УДК 517.53, 517.54

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КШИЖА

Ступин Д. Л.

ОТОЗВАНО: Доказательство содержит неустранимый пробел в доказательстве теоремы 7 на стр. 12.

Изложено доказательство гипотезы Кшижа, основанное на применении вариационного метода, а также на использовании двух классических результатов и некоторых их следствий. Упомянутыми результатами являются критерий Каратеодори-Тёплица продолжаемости полинома до функции класса Каратеодори и теорема Рисса-Фейера о тригонометрических многочленах.

Упомянутое доказательство является новым и элементарным, изложение даётся в замкнутой и самодостаточной форме. Все ссылки на литературу приведены для дополнительного ознакомления или как источники.

WITHDRAWN: The proof contains an uncorrectable gap in the proof of theorem 7 on page 12.

A proof of the Krzyz conjecture is presented, based on the application of the variational method, as well as on the use of two classical results and some of their consequences. The mentioned results are the Caratheodory–Toeplitz criterion of continuing a polynomial to a Caratheodory class function, and the Riesz–Fejer theorem about trigonometric polynomials.

The mentioned proof is new and elementary, presented in a self-contained and complete form. All literature references are provided for further reading or as sources.

Ключевые слова: критерий Каратеодори-Тёплица, теорема Рисса-Фейера, тригонометрические многочлены, тригонометрические полиномы, многочлены с положительной действительной частью, полиномы с положительной вещественной частью, класс Каратеодори, гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции

Keywords: Caratheodory-Toeplitz criterion, Fejer-Riesz Theorem, trigonometric Polynomials, polynomials with positive real part, Caratheodory class, the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions

Введение

Обозначим единичный круг через $\Delta := \{z \,:\, z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$, а единичную окружность — через $\partial\Delta$. Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество функций f, голоморфных в единичном круге Δ и удовлетворяющих условиям $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж выдвинул гипотезу [1], согласно которой, если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\theta}F(e^{i\varphi}z^n, 1)$, где

$$F(z,t) \coloneqq e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Задачу о нахождении

$$m_n \coloneqq \max_{f \in B} |\{f\}_n|,$$

будем называть проблемой Кшижа для номера n. Функцию $f \in B$ будем называть экстремальной в проблеме Кшижа для номера n, если $|\{f\}_n| = m_n$.

Задачу о точной оценке величины $|\{f\}_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$ на классе B будем называть проблемой Кшижа. Проблему Кшижа для фиксированного n также допустимо называть просто проблемой Кшижа, если это не приводит к недоразумениям.

Существование экстремалей в проблеме Кшижа для фиксированного номера n очевидно, поскольку после добавления к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, сопоставляющий каждой функции из B её тейлоровский коэффициент с номером n, является непрерывным на B.

Через Ω_0 обозначим класс функций ω, голоморфных в Δ и удовлетворяющих условиям $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть отображения G и g голоморфны в Δ. Функция g называется подчинённой для функции G в единичном круге Δ, если она может быть представлена в Δ в виде $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. В этом случае функцию G будем называть мажорантой для g в Δ. Теория подчинения изложена, в частности, в работе [3].

Класс функций, имеющих положительную вещественную часть в круге Δ, обозначим через C. Этот класс будем называть классом Каратеодори. Фиксируем $t > 0$. Множество функций h из C, нормированных условием $h(0) = t$, обозначим через C_t и будем называть нормированным классом Каратеодори, или просто классом Каратеодори, если это не вызовет недоразумений. Заметим, что $C \coloneqq \bigcup\limits_{t>0} C_t$.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in (0, +\infty)$. Соответствующие подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h \in C_1. \tag{2}$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1 и B_t. Очевидно также, что при каждом фиксированном $t > 0$ функция $F(z,t)$ является мажорантой для каждой функции из класса B_t.

Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leqslant 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах, начиная с 1934 года; первой из них была работа [2]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает затруднений с 1943 года [3]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, опираясь на оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [4]. Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t была получена в работе [5]. Аналогичная оценка на множестве функций из B_t с вещественными коэффициентами представлена в работе [6]. Для случая $n = 4$ следует упомянуть доказательство В. Шапеля [7]. Впервые оценка пятого коэффициента методом Шапеля была дана в работе Н. Самариса [8]. Автор данной статьи в работе [9], используя метод Шапеля, получил оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e + 0.00116077$, а в работе [10] — оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e$ с помощью численного метода.

Исследования по проблеме Кшижа можно разделить на несколько основных направлений. Одно из них — это оценки начальных коэффициентов, упомянутые в предыдущем абзаце. Отдельного внимания заслуживают так называемые асимптотические оценки, освещённые, например, в работах [11, 12]. Также выделяются равномерные по n оценки, полученные с использованием интегральной формулы Коши для всех натуральных n. В статье [13] была получена оценка $|\{f\}_n| \leqslant 1 - \frac{1}{3\pi} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{1}{12} = 0.999877\ldots$, а в диссертации [14, стр. 19] — улучшенная оценка $|\{f\}_n| \leqslant \frac{4}{5} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{20} = 0.999178\ldots$ Ещё одно важное направление связано с изучением свойств экстремальной функции и поиском функций класса B, обладающих этими свойствами. К этому направлению относятся, в частности, работы [4, 15, 16], а также настоящая статья.

С. Л. Крушкаль в работе [17] получил доказательство гипотезы Хаммеля-Шейнберга-Зальцмана [4, стр. 189] для функций из пространства H^p. Это доказательство получено благодаря применению нового метода, основанного на привлечении глубоких особенностей пространств Тейхмюллера. Гипотеза Кшижа является следствием гипотезы Хаммеля-Шейнберга-Зальцмана при $p \to \infty$.

Здесь даётся новое элементарное доказательство гипотезы Кшижа, изложенное в замкнутой и самодостаточной форме. Все ссылки на литературу приведены для дополнительного ознакомления или как источники.

1. Критерий Каратеодори-Тёплица

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат [18, 19]:

Теорема 1 (Каратеодори, Тёплиц). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_0 > 0$, $\{h\}_1, \ldots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. Многочлен*

$$Q_n(z) \coloneqq \{h\}_0 + \sum_{k=1}^{n} \{h\}_k z^k \tag{3}$$

можно продолжить до функции

$$h(z) \coloneqq Q_n(z) + o(z^n) \ \in \ C$$

тогда и только тогда, когда определители

$$M_k := \begin{vmatrix} 2\{h\}_0 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}}_1 & 2\{h\}_0 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}}_{k-1} & \overline{\{h\}}_{k-2} & \cdots & 2\{h\}_0 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}}_k & \overline{\{h\}}_{k-1} & \cdots & \overline{\{h\}}_1 & 2\{h\}_0 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

либо все положительны, либо положительны до некоторого номера $m \leqslant n$, начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, и числа $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что

$$h(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}. \tag{5}$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{n+1}$, точками которого являются наборы из $(n+1)$-го комплексного числа $h^{(n+1)} := (\{h\}_0, \ldots, \{h\}_n)$. Множество точек $h^{(n+1)}$ из пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ таких, что числа $\{h\}_0, \ldots, \{h\}_n$ являются первыми $n+1$ коэффициентами некоторой функции $h \in C$, обозначим через $C^{(n+1)}$ и будем называть $(n+1)$-ым телом коэффициентов класса C.

Проблема коэффициентов на классе C формулируется следующим образом: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа $\{h\}_0, \{h\}_1, \{h\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{h\}_0 + \{h\}_1 z + \{h\}_2 z^2 + \ldots$ являлся рядом Тейлора некоторой функции из класса C. Критерий Каратеодори-Тёплица даёт полное решение этой задачи.

2. Некоторые свойства экстремальной функции

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z и относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и функция f является экстремальной в проблеме Кшижа для этого номера n, то функция $\eta f(\zeta z)$ при $|\eta| = |\zeta| = 1$ также является экстремальной. При этом вращение в плоскости переменной z не затрагивает коэффициент $\{f\}_0$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что если f — экстремальная, то $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. В дальнейшем, говоря о функции f, экстремальной в проблеме Кшижа, будем подразумевать, что $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и $f \in B_t$, где $t = -\ln\{f\}_0$. Также, функцию, экстремальную в проблеме Кшижа для номера n часто будем называть просто экстремальной, если из контекста понятно о каком конкретно n идёт речь.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Если $f(z) = e^{-h(z)}$ — экстремальная функция, то, как известно [19, 20], точка $h^{(n+1)}$ принадлежит границе множества $C^{(n+1)}$, что равносильно тому, что $M_n = 0$ (M_n определён формулой (4)). Согласно критерию Каратеодори-Тёплица, это означает, что продолжение многочлена Q_n, определённого формулой (3), единственно. Следовательно, любая экстремальная функция имеет вид $f(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (5). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *функция* f *является экстремальной в проблеме Кшижа и* $t := -\ln\{f\}_0$. *Тогда найдутся числа* $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = t$, *и числа* $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$, *такие, что* $f(z) = e^{-h(z)}$, *где функция* h *задана формулой* (5), *причём* $m \leqslant n$.

Этот результат хорошо известен с начала XX века (см., например, [4, стр. 171] и [16, стр. 725]).

Заметим, что если $n \in \mathbb{N}$, а f и g — голоморфные в Δ функции, то

$$\{f \cdot g\}_n = \{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f, g *— голоморфные в* Δ *функции,* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *и*

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)}, \tag{7}$$

тогда

$$\{v\}_n = \{f\}_n - \varepsilon\{f \cdot g\}_n + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию v функции f функцией $e^{-\varepsilon g}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Устремив ε к нулю имеем:

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)} = f(z)(1 - \varepsilon g(z) + o(\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon f(z)g(z) + o(\varepsilon).$$

Вычислив теперь $\{v\}_n$ мы получим формулу (8). ■

Следующий результат позаимствован из [16, стр. 726]. Для полноты изложения приведём его вместе с доказательством, также взятым из указанной работы.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f *— функция, экстремальная в проблеме Кшижа и* $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, *тогда для любой функции* $g \in C$

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n) \geqslant 0. \tag{9}$$

В частности, если $h = -\ln f$, *то*

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) = 0. \tag{10}$$

Пусть

$$H(z) := \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n, \tag{11}$$

тогда

$$H \in C. \tag{12}$$

Более того, пусть $m \leqslant n$, *а числа* $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ *частично определяют функцию* $h := -\ln f$ *(см. формулу* (5)), *тогда*

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Доказательство. 1. Докажем формулу (9). Пусть $g \in C$. Вариация v функции f, заданная формулой (7), при $\varepsilon > 0$ является внутренней, то есть $v \in B$. При $\varepsilon \to 0$ справедлива лемма 1, а по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, следовательно, $\operatorname{Re}\{v\}_n \leqslant \{f\}_n$. Отсюда (см. (8)) и вытекает справедливость формулы (9).

2. Докажем формулу (10). Возьмём теперь $g = h$. Так как $g = h$, то вариация v функции f, заданная формулой (7), при $\varepsilon < 0$ и $|\varepsilon| < h_0$ является внутренней вариацией, то есть $v = f \cdot f^{-\varepsilon} \in B$. Поскольку по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, то из формулы (8) для $\varepsilon < 0$ получаем

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n\right) \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon > 0$ справедлива формула (9), то есть

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n\right) \geqslant 0,$$

откуда делаем вывод, что формула (10) верна.

3. Докажем (12). Зафиксируем $\zeta \in \bar{\Delta}$ и положим

$$g(z) \coloneqq \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} = 1 + 2\zeta z + 2\zeta^2 z^2 + \ldots$$

Ясно, что $g \in C_1$. Подставив коэффициенты функции g в формулу (9), получим

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}\zeta + \ldots + 2\{f\}_0\zeta^n\right) \geqslant 0, \qquad |\zeta| \leqslant 1,$$

что равносильно $\operatorname{Re} H(z) \geqslant 0$, $z \in \bar{\Delta}$. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, что эквивалентно (12).

4. Докажем формулу (13). Фиксируем k чтобы выбрать конкретное число φ_k, частично определяющее функцию h (см. формулу (5)) и рассмотрим функцию

$$g(z) \coloneqq \frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z} = 1 + 2e^{i\varphi_k}z + 2e^{2i\varphi_k}z^2 + \ldots$$

Тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$ как при $\varepsilon \geqslant 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$. То есть при $|\varepsilon| \leqslant \alpha_k$, где α_k частично определяет функцию h (см. формулу (5)). Из леммы 1, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f следует, что для $\varepsilon < 0$

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k}\right) \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon \geqslant 0$

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k}\right) \geqslant 0,$$

что эквивалентно равенству $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \coloneqq e^{-h}$, *причём* $h(z) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \dfrac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$, $m \leqslant n$ *и пусть* $g(z) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k \dfrac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}$, $\beta_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, *а полином* H *сгенерирован из коэффициентов функции* f *по формуле* (11), *причём* $H \in C$. *Равенство*

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n\right) = 0$$

справедливо если и только если справедливы все равенства

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Имеем

$$g(z)=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}=\sum_{k=1}^{m}\beta_k(1+2e^{i\varphi_k}z+\ldots+2e^{in\varphi_k}z^n+\ldots).$$

Применяя формулу (6), получаем:

$$\{f\cdot g\}_n=\sum_{k=1}^{m}\beta_k(\{f\}_n+\{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k}+\ldots+\{f\}_0 2e^{in\varphi_k})=\sum_{k=1}^{m}\beta_k H(e^{i\varphi_k}). \qquad (14)$$

Так как $H\in C$ по условию, то есть $\operatorname{Re}H(z)>0$, $z\in\Delta$ и $\operatorname{Re}H(z)\geqslant 0$, $z\in\partial\Delta$, то из формулы (14) следует, что

$$\operatorname{Re}\{f\cdot g\}_n=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{m}\beta_k\operatorname{Re}H(e^{i\varphi_k})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re}H(e^{i\varphi_k})=0,\ k=1,\ldots,m.$$

Что и требовалось. ■

Из теоремы 3 вытекает:

Следствие 2. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа, и пусть $g(z):=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k\dfrac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}$, $\beta_k>0$, $k=1,\ldots,n$, $0\leqslant\varphi_1<\ldots<\varphi_n<2\pi$. Тогда, если функция g удовлетворяет равенству (10), то есть*

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{g\}_0+\ldots+\{f\}_0\{g\}_n)=0,$$

то

$$f(z)=\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}\right).$$

То есть $m=n$ и числа φ_k, $k=1,\ldots,n$, нам известны.

Доказательство. Согласно следствию 1, существуют числа $\alpha_k>0$, $k=1,\ldots,m$, и $0\leqslant\theta_1<\ldots<\theta_m<2\pi$, где $m\leqslant n$ такие, что $h(z)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\dfrac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}$ и $f=e^{-h}$.

Сгенерируем полином H из коэффициентов экстремальной функции f по формуле (11). Так как $H\in C$ согласно теореме 2, то все условия теоремы 3 выполнены. Применяя теорему 3 видим, что $m=n$ и $\theta_k=\varphi_k$, $k=1,\ldots,n$. ■

3. Теорема Рисса-Фейера

Пусть $n\in\mathbb{N}$. Согласно теореме 2, полином H, сгенерированный из первых $n+1$ коэффициентов функции, экстремальной в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n, имеет положительную действительную часть в круге Δ. Выведем некоторые свойства полиномиальных элементов класса C, необходимые для исследования экстремальной функции.

Функция вещественного аргумента φ

$$T(\varphi):=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\varphi-b_k\sin k\varphi),\qquad a_0,a_k,b_k\in\mathbb{R},\quad k=1,\ldots,n,$$

называется тригонометрическим многочленом степени n, если выполнено условие $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Очевидно, имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть задан полином* $H(z) := h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k$, *где*

$$h_0 := a_0 \in \mathbb{R}, \qquad h_k := \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad h_n \neq 0.$$

Тогда сужение $\operatorname{Re} H$ *на единичную окружность* $\partial\Delta$ *является тригонометрическим полиномом*

$$T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi).$$

Более того, если $H \in C$, *то* $T(\varphi) \geqslant 0$ *для всех* $\varphi \in \mathbb{R}$.

Как отмечается в статье [21], в начале XIX века Л. Фейер [22] впервые обратил внимание на важность класса тригонометрических полиномов, принимающих неотрицательные значения на всей вещественной прямой. Его гипотеза о структуре таких многочленов была впоследствии доказана Ф. Риссом [23] и ныне известна как теорема Рисса-Фейера.

Теорема 4 (Рисс, Фейер). *Если* $T(\varphi) := \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \geqslant 0$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, $\varphi, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *то существует многочлен* $P(z) := \sum_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$ *такой, что* $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. *Более того,* P *может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае* P *определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказательство теоремы Рисса-Фейера приведено, в частности, в статье [24] и в монографии [25, стр. 154]. Из теоремы 4 вытекает, что если m из n корней полинома P лежат на единичной окружности, то тригонометрический многочлен T имеет $2m$ корней.

Следствие 3. *Тригонометрический многочлен степени* n *имеет не более чем* $2n$ *корней на* $[0, 2\pi)$ *с учётом их кратностей.*

4. Многочлены с положительной действительной частью

Приведём здесь некоторые теоремы о гармонических функциях, которые нам понадобятся при доказательстве необходимого условия теоремы 8. Все формулировки адаптируем для случая единичного круга Δ.

Теорема 5. *Для любой гармонической в* Δ *функции* g *можно построить голоморфную в* Δ *функцию* h, *для которой* g *является действительной частью. Причём* h *единственна с точностью до аддитивной чисто мнимой константы.*

Теорема 6 (о единственности). *Если две гармонические в* Δ *функции* g_1 *и* g_2 *совпадают на множестве* $A \subset \Delta$, *имеющем хотя бы одну внутреннюю точку, то* $g_1 \equiv g_2$ *в* Δ.

Заметим, что теорема единственности для гармонических функций накладывает более жесткие условия, чем аналогичная теорема для голоморфных функций, где требуется только чтобы множество A содержало предельную точку. Например, функция $u(z) := x$, где $x := \operatorname{Re} z$ равна нулю на мнимой оси, но $u(z) \not\equiv 0$.

Теорема 7 (о решении задачи Дирехле для круга)**.** *Если функция g непрерывна на $\partial\Delta$, то существует единственная гармоническая в Δ функция h, совпадающая с g на $\partial\Delta$.*

Теоремы 5, 6, и 7 взяты книги из [26], стр. 239, 240 и 246 соответственно.

Теорема 8. *Многочлен $H(z) := h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_0 > 0$, имеет положительную действительную часть в Δ тогда и только тогда, когда существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, не равные нулю одновременно, такие, что*

$$h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{15}$$

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и произвольный многочлен $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$. Рассмотрим многочлен $Q(z) := q_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} q_k z^k$, где $q_k := \sum\limits_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j$, $k = 0, \ldots, n$. Для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) &= T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2 = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^{n} p_k e^{ik\varphi} \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k e^{-ik\varphi} = \\
=&|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&+ (p_0\bar{p}_1 + p_1\bar{p}_2 + \ldots + p_{n-1}\bar{p}_n)e^{-i\varphi} + (p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})e^{i\varphi} + \\
&\ldots \\
&+ p_0\bar{p}_n e^{-in\varphi} + p_n\bar{p}_0 e^{in\varphi} = \\
=&|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + 2\operatorname{Re}((p_1\bar{p}_0 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})e^{i\varphi} + \ldots + p_n\bar{p}_0 e^{in\varphi}) = \\
=&\operatorname{Re} Q(e^{i\varphi}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Необходимость. Пусть $H \in C$. Покажем, что H имеет коэффициенты (15). По лемме 2, выражение $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ является тригонометрическим полиномом степени n, причём $T(\varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, так как $H \in C$. Согласно теореме 4, существует многочлен P такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Таким образом, из (16) следует, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = \operatorname{Re} Q(e^{i\varphi})$.

Выполним обратную замену $e^{i\varphi} = z$. Имеем $\operatorname{Re} H(z) \equiv \operatorname{Re} Q(z)$, $z \in \partial\Delta$. Согласно теореме 6 это не означает, что функции $\operatorname{Re} H(z)$ и $\operatorname{Re} Q(z)$ совпадают всюду в Δ. Однако, по теореме 7 эти функции продолжаются единственным образом до гармонической в Δ функции. Восстановим аналитические функции Q и H по их совпадающей в Δ действительной части (это можно сделать согласно теореме 5). Принимая во внимание нормировку $Q(0) = H(0) > 0$, заключаем, что $H \equiv Q$ в Δ, так как голоморфная в Δ функция по теореме 5 восстанавливается по своей действительной части единственным образом с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной. Что и требовалось.

Достаточность. Покажем теперь, что если H имеет коэффициенты (15), то $H \in C$. Пусть H имеет коэффициенты (15), то есть $H \equiv Q$. Проведя вычисления (16) в обратном порядке получаем, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Поскольку $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$ при $z \in \Delta$. Что и требовалось. ■

5. Условия единственности многочлена из класса Каратеодори

В этом пункте считаем, что $n \in \mathbb{N}$, $h_0 > 0$ и

$$H(z) := h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k. \tag{17}$$

Лемма 3. *Существует единственный с точностью до вращений в плоскости переменной z многочлен H вида* (17)*, удовлетворяющий условиям:*

- *$H \in C$;*
- $h_0 = 2|h_n| > 0$.

Более того, $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, где $|\eta| = 1$, а $\arg\eta = \arg\{h\}_n$.

Доказательство. Согласно теореме 8, существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, удовлетворяющие соотношениям:

$$h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2, \qquad h_n = p_n \bar{p}_0.$$

Из условия $h_0 = 2|h_n|$ получаем:

$$|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2|p_n p_0|.$$

Данное равенство эквивалентно следующему:

$$(|p_0|^2 - 2|p_n p_0| + |p_n|^2) + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$(|p_0| - |p_n|)^2 + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что $|p_0| = |p_n|$ и $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$. Таким образом,

$$H(z) = 2|p_0|^2 + 2p_n\bar{p}_0 z^n = 2|p_0|^2(1 + \eta z^n), \qquad |\eta| = 1, \quad \arg\eta = \arg\{h\}_n.$$

Так как числа p_k, $k = 0, \ldots, n$, определены единственным образом, то и многочлен H определён единственным образом. ■

Заметим, что корнями z_k многочлена $H(z) = h_0(1 + z^n)$ являются все корни n-й степени из -1 и только они, то есть $z_k = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Утверждение 1. *Существует единственный многочлен H вида* (17), *удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C$;
- $h_n > 0$;
- *Все корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена H лежат на единичной окружности $\partial\Delta$.*

Более того, $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. Поскольку $z_1, \dots, z_n$ — корни многочлена H, то его можно представить в виде: $H(z) = 2h_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = 2h_n((-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n + \ldots + z^n)$. Так как все корни многочлена H лежат на единичной окружности ($|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| = 1$), то $h_0 = 2|h_n|$. Применив лемму 3, получаем, что $H(z) = h_0(1 + z^n)$. ■

Утверждение 2. *Существует единственный многочлен H вида* (17), *удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C$;
- $h_n > 0$;
- *Все корни n-й степени из -1 и только они являются корнями* $\operatorname{Re} H$.

Более того, $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. Согласно утверждению 1, многочлен $H(z) = h_0(1 + z^n)$ является единственным многочленом, удовлетворяющим условию $H \in C$ и имеющим своими нулями всевозможные корни n-й степени из -1. Очевидно, что гармоническая функция $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2 (см. следствие 3). Так как восстановление аналитической функции по её действительной части единственно с точностью до чисто мнимой аддитивной константы, то с учётом нормировки $H(0) > 0$ получаем требуемое. ■

6. Теорема о единственности экстремальной функции

При ограничениях, наложенных нами выше на экстремальную функцию, можно ставить вопрос о её единственности. Следующий результат перекликается с основным результатом работы [16, стр. 735].

Теорема 9. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть f — экстремальная функция в проблеме Кшижа, удовлетворяющая условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0 > 0$. Тогда функция f существует, единственна и $f = F(z^n, 1)$, где функция F задана формулой* (1).

Доказательство. Согласно теореме 2, многочлен H, сгенерированный из коэффициентов функции f по формуле (11), принадлежит классу C и удовлетворяет всем условиям леммы 3. Следовательно,

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n,$$

откуда вытекает, что
$$\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0.$$

Пусть $\{f\}_0 = e^{-t}$, где $t > 0$. Тогда, так как по условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, то:
$$f(z) = e^{-t} + 2e^{-t}z^n + o(z^n).$$

Проверим, что функция $h \coloneqq -\ln f = t - 2z^n + o(z^n)$ принадлежит классу C. (Напомним, что миноры M_k определёны формулой (4).) Применяя критерий Каратеодори-Тёплица, получаем для $t > 0$:

- Миноры $M_k = 2^{k+1}t^{k+1} > 0$ при $k = 1, \ldots, n-1$;
- $M_n = 2^{n+1}t^{n-1}(t^2-1) \geqslant 0$ и $M_n = 0$ если и только если $t = 1$.

Таким образом, $\{f\}_0 = e^{-1}$ и $f(z) = Q_n(z) + o(z^n)$, где $Q_n(z) \coloneqq e^{-1} + 2e^{-1}z^n$.

Функция $F(z^n, 1)$, заданная формулой (1), принадлежит классу B, удовлетворяет всем указанным условиям и, согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 1), является единственным продолжением многочлена Q_n до функции класса B. Следовательно, $f(z) = F(z^n, 1)$. ■

7. Доказательство гипотезы Кшижа

Теорема 10. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $f \in B$. Тогда справедливо неравенство:*
$$|\{f\}_n| \leqslant \frac{2}{e};$$
равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда
$$f(z) = e^{i\theta}F(e^{i\varphi}z^n, 1), \quad \varphi, \theta \in \mathbb{R},$$
где функция F определена формулой (1).

Доказательство. Зафиксируем произвольный номер n и произвольную экстремальную функцию $f \in B$. Согласно следствию 1, существуют числа:

- $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = t$, где $m \leqslant n$, а $t \coloneqq -\ln\{f\}_0$;
- $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$;

такие, что функция f представима в виде:
$$f(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k}z}{1 - e^{i\varphi_k}z}\right).$$

Непосредственно проверяется, что функция $F(z^n, 1) = e^{-1} + 2e^{-1}z^n + o(z^n)$ удовлетворяет[a] соотношению (10), поэтому, из следствия 2 следует, что:

- $m = n$,
- точки $e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \ldots, n$, являются всеми корнями n-й степени из -1,

так как $F(z^n, 1) = \exp\left(-\dfrac{1 - z^n}{1 + z^n}\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}\right)$.

[a]Ошибка здесь: не F и $-\ln F$ должны удовлетворять (10), а f и $-\ln F$.

Рассмотрим многочлен H, сгенерированный из коэффициентов функции f по формуле (11). Из теоремы 2 вытекает, что:

- $H \in C$,
- $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Согласно утверждению 2, существует единственный многочлен $H \in C$ степени n, действительная часть которого имеет своими корнями всевозможные корни n-й степени из -1, причём:

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n = h_0(1 + z^n),$$

где h_0 — положительный постоянный множитель. Таким образом,

$$\{f\}_n = 2\{f\}_0.$$

По теореме 9, функция $f(z) = F(z^n, 1) = e^{-1} + 2e^{-1}z^n + o(z^n)$ является единственной экстремальной функцией, удовлетворяющей условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0$. ■

Заключение

Проблемы геометрической теории функций комплексного переменного, так или иначе связанные с гипотезой Кшижа, рассмотрены в работах [27, 28, 7, 29, 30, 31, 15, 32, 33]. Некоторые из этих проблем эквивалентны гипотезе Кшижа и, следовательно, их также можно считать решёнными. Некоторые обобщения гипотезы Кшижа описаны в статье [4, стр. 187].

Список литературы

[1] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[2] Levin V. I. Lösing der Aufgabe 163 // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80–81.

[3] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[4] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // J. d'Analyse Mathematique. 1977. V. 31. P. 169–190.

[5] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. N. 5–6. P. 223–230.

[6] Ступин Д. Л. Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 79–92.

[7] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[8] Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.

[9] Ступин Д. Л. Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. № 2. С. 71–84.

[10] Ступин Д. Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 98–120.

[11] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions // Compl. Var. 1992. V. 17. N. 3–4. P. 213–222.

[12] Ступин Д. Л. Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27. № 1. С. 81–96.

[13] Horowitz C. Coefficients of nonvanishing functions in H^∞ // Israel J. Math. 1978. V. 30. P. 285–291.

[14] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.

[15] Peretz R. Some properties of extremal functions for Krzyz problem // Compl. Var. 1991. V. 16. N. 1. P. 1–7.

[16] Martin M. J., Sawyer E. T., Uriarte-Tuero I., Vukotic D. The Krzyz conjecture revisited // Advances in Mathematics. 2015. V. 273. P. 716–745.

[17] Krushkal S. L. Two Coefficient Conjectures for Nonvanishing Hardy Functions, I // J. Math. Sci. 2022. V. 268. P. 199–221.

[18] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[19] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.

[20] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 277–297.

[21] Rovnyak J. Fejér-Riesz theorem. Encyclopedia of Mathematics. Springer Verlag GmbH, EMS.

[22] Fejér L. Über trigonometrische Polynome // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 53–82.

[23] Riesz F. Über ein Problem des Herrn Carathéodory // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 83–87.

[24] Hussen A., Zeyani A. Fejer-Riesz Theorem and Its Generalization // IJSRP. 2021. V. 11. I. 6.

[25] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. Chelsea Pub. Co. N.Y. 1975.

[26] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1969. 576 с.

[27] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions. Dep. Univ. Nijmegen. 1992.

[28] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions // Indag. Math. New Ser. 1993. V. 4. N. 4. P. 471–478.

[29] Kiepiela K., Pietrzyk M., Szynal J. Meixner polynomials and nonvanishing holomorphic functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. V. 133. N. 1–2. P. 423–428.

[30] Ganczar A., Michalska M., Szynal J. The conjecture parallel to the Krzyz conjecture // Demonstratio Math. Warsaw Technical University Institute of Mathematics. 2003. V. 36. N. 1. P. 65–75.

[31] Peretz R. The Krzyz Problem and Polynomials with Zeros on the Unit Circle // Compl. Var. 2002. V. 47. N. 3. P. 271–276.

[32] Peretz R. The Krzyz Conjecture Theory and Methods. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2021. 620 p.

[33] Agler J., McCarthy J. E. The Krzyz Conjecture and an Entropy Conjecture // J. d'Analyse Mathematique. 2021. V. 144. P. 207–226.