi^* + \chi)^2 = \\ = |D_k\chi^* D^k\chi| - \frac{1}{2}|D_k\chi|^2 - \frac{1}{2}|D_k\chi^*|^2 - \frac{1}{2}m^2(|\chi^*|^2 + 2\chi^*\chi + |\chi|^2) = \\ = (|D_k\chi^* D^k\chi| - m^2\chi^*\chi) - \frac{1}{2}(|D_k\chi|^2 + m^2|\chi|^2) - \frac{1}{2}(|D_k\chi^*|^2 + m^2|\chi^*|^2) \end{gathered} \tag{1.49}$$

где $D_k = \partial_k - ig_{\chi^*}\chi^*$ и $D_k = \partial_k - ig_\chi\chi$.

Лагранжиан (1.49) распадается на три части, каждая из которых благодаря достаточно сильному самодействию описывает фактически изолированное заряженное поле. Ниже показано (см. пункт 2.1), что самодействующие нелинейные поля вида (1.49) имеют солитонный тип, т. е. представляют собой уединенные волны, ведущие себя подобно частицам. Исходя из этого, можно допустить, что такие частицы являются достаточно тяжелыми и составными (не элементарными) [41-42]. В дополнении 4 на основе уравнений Эйнштейна представлено обоснование того, что роль нелинейного скалярного поля при спонтанном нарушении симметрии может играть гравитационное взаимодействие. Лагранжиан (5.5) и уравнение (5.4) получены для одночастичной системы (дополнение 4). Если предположить, что указанная система состоит из набора взаимодействующих частиц, то массовый член должен представлять собой квадрат суммы по всем частицам с учетом их распределения в пространстве (тензор энергии-импульса). В этом случае солитоны могут содержать не одну, а несколько таких взаимодействующих частиц, поэтому допущение о составной (не элементарной) частице является обоснованным.

2 Объединение фундаментальных взаимодействий

Фактически предложенной теории (пункт 1.1 – 1.3) достаточно, чтобы интегрировать гравитационного взаимодействия в СМ. Для этого необходимо "удлинить" ковариантные производные лагранжиана СМ кроме производных скалярного поля (1.45), добавить три промежуточных массивных бозона (1.48), учесть переход SU(3)-симметрии к SU(2), а точнее к SU(2)×U(1)-симметрии. Предположим, что этой симметрии достаточно для объединения известных фундаментальных взаимодействий. Такое объединение можно обосновать, прежде всего, тем, что известная теория Вайнберга-Салама-Глэшоу, доказавшая во многих экспериментах свою состоятельность, не выходит за рамки SU(2)×U(1) – симметрии. Следующим аргументом может служить тот факт, что для описания левых лептонов и кварков достаточно объединить их в дублеты (правые частицы, как известно, рассматриваются в виде синглетов). Как только предпринимается попытка объединить их в виде большего мультиплета, то сразу возникает необходимость в рассмотрении достаточно большого количества промежуточных бозонов и хиггсовых частиц, существование которых на сегодняшний день экспериментально не подтверждено. Отдельно необходимо отметить, что SU(3) – симметрия сильного взаимодействия ограничена конфайнментом, который в экспериментальных наблюдениях не дает возможности определить предсказанное количество частиц [26-27]. Следовательно, рассмотрение лагранжиана СМ на уровне SU(2)×U(1) – симметрии с учетом предложенной теории гравитационного взаимодействия (пункт 1.1 – 1.3) обосновано. В таком случае остается вопрос о роли SU(3)-симметрии в объединении фундаментальных полей. Известно, что существует гипотеза о некотором обобщенном поле, в рамках которого объединены все известные виды взаимодействий. Обозначим его как $\tilde{\Phi}_k$ и предположим, что данное поле имеет SU(3)-симметрию.

2.1 Сильное взаимодействие

Рассмотрим следующий лагранжиан (см. пункт 1.2 и 1.3):

$$L = \frac{1}{2}(\partial_k \chi)^2 + \frac{1}{2}(g_\chi^2 \chi^4 + 2g_{\Phi SU(3)}\gamma^k \tilde{\Phi}_k g_\chi \chi^3 - g^2_{\Phi SU(3)}|\tilde{\Phi}_k \chi|^2) + L_\Phi, \tag{2.1}$$

где L_Φ – лагранжиан свободного поля $\tilde{\Phi}_k$, g_Φ - постоянная данного взаимодействия, и согласно дополнению 3 вектор $\tilde{\Phi}_k = \Phi_{ak}\bar{\lambda}^a/2$ представим в виде

$$\tilde{\Phi}_k = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{\Phi_{1k}}{2} + \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{\Phi_{2k}}{2} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{\Phi_{3k}}{2} + \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\frac{\Phi_{4k}}{2} +$$

$$+ \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&1&0\\i&0&0\end{pmatrix}\frac{\Phi_{5k}}{2} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\frac{\Phi_{6k}}{2} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\frac{\Phi_{7k}}{2} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{\Phi_{8k}}{2}$$

Если базисные вектора (e_1, e_2, e_3) обозначить, например, следующим образом:

$$e_1 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\text{тогда выражение } (\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_i)/2 = \begin{cases} e_1, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 1,2,3 \\ e_2, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 4,5,8 \\ \begin{cases} e_3, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 6,7,3 \\ e_3, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 6,7,8 \end{cases} \\ I\ , \text{ если } i = k \text{ и } i,k = 1,\ldots,8 \end{cases}$$

Приведя квадратичную форму лагранжиана (2.1) к сумме квадратов (1.39 – 1.41), получим лагранжиан некоторого поля $\tilde{C}_k$, представляющего собой результат взаимодействия скалярного поля χ и векторного $\tilde{\Phi}_k$ (см. выражение 1.41):

$$L = \frac{1}{2}(\partial_k \check{\chi})^2 + \frac{1}{2}(\check{g}_\chi^2 \check{\chi}^4 - g_{cSU(2)}^2 |\tilde{C}_k \check{\chi}|^2) + L_C, \quad (2.2)$$

где L_C – лагранжиан поля $\tilde{C}_k$.

Предполагая, что $g_{cSU(2)} > g_{cSU(3)}$, понизим порядок определителей матриц $\bar{\lambda}_{1,2,4,5,6,7}$ (2.1) в соответствии с базисными векторами (e_1, e_2, e_3) и $\bar{\lambda}_{3,8}$ согласно (e_3) (дополнение 3), тогда

$$\tilde{C}_k = \frac{\tau_1}{2}(C_{1k} + C_{4k} + C_{6k}) + \frac{\tau_2}{2}(C_{2k} + C_{5k} + C_{7k}) - \frac{\tau_3}{2}C_{3k} + \frac{\tau_3}{2}\frac{C_{8k}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\tau_1}{2}C_{(1,4,6)k} + \frac{\tau_2}{2}C_{(2,5,7)k} + \frac{\tau_3}{2}C_{(3,8)k}$$

где $C_{(1,4,6)k} = (C_{1k} + C_{4k} + C_{6k})$, $C_{(2,5,7)k} = (C_{2k} + C_{5k} + C_{7k})$ и $C_{(3,8)k} = ((C_{8k}/\sqrt{3}) - C_{3k})$.

После перехода поля $\tilde{C}_k$ от SU(3) к SU(2)-симметрии необходимо рассмотреть его взаимодействие с полем χ^* в виде выражения (1.42):

$$|D_k \chi^*|^2 = |(\partial_k - i g_{cSU(2)} \tilde{C}_k - i g_{\chi^*} \chi^*)\chi^*|^2 \quad (2.3)$$

Приводя квадратичную форму выражения (2.3) к сумме квадратов, получим следующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\partial_k \chi^*)^2 + \frac{1}{2}(g_{\chi^*}^2 (\chi^*)^4 - g_{cU(1)}^2 |\tilde{C}_k \chi^*|^2) + L_C = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_k \chi^*)^2 + \frac{1}{2} g_{\chi^*}^2 (\chi^*)^4 - \frac{\tau_0}{8} g_{cU(1)}^2 (C_{(1,4,6)k}^2 + C_{(2,5,7)k}^2 + C_{(3,8)k}^2)(\chi^*)^2 + L_C \end{aligned} \quad (2.4)$$

Считая $g_{cU(1)} > g_{cSU(2)}$, можно предположить, что в ходе приведения квадратичной формы выражения (2.3) постоянная взаимодействия $g_{cSU(2)}$ переходит в $g_{cU(1)}$. Квадратичные члены при $(\chi^*)^2$ лагранжиана (2.4) можно интерпретировать как три составных поля, два из которых обладают цветовым зарядом и одно поле - бесцветное.

Представим лагранжиан (2.4) в виде следующей суммы: $L = L_{C_3,C_8} + L_{C_1,C_4,C_6} + L_{C_2,C_5,C_7} + L_{sv}$ и отдельно рассмотрим один из данных лагранжианов (доп. коэффициенты не указаны):

$$L_{C_1,C_4,C_6} = \frac{1}{2}(\partial_k \chi^*)^2 + \frac{1}{2} g_{\chi^*}^2 (\chi^*)^4 - \frac{1}{8} g_{cU(1)}^2 C_{(1,4,6)k}^2 (\chi^*)^2 \quad (2.5)$$

Варьируя по χ^* (2.5), получим следующее уравнение движения:

$$-\partial_k \partial^k \chi^* + 2 g_{\chi^*}^2 (\chi^*)^3 - \frac{1}{4} g_{cU(1)}^2 C_{(1,4,6)k}^2 \chi^* = 0 \quad (2.6)$$

Предположим, что поле $C_{(1,4,6)k}$ постоянное, тогда уравнение (2.6) имеет солитонное решение, т. е. $\chi^* = \dfrac{g_{cU(1)} \gamma^k C_{(1,4,6)k}}{2 g_{\chi^*} ch(g_{cU(1)} C_{(1,4,6)k} x^k/2)}$ ($\gamma^k \gamma_k \sim 1$) [31-32]. Аналогичное решение можно получить для $C_{(2,5,7)k}$ и $C_{(3,8)k}$. Следовательно, взаимодействие поля $C_{(1,4,6)k}$, $C_{(2,5,7)k}$ и $C_{(3,8)k}$ с самодействующим полем χ^* необходимо интерпретировать, как формирование уединенных волн (ведущих себя подобно частицам) в нелинейной среде, роль которой играет поле χ^*. Поскольку в нелинейной среде не выполняется принцип суперпозиции, то солитоны способны взаимодействовать друг с другом, не разрушаясь. Они, как и частицы, могут образовывать связанные состояния из двух или более импульсов и т. д. [31-33].

Необходимо отметить, что уравнение вида (2.6) можно отнести к нелинейным уравнениям, которые активно применялись в мезоннной теории для описания самодействующего мезонного поля [34-39]. Уравнения указанной нелинейной теории имеют как стационарные, так и периодические аналитические решения. На их основе, применяя полуклассический метод квантования, рассчитан спектр масс, проведен спектральный анализ энергий, получены спиновые характеристики частиц и др. В рамках данной мезонной теории предложен и рассмотрен ряд нелинейных аналогов уравнения Клейна-Гордона-Фока и Дирака [34-39].

Таким образом, покаано, что взаимодействие скалярного поля χ и векторного $\tilde{\Phi}_k$ приводит к появлению некоторого поля $\tilde{C}_k$, которое можно интерпретаровать как сильное взаимодействие.

2.2 Электрослабое взаимодействие

После приведения квадратичной формы лагранжиана (2.1) к сумме квадратов (1.39 – 1.41) поле $\tilde{C}_k\check{\chi} = -\chi^2 sin\beta_1 + \chi\tilde{\Phi}_k cos\beta_1$ и можно определить поле $\check{\chi}^2 = \chi^2 cos\beta_1 + \chi\tilde{\Phi}_k sin\beta_1$. Предположим, что нелинейное скалярное поле $\check{\chi}$ взаимодействует с $\tilde{\Phi}_k$. В этом случае необходимо рассмотреть лагранжиан вида (2.1). Приведя его к сумме квадратоа (2.2) и заменив $g^2_{cSU(2)}\tilde{C}_k$ новым полем $g^2_{bSU(2)}\tilde{B}_k$, имеем

$$L = \frac{1}{2}(\partial_k\check{\chi})^2 + \frac{1}{2}(\check{g}^2_\chi\check{\chi}^4 - g^2_{bSU(2)}|\tilde{B}_k\check{\chi}|^2) + L_B, \tag{2.7}$$

где $\tilde{B}_k\check{\chi}_2 = -\check{\chi}^2 sin\beta_2 + \check{\chi}\tilde{\Phi}_k cos\beta_2$ и $g^2_{bSU(2)}$ – постоянная взаимодействия, полученная при решении характеристического уравнения (1.40).

Аналогично (пункт 2.1) понизим порядок определителей матриц $\bar{\lambda}_{1,2,4,5,6,7}$ (2.1) в соответствии с базисными векторами (e_1, e_2, e_3). Однако в отличие от сильного взаимодействия для матриц $\bar{\lambda}_{3,8}$ понижение порядка теперь проведем согласно (e_2) (дополнение 3), получим

$$\tilde{B}_k = \frac{\tau_1}{2}(B_{1k} + B_{4k} + B_{6k}) + \frac{\tau_2}{2}(B_{2k} + B_{5k} + B_{7k}) - \frac{\tau_0}{2}B_{3k} + \frac{\tau_3}{2}\frac{B_{8k}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\tau_1}{2}B_{(1,4,6)k} + \frac{\tau_2}{2}B_{(2,5,7)k} + \frac{\tau_3}{2}\frac{B_{8k}}{\sqrt{3}} - \frac{\tau_0}{2}B_{3k} = \bar{B}_k - \frac{\tau_0}{2}B_{3k}$$

Далее рассматрим его взаимодействие с полем χ^* в виде выражения (1.42):

$$\begin{aligned} |D_k\chi^*|^2 &= |(\partial_k - ig_{bSU(2)}\tilde{B}_k - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2 = \\ &= |(\partial_k - ig_{bSU(2)}\bar{B}_k + ig_{bSU(2)}\frac{\tau_0}{2}B_{3k} - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Приводя соответствующую (2.8) квадратичную форму к сумме квадратов, получим кубическое уравнение аналогичное выражению (1.44), у которого один из корней равен нулю. Что в свою очередь ведет к появлению поля B_{3k} взаимодействующего с χ^* и поля $\bar{B}_k$, выпадающего из этого взаимодействия. Считая $g_{bU(1)} > g_{bSU(2)}$, можно предположить, что в ходе приведения квадратичной формы (2.8) постоянная взаимодействия $g_{bSU(2)}$ переходит в $g_{bU(1)}$. Поле B_{3k} с постоянной взаимодействия $g_{bU(1)}$ можно интерпретировать как электромагитное взаимодействие, а поле $\bar{B}_k$ с постоянной взаимодействия $g_{bSU(2)}$ – как слабое взаимодействие.

Далее поле $\bar{B}_k$ приобретает массу в соответствии с лагранжианом вида (1.45):

$$L = |D_k\chi^* D^k\chi| - m^2\chi^*\chi + L_B, \tag{2.9}$$

где $D_k = \partial_k - ig_{bSU(2)}\bar{B}_k - ig_{\chi^*}\chi^*$ и $D^k = \partial^k - ig_{bSU(2)}\bar{B}^k - ig_{\chi}\chi$.
Согласно выражению (1.48) можно определить вероятность испускания массивных частиц $(\int\limits_V |\bar{B}_k|^2\sqrt{\rho}d^3x \int\limits_V |j_k'|^2\sqrt{\rho}d^3x = \int\limits_V (B^2_{(1,4,6)k} + B^2_{(2,5,7)k} + \frac{1}{3}B^2_{8k})\sqrt{\rho}d^3x \int\limits_V |j_k'|^2\sqrt{\rho}d^3x)$, т. е. получим три массивные частицы., из которых две обладают зарядом и одна нейтральная. Масса поля B_{3k} осталась равной нулю.

2.3 Объединение фундаментальных взаимодействий

Гравитационное взаимодействие определяется аналогичным образом (пункт 2.1 и 2.2): порядок определителей матриц $\bar{\lambda}_{1,2,4,5,6,7}$ (2.1) необходимо понизить в соответствии с базисными векторами (e_1, e_2, e_3), а матриц $\bar{\lambda}_{3,8}$ - согласно (e_1) (дополнение 3). В результате получим

$$\tilde{\Gamma}_k = \frac{\tau_1}{2}(\Gamma_{1k} + \Gamma_{4k} + \Gamma_{6k}) + \frac{\tau_2}{2}(\Gamma_{2k} + \Gamma_{5k} + \Gamma_{7k}) + \frac{\tau_3}{2}\Gamma_{3k} - \frac{\tau_0}{2}\frac{\Gamma_{8k}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\tau_1}{2}\Gamma_{(1,4,6)k} + \frac{\tau_2}{2}\Gamma_{(2,5,7)k} + \frac{\tau_3}{2}\Gamma_{3k} - \frac{\tau_0}{2}\frac{\Gamma_{8k}}{\sqrt{3}} = \bar{\Gamma}_k - \frac{\tau_0}{2}\frac{\Gamma_{8k}}{\sqrt{3}}$$

Тогда согласно (1.19) и (1.26 – 1.29) имеем

$$|D_k\chi^*|^2 = |(\partial_k - ig_\gamma\tilde{\Gamma}_k - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2 = |(\partial_k + ig_\gamma\frac{\tau_0}{2}\frac{\Gamma_{8k}}{\sqrt{3}} - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2 =$$

$$= |(\partial_k + i\Gamma_{k,nm}g^{nm} - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2 = |(D_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2$$

Поскольку поле χ^* считаем скалярным, то $|D_k\chi^*|^2 = |(\partial_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k - ig_{\chi^*}\chi^*)\chi^*|^2$. Далее аналогично сильному взаимодействию (пункт 2.1) получаем векторное поле $\bar{\Gamma}_k$ с нулевой массой (пункт 1.3).

Гравитационное поле (дополнение 4) должно откалываться от $\tilde{\Phi}_k$ первым и далее взаимодействуя с ним же, формировать сильное и электрослабое взаимодействие. Разделение поля $\tilde{\Phi}_k$ определяется матрицами $\bar{\lambda}_{3,8}$ в соответствии с базисными векторами (e_1, e_2, e_3). Если к $\tilde{\Phi}_k$ добавить компонент $\Phi_{9k}\bar{\lambda}^9/2$:

$$\tilde{\Phi}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{1k}}{2} + \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{2k}}{2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{3k}}{2} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{4k}}{2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{5k}}{2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{8k}}{2} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{6k}}{2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{7k}}{2} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\Phi_{9k}}{2}$$

то выражение $(\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_i)/2 = \begin{cases} \begin{cases} e_1, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 1,2,3 \\ e_1, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 1,2,9 \end{cases} \\ \begin{cases} e_2, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 4,5,8 \\ e_2, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 4,5,9 \end{cases} \\ \begin{cases} e_3, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 6,7,3 \\ e_3, \text{ если } i \neq k \text{ и } i,k = 6,7,8 \end{cases} \\ I, \text{ если } i = k \text{ и } i,k = 1,\dots,9 \end{cases}$

Поэтому можно предположить, что данный компонент (его отсутствие или нереализованность) определяет характер разделения поля $\tilde{\Phi}_k$ и отличительные особенности фундаментальных взаимодействий.
Отдельно необходимо рассмотреть уравнение (1.24). Поскольку ϕ – скалярное поле, то

$$\gamma^k(\hat{\partial}_k - ig_\gamma\bar{\Gamma}_k)\phi - \sqrt{\zeta T}\phi = 0 \tag{2.10}$$

Перепишем выражение (2.10) с учетом ковариантной производной (1.19), получим

$$\gamma^k(\tau_0\hat{\partial}_k - (\tau_1 i\Gamma_k + \tau_2\partial_k g + \tau_3 i\Gamma^n_{kn}))\phi - \tau_0\sqrt{\zeta T}\phi = 0 \tag{2.11}$$

Следовательно, решение уравнения (2.12) можно представить в виде дублета биспиноров или путем дополнительных преобразований сформировать систему уравнений Дирака.
Учитывая равенство (1.27 – 1.29) и повышая порядок определителей матриц Паули (дополнение 3), перейдем в выражении (2.11) к SU(3)-симметрии:

$$\gamma^k(\tau_0\hat{\partial}_k - \tau_1(\Gamma_{1k} + \Gamma_{4k} + \Gamma_{6k}) - \tau_2(\Gamma_{2k} + \Gamma_{5k} + \Gamma_{7k}) - \tau_3\Gamma_{3k})\phi - \tau_0\sqrt{\zeta T}\phi =$$

$$= \gamma^k(I\hat{\partial}_k - \Gamma_{ak}\bar{\lambda}^a - \bar{\lambda}_3\Gamma_{3k})\phi - I\sqrt{\zeta T}\phi,$$

где $a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$.

Определитель τ_3 можно выразить следующим образом: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$,
что соответствует матрице $\bar{\lambda}_3$ и $\bar{\lambda}_8$ (2.1), т. е. в этом случае существует два способа повысить порядок данного определителя, поэтому получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\gamma^k(I\hat{\partial}_k - \Gamma_{ak}\bar{\lambda}^a - \bar{\lambda}_3\Gamma_{3k})\phi_1 - I\sqrt{\zeta T}\phi_1 = 0 \\ &\gamma^n(I\hat{\partial}_n - \Gamma_{an}\bar{\lambda}^a - \bar{\lambda}_8\Gamma_{3n})\phi_2 - I\sqrt{\zeta T}\phi_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Поскольку ϕ_1 и ϕ_2 выражения (2.12) можно представить в виде триплета биспиноров, то предположим, что уравнения (2.12) описывают некоторые фермионы. След тензора энергии-импульса материи, входящий в (2.12), автоматически придает им определенную специфику. Это связано с тем, что для следа тензора энергии-импульса достаточно часто требуется проводить известную "перенормировку" (регуляризацию) с целью исключить бесконечные вклады полей (расходящиеся диаграммы) соответвтвующих лагранжианов [19-20]. Специфика фермионов (2.12) проявляется также в следующем: если рассмотреть пустое пространство ($T_{ik} = 0$), то уравнения гравитационного поля имеют вид $R_{ik} = 0$ [17] и вместо двух уравнений (2.12) рассматривать необходимо одно "вырожденное" уравнение (без компонента Γ_{3n}), т. е. один триплет фермионов. Это можно обосновать тем, что равенство нулю тензора Риччи не означает, что пустое пространство-время является плоским, – для этого требуются более сильные условия ($R_{iklm} = 0$) [17]. Поэтому упрощенно "вырождение" уравнений (2.12) можно обосновать тем, что при переходе от тензора Риччи к тензору Римана (R^i_{klm}) компонент $\Gamma_{3n} = \Gamma^j_{nj}$ (1.25) переходит в Γ^i_{nl} [17], который согласно SU(3)-симметрии необходимо выразить, как $\Gamma^i_{nl} = \Gamma'_{bk}\bar{\lambda}^b/2$ ($b = 3, 8, 9$). Поскольку $\Gamma'_{9k}\bar{\lambda}^9/2$ не реализуется, то компонент Γ_{3n} отсутствует.

Учитывая вышеизложенное, аккуратно можно предположить, что уравнения (2.12) описывают фермионы, отличные от известных лептонов и кварков.

Дополнение 1

В криволинейных координатах четырехмерный оператор ($\hat{\partial}_n = -i\partial_n$) переходит в свою ковариантную форму ($\hat{D}_n$). Это можно показать на основе импульсного представления скалярных функций поля $\psi(x_n)$. Известно [19], что импульсная амплитуда $\psi(k_n)$ удовлетворяет уравнению вида (массовый член равен нулю)

$$\gamma^n k_n \psi(k_n) = 0 \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) следует из уравнения Дирака с учетом, что ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию [17, 19, 21]. С помощью четырехмерного интеграла Фурье амплитуду $\psi(k_n)$ можно представить, как

$$\psi(k_n) = \int \psi(x_n) e^{-ik_n x^n} \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{3.2}$$

где $\sqrt{-g}\, d\Omega$ – 4-объем в криволинейных координатах (нормировочный множитель фурье-преобразования не указан). Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$\gamma^n k_n \psi(k_n) = \gamma^n k_n \int \psi(x_n) e^{-ik_n x^n} \sqrt{-g}\, d\Omega = \gamma^n \int \psi(x_n) k_n e^{-ik_n x^n} \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{3.3}$$

Произведение $k_n e^{-ik_n x^n}$ можно заменить на $i\partial_n (e^{-ik_n x^n})$, т. е.

$$\gamma^n k_n \psi(k_n) = \gamma^n \int \sqrt{-g} \psi(x_n) i\partial_n (e^{-ik_n x^n}) d\Omega \tag{3.4}$$

Проводя интегрирование по частям и предполагая, что $\psi(x_n)$ и ее производные обращаются в нуль на границах интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \gamma^n k_n \psi(k_n) &= \gamma^n \int e^{-ik_n x^n} (\hat{\partial}_n \sqrt{-g} \psi(x_n)) d\Omega = \\ &= \gamma^n \int e^{-ik_n x^n} (-i\psi(x_n) \partial_n \sqrt{-g} - i\sqrt{-g} \partial_n \psi(x_n)) d\Omega = \\ &= \gamma^n \int e^{-ik_n x^n} \sqrt{-g} (-i\partial_n - i\Gamma^k_{nk}) \psi(x_n) d\Omega = \int e^{-ik_n x^n} (\hat{D}_n \psi(x_n)) \sqrt{-g}\, d\Omega \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для $\hat{D}_n$ выполняется известное перестановочное соотношение (F^n – 4-вектор), а именно

$$F^n \hat{D}_n - \hat{D}_n F^n = i D_n F^n \tag{3.6}$$

Выражение (1.3) можно привести в соответствии с равенством (3.5):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g} \partial^k \phi) = \partial_k \partial^k \phi + \Gamma^m_{km} \partial^k \phi = (-i\partial_k - i\Gamma^m_{km})(i\partial^k \phi) = |\hat{D}_k|^2 \phi \tag{3.7}$$

Кроме того, выражение (1.4) необходимо представить с помощью ($\hat{D}_n$). Для этого

$$\partial^n \partial_n \phi - \Gamma^n_{kp} g^{kp} \partial_n \phi = \partial^n \partial_n \phi + \Gamma^k_{nk} \partial^n \phi + \partial_k g^{nk} \partial_n \phi, \tag{3.8}$$

где $\Gamma^n_{kp} g^{kp} = -\Gamma^k_{pk} g^{np} - \partial_k g^{nk}$ [17]. Используя $\partial_k \partial^k \phi = \partial_k (g^{nk} \partial_n \phi) = \partial_k g^{nk} \partial_n \phi + g^{nk} \partial_k \partial_n \phi$, далее получим

$$\partial^n \partial_n \phi - \Gamma^n_{kp} g^{kp} \partial_n \phi = \partial^n \partial_n \phi + \Gamma^k_{nk} \partial^n \phi + \partial_k \partial^k \phi - \partial^n \partial_n \phi = \partial_n \partial^n \phi + \Gamma^k_{nk} \partial^n \phi \tag{3.9}$$

Согласно (3.9) и (3.7) выражение (1.4) примет следующий вид

$$\partial^n \partial_n \phi - \Gamma^n_{kp} g^{kp} \partial_n \phi = (-i\partial^n + i\Gamma^n_{kp} g^{kp})(i\partial_n \phi) = |\hat{D}_n|^2 \phi \tag{3.10}$$

Дополнение 2

Чтобы показать взаимосвязь SU(2)-симметрии при локальных изотопических поворотах ($\psi' = S\psi$, где $S = e^{-i\alpha_a(x_n)\tau^a/2}$ и τ^a – матрицы изотопических поворотов, $\alpha_a(x_n)$ – параметры этих поворотов соответственно) с определителем метрического тензора ($\sqrt{-g}$), рассмотрим одно из условий (1.16):

$$D_n\Gamma_k^{kn} = \partial_n\Gamma_k^{kn} + \Gamma_{nl}^{l}\Gamma_k^{kn} = 0 \tag{4.1}$$

Подставим в выражение (4.1) коэффициенты связности в виде $\Gamma_{kn}^{n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g}$:

$$D_n\Gamma_k^{kn} = \partial_n\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^n\sqrt{-g}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\sqrt{-g}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^n\sqrt{-g}\right) = 0 \tag{4.2}$$

Раскрывая производную в первом слагаемом (4.2), получим

$$\begin{aligned} D_n\Gamma_k^{kn} = -\frac{1}{\sqrt{-g}\sqrt{-g}}(\partial_n\sqrt{-g})\partial^n\sqrt{-g} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\partial^n\sqrt{-g} + \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\sqrt{-g}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^n\sqrt{-g}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Сокращая первое и последнее слагаемое, имеем

$$D_n\Gamma_k^{kn} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\partial^n\sqrt{-g} = 0 \tag{4.4}$$

Считаем, что в полученном выражении (4.4) множитель $1/\sqrt{-g}$ не равен нулю, тогда необходимо рассмотреть волновое уравнение $\partial_n\partial^n\sqrt{-g} = 0$, в соответствии с которым $\sqrt{-g} = e^{-ik_nx^n} = e^{-i\beta(x_n)}$ [17]. Если фазу $\beta(x_n)$ представить в виде $\alpha_a(x_n)\tau^a/2$, то подставляя ее в равенство (3.2) (дополнение 1), получим

$$\begin{aligned} \psi(k_n) = \int \psi(x_n)e^{-ik_nx^n}\sqrt{-g}d\Omega = \int e^{-i\beta(x_n)}\psi(x_n)e^{-ik_nx^n}d\Omega = \\ = \int S\psi(x_n)e^{-ik_nx^n}d\Omega = \int \psi'(x_n)e^{-ik_nx^n}d\Omega \end{aligned} \tag{4.5}$$

Дополнение 3

Миноры матриц Гелл-Манна:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \;\; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \tau_2$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \;\; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \tau_2$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \;\; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_7 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \tau_2$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \tau_3 \;\; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \tilde{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\tau_0}{\sqrt{3}}$$

Известно, что $\tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = \tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, однако $\lambda_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. квадрат любой матрицы Гелл-Манна не равен единичной матрице $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Чтобы данное соотношение выполнялось и для матриц Гелл-Манна, необходимо λ_1 (или λ_2, λ_3) просуммировать с матрицей вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = I$. Получим тот же результат, если возвести в кватрат сумму λ_4 (или λ_5) и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, сумму λ_6 (или λ_7) и матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Преобразованные первые семь матриц Гелл-Манна имеют то же значение определителя, что и матрицы Паули. Кроме того данное преобразование эквивалентно увеличению порядка определителей SU(2)-группы, т. е. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, также можно воспользоваться свойствами определителя при перестановке строк или столбцов $\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}$. Если λ_8 умножить на $\sqrt{3}$ и прибавить к ней матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I$. Необходимо отметить [20–21], что матрицы Паули достаточно часто дополняют единичной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В таких случаях требуется учитывать, что $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Дополнение 4

Рассмотрим уравнения Эйнштейна в виде $R = -\zeta T$ [17]. Скалярную кривизну R представим с помощью выражения (1.1), тогда $R = g^{ik}R_{ik} = g^{ik}(\partial_l \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})$. Считая это равенство ковариантной производной [16], т. е. $g^{ik}(\partial_l \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}) = g^{ik}D_l\Gamma^l_{ik}$, и учитывая, что $D_l g^{ik} = 0$ [16-17], получим $R = \partial_l(\Gamma^l_{ik}g^{ik}) + \Gamma^l_{ik}g^{ik}\Gamma^m_{lm}$. Согласно выражению (1.2) имеем $R = \partial^l(\Gamma_{l,ik}g^{ik}) - \Gamma_{l,ik}g^{ik}\Gamma^l_{nj}g^{nj}$. В этом случае уравнения примут вид

$$\partial^l(\Gamma_{l,ik}g^{ik}) - \Gamma_{l,ik}g^{ik}\Gamma^l_{nj}g^{nj} = -\zeta T \tag{5.1}$$

Заменяя в выражении (5.1) производную (∂^l) на $(-i\partial^l)$ и умножая обе части на i, получим

$$(\partial^l - i\Gamma^l_{nj}g^{nj})\Gamma_{l,ik}g^{ik} = -i\zeta T \tag{5.2}$$

Взяв по модулю квадрат правой и левой части выражения (5.2), имеем

$$|\partial^l(\Gamma_{l,ik}g^{ik}) - i\Gamma^l_{nj}g^{nj}\Gamma_{l,ik}g^{ik}|^2 = \zeta^2|T|^2 \tag{5.3}$$

Известно, что след тензора энергии-импульса системы взаимодействующих частиц можно представить в виде: $T = g^{ik}T_{ik} = g^{ik}(\sum\limits_a m_a c^2 u_i u_k \sqrt{1 - \upsilon_a^2/c^2}\delta(r - r_a))$, где υ_a и r_a – скорости и радиус-векторы частиц, а суммирование производится по всем частицам системы [17]. Поскольку $du^l/ds = -\Gamma^l_{ik}u^i u^k$ и $u^k u_k = 1$ [17], то $u_i u_k = -\Gamma^l_{ik}ds/du^l$. Если $\upsilon_a \ll c$ и 4-ускорение $du^l/ds \sim 1$ (или равно некоторой постоянной), то сводя след тензора энергии-импульса к одночастичной системе, получим $T = -mc^2\Gamma^l_{ik}g^{ik}$. Подставляя это выражение в уравнение (5.3), имеем

$$|\partial^l(\Gamma_{l,ik}g^{ik}) - i\Gamma^l_{nj}g^{nj}\Gamma_{l,ik}g^{ik}|^2 = m^2c^4\zeta^2|\Gamma^l_{ik}g^{ik}|^2 \tag{5.4}$$

Согласно (5.4) компоненты лагранжиана (1.49) можно выразить в виде ($D^l = \partial^l - i\Gamma^l_{nj}g^{nj}$):

$$L = -\frac{1}{2}(|D^l(\Gamma_{l,ik}g^{ik})|^2 + m^2c^4\zeta^2|\Gamma^l_{ik}g^{ik}|^2) \tag{5.5}$$

Скалярное поле из (1.49) можно связать с четвертой компонентой 4-вектора $\Gamma_{l,ik}g^{ik}$ [18-19]. Если изменить знак массивного члена (m^2), то согласно уравнению (5.4) лагранжиан (5.5) обратиться в нуль. С точки зрения спонтанного нарушения симметрии малые возмушения поля вблизи нуля нельзя рассматривать как частицы потому, что система неустойчива и перейдет в один из минимумов [20-21]. Кроме того равенство нулю указанного лагранжиана можно объяснить тем, что в нем не учтен псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля ($t = g_{ik}t^{ik}$) [17]. Упрощенно $t \sim g_{ik}\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp}g^{lm}g^{np}/2\zeta$, меняя индексы местами можно получить все компоненты t^{ik}, сумма которых определяет сам псевдотензор [17]. Добавляя его в лагранжиан (5.5), получим

$$L = -\frac{1}{2}(|D^l(\Gamma_{l,ik}g^{ik})|^2 + \frac{1}{4\zeta^2}|\Gamma_{k,ln}\Gamma^k_{mp}g^{lm}g^{np}|^2 + m^2c^4\zeta^2|\Gamma^l_{ik}g^{ik}|^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}((\partial^l\Gamma_{l,ik}g^{ik})^2 + |\Gamma^l_{nj}g^{nj}\Gamma_{l,ik}g^{ik}|^2 + \frac{1}{4\zeta^2}|\Gamma_{k,ln}\Gamma^k_{mp}g^{lm}g^{np}|^2 + m^2c^4\zeta^2|\Gamma^l_{ik}g^{ik}|^2)$$

Переходя к скалярному полю χ (1.49), имеем

$$L = -\frac{1}{2}((\partial_l\chi)^2 + g_\chi^2\chi^4 + m^2c^4\zeta^2\chi^2), \tag{5.6}$$

где $g_\chi^2 = (1 + 1/4\zeta^2)$ и $\zeta = 8\pi k/c^4$, k – гравитационная постоянная [17].

Литература

1. Y. Neiman JHEP01, 100 (2018).
2. А.Ю. Морозов, УФН 162, 83 (1992).
3. К.А. Губарев, Э.Т. Мусаев, УФН 194, 3 (2024).
4. S. Franco, ArXiv HEP-TH/2201.10987.
5. А. Салам, УФН 132, 2 (1980).
6. E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk Phys. Lett. Ser. B. 76, 409 (1978).
7. R.B. Nevzorov Physics-Uspekhi 66 (2023)
8. В.И. Огиевецкий, Л. Мезинческу, УФН 117, 4 (1975).
9. С. Глэшоу, УФН 132, 2 (1980).
10. С. Вайнберг, УФН 132, 2 (1980).
11. S. Weinberg Phys. Lett. 82B, 387 (1979).
12. H. Georgi, H.R. Quinn, S. Weinberg Phys. Rev. Lett. 33, 451 (1974).
13. M. Gunaydin, M. Gursey Phys. Rev. D9, 3387 (1974).
14. P. Ramond Nucl. Phys. B126, 509 (1977).
15. C. Yang, R. Mills Phys. Rev. 96, 191 (1954).
16. П.К. Рашевский Риманова геометрия и тензорный анализ, Едиториал УРСС, Москва (2003), с. 664.
17. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теория поля, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2001), с. 536.
18. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский Квантовая электродинамика, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2020), с. 720.
19. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков Введение в теорию квантованных полей, Наука, Москва (2008), с. 736.
20. Л.Б. Окунь Лептоны и кварки, ЛЕНАНД, Москва (2015), с. 352.
21. А.А. Богуш Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий, Едиториал УРСС, Москва (2012), с. 360.
22. А.А. Славнов, Л.Д. Фаддеев Введение в квантовую теорию калибровочных полей, Наука, Москва (1988), с. 272.
23. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике, Наука, Москва (1973), с. 832.
24. Сборник статей Нелинейная квантовая теория поля, Издательство иностранной литературы, Москва (1959), с. 464.
25. Сборник статей Новейшие проблемы гравитации, Издательство иностранной литературы, Москва (1961), с. 488.

26. Ф. Клоуз Кварки и партоны, Мир, Москва (1982), с. 440.

27. Я. Коккедэ Теория кварков, Мир, Москва (1971), с. 343.

28. R. Feynman ArXiv HEP-PH/2006.08594.

29. G. Altarelli ArXiv HEP-PH/0204179.

30. Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, Москва (1960), с. 414.

31. К. Ребби, УФН 130, 2 (1980).

32. Дж. Уизем Линейные и нелинейные волны, Наука, Москва (1977), с. 312.

33. А. Пекар Новый облик оптики, Сов. радио, Москва (1973), с. 264.

34. G. Petiau Nuov. Cim. 10, 542 (1958).

35. Д.Ф. Курдгелаидзе, ЖЭТФ 5, 941 (1957).

36. Д.Ф. Курдгелаидзе, ЖЭТФ 34, 1587 (1958).

37. Д.Ф. Курдгелаидзе, ЖЭТФ 36(9), 594 (1959).

38. А.А. Боргарт, ЖЭТФ 6, 43 (1958).

39. V.G. Iaichnitsyn, ЖЭТФ 31, 925 (1956)

40. К. Нишиджима Фундаментальные частицы, Мир, Москва (1965), с. 463.

41. А.А. Анеельм, Н.Г. Уральцев, В.А. Хозе, УФН 145, 185 (1985).

42. Б. Хайнеман, Й. Нир, УФН 189, 985 (2019).