

Теоретический вывод постулата Бора для заряда в атоме водорода. Закон Кулона в логарифмической форме с поправками для сильного взаимодействия на малых расстояниях. Физический смысл постоянной Планка.

Вадим Хоруженко

3 марта 2025 г.

Аннотация

В данной статье предложена революционная теоретическая модель, которая вводит пятую пространственную размерность — ”плотность пространства” — как фундаментальное свойство, определяющее гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия. Модель основывается на гипотезе, что изменения в плотности пространства могут приводить к явлениям, аналогичным известным фундаментальным силам. Через серию математических выводов показано, как распределение плотности пространства вокруг сферических объектов влияет на классические теории полей. Основные результаты включают:

1. **Теоретическое доказательство постулата Бора:** Впервые предложено теоретическое обоснование постулата Бора о квантовании углового момента электрона в атоме водорода, что является ключевым для квантовой механики.
2. **Связь между зарядом и массой:** Установлена новаторская связь между зарядом и его массой, что позволяет интерпретировать массу как энергию, необходимую для сжатия сгустка плотности пространства.
3. **Комплексное решение и мнимая энергия:** Показано, что взаимодействие двух сгустков плотности пространства имеет только комплексное решение, где мнимая часть определяет резонансную частоту системы.
4. **Сильные и слабые взаимодействия:** Модель предлагает объяснение сильных и слабых взаимодействий через свойства плотности пространства, что открывает новые возможности для понимания ядерных сил.

Эта работа не только воспроизводит известные физические закономерности, но и предлагает новый взгляд на природу фундаментальных взаимодействий, связывая их с внутренними свойствами пространства.

I. Введение

Электромагнитные и гравитационные силы являются одними из самых фундаментальных взаимодействий, известных физике. Эти силы управляют поведением материи и энергии в масштабах от субатомных частиц до космоса. Несмотря на обширные эмпирические данные и теоретические модели, описывающие поведение этих сил, их истинная природа и материальная сущность, из которой они возникают, остаются предметом глубоких исследований.

С физической точки зрения мы понимаем, как эти силы действуют и можем с высокой точностью предсказать их эффекты. Однако остаются вопросы: что именно представляют собой эти силы? Как они взаимосвязаны? И, что наиболее важно, что является прото-материей, фундаментальной субстанцией, из которой эти силы возникают? Эти вопросы касаются не только физических принципов, но и философских размышлений о природе реальности.

В этой статье мы предлагаем теоретическую модель, которая вводит пятую пространственную размерность, называемую ”плотностью пространства”. Мы

предполагаем, что эта размерность играет критическую роль в формировании гравитационных и электрических полей. Наша модель предполагает, что традиционное трехмерное пространство в сочетании со временем недостаточно для полного объяснения происхождения этих сил. Вместо этого само пространство может обладать внутренними свойствами, которые способствуют формированию этих полей. Расширяя наше понимание пространства, включая дополнительное измерение, мы исследуем потенциал для новых интерпретаций гравитационных и электромагнитных взаимодействий.

II. Гипотеза

Мы предполагаем, что электромагнитные и гравитационные поля являются проявлениями более фундаментального свойства пространства, которое мы называем "плотностью пространства". Это свойство определяется в пятиразмерной системе, где пятое измерение ортогонально к традиционным трём пространственным и одному временному измерениям.

В этой модели "плотность пространства" представляет собой меру того, как само пространство может быть сжато или расширено независимо от его метрики. Эта плотность не аналогична плотности материи, с которой мы знакомы в трёхмерном пространстве, а скорее отражает фундаментальную характеристику пространства, влияющую на формирование гравитационных и электрических полей.

Наша гипотеза основывается на нескольких ключевых постулатах:

- **Плотность пространства:** В пятимерном пространстве плотность $\rho(r)$ характеризует состояние пространства и может изменяться, тем самым мы можем говорить об искривлении пространства без искривления его метрики. Давайте назовем это явление как искривление пространства первого порядка. Подобный термин используется в Теории относительности, но в рамках данной теории он будет иметь немного другой контекст.
- **Сферическая симметрия возмущений:** Распределение плотности пространства при её возмущении предполагает её сферическую симметрию. Распределение плотности пространства $\rho(r)$ предполагается симметричным относительно точки, являющейся центром возмущения.
- **Сохранение количества плотности пространства:** При возмущении той или иной области пространства окружающее эту область пространство способно изменять свою плотность, так что суммарная плотность всего пространства остается неизменной. Иными словами, в определенном приближении можно сказать, что суммарная "плотность" пространства по бесконечному объему этого пространства должна остаться постоянной.
- **Постулат о максимальной энтопии распределения плотности пространства:** Пространство стремится к состояниям максимальной энтропии стремясь к равномерному распределению плотности пространства. Этот принцип определяет естественную тенденцию пространства возвращаться к

равномерному распределению плотности после возмущений, аналогично термодинамическим принципам, управляющим физическими системами.

Исследуя эти постулаты в рамках пятиразмерного пространства, мы стремимся дать более глубокое понимание происхождения гравитационных и электромагнитных полей. Эта модель ставит под сомнение традиционное представление о том, что эти поля независимы, и вместо этого предлагает, что они взаимосвязаны через внутренние свойства самого пространства. В процессе исследований мы получим совершенно неожиданные результаты: закон Кулона в логарифмической форме содержащий выражение отвечающее за поправку взаимодействия элементарных зарядов на расстояниях соизмеримых с их "классическими" физическими размерами (данное явление хорошо изучено в рамках КЭД - экранирование). И самый неожиданный результат, это связь данной математической модели с основой Квантовой механики - "Постулата Бора" о квантовании состояний электрона в атоме водорода. Решение количества взаимодействия для двух сгустков плотности пространства в логарифмической форме имеет только комплексное решение, и как оказалось, комплексная часть решения отвечает за резонансную частоту количества взаимодействия двух сгустков, при использовании комплексной части решения в качестве выражения для резонансной частоты двух сгустков плотности пространства, мы получили условие резонанса обращения одного сгустка вокруг другого, что полностью соответствует условию квантования орбит полученных на основании Постулата Бора о квантовании углового момента электрона в атоме водорода. При анализе полученных формул, мы попытаемся объяснить физический смысл такой эмпирически полученной величины, как постоянная Планка, которая имеет два значения в рамках представленной математической модели - это размер электрона, а так же отношения полной энергии электрона в атоме к его мнимой энергии. Если Вам интересно как все это получилось из простых представлений о плотности пространства и его стремлении к максимальной энтропии, я начну излагать основные подходы которые лежат в основе моей теории изложенной в данной статье.

III. Методология

3.1 Распределение плотности пространства вокруг одной сжатой сферической области пространства

Мы имеем два состояния вселенной, в первом состоянии по всему пространству плотность равна ρ_0 и является некоторой константой. Во втором состоянии системы у нас есть некая область пространства, ограниченная сферой $S(R_1)$, которую мы сжимаем до $S(R'_1)$. Нам необходимо найти распределение плотности пространства внутри сферы и за её пределами, исходя из установленных нами законов, действующих в нашей гипотетической вселенной.

3.1.1 Распределение плотности после сжатия

Плотность после сжатия внутри сферы определяется как $\rho_{\text{inside}} = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_1 — добавленная плотность, определяемая из соотношения объемов до и после сжатия:

$$\rho_0 V(R_1) = \rho_{\text{inside}} V(R'_1)$$

Подставим объемы сфер:

$$\rho_0 \frac{4}{3} \pi R_1^3 = (\rho_0 + \rho_1) \frac{4}{3} \pi R'_1{}^3$$

Упрощаем:

$$\rho_0 R_1^3 = (\rho_0 + \rho_1) R'_1{}^3$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{R_1^3}{R'_1{}^3} - 1 \right)$$

3.1.2 Распределение плотности за пределами сферы

Мы исходим из того, что за пределами сферы количество изъятой плотности пространства должно быть равно количеству добавленного внутри неё $\rho_1 \cdot V(R'_1)$. Поэтому при интегрировании возмущения от поверхности сжатой сферы до бесконечности интеграл должен давать конечное число, то есть сходиться, а соответственно интегрируемая функция должна быть сходящейся. В трёхмерном пространстве такой функцией является $1/r^4$. Предположим, что распределение уменьшенной плотности за пределами сжатой области пространства будет удовлетворять этой зависимости от расстояний от центра возмущения. Тогда получим, следующую зависимость распределения плотности пространства за пределами сжатой сферы:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{A}{r^4}$$

3.1.3 Нормировочный коэффициент A

Для выполнения закона сохранения плотности пространства, интеграл от $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ по объему от R'_1 до бесконечности должен быть равен добавленной плотности внутри сферы:

$$\rho_1 V(R'_1) = \int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV$$

Или принимая во внимание закон сферической симметрии, в сферической системе координат интеграл упрощается до:

$$\rho_1 V(R'_1) = \int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Подставляем:

$$\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1'^3 = 4\pi \int_{R'_1}^{\infty} \frac{A}{r^4} r^2 dr$$

Решаем интеграл:

$$4\pi A \int_{R'_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = 4\pi A \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^{\infty} = 4\pi A \left(\frac{1}{R'_1} - 0 \right) = \frac{4\pi A}{R'_1}$$

Равенство количества плотностей:

$$\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1'^3 = \frac{4\pi A}{R'_1}$$

Найдем A :

$$A = \rho_1 \frac{R_1'^4}{3}$$

Итоговая формула для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{A}{r^4} = \frac{\rho_1 \frac{R_1'^4}{3}}{r^4}$$

Теперь умножим числитель и знаменатель на 4π :

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{4\pi \rho_1 \frac{R_1'^4}{3}}{4\pi r^4} = \frac{\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1'^4}{4\pi r^4} = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}$$

Таким образом мы получили следующую формулу для распределения плотности за пределами сферы $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} \quad (1)$$

Так же принимая во внимание, что количество добавленной плотности в объем сжатой сферы выражается формулой:

$$Q = (V(R_1) - V(R'_1)) \cdot \rho_0$$

где $V(R_1)$ и $V(R'_1)$ — это объемы сфер с радиусами R_1 и R'_1 соответственно. А так же принимая во внимание формулу для ρ_1 - плотность количества добавленной плотности внутри сферы:

$$\rho_1 = \frac{Q}{V(R'_1)}$$

где $V(R'_1)$ — это объем сферы после сжатия.

Мы можем полученную формулу для распределения плотности пространства $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ выразить в виде выражения:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{Q \cdot R'_1}{4\pi r^4} \quad (2)$$

Где Q - количество плотности добавленной в объем сферы $S(R'_1)$, R'_1 - радиус сжатой сферы, а r - расстояние от центра сферы до точки в пространстве в сферической системе координат.

3.1.4 Проверка сохранения количества плотности пространства

Для выполнения третьего закона установленного в нашей системе должно выполняться равенство:

$$\int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV = \int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_1 V(R'_1)$$

Подставляем выражение для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\int_{R'_1}^{\infty} \frac{\rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1) \int_{R'_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

Интегрируем и подставляем пределы интегрирования:

$$\rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1) \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^{\infty} = \rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1) \left(\frac{1}{R'_1} - 0 \right) = \frac{\rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1)}{R'_1}$$

Получаем:

$$\int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV = \rho_1 V(R'_1) = \rho_1 \frac{4}{3}\pi R'_1{}^3$$

Таким образом мы убедились, что наше распределение плотности пространства за пределами сжатой сферы пропорциональное $1/r^4$, согласуется с нашим третьим законом сохранения плотности пространства в системе с учетом нормировочного коэффициента A .

IV. Запись выражения для полного распределения плотности пространства для одной сжатой сферы.

Давайте запишем наше распределение с учетом граничных условий, используя функцию Хэвисайда, данное представление распределения плотности пространства нам понадобится для нахождения полного количества взаимодействия двух сгустков с учетом плотности пространства добавленного в первый сгустков, а так же градиента на границе перехода - сфере ограничивающей первый сгусток. Почему это важно, вы поймете в следующем разделе моей статьи.

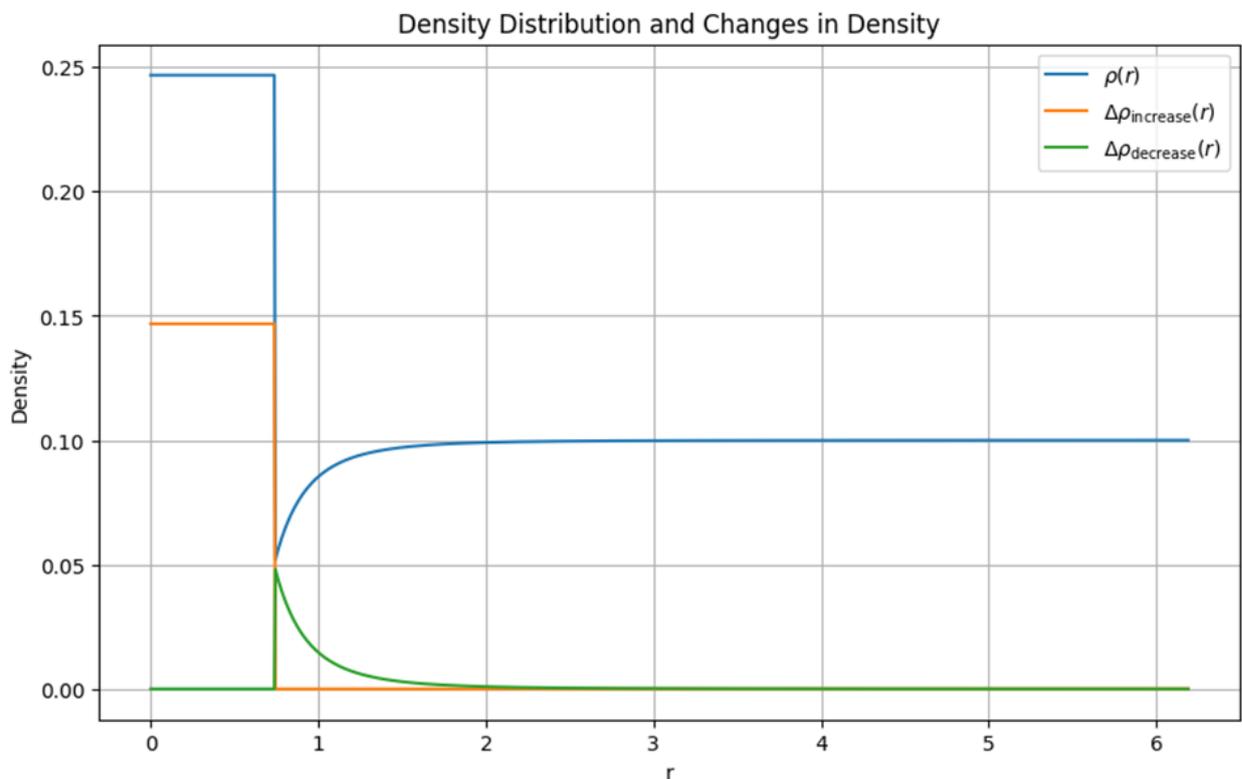


Рис. 1: Графики распределения плотности пространства на прямой, проходящей через центр сжатой сферы

4.1 Представление распределения плотности пространства с использованием функции Хевисайда

Распределение плотности пространства, $\rho(r)$, для одной сферы можно выразить с использованием функции Хевисайда $H(x)$ для точного описания плотности внутри и вне сжатой сферы. Основное распределение плотности определяется как:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 + \rho_1, & \text{если } r \leq R'_1 \\ \rho_0 - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Увеличение плотности $\Delta\rho_{\text{increase}}(r)$ внутри сжатой области можно выразить как:

$$\Delta\rho_{\text{increase}}(r) = \begin{cases} \rho_1, & \text{если } r \leq R'_1 \\ 0, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Аналогично, уменьшение плотности $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ вне сферы:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq R'_1 \\ \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Теперь мы можем переписать эти выражения в терминах функции Хевисайда $H(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\text{increase}}(r) &= \rho_1 H(R'_1 - r) \\ \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) &= \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} H(r - R'_1) \end{aligned}$$

Таким образом, общее изменение плотности $\Delta\rho(r)$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} H(r - R'_1)$$

4.1.1 Проверка граничных условий

Теперь проверим выполнение граничных условий:

1. При $r \leq R'_1$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R'_1}}{4\pi r^4} H(r - R'_1)$$

Поскольку $H(R'_1 - r) = 1$ и $H(r - R'_1) = 0$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 - 0 = \rho_1$$

2. При $r > R'_1$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R'_1}}{4\pi r^4} H(r - R'_1)$$

Поскольку $H(R'_1 - r) = 0$ и $H(r - R'_1) = 1$:

$$\Delta\rho(r) = 0 - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R'_1}}{4\pi r^4}$$

Теперь подставим $V_{R'_1} = \frac{4}{3}\pi(R'_1)^3$:

$$\Delta\rho(r) = -\frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi(R'_1)^3}{4\pi r^4} = -\frac{\rho_1 \cdot R'_1^4}{3r^4}$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для $\Delta\rho(r)$ в терминах функции Хевисайда:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R'_1^4}{3r^4} H(r - R'_1) \quad (3)$$

4.2 Проверка удовлетворения уравнения условию сохранения количества плотности пространства

Для проверки возьмем интеграл от $\Delta\rho(r)$. Давайте проинтегрируем $\Delta\rho(r)$ по всему объему. Напомним, что $\Delta\rho(r)$ у нас представлена как:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 \left[H(R'_1 - r) - \frac{R'_1^4}{3r^4} H(r - R'_1) \right]$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Разделим интеграл на две части, соответствующие $\Delta\rho_{\text{increase}}(r)$ и $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \left[\rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R'_1^4}{3r^4} H(r - R'_1) \right] \cdot 4\pi r^2 dr$$

Разделим на два отдельных интеграла:

$$\int_0^\infty \rho_1 H(R'_1 - r) \cdot 4\pi r^2 dr - \int_0^\infty \frac{\rho_1 \cdot R'_1^4}{3r^4} H(r - R'_1) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^{R'_1} \rho_1 \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_1 \int_0^{R'_1} r^2 dr = 4\pi\rho_1 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{R'_1} = 4\pi\rho_1 \cdot \frac{(R'_1)^3}{3} = \frac{4\pi\rho_1(R'_1)^3}{3}$$

Теперь рассмотрим второй интеграл:

$$\int_{R'_1}^\infty \frac{\rho_1 \cdot R'_1^4}{3r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_1 R'_1^4}{3} \int_{R'_1}^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{4\pi\rho_1 R'_1^4}{3} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^\infty$$

Вычисляем пределы:

$$\frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_1'} \right) = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \cdot \frac{1}{R_1'} = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^3}{3}$$

Теперь сложим оба результата:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_1 (R_1')^3}{3} - \frac{4\pi\rho_1 (R_1')^3}{3} = 0$$

Таким образом, интеграл от $\Delta\rho(r)$ по всему объему равен нулю:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 0$$

Получили предсказуемый результат, однако это нужно было выполнить для проверки.

V. Количество возмущения плотности пространства создаваемое двумя сжатыми сферами на расстоянии D. Количество взаимодействия. Закон Кулона для двух зарядов в логарифмической форме

В этом разделе мы исследуем взаимодействие между двумя сжатыми сферическими областями пространства. Анализируя распределение плотности пространства вокруг этих сфер, мы выводим влияние одной сферы на распределение плотности другой. Этот анализ важен для понимания природы их взаимодействия, возникающих вследствие вариаций плотности пространства.

5.1 Иллюстрация распределения плотности пространства

Перед тем как приступить к математическим выводам влияния распределения плотности пространства создаваемого двумя сферами друг на друга, я представляю рассмотреть графическое изображение распределения плотности пространства вокруг двух сжатых сфер, построенное на основании математической модели путем моделирования полученной формулы для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ (формула (2)). Эта фигура позволяет наглядно понять, как меняется распределение плотности, создаваемое каждой из сфер, в зависимости от расстояния между ними.

5.2 Формулировка задачи, запись интеграла для полного количества возмущения, создаваемого двумя сгустками плотности пространства

Для решения задачи начнем с записи исходного выражения для полного возмущения W_{total} , используя теорему Фубини и свойства градиента. Запишем выражение для градиента от произведения функций:

$$\Delta\rho_1(r_1) \quad \text{и} \quad \Delta\rho_2(r_1' - D).$$

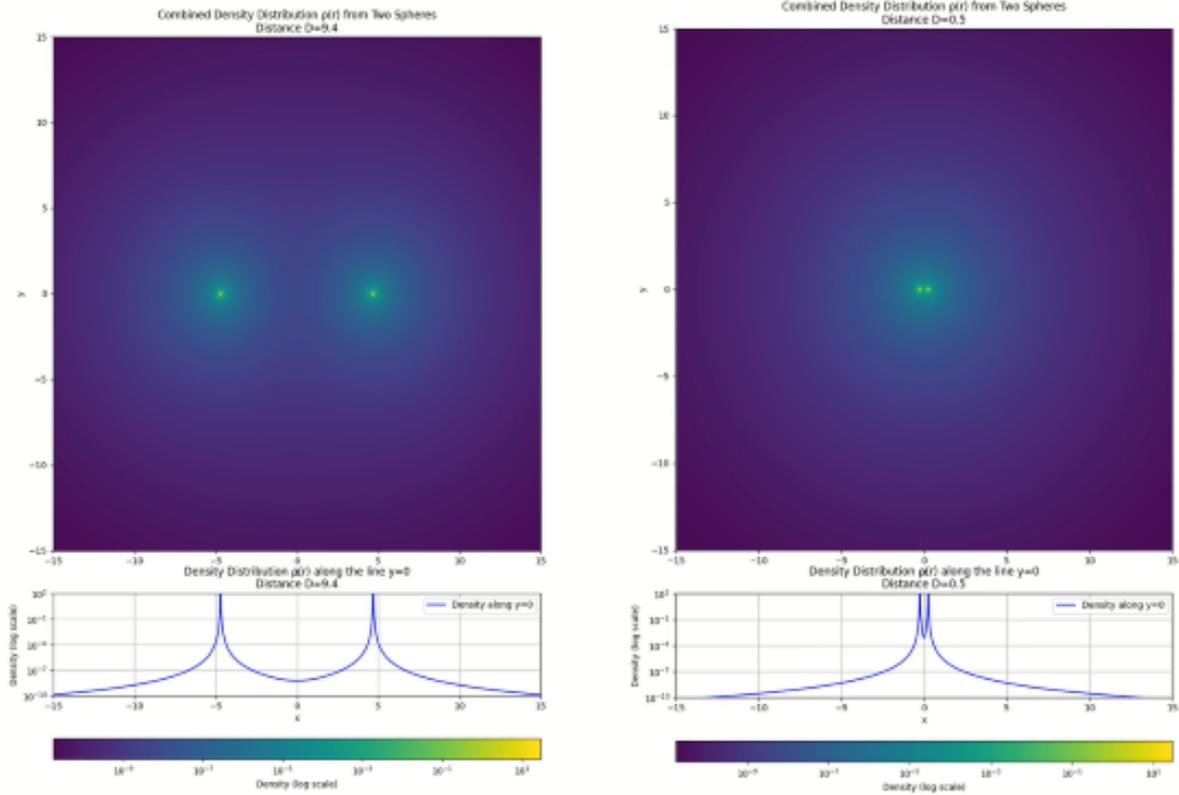


Рис. 2: Распределение плотности пространства вокруг двух сжатых сфер. График иллюстрирует, как плотность пространства изменяется вдоль линии, соединяющей центры сфер, по мере их сближения.

5.2.1 Исходное выражение для полного возмущения

Полное возмущение W_{total} определяется как интеграл по всему пространству от модуля градиента произведения функций $\Delta\rho_1(r_1)$ и $\Delta\rho_2(r'_1 - D)$. Согласно предположению, полное количество возмущения плотности пространства, создаваемое двумя сгустками относительно системы отсчета, связанной с центром первого сгустка, определяется по формуле:

$$W_{\text{total}} = \int_{V_1} \int_{V'_1} dV_1 dV'_1 |\nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} (\Delta\rho_1(r_1) \cdot \Delta\rho_2(r'_1 - D))|.$$

5.2.2 Подстановка выражений для функций

Подставим выражения для $\Delta\rho_1(r_1)$ и $\Delta\rho_2(r'_1 - D)$:

$$\Delta\rho_1(r_1) = \rho_1 \left[H(R'_1 - r_1) - \frac{R'_1{}^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right],$$

$$\Delta\rho_2(r'_1 - D) = \frac{R_2 \rho_2 V(R_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4}.$$

Теперь подставим эти выражения под знак градиента:

$$W_{\text{total}} = \int_{V_1} \int_{V'_1} dV_1 dV'_1 \left| \nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\rho_1 \left[H(R'_1 - r_1) - \frac{R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \cdot \frac{R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right) \right|.$$

Учтем, что градиент должен быть взят как по пространству V_1 (по переменной r_1), так и по пространству V'_1 (по переменной r'_1). Перепишем выражение с учетом градиентов по обоим пространствам.

5.2.3 Упрощение выражения

Для удобства представим выражение в следующем виде:

$$W_{\text{total}} = \nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \cdot H(R'_1 - r_1) \right) - \nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{12\pi (r'_1 - D)^4 r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right).$$

5.2.4 Упрощение с учетом независимости функций

Учитываем, что:

1. $\Delta \rho_1(r_1) = \rho_1 \left[H(R'_1 - r_1) - \frac{R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right]$ **не зависит** от r'_1 .
2. $\Delta \rho_2(r'_1 - D) = \frac{R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4}$ **не зависит** от r_1 .

Таким образом, градиенты можно разделить:

- ∇_{r_1} действует только на $\Delta \rho_1(r_1)$.
- $\nabla_{r'_1}$ действует только на $\Delta \rho_2(r'_1 - D)$.

5.2.5 Разделение градиентов

Теперь выражение можно переписать как произведение градиентов:

$$\nabla_{r_1} (\Delta \rho_1(r_1)) \cdot \nabla_{r'_1} (\Delta \rho_2(r'_1 - D)).$$

Подставляем выражения для $\Delta \rho_1(r_1)$ и $\Delta \rho_2(r'_1 - D)$:

$$\nabla_{r_1} \left(\rho_1 \left[H(R'_1 - r_1) - \frac{R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \right) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right).$$

5.2.6 Итоговое выражение

Теперь выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} \nabla_{r_1} (H(R'_1 - r_1)) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right) - \\ - \nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R'_1{}^4}{12\pi (r'_1 - D)^4} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

5.2.7 Обоснование подхода

Здесь возникает вопрос, почему не применено правило Лейбница при взятии градиента функции. Дело в том, что мы используем то обстоятельство, что функции $\Delta\rho_1(r_1)$ и $\Delta\rho_2(r'_1 - D)$ полностью независимы друг от друга. Чтобы обеспечить эту полную независимость, мы поместили их в разные пространства V_1 и V'_1 . Нам нужно найти полное количество возмущения, которое равно произведению количества возмущения плотности пространства, создаваемого каждым из сгустков. Для этого в каждом из пространств для своей функции мы построим непрерывную матрицу значений модуля градиента каждой из функций, затем вычислим интеграл для каждой из функций по своему пространству. При этом будем учитывать, что так как искомая функция является произведением двух непрерывных множеств значений каждого из интегралов от модуля градиента в областях, где одна из функций имеет не нулевое значение, не имеют смысла интегрировать вторую функцию там где значение первой нулевое и наоборот, как как при умножении область где у какой либо из функций был ноль, тоже даст ноль. То есть пределы интегрирования при представлении интеграла как суммы от произведения нескольких интегралов по разным пределам для первой и второй функции должны совпадать. Это очень важно для построения полного количества возмущения, создаваемого вторым сгустком, на полное количество возмущения первого сгустка.

5.2.8 Аналогия с трехмерным массивом

Этот подход можно сравнить с методикой, применяемой при работе с массивами значений, получаемых в результате произведения двух функций. Мы можем построить трехмерный массив значений отдельно для каждой из функций с одинаковой метрикой (размерностью массивов по всем координатам), а затем перемножить ячейки каждого из массивов с одинаковыми индексами и получить искомый массив данных произведения двух функций. Это некая сублимация шестимерного пространства, но это не шестимерное пространство в полном смысле этого слова. Мы ищем проекцию на наше трехмерное пространство произведения значений двух функций в двух других независимых пространствах.

5.2.9 Обоснование невозможности решения в трехмерном пространстве

Далее я объясню, почему эту задачу невозможно решить в обычном трехмерном пространстве. Градиент функции $1/r^4$ имеет вид $1/r^5$. Для такой функции теорема Гаусса справедлива только в пространстве $L = 6$, так как в пространствах с меньшей размерностью векторное поле в виде градиента от функции $1/r^4$ не имеет источника.

5.3 Вычисление градиента и интеграла от градиента для полного распределения количества возмущения системы двух сгустков относительно системы отсчета, связанной с началом первого сгустка

На текущем этапе внесем знаки градиентов за скобки для каждого выражения, учитывая, что:

1. ∇_{r_1} действует только на функции, зависящие от r_1 .
2. $\nabla_{r'_1}$ действует только на функции, зависящие от r'_1 .

5.3.1 Исходное выражение

Исходное выражение:

$$\nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \cdot H(R'_1 - r_1) \right) - \nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{12\pi (r'_1 - D)^4 r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right).$$

5.3.2 Внесение градиентов за скобки

Первое слагаемое:

$$\nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \cdot H(R'_1 - r_1) \right).$$

Здесь:

- ∇_{r_1} действует только на $H(R'_1 - r_1)$, так как $\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4}$ не зависит от r_1 .
- $\nabla_{r'_1}$ действует только на $\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4}$, так как $H(R'_1 - r_1)$ не зависит от r'_1 .

Таким образом, вносим градиенты за скобки:

$$\nabla_{r_1} (H(R'_1 - r_1)) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right).$$

Второе слагаемое:

$$\nabla_{r_1} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R'_1{}^4}{12\pi (r'_1 - D)^4 r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right).$$

Здесь:

- ∇_{r_1} действует только на $\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1)$, так как $\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R'_1{}^4}{12\pi (r'_1 - D)^4}$ не зависит от r_1 .
- $\nabla_{r'_1}$ действует только на $\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R'_1{}^4}{12\pi (r'_1 - D)^4}$, так как $H(r_1 - R'_1)$ не зависит от r'_1 .

Таким образом, вносим градиенты за скобки:

$$\nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R'_1{}^4}{12\pi (r'_1 - D)^4} \right).$$

5.3.3 Итоговое выражение после внесения градиентов

Теперь выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} \nabla_{r_1} (H(R'_1 - r_1)) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right) \\ - \nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R'_1{}^4}{12\pi (r'_1 - D)^4} \right). \end{aligned}$$

5.3.4 Вычисление градиентов

1. Вычисление $\nabla_{r_1} (H(R'_1 - r_1))$: Функция $H(R'_1 - r_1)$ — это ступенчатая функция Хевисайда. Её градиент можно выразить через дельта-функцию Дирака:

$$\nabla_{r_1} (H(R'_1 - r_1)) = -\delta(R'_1 - r_1) \cdot \hat{r}_1,$$

где:

- $\delta(R'_1 - r_1)$ — дельта-функция Дирака,
- \hat{r}_1 — единичный вектор в направлении r_1 .

2. Вычисление $\nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right)$: Вычислим градиент функции $\frac{1}{(r'_1 - D)^4}$. Градиент скалярной функции $f(r) = \frac{1}{r^4}$ равен:

$$\nabla \left(\frac{1}{r^4} \right) = -\frac{4}{r^5} \hat{r}.$$

Применим это к нашей функции:

$$\nabla_{r'_1} \left(\frac{1}{(r'_1 - D)^4} \right) = -\frac{4}{(r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1.$$

Таким образом:

$$\nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right) = \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi} \cdot \left(-\frac{4}{(r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1 \right) = -\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1.$$

3. Вычисление $\nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right)$: Здесь нужно применить правило дифференцирования произведения:

$$\nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right) = \nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \right) \cdot H(r_1 - R'_1) + \frac{1}{r_1^4} \cdot \nabla_{r_1} (H(r_1 - R'_1)).$$

Вычислим каждый член:

1. Градиент $\frac{1}{r_1^4}$:

$$\nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \right) = -\frac{4}{r_1^5} \hat{r}_1.$$

2. Градиент функции Хевисайда:

$$\nabla_{r_1} (H(r_1 - R'_1)) = \delta(r_1 - R'_1) \cdot \hat{r}_1.$$

Таким образом:

$$\nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right) = -\frac{4}{r_1^5} \hat{r}_1 \cdot H(r_1 - R'_1) + \frac{1}{r_1^4} \cdot \delta(r_1 - R'_1) \cdot \hat{r}_1.$$

4. Вычисление $\nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{12\pi (r'_1 - D)^4} \right)$: Этот градиент аналогичен второму случаю:

$$\nabla_{r'_1} \left(\frac{1}{(r'_1 - D)^4} \right) = -\frac{4}{(r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{12\pi (r'_1 - D)^4} \right) &= \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{12\pi} \\ &\cdot \left(-\frac{4}{(r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1 \right) = -\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1. \end{aligned}$$

5.3.5 Итоговое подынтегральное выражение

Теперь подставим вычисленные градиенты в исходное выражение:

$$\begin{aligned} \nabla_{r_1} (H(R'_1 - r_1)) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{4\pi (r'_1 - D)^4} \right) \\ - \nabla_{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} \cdot H(r_1 - R'_1) \right) \cdot \nabla_{r'_1} \left(\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{12\pi (r'_1 - D)^4} \right). \end{aligned}$$

Подставляем результаты:

$$(-\delta(R'_1 - r_1) \cdot \hat{r}_1) \cdot \left(-\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1 \right) - \left(-\frac{4}{r_1^5} \hat{r}_1 \cdot H(r_1 - R'_1) + \frac{1}{r_1^4} \cdot \delta(r_1 - R'_1) \cdot \hat{r}_1 \right) \cdot \left(-\frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} \hat{r}'_1 \right).$$

5.3.6 Упрощение выражения

Упростим выражение, учитывая, что $\hat{r}_1 \cdot \hat{r}'_1 = 1$ (если направления совпадают):

$$\delta(R'_1 - r_1) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} - \left(-\frac{4}{r_1^5} H(r_1 - R'_1) + \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) \right) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5}.$$

5.3.7 Итоговое подынтегральное выражение

Теперь подставим это выражение в интеграл:

$$W_{\text{total}} = \int_{V_1} \int_{V'_1} dV_1 dV'_1 \left| \delta(R'_1 - r_1) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} - \left(-\frac{4}{r_1^5} H(r_1 - R'_1) + \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) \right) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} \right|. \quad (5)$$

5.3.8 Учёт областей, где функции не равны нулю

а) Функция Хевисайда $H(R'_1 - r_1)$:

- $H(R'_1 - r_1) = 1$ при $r_1 \leq R'_1$,
- $H(R'_1 - r_1) = 0$ при $r_1 > R'_1$.

б) Функция Хевисайда $H(r_1 - R'_1)$:

- $H(r_1 - R'_1) = 1$ при $r_1 \geq R'_1$,
- $H(r_1 - R'_1) = 0$ при $r_1 < R'_1$.

в) Дельта-функция Дирака $\delta(R'_1 - r_1)$:

- $\delta(R'_1 - r_1)$ "выбирает" значение $r_1 = R'_1$.

г) Дельта-функция Дирака $\delta(r_1 - R'_1)$:

- $\delta(r_1 - R'_1)$ также "выбирает" значение $r_1 = R'_1$.

5.3.9 Совпадение пределов интегрирования

Чтобы области определения функций совпадали, пределы интегрирования для r_1 и r'_1 должны быть одинаковыми. Это означает, что:

1. Для r_1 и r'_1 задаются одинаковые пределы интегрирования.
2. Учитываются области, где функции Хевисайда и Дирака не равны нулю.

5.3.10 Исправление пределов интегрирования

Теперь перепишем интегралы, задавая **одинаковые пределы интегрирования** для r_1 и r'_1 :

Первый интеграл:

$$\int_{r_1=0}^{R'_1} \int_{r'_1=0}^{R'_1} \left| \delta(R'_1 - r_1) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} \right| dV_1 dV'_1.$$

Здесь:

- r_1 изменяется от 0 до R'_1 (где $H(R'_1 - r_1) = 1$),
- r'_1 изменяется от 0 до R'_1 (чтобы пределы совпадали).

Второй интеграл:

$$\int_{r_1=R'_1}^{\infty} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \left| \frac{4}{r_1^5} \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} \right| dV_1 dV'_1.$$

Здесь:

- r_1 изменяется от R'_1 до ∞ (где $H(r_1 - R'_1) = 1$),
- r'_1 изменяется от R'_1 до ∞ (чтобы пределы совпадали).

Третий интеграл:

$$\int_{r_1=R'_1}^{\infty} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \left| \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} \right| dV_1 dV'_1.$$

Здесь:

- r_1 изменяется от R'_1 до ∞ (где $\delta(r_1 - R'_1)$ "выбирает" $r_1 = R'_1$),
- r'_1 изменяется от R'_1 до ∞ (чтобы пределы совпадали).

5.4 Переход к поверхностным интегралам с использованием свойств дельта-функции Дирака

Давайте учтём свойства дельта-функции Дирака и перейдём от объёмных интегралов к поверхностным, так как дельта-функция "выбирает" значение на поверхности сферы радиусом R'_1 .

5.4.1 Свойства дельта-функции Дирака

Дельта-функция Дирака $\delta(R'_1 - r_1)$ обладает следующим свойством:

$$\int_{V_1} f(r_1) \delta(R'_1 - r_1) dV_1 = f(R'_1),$$

где $f(r_1)$ — произвольная функция, а интеграл берётся по объёму V_1 . Это означает, что дельта-функция "выбирает" значение функции $f(r_1)$ на поверхности сферы радиусом R'_1 .

5.4.2 Переход к поверхностным интегралам

а) Первый интеграл: Исходный интеграл:

$$\int_{V_1} \int_{V'_1} \left| \delta(R'_1 - r_1) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} \right| dV_1 dV'_1.$$

Дельта-функция $\delta(R'_1 - r_1)$ "выбирает" значение на поверхности сферы радиусом R'_1 . Таким образом, интеграл по dV_1 сводится к поверхностному интегралу по сфере радиусом R'_1 :

$$\int_{V_1} f(r_1) \delta(R'_1 - r_1) dV_1 = f(R'_1),$$

где S_1 — поверхность сферы радиусом R'_1 .

Аналогично, интеграл по dV'_1 также сводится к поверхностному интегралу по сфере радиусом R'_1 :

$$\int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1 = \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1,$$

где S'_1 — поверхность сферы радиусом R'_1 .

Таким образом, первый интеграл принимает вид:

$$\int_{S_1} \int_{S'_1} \left| \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} \right| dS_1 dS'_1.$$

б) Третий интеграл: Исходный интеграл:

$$\int_{V_1} \int_{V'_1} \left| \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) \cdot \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} \right| dV_1 dV'_1.$$

Дельта-функция $\delta(r_1 - R'_1)$ также "выбирает" значение на поверхности сферы радиусом R'_1 . Таким образом, интеграл по dV_1 сводится к поверхностному интегралу по сфере радиусом R'_1 :

$$\int_{V_1} \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) dV_1 = \int_{S_1} \frac{1}{R_1^4} dS_1.$$

Аналогично, интеграл по dV'_1 сводится к поверхностному интегралу по сфере радиусом R'_1 :

$$\int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1 = \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

Таким образом, третий интеграл принимает вид: После применения дельта-функции $\delta(r_1 - R'_1)$ и перехода к поверхностным интегралам:

$$\int_{S_1} \int_{S'_1} \left| \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi R_1'^4 (r'_1 - D)^5} \right| dS_1 dS'_1.$$

Здесь $R_1'^4$ в числителе и знаменателе сокращаются:

$$\int_{S_1} \int_{S'_1} \left| \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} \right| dS_1 dS'_1.$$

5.4.3 Итоговое выражение для третьего интеграла

5.4.4 Применение теоремы Фубини

Теорема Фубини позволяет разделить двойные интегралы на произведение интегралов. Применим её к первому и третьему интегралам.

а) Первый интеграл:

$$\int_{S_1} \int_{S'_1} \left| \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} \right| dS_1 dS'_1.$$

Этот интеграл можно представить как произведение:

$$\left(\int_{S_1} dS_1 \right) \cdot \left(\int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 \right).$$

б) Третий интеграл:

$$\int_{S_1} \int_{S'_1} \left| \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} \right| dS_1 dS'_1.$$

Этот интеграл также можно представить как произведение:

$$\left(\int_{S_1} dS_1 \right) \cdot \left(\int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 \right).$$

5.4.5 Вычисление интегралов по dS_1

Интеграл по поверхности сферы S_1 радиусом R'_1 равен площади сферы:

$$\int_{S_1} dS_1 = 4\pi R_1'^2.$$

Таким образом, первый и третий интегралы принимают вид:

а) Первый интеграл:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S_1'} \frac{\rho_1 R_2' \rho_2 V(R_2')}{\pi (r_1' - D)^5} dS_1'.$$

б) Третий интеграл:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S_1'} \frac{\rho_1 R_2' \rho_2 V(R_2')}{3\pi (r_1' - D)^5} dS_1'.$$

5.4.6 Итоговые выражения

Таким образом, после применения теоремы Фубини и вычисления интегралов по dS_1 , получаем следующие выражения для первого и третьего интегралов:

а) Первый интеграл:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S_1'} \frac{\rho_1 R_2' \rho_2 V(R_2')}{\pi (r_1' - D)^5} dS_1'.$$

б) Третий интеграл:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S_1'} \frac{\rho_1 R_2' \rho_2 V(R_2')}{3\pi (r_1' - D)^5} dS_1'.$$

Таким образом, мы перешли от объёмных интегралов к поверхностным, используя свойства дельта-функции Дирака и теорему Фубини. Это позволяет упростить вычисления и сосредоточиться на интегрировании по поверхностям сфер.

5.5 Вычисление второго интеграла

Исходный второй интеграл:

$$\int_{r_1=R_1'}^{\infty} \int_{r_1'=R_1'}^{\infty} \left| \frac{4}{r_1^5} \cdot \frac{\rho_1 R_2' \rho_2 V(R_2') R_1'^4}{3\pi (r_1' - D)^5} \right| dV_1 dV_1'.$$

Применим теорему Фубини, чтобы разделить интеграл на произведение:

$$\left(\int_{r_1=R_1'}^{\infty} \frac{4}{r_1^5} dV_1 \right) \cdot \left(\int_{r_1'=R_1'}^{\infty} \frac{\rho_1 R_2' \rho_2 V(R_2') R_1'^4}{3\pi (r_1' - D)^5} dV_1' \right).$$

5.5.1 Вычисление интеграла по dV_1

Интеграл по dV_1 имеет вид:

$$\int_{r_1=R_1'}^{\infty} \frac{4}{r_1^5} dV_1.$$

В сферических координатах $dV_1 = 4\pi r_1^2 dr_1$, поэтому:

$$\int_{r_1=R_1'}^{\infty} \frac{4}{r_1^5} \cdot 4\pi r_1^2 dr_1 = 16\pi \int_{r_1=R_1'}^{\infty} \frac{1}{r_1^3} dr_1.$$

Вычислим этот интеграл:

$$16\pi \int_{r_1=R'_1}^{\infty} \frac{1}{r_1^3} dr_1 = 16\pi \left[-\frac{1}{2r_1^2} \right]_{R'_1}^{\infty} = 16\pi \left(0 + \frac{1}{2R_1'^2} \right) = \frac{8\pi}{R_1'^2}.$$

5.5.2 Итоговая формула для второго интеграла

Таким образом, итоговая формула для второго интеграла принимает вид:

$$\frac{8\pi}{R_1'^2} \cdot \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1.$$

5.6 Итоговое выражение для полного количества возмущения

Исходное выражение для интеграла полного возмущения имело вид:

$$W_{\text{total}} = \left(\int_{V_1} \delta(R'_1 - r_1) dV_1 \right) \cdot \left(\int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1 \right) + \left(\int_{V_1} \frac{4}{r_1^5} H(r_1 - R'_1) dV_1 \right) \cdot \left(\int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1 \right) - \left(\int_{V_1} \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) dV_1 \right) \cdot \left(\int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1 \right). \quad (6)$$

5.6.1 Вычисление интегралов по координате r_1

1. Первый интеграл:

$$\int_{V_1} \delta(R'_1 - r_1) dV_1 = 4\pi R_1'^2.$$

Второй интеграл в первом слагаемом записан по поверхности S'_1 :

$$\int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

Подставляем в первое слагаемое:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

2. Второй интеграл:

$$\int_{V_1} \frac{4}{r_1^5} H(r_1 - R'_1) dV_1 = \frac{8\pi}{R_1'^2}.$$

Второй интеграл во втором слагаемом записан по объему V'_1 :

$$\int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1.$$

Подставляем во второе слагаемое:

$$\frac{8\pi}{R_1'^2} \cdot \int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1.$$

3. Третий интеграл:

$$\int_{V_1} \frac{1}{r_1^4} \delta(r_1 - R'_1) dV_1 = 4\pi R_1'^2.$$

Второй интеграл в третьем слагаемом записан по поверхности S'_1 :

$$\int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

Подставляем в третье слагаемое:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

4. Итоговое выражение для полного количества возмущения

Теперь подставим вычисленные интегралы в исходное выражение:

$$W_{\text{total}} = 4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 + \frac{8\pi}{R_1'^2} \cdot \int_{V'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1 - 4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1. \quad (7)$$

5.6.2 Упрощение первого и третьего слагаемых

Первый и третий интегралы имеют общий множитель $4\pi R_1'^2$. Вынесем его за скобки:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \left(\int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 - \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 \right).$$

Упростим выражение в скобках:

$$\int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 - \int_{S'_1} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1 = \int_{S'_1} \frac{2\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2)}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

Теперь вспомним, что

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3},$$

а в свою очередь $\rho_2 V(R'_2) = Q_2$, тогда получается:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \int_{S'_1} \frac{2 \cdot \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1'^3} \cdot R'_2 \cdot Q_2}{3\pi (r'_1 - D)^5} dS'_1.$$

Упростим коэффициенты:

$$4\pi R_1'^2 \cdot \frac{2Q_1 Q_2 R'_2}{3\pi \cdot \frac{4}{3}\pi R_1'^3} \int_{S'_1} \frac{dS'_1}{(r'_1 - D)^5} = \frac{8Q_1 Q_2 R'_2}{\pi R_1'} \int_{S'_1} \frac{dS'_1}{(r'_1 - D)^5}.$$

5.6.3 Упрощение второго слагаемого

Второй интеграл:

$$\frac{8\pi}{R_1'^2} \cdot \int_{r'_1=R_1'}^{\infty} \frac{\rho_1 R'_2 \rho_2 V(R'_2) R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1.$$

Подставим $\rho_1 = \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1'^3}$ и $\rho_2 V(R'_2) = Q_2$:

$$\frac{8\pi}{R_1'^2} \cdot \int_{r'_1=R_1'}^{\infty} \frac{\frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1'^3} \cdot R'_2 \cdot Q_2 \cdot R_1'^4}{3\pi (r'_1 - D)^5} dV'_1.$$

Упростим коэффициенты:

$$\frac{8\pi}{R_1'^2} \cdot \frac{Q_1 Q_2 R'_2 R_1'}{\frac{4}{3}\pi \cdot 3\pi} \int_{r'_1=R_1'}^{\infty} \frac{dV'_1}{(r'_1 - D)^5} = \frac{2Q_1 Q_2 R'_2}{\pi R_1'} \int_{r'_1=R_1'}^{\infty} \frac{dV'_1}{(r'_1 - D)^5}.$$

5.6.4 Итоговое выражение

Теперь объединим все слагаемые:

$$W_{\text{total}} = \frac{8Q_1 Q_2 R'_2}{\pi R_1'} \int_{S'_1} \frac{dS'_1}{(r'_1 - D)^5} + \frac{2Q_1 Q_2 R'_2}{\pi R_1'} \int_{r'_1=R_1'}^{\infty} \frac{dV'_1}{(r'_1 - D)^5}. \quad (8)$$

5.7 Давайте вычислим первый интеграл:

$$\frac{8Q_1Q_2R_2'}{\pi R_1'} \int_{S_1'} \frac{dS_1'}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5}.$$

Где:

- S_1' — сфера с центром в начале координат и радиусом R_1' , то есть для любой точки на сфере её радиус-вектор \mathbf{r}'_1 удовлетворяет $|\mathbf{r}'_1| = R_1'$;
- \mathbf{D} — фиксированный вектор, а его модуль обозначим $D = |\mathbf{D}|$;
- Запись $|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|$ означает расстояние между точкой \mathbf{r}'_1 и точкой, заданной вектором \mathbf{D} .

5.7.1 Шаг 1. Вычисление поверхностного интеграла

Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль \mathbf{D} . Тогда точку на сфере можно записать в сферических координатах:

$$\mathbf{r}'_1 = R_1' (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

а элемент поверхности равен

$$dS_1' = R_1'^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Модуль разности векторов:

$$|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}| = \sqrt{R_1'^2 + D^2 - 2R_1'D \cos \theta}.$$

Тогда интеграл переписывается как

$$I = \int_{S_1'} \frac{dS_1'}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R_1'^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\left(R_1'^2 + D^2 - 2R_1'D \cos \theta\right)^{5/2}}.$$

Интегрирование по ϕ даёт множитель 2π :

$$I = 2\pi R_1'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\left(R_1'^2 + D^2 - 2R_1'D \cos \theta\right)^{5/2}}.$$

5.7.2 Шаг 2. Замена переменной $u = \cos \theta$

Положим $u = \cos \theta$, тогда $du = -\sin \theta d\theta$. При $\theta = 0$ имеем $u = 1$, при $\theta = \pi$ — $u = -1$. Получаем:

$$I = 2\pi R_1'^2 \int_{u=1}^{-1} \frac{-du}{\left(R_1'^2 + D^2 - 2R_1'D u\right)^{5/2}} = 2\pi R_1'^2 \int_{-1}^1 \frac{du}{\left(R_1'^2 + D^2 - 2R_1'D u\right)^{5/2}}.$$

Обозначим:

$$A = R_1'^2 + D^2, \quad B = 2R_1'D.$$

Тогда интеграл принимает вид

$$I = 2\pi R_1'^2 \int_{-1}^1 \frac{du}{(A - Bu)^{5/2}}.$$

5.7.3 Шаг 3. Вычисление интеграла по u

Выполним подстановку: $v = A - Bu \Rightarrow dv = -B du$ или $du = -\frac{dv}{B}$. При $u = -1$ получаем $v = A + B$, а при $u = 1$ — $v = A - B$. Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{du}{(A - Bu)^{5/2}} &= \frac{1}{B} \int_{v=A-B}^{A+B} \frac{dv}{v^{5/2}} = -\frac{1}{B} \int_{v=A+B}^{A-B} \frac{dv}{v^{5/2}} \\ &= -\frac{2}{3B} \left[v^{-3/2} \right]_{v=A-B}^{A+B} = \frac{2}{3B} \left[(A - B)^{-3/2} - (A + B)^{-3/2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi R_1'^2 \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{2}{3} \left[(A - B)^{-3/2} - (A + B)^{-3/2} \right] \\ &= \frac{4\pi R_1'^2}{3B} \left[(A - B)^{-3/2} - (A + B)^{-3/2} \right]. \end{aligned}$$

Вернём обозначения:

$$A \pm B = R_1'^2 + D^2 \mp 2R_1'D = (R_1' \mp D)^2.$$

Следовательно,

$$(A \mp B)^{-3/2} = \frac{1}{[(R_1' \mp D)^2]^{3/2}} = \frac{1}{(R_1' \mp D)^3}.$$

При этом $B = 2R_1'D$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi R_1'^2}{3 \cdot 2R_1'D} \left[\frac{1}{(R_1' - D)^3} - \frac{1}{(R_1' + D)^3} \right] \\ &= \frac{2\pi R_1'}{3D} \left[\frac{1}{(R_1' - D)^3} - \frac{1}{(R_1' + D)^3} \right]. \end{aligned}$$

5.7.4 Шаг 4. Итоговый результат

Подставляя найденное I в исходное выражение, получаем:

$$\frac{8Q_1Q_2R_2'}{\pi R_1'} I = \frac{8Q_1Q_2R_2'}{\pi R_1'} \cdot \frac{2\pi R_1'}{3D} \cdot \left[\frac{1}{(R_1' - D)^3} - \frac{1}{(R_1' + D)^3} \right].$$

Сократив π и R'_1 , окончательно получаем:

$$\frac{16Q_1Q_2R'_2}{3D} \left[\frac{1}{(R'_1 - D)^3} - \frac{1}{(R'_1 + D)^3} \right].$$

$$\frac{8Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{S'_1} \frac{dS'_1}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5} = \frac{16Q_1Q_2R'_2}{3D} \left[\frac{1}{(R'_1 - D)^3} - \frac{1}{(R'_1 + D)^3} \right] \quad (9)$$

5.8 Вычисление второго интеграла в выражении для полного количества возмущения системы двух сгустков плотности пространства относительно системы отсчета \mathbf{r}'_1 , связанной с центром сферы первого сгустка

В полученном решении для полного возмущения второй интеграл имеет вид:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \frac{dV'_1}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5},$$

где:

- \mathbf{r}'_1 — радиус-вектор в системе \mathbf{r}'_1 ,
- \mathbf{D} — вектор, лежащий на оси Z , направленный от начала системы \mathbf{r}'_1 к началу системы \mathbf{r}'_2 ,
- dV'_1 — элемент объема в системе \mathbf{r}'_1 .

5.9 Для решения задачи выполним следующие шаги:

5.10 Шаг 1. Переход в систему \mathbf{r}'_2

Переход в систему \mathbf{r}'_2 осуществляется по соотношению:

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}.$$

При этом:

$$r'_2 = |\mathbf{r}'_2| = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|.$$

Так как \mathbf{D} лежит на оси Z , оси X и Y совпадают, и угол между вектором \mathbf{r}'_1 и \mathbf{D} совпадает с углом θ в системе \mathbf{r}'_2 .

5.11 Шаг 2. Запись интеграла в сферической системе отсчета \mathbf{r}'_1

В системе \mathbf{r}'_1 элемент объема в сферических координатах:

$$dV'_1 = (r'_1)^2 \sin \theta dr'_1 d\theta d\phi.$$

Таким образом, интеграл записывается как:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(r'_1)^2 \sin \theta}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5} d\phi d\theta dr'_1.$$

5.12 Шаг 3. Переход в сферическую систему отсчета \mathbf{r}'_2

Рассмотрим интеграл в исходной сферической системе координат \mathbf{r}'_1 :

$$I = \frac{2Q_1 Q_2 R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(r'_1)^2 \sin \theta}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5} d\phi d\theta dr'_1.$$

Необходимо перейти к другой сферической системе координат \mathbf{r}'_2 , пересчитать пределы интегрирования и элементы объема интегрирования, и записать интеграл в новой системе координат.

5.13 Шаг 4. Рассчитаем якобиан преобразования и сравним элементы объема в системах отсчета \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 , принимая во внимание, что $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}$.

5.13.1 Связь между системами координат

Условия преобразования Дано:

$$r'_2 = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|,$$

где:

- $\mathbf{r}'_1 = (r'_1, \theta'_1, \phi'_1)$ — радиус-вектор в первой системе координат,
- $\mathbf{D} = (0, 0, D)$ — фиксированный вектор, лежащий на оси Z ,
- $\theta'_2 = \theta'_1, \phi'_2 = \phi'_1$ (угловые координаты совпадают).

Норма разности векторов выражается как:

$$r'_2 = \sqrt{r_1'^2 \sin^2 \theta'_1 + (r'_1 \cos \theta'_1 - D)^2}.$$

Якобиан преобразования определяется только частной производной $\frac{\partial r'_2}{\partial r'_1}$, так как угловые координаты совпадают:

$$J = \frac{\partial r'_2}{\partial r'_1}.$$

5.13.2 Дифференцирование r'_2 по r'_1

Вычислим производную:

$$\frac{\partial r'_2}{\partial r'_1} = \frac{1}{2\sqrt{r_1'^2 \sin^2 \theta'_1 + (r'_1 \cos \theta'_1 - D)^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial r'_1} (r_1'^2 \sin^2 \theta'_1 + (r'_1 \cos \theta'_1 - D)^2).$$

Первая часть:

$$\frac{\partial}{\partial r'_1} (r_1'^2 \sin^2 \theta'_1) = 2r'_1 \sin^2 \theta'_1.$$

Вторая часть:

$$\frac{\partial}{\partial r'_1} (r'_1 \cos \theta'_1 - D)^2 = 2(r'_1 \cos \theta'_1 - D) \cos \theta'_1.$$

5.13.3 Сложение частей

Теперь полная производная:

$$\frac{\partial r'_2}{\partial r'_1} = \frac{2r'_1 \sin^2 \theta'_1 + 2(r'_1 \cos \theta'_1 - D) \cos \theta'_1}{2\sqrt{r_1'^2 \sin^2 \theta_1' + (r_1' \cos \theta_1' - D)^2}}.$$

Объединим

$$\frac{\partial r'_2}{\partial r'_1} = \frac{r'_1 \sin^2 \theta'_1 + (r'_1 \cos^2 \theta'_1 - D \cos \theta'_1)}{\sqrt{r_1'^2 \sin^2 \theta_1' + r_1'^2 \cos^2 \theta_1' - 2Dr_1' \cos \theta_1' + D^2}}.$$

Используем тождество $\sin^2 \theta'_1 + \cos^2 \theta'_1 = 1$:

$$\frac{\partial r'_2}{\partial r'_1} = \frac{r'_1 - D \cos \theta'_1}{\sqrt{r_1'^2 - 2Dr_1' \cos \theta_1' + D^2}}.$$

Заметим, что:

$$r_1'^2 - 2Dr_1' \cos \theta_1' + D^2 = (r_1' - D \cos \theta_1')^2.$$

Таким образом:

$$\frac{\partial r'_2}{\partial r'_1} = \frac{r_1' - D \cos \theta_1'}{r_1' - D \cos \theta_1'} = 1.$$

5.13.4 Так как якобиан преобразования равен 1, в нашей системе выполняется условие:

Так как якобиан преобразования равен 1, в нашей системе выполняется условие:

$$dV'_1 = dV'_2.$$

5.14 Пересчет пределов интегрирования

5.14.1 Исходный интеграл

В исходной системе координат \mathbf{r}'_1 интеграл задан в пределах:

$$I = \frac{2Q_1 Q_2 R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(r'_1)^2 \sin \theta}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{D}|^5} d\phi d\theta dr'_1.$$

5.14.2 Нижний предел интегрирования

В новой системе координат \mathbf{r}'_2 нижний предел интегрирования по r'_2 определяется из условия $r'_1 = R'_1$:

$$r'_2 = \sqrt{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1 D \cos \theta}.$$

Таким образом, нижний предел интегрирования по r'_2 равен:

$$r'_2 \geq \sqrt{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1 D \cos \theta}.$$

5.14.3 Преобразованный интеграл

После перехода к системе координат r'_2 интеграл принимает вид:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_2=\sqrt{(R'_1)^2+D^2-2R'_1D \cos \theta}}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(r'_2)^2 \sin \theta}{(r'_2)^5} d\phi d\theta dr'_2.$$

5.15 Шаг 5. Интегрирование по r'_2

Вычислим внутренний интеграл по r'_2 :

$$\begin{aligned} & \int_{r'_2=\sqrt{(R'_1)^2+D^2-2R'_1D \cos \theta}}^{\infty} \frac{dr'_2}{(r'_2)^3} = \\ & = \left[-\frac{1}{2(r'_2)^2} \right]_{r'_2=\sqrt{(R'_1)^2+D^2-2R'_1D \cos \theta}}^{\infty} = \\ & = \frac{1}{2((R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D \cos \theta)} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{2((R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D \cos \theta)} d\phi d\theta.$$

5.16 Шаг 6. Интегрирование по ϕ

Интеграл по ϕ :

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi.$$

Таким образом:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D \cos \theta} d\theta.$$

Упрощаем:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R'_1} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D \cos \theta} d\theta.$$

5.17 Шаг 7. Интегрирование по θ

Сделаем замену переменной:

$$u = \cos \theta, \quad du = -\sin \theta d\theta.$$

Пределы интегрирования:

- При $\theta = 0$: $u = 1$.
- При $\theta = \pi$: $u = -1$.

Таким образом:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R'_1} \int_1^{-1} \frac{-du}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1Du} = \\ &= \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R'_1} \int_{-1}^1 \frac{du}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1Du}. \end{aligned}$$

5.18 Шаг 8. Вычисление интеграла по u

Используем стандартный интеграл:

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{A - Bu} = \frac{1}{B} \ln \left| \frac{A + B}{A - B} \right|,$$

где:

$$A = (R'_1)^2 + D^2, \quad B = 2R'_1D.$$

Таким образом:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R'_1} \cdot \frac{1}{2R'_1D} \ln \left| \frac{(R'_1)^2 + D^2 + 2R'_1D}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D} \right|.$$

5.19 Шаг 9. Упрощение выражения под логарифмом

Выражение под логарифмом:

$$\frac{(R'_1)^2 + D^2 + 2R'_1D}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D}.$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} (R'_1)^2 + D^2 + 2R'_1D &= (R'_1 + D)^2, \\ (R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D &= (R'_1 - D)^2. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{(R'_1)^2 + D^2 + 2R'_1D}{(R'_1)^2 + D^2 - 2R'_1D} = \frac{(R'_1 + D)^2}{(R'_1 - D)^2}.$$

Так как $(R'_1 + D)^2 > 0$ и $(R'_1 - D)^2 > 0$, знак модуля можно убрать:

$$\ln \left| \frac{(R'_1 + D)^2}{(R'_1 - D)^2} \right| = \ln \left(\frac{(R'_1 + D)^2}{(R'_1 - D)^2} \right) = 2 \ln \left(\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} \right).$$

5.20 Шаг 10. Итоговый результат

Подставляем упрощенное выражение в интеграл:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R'_1} \cdot \frac{1}{2R'_1D} \cdot 2 \ln \left(\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} \right).$$

Упрощаем:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{(R'_1)^2D} \ln \left(\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} \right) \quad (10)$$

5.21 Рассмотрим случай, когда $D > R'_1$

В этом случае выражение под логарифмом:

$$\left(\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} \right)$$

становится отрицательным, так как $R'_1 - D < 0$, а $R'_1 + D > 0$. Для работы с логарифмом отрицательного числа воспользуемся формулой для логарифма комплексного числа.

5.22 Формула для логарифма комплексного числа

Логарифм комплексного числа $z = x + iy$ (где x и y — действительные числа) определяется как:

$$\ln(z) = \ln |z| + i \arg(z),$$

где:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль комплексного числа,
- $\arg(z)$ — аргумент комплексного числа (угол в комплексной плоскости).

Для отрицательного действительного числа $z = -a$ (где $a > 0$):

$$\ln(-a) = \ln(a) + i\pi,$$

так как модуль $|z| = a$, а аргумент $\arg(z) = \pi$ (поскольку отрицательное число лежит на отрицательной действительной оси).

5.23 Применение к нашему случаю

Рассмотрим выражение под логарифмом:

$$\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D}.$$

При $D > R'_1$, знаменатель $R'_1 - D < 0$, а числитель $R'_1 + D > 0$. Таким образом, выражение под логарифмом отрицательно:

$$\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} = -\frac{R'_1 + D}{D - R'_1}.$$

Теперь применим формулу для логарифма отрицательного числа:

$$\ln \left(\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} \right) = \ln \left(-\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) = \ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) + i\pi.$$

5.24 Подстановка в интеграл

Теперь подставим это выражение в наш интеграл:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \ln \left(\frac{R'_1 + D}{R'_1 - D} \right).$$

При $D > R'_1$:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \left(\ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) + i\pi \right).$$

Таким образом, интеграл принимает комплексное значение:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) + i \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \pi.$$

5.25 Итоговый результат для $D > R'_1$

Для области $D > R'_1$ решение интеграла в комплексном виде:

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) + i \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \pi \quad (11)$$

5.26 Физическая интерпретация

- Действительная часть:

$$\operatorname{Re}(I) = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) \quad (12)$$

описывает физическую величину, связанную с взаимодействием систем.

- Мнимая часть:

$$\operatorname{Im}(I) = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \pi \quad (13)$$

возникает из-за смены знака под логарифмом и может интерпретироваться как фаза или дополнительная энергия, связанная с геометрией задачи.

Таким образом, для $D > R'_1$ решение становится комплексным, что отражает изменение физической природы задачи в этой области.

5.27 Разложение в ряд Тейлора для $D > R'_1$

Для случая $D > R'_1$, мы можем разложить логарифм в ряд Тейлора. Рассмотрим выражение под логарифмом:

$$\ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right).$$

Обозначим $x = \frac{R'_1}{D}$. Тогда выражение под логарифмом можно переписать как:

$$\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Теперь разложим $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ в ряд Тейлора. Заметим, что:

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Ряды Тейлора для $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$ известны:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Вычитая второе выражение из первого, получим:

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$$

Ограничимся первыми двумя членами ряда:

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \approx 2x + \frac{2x^3}{3}.$$

Теперь подставим $x = \frac{R'_1}{D}$:

$$\ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) \approx 2 \left(\frac{R'_1}{D} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{R'_1}{D} \right)^3.$$

5.28 Подстановка в формулу для I

Теперь подставим это приближение в нашу формулу для I :

$$I = \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1^2D} \left(\ln \left(\frac{R'_1 + D}{D - R'_1} \right) + i\pi \right).$$

Используя приближение для логарифма, получим:

$$I \approx \frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1^2D} \left(2 \left(\frac{R'_1}{D} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{R'_1}{D} \right)^3 + i\pi \right).$$

Упростим выражение:

- Действительная часть:

$$\frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \cdot 2 \left(\frac{R'_1}{D} \right) = \frac{4Q_1Q_2R'_2}{R_1'D^2},$$

$$\frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{R'_1}{D} \right)^3 = \frac{4Q_1Q_2R'_2}{3R_1'D^4}.$$

- Мнимая часть:

$$\frac{2Q_1Q_2R'_2}{R_1'^2D} \cdot i\pi = i \frac{2Q_1Q_2R'_2\pi}{R_1'^2D}.$$

5.29 Итоговый результат

Для $D > R'_1$, разложив логарифм в ряд Тейлора до второго члена, получаем:

$$I \approx \frac{4Q_1Q_2R'_2}{R_1'D^2} + \frac{4Q_1Q_2R'_2}{3R_1'D^4} + i \frac{2Q_1Q_2R'_2\pi}{R_1'^2D} \quad (14)$$

5.30 Физическая интерпретация

- Действительная часть:

$$\text{Re}(I) \approx \frac{4Q_1Q_2R'_2}{R_1'D^2} + \frac{4Q_1Q_2R'_2}{3R_1'D^4} \quad (15)$$

описывает физическую величину, связанную с взаимодействием систем, с учетом поправок высшего порядка.

- Мнимая часть:

$$\text{Im}(I) = \frac{2Q_1Q_2R'_2\pi}{R_1'^2D} \quad (16)$$

остаётся неизменной и связана с фазой или дополнительной энергией, возникающей из-за геометрии задачи.

Таким образом, разложение в ряд Тейлора позволяет получить приближенное выражение для I в области $D > R'_1$, что упрощает анализ и интерпретацию результата.

VI. График полного количества возмущения на основе полученных формул аппроксимации действительной части решения интеграла

Подставим решения для каждого из интегралов в исходное выражение для полного количества возмущения W_{total} . Напомним, что:

$$W_{\text{total}} = \frac{8Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{S'_1} \frac{dS'_1}{(r'_1 - D)^5} + \frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \frac{dV'_1}{(r'_1 - D)^5}.$$

6.1 Решение для первого интеграла

Первый интеграл равен:

$$\frac{8Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{S'_1} \frac{dS'_1}{(r'_1 - D)^5} = \frac{16Q_1Q_2R'_2}{3D} \left[\frac{1}{(R'_1 - D)^3} - \frac{1}{(R'_1 + D)^3} \right].$$

6.2 Решение для второго интеграла

Второй интеграл в комплексной форме равен:

$$\frac{2Q_1Q_2R'_2}{\pi R'_1} \int_{r'_1=R'_1}^{\infty} \frac{dV'_1}{(r'_1 - D)^5} \approx \frac{4Q_1Q_2R'_2}{R'_1D^2} + \frac{4Q_1Q_2R'_2}{3R'_1D^4} + i \frac{2Q_1Q_2R'_2\pi}{R_1'^2D}.$$

6.3 Подстановка в выражение для W_{total}

Теперь подставим решения для каждого интеграла в исходное выражение для W_{total} :

$$W_{\text{total}} = \frac{16Q_1Q_2R'_2}{3D} \left[\frac{1}{(R'_1 - D)^3} - \frac{1}{(R'_1 + D)^3} \right] + \left(\frac{4Q_1Q_2R'_2}{R'_1D^2} + \frac{4Q_1Q_2R'_2}{3R'_1D^4} + i \frac{2Q_1Q_2R'_2\pi}{R_1'^2D} \right). \quad (17)$$

6.4 График реальной части полученного выражения для полного количества возмущения плотности пространства W_{total} и каждого из членов выражения для более детального анализа

Давайте построим четыре графика каждого члена действительной части полного количества возмущения в логарифмической шкале по оси значений функции и в обычной шкале по оси D .

Разбиение выражения

Полная действительная часть имеет вид:

$$\operatorname{Re}(W_{\text{total}}) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

где

$$A_1 = \frac{16Q_1Q_2R'_2}{3D} \cdot \frac{1}{(R'_1 - D)^3}, \quad A_2 = -\frac{16Q_1Q_2R'_2}{3D} \cdot \frac{1}{(R'_1 + D)^3},$$

$$A_3 = \frac{4Q_1Q_2R'_2}{R'_1D^2}, \quad A_4 = \frac{4Q_1Q_2R'_2}{3R'_1D^4}.$$

Принятые параметры

Принимаем:

$$Q_1 = Q_2 = R'_1 = R'_2 = 5,$$

а переменная D изменяется на интервале:

$$D \in [0.1, 5].$$

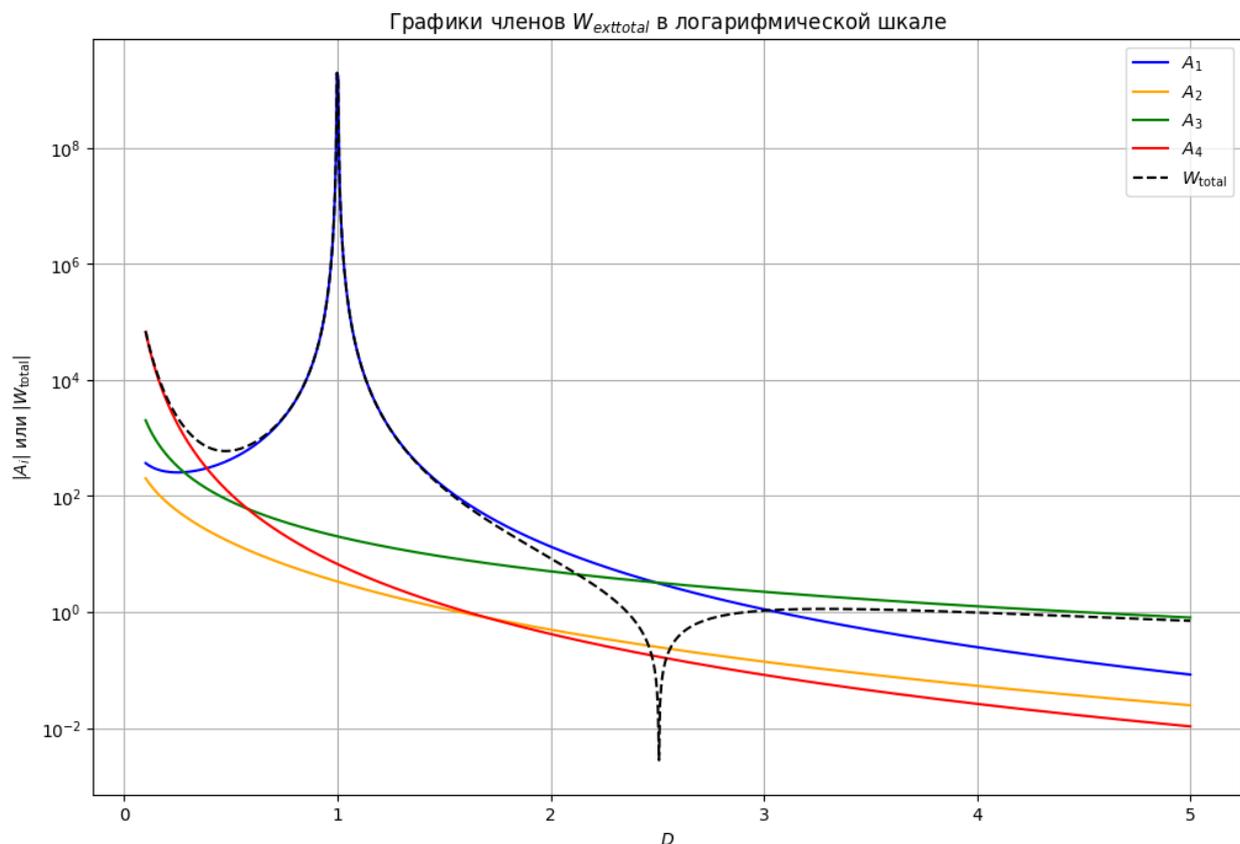


Рис. 3: График реальной части полученного выражения для полного количества возмущения плотности пространства W_{total}

6.5 Анализ результата количества взаимодействия W_{total} , полученного на основе представления о плотности пространства

Полученный результат, основанный на анализе графика полного количества взаимодействия W_{total} , действительно очень интересен и позволяет сделать несколько важных выводов о поведении системы сгустков плотности пространства. Давайте подробно разберём, что происходит на графике и как это связано с физическими взаимодействиями.

6.5.1 Анализ графика

а) Область $D > 2.5$ В этой области W_{total} положителен, что указывает на ****отталкивание**** между сгустками плотности пространства.

- Зависимость $W_{\text{total}}(D) \sim \frac{1}{D^2}$ напоминает ****кулоновское отталкивание**** одноимённых зарядов. - С увеличением расстояния D величина отталкивания убывает, что согласуется с классическим электростатическим взаимодействием.

б) Область $1 < D < 2.5$ В этом диапазоне расстояний функция W_{total} становится отрицательной, что указывает на ****притяжение****.

- Притяжение в этом диапазоне существенно сильнее, чем отталкивание на больших расстояниях. - Поведение функции напоминает ****сильное взаимодействие**** в ядерной физике. - Максимум притяжения достигается при некотором значении $D_{\text{min}} \approx 1.5$.

в) Область $D < 1$ В этой области функция снова становится положительной, что указывает на ****отталкивание**** на очень малых расстояниях.

- Отталкивание может быть связано с эффектом перекрытия сгустков плотности пространства. - В точке $D = R'_1 = 1$ наблюдается ****сингулярность****, которая может быть связана с переходом системы между двумя режимами взаимодействия.

6.5.2 Сравнение с известными физическими взаимодействиями

а) Кулоновское отталкивание ($D > 2.5$) На больших расстояниях взаимодействие напоминает классическое кулоновское отталкивание одноимённых зарядов:

$$W_{\text{total}}(D) \sim \frac{1}{D^2}.$$

Это согласуется с гипотезой о том, что сгустки плотности пространства создают поле, аналогичное электрическому полю зарядов.

б) Сильное взаимодействие ($1 < D < 2.5$) Сильное притяжение в диапазоне $1 < D < 2.5$ по своей форме напоминает ядерные силы:

$$W_{\text{total}}(D) \sim -\frac{1}{D^n}, \quad n \approx 6.$$

Такое поведение может быть связано с резонансными эффектами в модели плотности пространства, где при определённом расстоянии возникает устойчивое взаимодействие.

с) **Отталкивание на малых расстояниях** ($D < 1$) На очень малых расстояниях возникает быстро растущее отталкивание:

$$W_{\text{total}}(D) \sim \frac{1}{D^4}.$$

Это взаимодействие может быть связано с эффектом перекрытия сгустков плотности и напоминает обменное взаимодействие, возникающее из-за принципа запрета Паули в квантовой механике.

—

6.5.3 Интерпретация точки $D = 1$

Точка $D = 1$ имеет особое значение в модели, так как соответствует масштабу сгустка плотности пространства:

$$D = R'_1.$$

В этой точке возникает сингулярность, что может свидетельствовать о переходе системы из состояния сильного притяжения в состояние отталкивания.

—

6.5.4 Физическая интерпретация

Полученные результаты позволяют предложить следующую интерпретацию поведения сгустков плотности пространства:

- Отталкивание на больших расстояниях напоминает электростатическое взаимодействие.
- Сильное притяжение на средних расстояниях может быть аналогом сильного взаимодействия между адронами.
- Отталкивание на малых расстояниях связано с перекрытием плотности пространства и может быть связано с обменными эффектами.

Максимальная энтропия системы Система сгустков стремится к минимальной энергии и максимальной энтропии. Это приводит к возникновению устойчивых конфигураций при определённых значениях D .

—

6.5.5 Вывод

Полученный результат показывает, что модель сгустков плотности пространства демонстрирует сложное поведение, включающее как отталкивающие, так и притягивающие компоненты в зависимости от расстояния.

Основные выводы:

- На больших расстояниях взаимодействие напоминает кулоновское отталкивание.

- На средних расстояниях возникает сильное притяжение, аналогичное ядерным силам.

- На малых расстояниях взаимодействие становится отталкивающим, что связано с перекрытием плотности пространства.

Такое поведение может объяснять устойчивость электронов в атомах и взаимодействие частиц в ядерной физике.

—

VII. Решение интеграла градиента по всему объему для уравнения распределения плотности пространства одной сферы

В этом разделе мы решаем интеграл градиента по всему объему для уравнения распределения плотности пространства одной сферы. Подход использует функцию Хэвисайда, которая позволяет эффективно описывать граничные условия и резкие переходы в распределении плотности пространства. Этот детализированный вывод обеспечивает соблюдение законов сохранения и даёт представление о природе возмущений плотности пространства.

В IV разделе нашего исследования мы получили, что формула для полного распределения плотности пространства вокруг одной сферы в терминах функции Хэвисайда определяется по формуле:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1),$$

где $r = |\mathbf{r}|$.

Теперь заменим r на норму разности векторов $|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|$:

$$\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) = \rho_1 H(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1).$$

7.1 Вычисление градиента

Градиент функции $\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)$ вычисляется как:

$$\nabla\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) = \frac{\partial\Delta\rho}{\partial|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|} \cdot \nabla|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|.$$

7.1.1 Вычисление $\frac{\partial\Delta\rho}{\partial|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|}$

Функция $\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)$ состоит из двух частей:

1. $\rho_1 H(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)$,
2. $-\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1)$.

Производная функции Хевисайда $H(x)$ — это дельта-функция Дирака $\delta(x)$. Таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|} (\rho_1 H(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)) = -\rho_1 \delta(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|),$$

$$\frac{\partial}{\partial|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|} \left(-\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) \right) = \frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^5} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1)$$

7.1.2 Вычисление $\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|$

Градиент нормы разности векторов:

$$\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|}.$$

7.1.3 Итоговый градиент

Теперь объединим результаты:

$$\nabla\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) = \left(-\rho_1 \delta(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) + \frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^5} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) \right) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|}$$

7.2 Модуль градиента

Теперь вычислим модуль градиента:

$$|\nabla\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)| = \left| -\rho_1 \delta(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) + \frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^5} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) \right| \cdot \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|}$$

7.3 Интеграл от модуля градиента

Теперь вычислим интеграл от модуля градиента по всему объёму:

$$\int_0^\infty |\nabla \Delta \rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)| dV.$$

7.3.1 Разделение на части

Интеграл разбивается на три части:

1. Вклад от $-\rho_1 \delta(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)$,
2. Вклад от $\frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^5} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1)$,
3. Вклад от $-\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1)$.

7.3.2 Вычисление каждой части

1. Вклад от дельта-функции $-\rho_1 \delta(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)$:

$$\int_0^\infty -\rho_1 \delta(R'_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|) dV = -\rho_1 \cdot 4\pi R_1'^2.$$

2. Вклад от $\frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^5} H(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1)$:

$$\int_{R'_1}^\infty \frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^5} dV = \frac{4\rho_1 \cdot R_1'^4}{3} \cdot 4\pi \int_{R'_1}^\infty \frac{1}{s^5} \cdot s^2 ds = \frac{16\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \int_{R'_1}^\infty \frac{1}{s^3} ds.$$

Интеграл:

$$\int_{R'_1}^\infty \frac{1}{s^3} ds = \left[-\frac{1}{2s^2} \right]_{R'_1}^\infty = \frac{1}{2R_1'^2}.$$

Таким образом:

$$\frac{16\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \cdot \frac{1}{2R_1'^2} = \frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3}.$$

3. Вклад от $-\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1)$:

$$\int_0^\infty -\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|^4} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1| - R'_1) dV = -\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3R_1'^4} \cdot 4\pi R_1'^2 = -\frac{4\pi\rho_1 R_1'^2}{3}.$$

7.3.3 Итоговый результат

Теперь объединим все части:

$$\int_0^\infty |\nabla \Delta \rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)| dV = -\rho_1 \cdot 4\pi R_1'^2 + \frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3} - \frac{4\pi\rho_1 R_1'^2}{3}.$$

Сложим:

$$-4\pi\rho_1 R_1'^2 + \frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3} - \frac{4\pi\rho_1 R_1'^2}{3} = -4\pi\rho_1 R_1'^2 + \frac{4\pi\rho_1 R_1'^2}{3} = -\frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3}.$$

7.4 Заключение

Интеграл от модуля градиента функции $\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)$ равен:

$$\int_0^\infty |\nabla\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)| dV = -\frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3}.$$

Итоговое выражение для интеграла от модуля градиента:

$$\int_0^\infty |\nabla\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)| dV = \left| -\frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3} \right| = \frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3}. \quad (18)$$

Теперь выразим это через Q_1 . Напомним, что:

$$Q_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1'^3.$$

Выразим ρ_1 через Q_1 :

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1'^3}.$$

Подставим ρ_1 в итоговое выражение:

$$\frac{8\pi\rho_1 R_1'^2}{3} = \frac{8\pi \left(\frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1'^3} \right) R_1'^2}{3}.$$

Упростим:

$$\frac{8\pi Q_1 R_1'^2}{\frac{4}{3}\pi R_1'^3 \cdot 3} = \frac{8\pi Q_1 R_1'^2}{4\pi R_1'^3} = \frac{2Q_1}{R_1'}.$$

$$\int_0^\infty |\nabla\Delta\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}'_1|)| dV = \frac{2Q_1}{R_1'}, \quad (19)$$

где $Q_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1'^3$.

Получили ту же размерность что и у формулы для $\Delta W_{total}(D) \approx 2\frac{R_2'Q}{D^2}$, если сократить R_2' и квадрат от D^2 , получится та же размерность, что и для количества возмущения плотности пространства между двумя сфера, которая по аналогии с законом Кулона имеет физический смысл силы. Это означает, что наши рассуждения оказались верны, интеграл от градиента для распределения плотности пространства от 0 до бесконечности показывает силу которая необходима, что бы удерживать плотность пространства в сжатом состоянии.

Так же мы видим, что несмотря на то что выполняется третий постулат нашей системы - закона сохранения количества плотности пространства, система не находится в равновесии и остается возмущенной. Таким образом, для выполнения

четвертого закона нашей вселенной — сделать максимальной энтропию распределения плотности пространства — необходимо, чтобы количество полного возмущения количества плотности пространства (от 0 до бесконечности) также стремилось к нулю. Однако, если мы предпримем дополнительное изменение распределения плотности за пределами сферы и как-то перераспределим плотность пространства за пределами сферы, это приведет к нарушению третьего закона, связанного с сохранением количества плотности пространства.

В связи с этим можно предположить, что пространство, чтобы компенсировать это возмущение, и будет еще искривляться, но уже через искривление своей метрики. Только в этом случае, будут соблюдены и третий, и четвертый постулаты нашей гипотетической вселенной.

VIII. Связь между плотностью пространства и массой сжатой сферы

В предыдущем разделе мы получили, что $\int_0^\infty \nabla \Delta \rho(r) \cdot dV = -\frac{2*Q}{R'_1}$, не равен нулю и характеризует силу, которая удерживает сферу с плотностью пространства сжатой.

А давайте теперь посчитаем энергию необходимую для сжатия этой сфера от $S(R_1)$ до $S(R'_1)$. Если величина интеграла от градиента есть мера силы, то проинтегрировав эту силу по пути мы получим работу необходимую для сжатия сферы, то есть ее внутреннюю энергию.

Далее найдем эту связь между внутренней энергией заряда равной интегралу силы необходимой для сжатия сферы по радиусу от её начального радиуса R_1 до конечного радиуса R'_1 . Это соотношение имеет решающее значение для понимания того, как энергия, содержащаяся внутри сжатой сферы, определяет кривизну пространства, а следовательно, и гравитационное поле, создаваемое сжатой областью пространства в виде сферы, то есть ее массы.

8.1 Энергия, необходимая для сжатия сферы от R_1 до R'_1

8.1.1 Начальное уравнение

Имеем:

$$\int_0^\infty \nabla \Delta \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi \rho_1 (R'_1)^2}{3}$$

где

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{R_1^3}{R_1'^3} - 1 \right)$$

Подставляем значение ρ_1 и получаем:

$$\int_0^\infty \nabla \Delta \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(\frac{R_1^3}{R_1'} - (R_1')^2 \right)$$

8.1.2 Давайте выполним замену переменной интегрирования, R_1' на t тогда наше выражение примет вид:

$$F(t) = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(\frac{R_1^3}{t} - (t)^2 \right)$$

Где $F(t)$ имеет физический смысл силы которую необходимо приложить для сжатия сферы $S(t)$ от $t = R_1$ до $t = R_1'$

8.1.3 Вычисление энергии необходимой для сжатия сферы от R_1 до R_1'

Рассмотрим сферу $S(t)$ с радиусом t , которую необходимо сжать от радиуса R_1 до радиуса R_1' . Сила, которая удерживает сферу в сжатом состоянии $S(R_1')$, задана функцией:

$$F(t) = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(\frac{R_1^3}{t} - t^2 \right)$$

Необходимо найти энергию E , затраченную на сжатие сферы от R_1 до R_1' . Для этого используем формулу для работы, которая в данном случае равна энергии сжатия:

$$E = \int_{R_1}^{R_1'} F(t) dt$$

Подставляем выражение для силы $F(t)$:

$$E = \int_{R_1}^{R_1'} \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(\frac{R_1^3}{t} - t^2 \right) dt$$

Разделим интеграл на два слагаемых:

$$E = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left[\int_{R_1}^{R'_1} \frac{R_1^3}{t} dt - \int_{R_1}^{R'_1} t^2 dt \right]$$

Интегрируем каждое слагаемое по переменной t для первого слагаемого получим:

$$\int \frac{R_1^3}{t} dt = R_1^3 \ln t$$

Для второго слагаемого получим:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$$

Подставляем результаты интегрирования и пределы интегрирования получаем:

$$E = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left[R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) + \frac{1}{3} ((R'_1)^3 - R_1^3) \right] \quad (20)$$

Это выражение представляет энергию, необходимую для сжатия сферы от R_1 до R'_1 . Эта энергия эквивалентна количеству энергии, содержащейся в сжатой сфере, которая вызывает кривизну пространства вместе с его метрикой, определяя тем самым массу сферы.

8.2 Масса сжатой сферы

Используя известное уравнение Эйнштейна $E = mc^2$, мы можем найти массу m сжатой сферы:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Подставим выражение для E :

$$m = \frac{8\pi\rho_0}{3c^2} \left[R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) + \frac{1}{3} ((R'_1)^3 - R_1^3) \right] \quad (21)$$

Это выражение определяет массу сжатой сферы на основе энергии, необходимой для её сжатия, которую так же можно интерпретировать как энергию удерживающую сферу в сжатом состоянии или энергию заключенную внутри сжатой сферы. Этот результат иллюстрирует, как энергия, связанная со сжатием сферы, преобразуется в эквивалентную массу, которая (для выполнения нашего четвертого постулата) создает искривление пространства относительно своей метрики и порождает эффекты такие как масса и гравитационное поле.

IX. Теоретическое обоснование постулата Бора для электрона в атоме водорода на основе мнимой части решения для полного количества возмущения

Когда мы получили выражение для внутренней энергии сгустка плотности пространства, которую мы интерпретируем как массу заряда, мы можем приступить к написанию уравнения для равновесия сил сгустка, движущегося вокруг противоположного заряда, и проверить, как это движение может быть связано с мнимым решением выражения для полного количества возмущения системы двух зарядов. Для этого ограничимся квадратичным членом для нашего выражения W_{total} , так как остальные поправки имеют значение только при $D \sim R'_1$.

9.1 Постановка задачи

Рассмотрим два сгустка, создающих возмущения плотности пространства. Первый сгусток находится в системе отсчета \mathbf{r}_1 , а второй — на расстоянии D от первого. Полное возмущение плотности пространства, создаваемое двумя сгустками относительно системы координат \mathbf{r}_1 , выражается как:

$$W_{\text{total},r_1} \approx \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D^2} + i \frac{\pi Q_1 Q_2 R'_2}{2 R_1'^2 D}, \quad (22)$$

где:

- $Q_1 = \rho_1 V(R'_1)$ — ”заряд” первого сгустка,
- $Q_2 = \rho_2 V(R'_2)$ — ”заряд” второго сгустка,
- R'_1 и R'_2 — радиусы сгустков,
- D — расстояние между сгустками.

Необходимо найти расстояние D_0 и частоту ω_0 , при которых центробежная сила уравновешивается силой притяжения, определяемой действительной частью возмущения, а частота обращения ω_0 связана с мнимой частью возмущения.

9.2 Шаг 1. Баланс сил

Условие равновесия (баланс центробежной силы и силы притяжения) для первого сгустка массой m_1 записывается как:

$$m_1 \omega_0^2 D_0 = \text{Re}(W_{\text{total},r_1}).$$

Подставляем действительную часть W_{total,r_1} :

$$m_1 \omega_0^2 D_0 = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D_0^2}.$$

9.3 Шаг 2. Связь частоты и мнимой части возмущения

Частота обращения ω_0 связана с мнимой частью возмущения $\text{Im}(W_{\text{total},r_1})$ через коэффициент пропорциональности H :

$$\omega_0 = H \cdot \text{Im}(W_{\text{total},r_1}).$$

Подставляем мнимую часть W_{total,r_1} :

$$\omega_0 = H \cdot \frac{\pi Q_1 Q_2 R'_2}{2R_1'^2 D_0}.$$

9.4 Шаг 3. Подстановка ω_0 в условие баланса сил

Подставляем выражение для ω_0 в условие баланса сил:

$$m_1 \left(H \cdot \frac{\pi Q_1 Q_2 R'_2}{2R_1'^2 D_0} \right)^2 D_0 = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R_1' D_0^2}.$$

Упрощаем левую часть:

$$m_1 \cdot \frac{H^2 \pi^2 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{4R_1'^4 D_0^2} \cdot D_0 = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R_1' D_0^2}.$$

Сокращаем одинаковые множители:

$$\frac{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}{4R_1'^4 D_0} = \frac{1}{R_1' D_0^2}.$$

Умножаем обе части на D_0^2 :

$$\frac{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}{4R_1'^4} D_0 = \frac{1}{R_1'}.$$

Решаем относительно D_0 :

$$D_0 = \frac{4R_1'^3}{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}.$$

9.5 Шаг 4. Выражение для частоты ω_0

Подставляем D_0 в выражение для ω_0 :

$$\omega_0 = H \cdot \frac{\pi Q_1 Q_2 R'_2}{2R_1'^2 D_0}.$$

Подставляем $D_0 = \frac{4R_1'^3}{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}$:

$$\omega_0 = H \cdot \frac{\pi Q_1 Q_2 R'_2}{2R_1'^2} \cdot \frac{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}{4R_1'^3}.$$

Упрощаем:

$$\omega_0 = \frac{m_1 H^3 \pi^3 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{8 R_1'^5}.$$

9.6 Итоговое решение

1. **Расстояние D_0 при балансе сил:**

$$D_0 = \frac{4 R_1'^3}{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R_2'} \quad (23)$$

2. **Частота обращения ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{m_1 H^3 \pi^3 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{8 R_1'^5} \quad (24)$$

9.7 Введение константы h и нахождение D_n и ω_n для более низких мод

9.7.1 Введение константы h

Для удобства записи выражений введем константу h :

$$h = \frac{2 R_1'}{H \pi}.$$

Тогда коэффициент H выражается через h :

$$H = \frac{2 R_1'}{h \pi}.$$

9.7.2 Переписывание формул для D_0 и ω_0 с использованием h

Формула для D_0 : Исходная формула для D_0 :

$$D_0 = \frac{4 R_1'^3}{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R_2'}.$$

Подставляем $H = \frac{2 R_1'}{h \pi}$:

$$D_0 = \frac{4 R_1'^3}{m_1 \left(\frac{2 R_1'}{h \pi} \right)^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R_2'}.$$

Упрощаем:

$$D_0 = \frac{4R_1'^3 h^2 \pi^2}{4m_1 R_1'^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R_2'} = \frac{R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R_2'}.$$

Формула для ω_0 : Исходная формула для ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{m_1 H^3 \pi^3 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{8R_1'^5}.$$

Подставляем $H = \frac{2R_1'}{h\pi}$:

$$\omega_0 = \frac{m_1 \left(\frac{2R_1'}{h\pi}\right)^3 \pi^3 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{8R_1'^5}.$$

Упрощаем:

$$\omega_0 = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{h^3 R_1'^2}. \quad (25)$$

9.8 Нахождение D_n и ω_n для более низких мод

Для более низких мод n предполагаем, что частота обращения ω_n связана с мнимой частью возмущения следующим образом:

$$n\omega_n = H \cdot \text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n)). \quad (26)$$

Подставляем мнимую часть $W_{\text{total}_{r_1}}$:

$$n\omega_n = H \cdot \frac{\pi Q_1 Q_2 R_2'}{2R_1'^2 D_n}.$$

Выражаем ω_n :

$$\omega_n = \frac{H \pi Q_1 Q_2 R_2'}{2n R_1'^2 D_n}.$$

9.8.1 Условие баланса сил для n -ой моды

Условие баланса сил для n -ой моды:

$$m_1 \omega_n^2 D_n = \text{Re}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n)).$$

Подставляем $\text{Re}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))$:

$$m_1 \omega_n^2 D_n = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D_n^2}.$$

Подставляем $\omega_n = \frac{H \pi Q_1 Q_2 R'_2}{2n R_1'^2 D_n}$:

$$m_1 \left(\frac{H \pi Q_1 Q_2 R'_2}{2n R_1'^2 D_n} \right)^2 D_n = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D_n^2}.$$

Упрощаем левую часть:

$$m_1 \cdot \frac{H^2 \pi^2 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{4n^2 R_1'^4 D_n^2} \cdot D_n = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D_n^2}.$$

Сокращаем одинаковые множители:

$$\frac{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}{4n^2 R_1'^4 D_n} = \frac{1}{R'_1 D_n^2}.$$

Умножаем обе части на D_n^2 :

$$\frac{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}{4n^2 R_1'^4} D_n = \frac{1}{R'_1}.$$

Решаем относительно D_n :

$$D_n = \frac{4n^2 R_1'^3}{m_1 H^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2}.$$

Подставляем $H = \frac{2R'_1}{h\pi}$:

$$D_n = \frac{4n^2 R_1'^3 h^2 \pi^2}{4m_1 R_1'^2 \pi^2 Q_1 Q_2 R'_2} = \frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R'_2}.$$

9.8.2 Выражение для ω_n

Подставляем D_n в выражение для ω_n :

$$\omega_n = \frac{H \pi Q_1 Q_2 R'_2}{2n R_1'^2 D_n}.$$

Подставляем $D_n = \frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R'_2}$:

$$\omega_n = \frac{H \pi Q_1 Q_2 R'_2}{2n R_1'^2} \cdot \frac{m_1 Q_1 Q_2 R'_2}{n^2 R_1' h^2}.$$

Упрощаем:

$$\omega_n = \frac{H \pi m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^3 R_1'^3 h^2}.$$

Подставляем $H = \frac{2R'_1}{h\pi}$:

$$\omega_n = \frac{\left(\frac{2R'_1}{h\pi}\right) \pi m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^3 R_1'^3 h^2} = \frac{2R'_1 m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^3 R_1'^3 h^3}.$$

Сокращаем:

$$\omega_n = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^3 R_1'^2 h^3}.$$

9.8.3 Итоговое решение

1. **Расстояние D_n для n -ой моды:**

$$D_n = \frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R_2'}.$$

2. **Частота обращения ω_n для n -ой моды:**

$$\omega_n = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^3 R_1'^2 h^3}.$$

3. **Связь между D_0 и D_n :

$$D_n = n^2 D_0. \quad (27)$$

4. **Связь между ω_0 и ω_n :

$$\omega_n = \frac{\omega_0}{n^3}. \quad (28)$$

9.9 Теоретическое обоснование постулата на основании полученных выражений для радиуса резонансной орбиты через произведения $V_n \cdot D_n$, угловой момент системы двух сгустков плотности пространства L_n

9.9.1 1. Орбитальная скорость V_n

Орбитальная скорость V_n первого сгустка на n -ой орбите определяется как:

$$V_n = \omega_n \cdot D_n.$$

Подставляем выражения для ω_n и D_n :

$$\omega_n = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^3 R_1'^2 h^3},$$

$$D_n = \frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R_2'}$$

Тогда:

$$V_n = \left(\frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^3 R_1'^2 h^3} \right) \cdot \left(\frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R_2'} \right)$$

Упрощаем:

$$V_n = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2 \cdot n^2 R_1' h^2}{n^3 R_1'^2 h^3 \cdot m_1 Q_1 Q_2 R_2'} = \frac{Q_1 Q_2 R_2' \cdot n^2 R_1' h^2}{n^3 R_1'^2 h^3}$$

Сокращаем:

$$V_n = \frac{Q_1 Q_2 R_2'}{n R_1' h}$$

9.9.2 2. Произведение $V_n \cdot D_n$

Теперь найдем произведение $V_n \cdot D_n$:

$$V_n \cdot D_n = \left(\frac{Q_1 Q_2 R_2'}{n R_1' h} \right) \cdot \left(\frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R_2'} \right)$$

Упрощаем:

$$V_n \cdot D_n = \frac{Q_1 Q_2 R_2' \cdot n^2 R_1' h^2}{n R_1' h \cdot m_1 Q_1 Q_2 R_2'} = \frac{nh}{m_1}$$

Таким образом:

$$V_n \cdot D_n = \frac{nh}{m_1}$$

9.9.3 3. Угловой момент L_n

Угловой момент L_n первого сгустка на n -ой орбите определяется как:

$$L_n = m_1 V_n D_n$$

Подставляем $V_n \cdot D_n = \frac{nh}{m_1}$:

$$L_n = m_1 \cdot \frac{nh}{m_1} = nh$$

9.9.4 4. Связь между $V_n \cdot D_n$ и L_n

Из полученных выражений видно, что:

$$V_n \cdot D_n = \frac{nh}{m_1}$$

Откуда следует, что

$$L_n = nh = m_1 \cdot (V_n \cdot D_n)$$

Таким образом, угловой момент L_n прямо пропорционален произведению $V_n \cdot D_n$:

$$L_n = m_1 \cdot (V_n \cdot D_n) = nh. \quad (29)$$

9.9.5 Полученный результат

- Произведение $V_n \cdot D_n$: Характеризует "крутящий момент" системы, связанный с орбитальной скоростью и радиусом орбиты. Оно пропорционально номеру моды n и константе h .
- Угловой момент L_n : Прямо пропорционален nh , что соответствует квантованию углового момента в системе в точности как было сформулировано в эмпирически полученном постулате Бора для электрона в атоме водорода на основе спектра излучения.

Таким образом, полученные выражения подтверждают, что угловой момент системы квантуется и связан с орбитальной скоростью и радиусом орбиты через константу h . Постулат Бора доказан теоретически на основании простых представлений о стремлении системы сгустков плотности пространства к максимальной энтропии, что дает возможность утверждать, что использованный в данной статье подход и основанная на нем математическая модель заслуживают как минимум внимания и обсуждения.

9.10 Полная энергия системы двух сгустков плотности пространства E_n и её связь с частотой вращения ω_n

9.10.1 Полная энергия первого сгустка на n -ой орбите складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии:

Полная энергия первого сгустка на n -ой орбите складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии:

$$E_n = \frac{1}{2}m_1V_n^2 - \int_{D_n}^{\infty} \text{Re}(W_{\text{total},r_1}) dD.$$

9.10.2 Кинетическая энергия первого сгустка:

$$T_n = \frac{1}{2} m_1 V_n^2.$$

Подставляем $V_n = \frac{nh}{m_1 D_n}$:

$$T_n = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{nh}{m_1 D_n} \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \frac{n^2 h^2}{m_1^2 D_n^2} = \frac{n^2 h^2}{2 m_1 D_n^2}.$$

9.10.3 Потенциальная энергия

Потенциальная энергия определяется интегралом от действительной части возмущения $\text{Re}(W_{\text{total},r_1})$:

$$U_n = - \int_{D_n}^{\infty} \text{Re}(W_{\text{total},r_1}) dD.$$

Подставляем $\text{Re}(W_{\text{total},r_1}) = \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D^2}$:

$$U_n = - \int_{D_n}^{\infty} \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D^2} dD.$$

Вычисляем интеграл:

$$U_n = - \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1} \int_{D_n}^{\infty} \frac{1}{D^2} dD = - \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1} \left[-\frac{1}{D} \right]_{D_n}^{\infty} = - \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D_n}.$$

9.10.4 Полная энергия E_n

Подставляем T_n и U_n в выражение для E_n :

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{2 m_1 D_n^2} - \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1 D_n}.$$

Подставляем $D_n = \frac{n^2 R'_1 h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R'_2}$:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{2 m_1} \cdot \left(\frac{m_1 Q_1 Q_2 R'_2}{n^2 R'_1 h^2} \right)^2 - \frac{Q_1 Q_2 R'_2}{R'_1} \cdot \frac{m_1 Q_1 Q_2 R'_2}{n^2 R'_1 h^2}.$$

Упрощаем:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{2 m_1} \cdot \frac{m_1^2 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^4 R_1'^2 h^4} - \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^2 R_1'^2 h^2}.$$

Сокращаем:

$$E_n = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2 n^2 R_1'^2 h^2} - \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^2 R_1'^2 h^2} = - \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2 n^2 R_1'^2 h^2}.$$

9.10.5 Сравнение с частотой вращения ω_n

Частота вращения ω_n выражается как:

$$\omega_n = \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^3 R_1'^2 h^3}.$$

Выразим E_n через ω_n :

$$E_n = -\frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^2 h^2}.$$

Подставляем ω_n :

$$E_n = -\frac{nh}{2} \cdot \frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{n^3 R_1'^2 h^3} = -\frac{nh}{2} \cdot \omega_n.$$

Таким образом:

$$E_n = -\frac{nh}{2} \omega_n.$$

9.10.6 Итоговое решение

1. Полная энергия E_n :

$$E_n = -\frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^2 h^2}. \quad (30)$$

2. Связь между E_n и ω_n :

$$E_n = -\frac{nh}{2} \omega_n. \quad (31)$$

Получили предсказуемый результат: полная энергия пропорциональна частоте вращения ω_n и константе h . Это соотношение аналогично связи энергии и частоты в квантовых системах, таким образом, полученные выражения подтверждают, что полная энергия системы связана с частотой вращения через константу h и номер моды n .

9.11 Давайте попытаемся осмыслить полученный результат и найдем отношения E_n к $\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))$, то есть полной энергии системы двух сгустков к мнимой части решения для количества возмущения двух сгустков

9.11.1 Полная энергия E_n

Из предыдущего решения полная энергия E_n выражается как:

$$E_n = -\frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^2 h^2}.$$

9.11.2 Мнимая часть возмущения $\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))$

Мнимая часть возмущения $W_{\text{total}_{r_1}}$ на расстоянии D_n выражается как:

$$\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n)) = \frac{\pi Q_1 Q_2 R_2'}{2R_1'^2 D_n}.$$

Подставляем $D_n = \frac{n^2 R_1' h^2}{m_1 Q_1 Q_2 R_2'}$:

$$\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n)) = \frac{\pi Q_1 Q_2 R_2'}{2R_1'^2} \cdot \frac{m_1 Q_1 Q_2 R_2'}{n^2 R_1' h^2} = \frac{\pi m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^3 h^2}.$$

9.11.3 Отношение E_n к $\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))$

Теперь найдем отношение $\frac{E_n}{\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))}$:

$$\frac{E_n}{\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))} = \frac{-\frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^2 h^2}}{\frac{\pi m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^3 h^2}}.$$

Упрощаем:

$$\frac{E_n}{\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))} = -\frac{\frac{m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^2 h^2}}{\frac{\pi m_1 Q_1^2 Q_2^2 R_2'^2}{2n^2 R_1'^3 h^2}} = -\frac{R_1'}{\pi}.$$

9.11.4 Итоговое решение

1.*Отношение E_n к $\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))$:

$$\frac{E_n}{\text{Im}(W_{\text{total}_{r_1}}(D_n))} = -\frac{R_1'}{\pi}. \quad (32)$$

Таким образом, отношение E_n к $\text{Im}(W_{\text{total},r_1}(D_n))$ выражается через радиус первого сгустка R'_1 и константу π , что подтверждает наше предположение относительно того, что мнимая часть решения для полного количества возмущения является энергией системы, определяющей резонансную частоту системы двух сгустков плотности пространства.

9.12 Физический смысл постоянной Планка

В нашей модели мы получили, что константа h (аналог постоянной Планка) выражается как:

$$h = \frac{2R'_1}{H\pi},$$

где: - R'_1 — радиус первого сгустка, - H — коэффициент пропорциональности, связывающий частоту вращения ω_n и мнимую часть возмущения $\text{Im}(W_{\text{total},r_1})$.

При $H = 1$ (резонансная частота равна мнимой части возмущения) константа h принимает вид:

$$h = \frac{2R'_1}{\pi}.$$

Мы также установили, что отношение полной энергии системы E_n к мнимой части возмущения $\text{Im}(W_{\text{total},r_1})$ равно:

$$\frac{E_n}{\text{Im}(W_{\text{total},r_1})} = 2h. \quad (33)$$

Это соотношение позволяет интерпретировать h как **отношение полной энергии системы в резонансном состоянии к "мнимой энергии" системы**. Таким образом, постоянная Планка h приобретает глубокий физический смысл: она характеризует связь между энергией системы и её мнимой (резонансной) составляющей.

9.13 Аналогия с квантованием углового момента

В нашей модели угловой момент L_n первого сгустка квантуется по правилу:

$$L_n = nh,$$

где n — целое число (номер моды). Это прямо соответствует **постулату Бора о квантовании углового момента электрона в атоме водорода**, где угловой момент электрона также квантуется как $L = n\hbar$ (здесь $\hbar = h/2\pi$ — приведенная постоянная Планка).

Таким образом, наша модель не только воспроизводит известные квантовомеханические закономерности, но и предлагает новый взгляд на природу постоянной Планка, связывая её с резонансными свойствами системы.

Полученный результат позволяет рассматривать постоянную Планка не как абстрактную константу, а как физическую величину, определяющую связь между мнимой и полной энергией системы двух сгустков.

Давайте также вспомним, когда мы впервые столкнулись с необходимостью ввести нормировочную константу $\frac{R'_1}{4\pi}$ для того, чтобы выполнялся наш постулат о сохранении количества плотности пространства, введенный в третьем разделе нашего исследования. Таким образом, постоянная Планка имеет очень глубокий физический смысл: это и нормировочная константа для соблюдения постулата о количестве плотности пространства, это и константа в квантовании углового момента системы двух сгустков при вращении одного вокруг другого, это и отношение полной энергии системы двух сгустков к её мнимой энергии, а также это размер электрона, деленный на $\frac{1}{2}\pi$.

Многие, думаю, возмутятся, что размер электрона не равен постоянной Планка на основе измерений. Я вам отвечу, что размеры электрона находятся за пределами возможности измерения. Таким образом, размер электрона принят равным минимально возможному экспериментальному измерению. Теоретические расчеты предсказывают, что его размеры гораздо меньше, чем принято считать. Полученный размер электрона хорошо согласуется с формулой для массы электрона и протона на основе полученной в настоящей статье формулы для внутренней энергии заряда, если считать, что электрон — это сгусток плотности пространства, а протон — это, наоборот, разряжение (растяжение), что косвенно подтверждает наши предположения насчет природы внутренней энергии заряда, определяющей его массу. Таким образом, наша теория замкнулась сама на себя, что меня как исследователя не может не впечатлять.

Я ставил себе задачу, приступая к этому исследованию, понять, почему количество взаимодействия между двумя зарядами убывает как $\sim \frac{1}{D^2}$, и получил совершенно неожиданный результат, что на самом деле оно имеет логарифмическую зависимость, причем решение имеет только комплексный вид, следствием из которого является мнимая энергия системы двух сгустков, которая определяет их резонансную частоту, на которой эта система находится в резонансе и поэтому не излучает энергию при равноускоренном движении по круговой орбите вокруг первого сгустка плотности пространства.

Х. Отношение энергии создания двух сгустков плотности пространства (внутренней энергии двух зарядов) к потенциальной энергии их взаимодействия. Внутренняя энергия пространства.

Давайте найдем отношение энергии, затраченной на создание двух зарядов $Q_1 = Q_1$, к энергии взаимодействия, которая возникнет между ними, если они расположены на расстоянии $10R'_1$

Давайте вспомним, что у нас:

$$Q_1 = (V(R_1) - V(R'_1))\rho_0,$$

$$V(R_1) = \frac{4}{3}\pi R_1^3,$$

$$V(R'_1) = \frac{4}{3}\pi (R'_1)^3,$$

где:

- ρ_0 — плотность пространства до возмущения,
- R'_1 и R_1 — радиусы сфер плотности пространства соответственно после сжатия и до сжатия плотности пространства.

10.1 Исходное выражение для силы $F(t)$ удерживающий сгусток в сжатом состоянии определяется по формуле получено в ШV разделе данной статьи

Дано:

$$F(t) = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(\frac{R_1^3}{t} - t^2 \right).$$

Эта сила описывает удержание плотности пространства в сжатом состоянии.

10.2 Энергия сжатия E_{insaid}

Энергия, затраченная на сжатие сферы от радиуса R_1 до R'_1 , вычисляется как интеграл от $F(t)$ по t в пределах от R_1 до R'_1 :

$$E_{\text{insaid}} = \int_{R_1}^{R'_1} F(t) dt.$$

Подставляем $F(t)$:

$$E_{\text{insaid}} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \int_{R_1}^{R'_1} \left(\frac{R_1^3}{t} - t^2 \right) dt.$$

Разделяем интеграл на два слагаемых:

$$E_{\text{insaid}} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(R_1^3 \int_{R_1}^{R'_1} \frac{1}{t} dt - \int_{R_1}^{R'_1} t^2 dt \right).$$

Вычисляем интегралы:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t|, \quad \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}.$$

Подставляем пределы интегрирования:

$$E_{\text{insaid}} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(R_1^3 (\ln |R'_1| - \ln |R_1|) - \frac{(R'_1)^3 - R_1^3}{3} \right).$$

Упрощаем:

$$E_{\text{insaid}} = \frac{8\pi\rho_0}{3} \left(R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) - \frac{(R'_1)^3 - R_1^3}{3} \right).$$

10.3 Потенциальная энергия взаимодействия $E_{Q_1, Q_2}(D)$

Дано:

$$E_{Q_1, Q_2}(D) = \int_{\infty}^{10R'_1} W_{Q_1, Q_2} dD,$$

где

$$W_{Q_1, Q_2} = \frac{Q_1^2 R'_1}{R'_1 D^2} = \frac{Q_1^2}{D^2}.$$

Интеграл:

$$E_{Q_1, Q_2}(D) = Q_1^2 \int_{\infty}^{10R'_1} \frac{1}{D^2} dD.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int \frac{1}{D^2} dD = -\frac{1}{D}.$$

Подставляем пределы интегрирования:

$$E_{Q_1, Q_2}(D) = Q_1^2 \left(-\frac{1}{10R'_1} - \left(-\frac{1}{\infty} \right) \right) = -\frac{Q_1^2}{10R'_1}.$$

10.4 Выражение для Q_1

Дано:

$$Q_1 = (V(R_1) - V(R'_1))\rho_0,$$

где

$$V(R_1) = \frac{4}{3}\pi R_1^3, \quad V(R'_1) = \frac{4}{3}\pi (R'_1)^3.$$

Подставляем:

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_0(R_1^3 - (R'_1)^3).$$

10.5 Отношение $\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)}$

Теперь подставим выражения для E_{insaid} и $E_{Q_1, Q_2}(D)$:

$$\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)} = -\frac{\frac{8\pi\rho_0}{3} \left(R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) - \frac{(R'_1)^3 - R_1^3}{3} \right)}{\frac{Q_1^2}{10R'_1}}.$$

Подставляем Q_1 :

$$Q_1^2 = \left(\frac{4}{3}\pi\rho_0(R_1^3 - (R'_1)^3) \right)^2 = \frac{16}{9}\pi^2\rho_0^2(R_1^3 - (R'_1)^3)^2.$$

Теперь подставляем Q_1^2 в знаменатель:

$$\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)} = -\frac{\frac{8\pi\rho_0}{3} \left(R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) - \frac{(R'_1)^3 - R_1^3}{3} \right)}{\frac{16}{9}\pi^2\rho_0^2(R_1^3 - (R'_1)^3)^2/(10R'_1)}.$$

Упрощаем:

$$\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)} = -\frac{8\pi\rho_0}{3} \cdot \frac{10R'_1 \cdot 9}{16\pi^2\rho_0^2(R_1^3 - (R'_1)^3)^2} \left(R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) - \frac{(R'_1)^3 - R_1^3}{3} \right).$$

10.6 Итоговое выражение

$$\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)} = -\frac{15R'_1}{2\pi\rho_0(R_1^3 - (R'_1)^3)^2} \left(R_1^3 \ln \left(\frac{R'_1}{R_1} \right) - \frac{(R'_1)^3 - R_1^3}{3} \right). \quad (34)$$

10.7 Давайте построим график функции $\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)}$ при использовании следующих параметров:

- $R_1 = 10$ — фиксированное значение R_1 .
- $\rho_0 = 1$ — фиксированное значение ρ_0 .
- R'_1 изменяется от 1 до 20: $R'_1 \in [1, 20]$.

Для построения графика используем диапазон значений R'_1 , заданный как:

$$R'_1 = \text{np.linspace}(1, 20, 500).$$

После численного исследования графика функции $\frac{E_{\text{insaid}}(R'_1)}{E_{Q_1, Q_2}(D)}$ мы получили, что есть две области, где $E_{\text{space}} = \left| \frac{E(R'_1)}{E(D)} \right| < 1$, то есть отношение энергии создания сгустка плотности пространства к энергии взаимодействия двух сгустков плотности пространства меньше 1. Это означает, что после их создания энергии от их взаимодействия выделится больше, чем энергии, потраченной на их создание. Это достаточно сложно для осмысления и понимания, но наше пространство устроено так, что оно может производить энергию. И мы тоже сможем, если поймем, как сжимать плотность пространства и удерживать ее в сжатом состоянии, как это наблюдается в элементарных зарядах.

10.8 Как сжимать плотность пространства

Если пространство — это некая "квасисреда", которая обладает плотностью, но не обладает ни массой, ни трением, ни вязкостью, а только стремлением к максимальной энтропии, тогда, если предположить, что в отношении нее будет выполняться закон Бернулли, то там, где скорость движения выше, там,

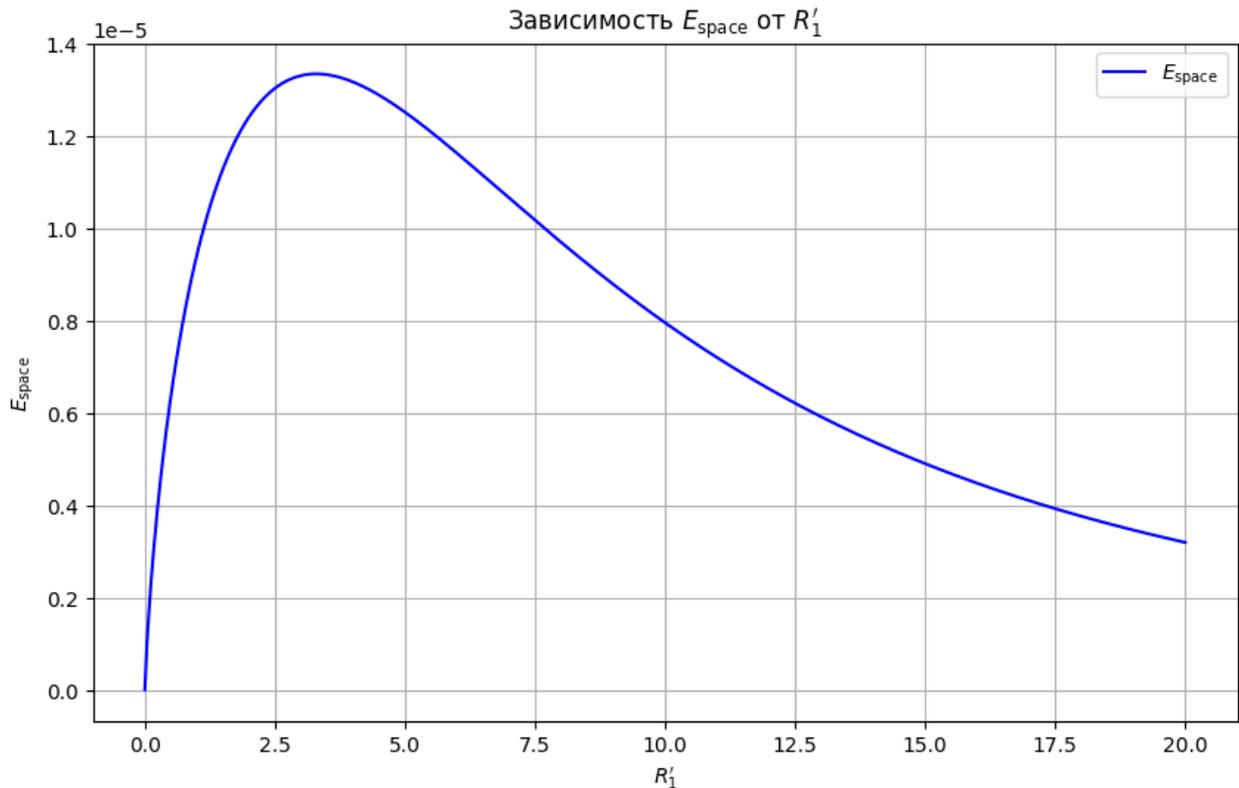


Рис. 4: График отношения внутренней энергии двух сгустков плотности пространства к их потенциальной энергии взаимодействия $\frac{E_{insaid}(R'_1)}{E_{Q1,Q2}(D)}$

соответственно, давление меньше. Значит, эта область будет сжиматься, и плотность будет повышаться до тех пор, пока не выровняется давление. Но как только мы сожмем плотность пространства, это вызовет искривление метрики пространства, что приведет к появлению массы. Таким образом, у сжатой области пространства появится кинетическая энергия (инерция), которая будет удерживать сжатую область плотности пространства в движущемся, то есть сжатом состоянии. Если мы будем закручивать плотность пространства в тор (такие структуры могут быть устойчивыми и самоподдерживающимися), который вращается по всем степеням свободы, то мы получим устойчивое самоподдерживающееся состояние, таким образом, мы получим что-то вроде отрицательно заряженной элементарной частицы (электрон). Если этот тор растянуть, то есть увеличить его радиус, то получим что-то вроде положительно заряженной элементарной частицы (протон). Если под большим давлением соединить электрон и протон, то получим нейтрон, но масса нейтрона будет больше суммы массы электрона и протона, так как в его массе еще будет энергия, необходимая на сжатие электрона и протона, а они, согласно нашей модели, с 2,5 радиусов электрона будут отталкиваться. Таким образом, мы получили процесс образования основных строительных материалов для нашей Вселенной — электрон, нейтрон и протон. При их производстве будет возникать энергия, которая будет наполнять нашу Вселенную, переходя из одной формы в другую. Так что закон сохранения энергии в отношении плотности пространства и образованных из

нее сгустков плотности пространства не работает, что мы наблюдаем, например, при туннельном эффекте электрона в преодолении потенциального барьера. При образовании элементарных зарядов происходит выделение энергии больше, чем потрачено энергии на их создание, таким образом, запускается самоподдерживающаяся цепная реакция по производству материи и энергии просто из самого пространства.

XI. Заключение и выводы

- 1. Плотность пространства как универсальное свойство:** В статье предложена гипотеза о том, что плотность пространства является ключевым свойством, определяющим все фундаментальные взаимодействия — гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые. Это свойство описывается в пятимерной системе координат, где пятое измерение ортогонально традиционным пространственным и временным измерениям.
- 2. Теоретическое доказательство постулата Бора:** Впервые предложено теоретическое обоснование постулата Бора о квантовании углового момента электрона в атоме водорода. Модель демонстрирует, что угловой момент системы двух сгустков плотности пространства квантуется, что соответствует постулату Бора. Это подтверждает, что квантование углового момента может быть объяснено через свойства плотности пространства, что является важным шагом в понимании квантовой механики.
- 3. Связь между зарядом и массой:** Установлена новаторская связь между зарядом и его массой. Показано, что масса сгустка плотности пространства эквивалентна энергии, необходимой для его сжатия. Это позволяет интерпретировать массу как меру энергии, удерживающей сгусток в сжатом состоянии, что согласуется с уравнением Эйнштейна $E = mc^2$.
- 4. Комплексное решение и мнимая энергия:** Решение для взаимодействия двух сгустков плотности пространства имеет только комплексный вид, где мнимая часть определяет резонансную частоту системы. Это открывает новые возможности для понимания природы квантовых систем и их устойчивости.
- 5. Сильные и слабые взаимодействия:** Модель предлагает объяснение сильных и слабых взаимодействий через свойства плотности пространства. Показано, что сильное взаимодействие на малых расстояниях может быть связано с резонансными эффектами в модели плотности пространства, а слабое взаимодействие — с перераспределением плотности.
- 6. Физический смысл постоянной Планка:** В модели постоянная Планка h интерпретируется как отношение полной энергии системы к её мнимой (резонансной) составляющей. Это предлагает новый взгляд на природу этой фундаментальной константы, связывая её с резонансными свойствами системы.

7. **Связь с квантовой механикой:** Полученные результаты демонстрируют, что модель плотности пространства может воспроизводить известные квантово-механические закономерности, такие как квантование углового момента и связь между энергией и частотой. Это подтверждает, что модель может быть использована для дальнейшего развития квантовой теории.
8. **Новые направления для исследований:** Модель открывает новые направления для исследований, такие как изучение резонансных явлений в квантовых системах, объяснение природы темной материи и энергии, а также разработка новых подходов к объединению фундаментальных взаимодействий.

Список литературы

- [1] R. P. Feynman, "The S Matrix in Quantum Electrodynamics," *Physical Review*, vol. 75, no. 11, pp. 1736–1753, 1949. DOI: <https://doi.org/10.1103/PHYSREV.75.1736>.
- [2] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1965.
- [3] R. P. Feynman, "The S Matrix in Quantum Electrodynamics," *Physical Review*, vol. 75, no. 11, pp. 1736–1753, 1949. DOI: <https://doi.org/10.1103/PHYSREV.75.1736>.
- [4] T. Kaluza, *On the Unification Problem in Physics*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, 1921.
- [5] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, *Zeitschrift für Physik*, vol. 37, pp. 895–906, 1926. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01397481>.
- [6] T. Appelquist, A. Chodos, and P. G. O. Freund (editors), *Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, 1987. Available at: <https://www.worldcat.org/title/13484465>.
- [7] T. Appelquist, A. Chodos, and P. G. O. Freund (editors), *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, 1987. Available at: <https://www.worldcat.org/title/13395742>.
- [8] R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, W.A. Benjamin, 1961. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3051716>.
- [9] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Volume 3: Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1964. ISBN: 978-0201021189. Available at: <https://www.feynmanlectures.caltech.edu>.
- [10] R. P. Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1985. ISBN: 978-0691024172. Available at: <https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691024172/qed>.

- [11] R. P. Feynman, *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, *Physical Review*, vol. 76, pp. 769-789, 1949. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.769>.