ОГЛАВЛЕНИЕ

Доказательство гипотезы Коллатца

Ключевые слова: Алгоритм; натуральное число; Гипотеза Коллатца; сиракузская последовательность.

Key words: Algorithm; natural number; Collatz conjecture; Syracuse sequence.

Аннотация: В статье представлено простое доказательство утверждения, что в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных, основанное на свойствах умножения и деления десятичных дробей. Раскрыт механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения, объясняющий, почему число никогда не уйдет в бесконечность, а с самого начала своего движения устремляется к единице, и в конечном итоге достигает её, каким бы длинным и тернистым не был при этом путь.

Abstract: The paper presents a simple proof of the claim that there are no loop sequences in the Collatz algorithm, based on the properties of multiplication and division of decimal fractions.The mechanism of the algorithm is revealed, as a result of which the number changes the direction of its movement, explaining why the number will never go to infinity, but from the very beginning of its movement rushes towards one, and ultimately reaches it, no matter how long and thorny the path may be.

УДК 511.12; УДК 511.13

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.
Цель: Доказать гипотезу простыми средствами.

ВВЕДЕНИЕ: Гипотеза Коллатца, известная также как «3X+1»-гипотеза или как сиракузская последовательность, относится к алгоритмам управления натуральными числами, утверждает, что с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице. Удивительная по своей простоте формулировки гипотеза привлекает к себе внимание. Существует множество попыток её доказательства от простых до невероятно сложных, но пока не признанных математическим сообществом. В 2019 появилось сообщение, отмеченное в [1], что Теренс Тао с помощью теории вероятностей доказал, что почти все орбиты Коллатца ограничены любой функцией, уходящей в бесконечность. В рецензии на эту работу, журнал Quanta Magazine написал, что «это один из самых значительных результатов по гипотезе Коллатца, достигнутых за последние десятилетия». Но, автору представленной здесь статьи хотелось бы отметить ещё одну работу, а именно: [2], по теме, как важный вклад в поиске пути решения гипотезы. Видеоролик, длительностью около 20 минут, на первый взгляд является развлекательным научно-популярным контентом канала Vert Dider, размещённый на площадке Yutube, но представленная в нём информация, да ещё в великолепном изложении ведущего Дерека Мюллера, подтолкнула к ответу, на один из важных вопросов в доказательстве гипотезы, о чём, в том числе, будет далее. С большим Уважением и огромной благодарностью к несравненному Дереку Мюллеру.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ:

ЧАСТЬ 1. Предпосылки верности гипотезы Коллатца

В алгоритме Коллатца конечной целью является единица, но перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2^n. Для ряда 2^n выполним действия обратные алгоритму «3X+1», тем самым выясним, при достижении каких значений 2^n алгоритм сворачивается в 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратных преобразований ряда 2^(2n) по алгоритму Коллатца (Таблица 1)

N	2^{2n}	2^{2n}-1	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
И т.д.	...	...	...

Таблица1. Таблица обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца.

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемое формулой:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} \qquad (1)$$

которые в итоге приводят к значению 2^(2n) и сворачиванию числа в 1. Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие, **успешными решениями алгоритма**. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число 2^(2n)-1 при всех n≥1 кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n} \qquad (2)$$

Это значит, зная решение для предыдущего числа n, решение для следующего n+1 можно определить по формуле:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \qquad (3)$$

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. И хотя нам, для доказательства гипотезы, уже достаточно утверждения, что количество успешных решений бесконечное множество, мы всегда можем его усилить. Например, каждое значение натурального ряда, определяемое (1) можно дополнительно умножить на 2^n. Например, число 5 умножить на 2^n, число 7 умножить на 2^n. Каждое число, из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, умножить на 2^n. Тогда мы должны удивляться уже не тому, что каждое число по алгоритму Коллатца завершается единицей, а почему вообще существуют числа с большими маршрутами. Оказавшись в значении успешного решения, число должно немедленно свернуться в единицу. Ответ находим простой. Во первых: множество чисел сворачивается действительно быстро, во вторых: каждый длинный маршрут составлен из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов.

Предположим, между успешными решениями всё же существуют значения, не относящиеся к успешным. Сколько их. Определённо, должно быть ограниченное количество, значит мы неизбежно их преодолеем. Формула (3X+1)/2 производит движение вперёд, в сторону увеличения текущего числа, а формула (3X+1)/2n, где n>1, назад, в сторону его уменьшения. Действие +1 в алгоритме «3X+1» гарантирует непрерывность процесса движения к успешному решению. Каждое новое число на пути алгоритма есть очередной шаг к цели. Успешное решение алгоритма - это просто один из очередных шагов. Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, можно считать завершённым и текущий. Уже появляется ощущение, что гипотеза будет доказана, если будет доказано отсутствие последовательностей, замкнутых в кольцо, другими словами: если в последовательности любого натурального, будет доказано отсутствие повторения, что каждое очередное число последовательности отличается от любого из предыдущих, будет доказано, что алгоритм исключает любую возможность таких повторений.

Во всех известных, но непризнанных доказательствах гипотезы Коллатца, остаются нерешёнными два принципиальных вопроса:

* Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, замкнутых в кольцо.
* Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, уходящих в бесконечность;

Из этих нерешённых вопросов выделим два утверждения, те, которые подтверждают гипотезу. Если они будут доказаны: доказывать какое-либо другое уже не имеет смысла. Выводы построенные на других утверждениях всегда будут вызывать сомнения, если не будут доказаны эти.

ЧАСТЬ 2.

Утверждение 1: В алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных.

2.1 Примечание к утверждению 1: К слову сказать, так называемый цикл 4-2-1, часто упоминаемый в связи с гипотезой Коллатца, по определению не является кольцом. Алгоритм «3X+1», или «3n+1» – гипотеза: есть сокращённое название гипотезы Коллатца, сокращённая запись алгоритма, а полный алгоритм перехода из одного состояния в другое, от одного нечётного к другому нечётному, включает ещё и деление нна два, сформулирован в самом определении: с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице. После того, как мы пришли к единице алгоритм завершается, точка. Кольцом может называться последовательность, состоящая из нескольких нечётных.

Является ли такая формулировка гипотезы точной, максимально приближенной к формулировке, какую изложил в 1932 году сам Лотар Коллатц, уточнял ли он её позднее – это нам достоверно не известно. Утверждается, что эта простая формулировка понятна практически всем здравомыслящим людям. Запишем и себя в их число. Какой интерес был у Коллатца заниматься вообще алгоритмами, подобными «3X+1». Вероятно были и другие, но именно алгоритм «3X+1» стал проблемой. При этом, с начальными числами из натурального ряда такими, как 1, 2, 3 … 1 000 ... 1 000 000 … и т.д., очевидно проблем не было. Они были проверены простым перебором. Нет сомнений в том, что Коллатц исследуя простые алгоритмы, искал ответы на волнующие его вопросы далеко за пределами чистой математики. Возможно, даже не так, Коллатц исследуя простые алгоритмы, за пределами обычной, искал чистую математику, в которой символические действия с числами тождественны взаимоотношениям Сознания и Материи. Фраза “С какого бы числа мы не начали…” - между строк содержит смысл, в котором имеется в виду, что несомненно, это число должно быть натуральное и оно должно быть больше единицы и больше известного проверенного. С этого - только начинается ГИПОТЕЗА.

Но, мы работаем с любыми натуральными числами, маленькими, большими. Если гипотеза верна, она верна для любого натурального.

2.2. Доказательство утверждения 1: Мы должны доказать, что натуральное число двигаясь по алгоритму «3X+1» , вперёд-назад, в процессе своего движения, исключает повторения, каждое очередное число последовательности отличается от любого из предыдущих.

Пусть $X_0 = 47$ произвольное исходное число. Отследим фрагмент начала маршрута исходного числа.

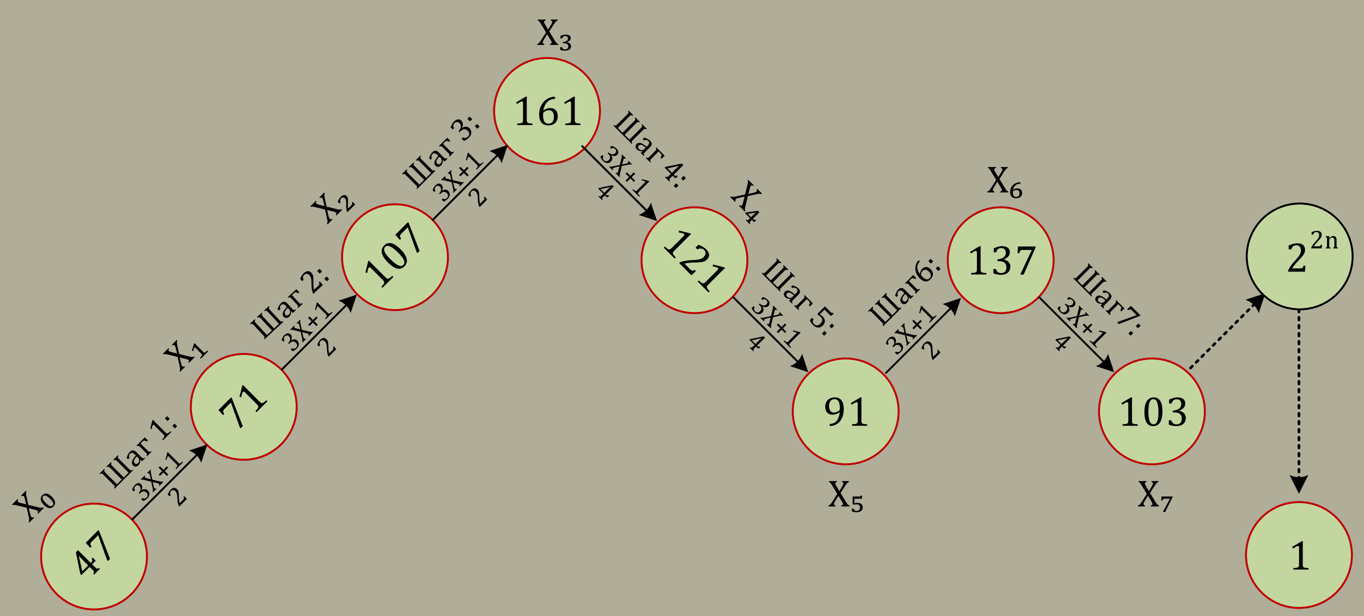

Рис.1 Маршрут числа 47 по алгоритму Коллатца

В результате действия алгоритма, число всякий раз меняется. Представим структуру новообразованного числа суммой двух слагаемых: целой части KX_0 , кратной исходному и дробной от исходного. В свою очередь дробная часть от исходного будет описываться формулой $(X_0+1)k+r$, где коэффициент k меньше единицы, а r- вещественный остаток от целого натурального дробной части, т.е.:

$$X_n \in \{X_0 \ldots\} = KX_0 + (X_0 + 1)k + r \qquad (4)$$

В формуле (4) запись вида: $X_n \in \{X_0 \ldots\}$ следует читать, как число X_n, принадлежащее последовательности Коллатца с исходным X_0.

Итак, исходное число последовательности, изображённой на Рис.1: $X_0 = 47$

Шаг 1 (вперёд):

$$X_1 \in \{47\ldots\} = \frac{3X_0+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_1 \in \{47\ldots\} = 1{,}5X_0 + 0{,}5 \qquad (5)$$

В формуле (5) выделим целую часть, кратную исходному, если она есть, а оставшуюся, дробную часть приведем к виду: $(X_0+1)k+r$. В первом шаге вещественный остаток от целого дробной части r может оказаться равным нулю. Так всегда происходит, если в знаменателе стоит число 2.

$$X_1 \in \{47\ldots\} = X_0 + 0{,}5X_0 + 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad X_1 \in \{47\ldots\} = X_0 + (X_0+1)0{,}5 \qquad (6)$$

Шаг 2 (вперёд):

$$X_2 \in \{47\ldots\} = \frac{3\, X_1 \in \{47\ldots\} + 1}{2} \qquad (7)$$

Для вычисления любого очередного удобно использовать промежуточное выражение предыдущего, такого как X_1 из (5) в нашем примере, потому что оно являются более компактным. Это видно из сравнения (5) и (6). Но, тогда от нашего внимания ускользнёт процесс трансформации коэффициента **k** при дробной части от исходного, который нам понадобится в дальнейшем в качестве необходимого аргумента в доказательстве **утверждения 1**. Поэтому **Шаг 2** распишем подробнее остальных. С этой целью, для вычисления X_2 будем использовать результирующее X_1 из (6):

$$X_2 \in \{47\ldots\} = \frac{3(X_0 + (X_0+1)0{,}5) + 1}{2} \qquad (8)$$

$$X_2 \in \{47\ldots\} = \frac{3}{2}(X_0 + (X_0+1)0{,}5) + \frac{1}{2} \qquad (9)$$

$$X_2 \in \{47\ldots\} = 1{,}5(X_0 + (X_0+1)0{,}5) + 0{,}5 \qquad (10)$$

Далее, раскрываем пока только внешние скобки формулы (10). Для этого умножаем дробное в десятичном виде число 1,5 поочерёдно на содержимое в скобках.

$$X_2 \in \{47...\} = 1{,}5\,X_0 + (X_0+1)0{,}75 + 0{,}5 \qquad (11)$$

Структура коэффициента k при дробной части предыдущего числа изменилась: был один знак после запятой в коэффициенте k=0,5 в (10), а после умножения его на 1,5 стало два k=0,75. При умножении двух нечётных дробных чисел, представленных в десятичном виде, количество знаков после запятой в произведении равно сумме знаков после запятой, которые имели множители. Это есть одно из известных свойств умножения десятичных дробей. В текущем примере в знаменателе дроби формулы алгоритма стояло число 2, получили в итоге коэффициент 0,75, если бы в знаменателе стояло число 4, то пришлось бы 0,75 поделить ещё на два, в итоге получили бы 0,375, т.е. ещё на один знак больше. Деление нечётного числа меньшего единицы на два - ещё одно свойство, приводящее к увеличению количества знаков, после запятой в структуре коэффициента k.

Далее, раскроем остальные скобки и приведём подобные:

$$X_2 \in \{47...\} = 1{,}5\,X_0 + 0{,}75X_0 + 0{,}75 + 0{,}5 \qquad (12)$$

$$X_2 \in \{47...\} = 2{,}25\,X_0 + 1{,}25 \qquad (13)$$

В (13) выделим целую часть, кратную исходному X_0 , а оставшуюся, дробную часть приведем к виду: $(X_0+1)k+r$.

$$X_2 \in \{47...\} = 2X_0 + 0{,}25\,X_0 + 1{,}25 \qquad (14)$$

$$X_2 \in \{47...\} = 2X_0 + 0{,}25\,X_0 + 0{,}25 + 1{,}0 \qquad (15)$$

$$X_2 \in \{47...\} = 2X_0 + (X_0+1)0{,}25 + 1{,}0 \qquad (16)$$

Действия, связанные с выделением целой части, кратной исходному и приведением дробной к виду: $(X_0+1)k+r$, уже не влияют на структуру коэффициента k : было два знака в (11), два знака осталось в (16). Структура коэффициента k всякий раз изменяется, когда мы раскрываем внешние скобки, внутри которых содержится результат предыдущего числа.

Далее, для вычисления очередного будем использовать промежуточное выражение из предыдущего:

Шаг 3 (вперёд):

$$X_3\in\{47...\} = \frac{3X_2\in\{47...\}+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_3\in\{47...\} = \frac{3(2{,}25X_0+1{,}25)+1}{2} \tag{17}$$

После вычисления (17):

$$X_3\in\{47...\} = 3{,}375X_0+2{,}375 \quad \Rightarrow \quad X_3\in\{47...\} = 3X_0+(X_0+1)0{,}375+2{,}0 \tag{18}$$

Аналогичные действия по выделению целой части, кратной исходному выполним в остальных шагах:

Шаг 4 (назад):

$$X_4\in\{47...\} = \frac{3X_3\in\{47...\}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_4\in\{47...\} = 2X_0+(X_0+1)0{,}53125+1{,}5 \tag{19}$$

Шаг 5 (назад):

$$X_5\in\{47...\} = \frac{3X_4\in\{47...\}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_5\in\{47...\} = X_0+(X_0+1)0{,}8984375+0{,}875 \tag{20}$$

Шаг 6 (вперёд):

$$X_6\in\{47...\} = \frac{3X_5\in\{47...\}+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_6\in\{47...\} = 2X_0+(X_0+1)0{,}84765625+2{,}3125 \tag{21}$$

Шаг 7 (назад):

$$X_7\in\{47...\} = \frac{3X_6\in\{47...\}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_7\in\{47...\} = 2X_0+(X_0+1)0{,}1357421875+2{,}484375 \tag{22}$$

Шаг 8 , Шаг 9, ... и т.д.

Выполним аналогичные действия для другого исходного в той же последовательности: *Пусть новым исходным будет число 71.*

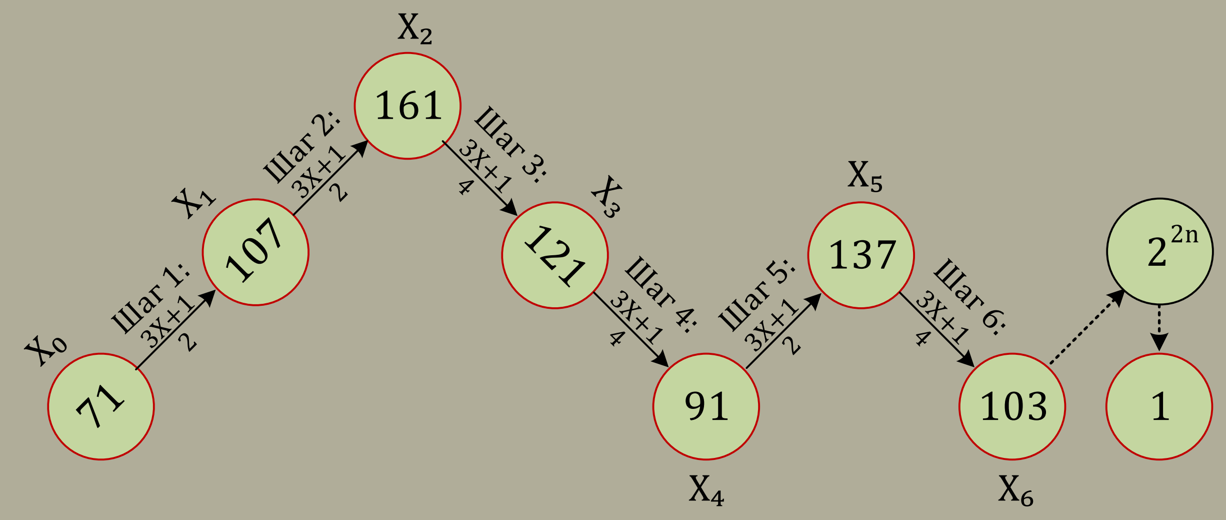

Рис.2 Маршрут числа 71 по алгоритму Коллатца

Обратим внимание: на маршруте числа 71 по алгоритму Коллатца (Рис.2) в отличие от маршрута числа 47 (Рис.1), изменилась только нумерация шагов, и соответственно порядковый номер очередного числа в новой последовательности. Посмотрим, как эти изменения повлияли на значения коэффициентов в формулах очередного числа, представленных структурой формулы (4). Итак, исходное число последовательности, изображённой на Рис.2: $X_0 = 71$

Шаг 1 (вперёд):

$$X_1 \in \{71...\} = \frac{3X_0+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_1 \in \{71...\} = X_0 + (X_0+1)0{,}5 \tag{23}$$

Шаг 2 (вперёд):

$$X_2 \in \{71...\} = \frac{3X_1 \in \{71...\}+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_2 \in \{71...\} = 2X_0 + (X_0+1)0{,}25 + 1{,}0 \tag{24}$$

Шаг 3 (назад):

$$X_3 \in \{71...\} = \frac{3X_2 \in \{71...\}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_3 \in \{71...\} = X_0 + (X_0+1)0{,}6875 + 0{,}5 \tag{25}$$

Шаг 4 (назад):

$$X_4 \in \{71...\} = \frac{3X_3 \in \{71...\}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_4 \in \{71...\} = X_0 + (X_0+1)0{,}265625 + 0{,}875 \tag{26}$$

Шаг 5 (вперёд):

$$X_5 \in \{71...\} = \frac{3X_4 \in \{71...\}+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_5 \in \{71...\} = X_0 + (X_0+1)0{,}8984375 + 1{,}3125 \tag{27}$$

Шаг 6 (назад):

$$X_5 \in \{71...\} = \frac{3X_4 \in \{71...\}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_6 \in \{71...\} = X_0 + (X_0+1)0{,}423828125 + 1{,}484375 \tag{28}$$

Шаг 7 , Шаг 8, … и т.д.

Из сравнения двух разных маршрутов, а маршруты 47 и 71 разные, видно, что на первых шагах значения коэффициентов k при дробной части могут совпадать, пока совпадают делители в знаменателе дроби исходного алгоритма. Маршрут 47 на один шаг больше маршрута 71, поэтому маршруты разные, несмотря на то, что 71 целиком входит в 47. Но начиная с третьего шага, из-за различия делителей, коэффициенты последовательности 71 и 47 будут отличаться, и более никогда не совпадут. Абсолютно все последовательности имеют своё исходное число, индивидуальное, неповторимое и на каждом этапе своего маршрута имеют индивидуальные к нему коэффициенты. Сравнение разных маршрутов может быть интересным, но по сути, к доказательству гипотезы Коллатца не имеет отношения.

Для доказательства **Утверждения 1** важно обратить внимание на структуру коэффициента k при дробной части числа. Видно, как с каждым новым шагом коэффициент меняется структурно, он удлиняется. Процесс изменения структуры коэффициента k детально описан формулами (10) и (11) в шаге 2 для последовательности с исходным X_0=47. При перемножении двух дробных нечётных меньших единицы, записанных в десятичной форме, количество знаков после запятой всегда увеличивается. При делении нечётных меньших единицы на два, количество знаков после запятой также увеличивается. Каждый раз это отражается на структуре коэффициента k. Пояснение “меньших единицы” в определении характеристики дробной части в десятичном виде, означает, что в структуре такого числа существуют признаки числа, меньшего единицы, а именно - наличие знаков после запятой. После выделения целой части мы всегда будем иметь дело уже с дробным десятичным числом меньшим единицы, а учитывая, что выделение целой части, кратной исходному X_0 и приведением дробной к виду: $(X_0+1)k+r$, уже не влияют на структуру коэффициента, то умножение 1,5 на 0,5, по влиянию на структуру коэффициента k равносильно умножению 0,5 на 0,5. На структуру очередного коэффициента k влияют только два обстоятельства: количество делений на два в полном алгоритме и значение коэффициента k предыдущего числа последовательности.

Таким образом, не важно, в какую сторону ведёт нас алгоритм, вперёд-назад, количество знаков после запятой в значении коэффициента k очередного числа всегда больше предыдущего. Верно также и другое - количество знаков после запятой в значении коэффициента k очередного числа никогда не будет меньше предыдущего. Из чего следует, что коэффициент k никогда не будет равным нулю. Это значит в структуре любого очередного всегда присутствует дробная часть от исходного. При этом, дробная часть всегда будет отличаться от любой из предыдущих, значит совпадения чисел при исполнении алгоритма для любого натурального числа исключены. Что и требовалось доказать.

Вывод: С какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, вперёд-назад, увеличиваясь или уменьшаясь, в процессе своего движения алгоритм исключает повторения. Применяя алгоритм к единице можно убедиться, что единица остаётся на своём месте. Единица не передвигается ни вперёд, ни назад, не увеличивается и не уменьшается. Работа, совершённая алгоритмом по отношению к единице равна нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1, что в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных - ДОКАЗАНО.

ЧАСТЬ 3.

Доказательство утверждение 2, что из всех натуральных, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, не существует таких, которые бы уходили в бесконечность.

3.1. Предварительная часть доказательства Утверждения 2:

Перед нами бесконечный ряд нечётных (Рис.3):

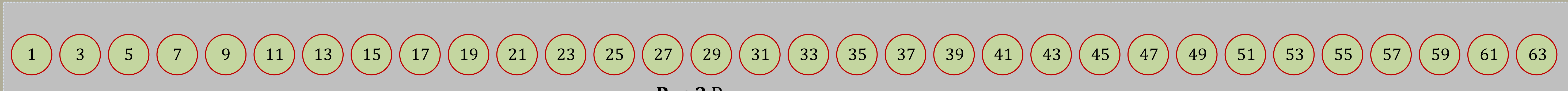

Рис.3 Ряд натуральных чисел

Представим путь нечётного числа к следующему нечётному. Умножаем на 3, прибавляем 1: получаем чётное (Рис.4):

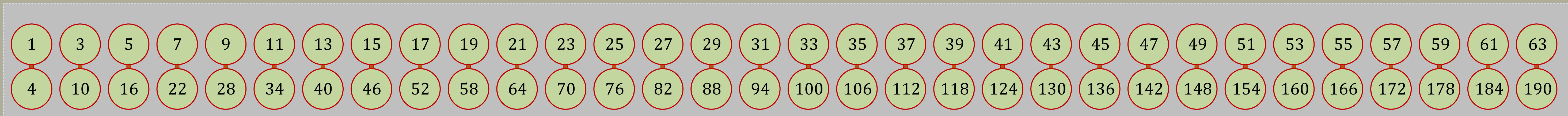

Рис.4 Ряд промежуточных чётных в алгоритме Коллатца

В половине случаев деление на 2 нас тут же вернёт к нечётному (Рис.5):

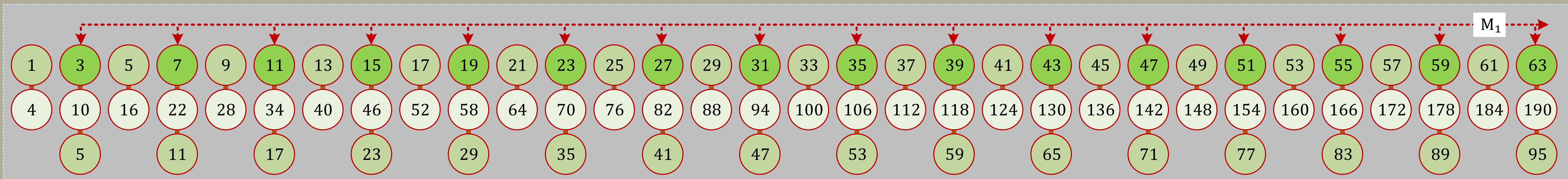

Рис.5 Первое множество Коллатца

Но каждое 4-е число, делить придётся дважды т.е. на 4.

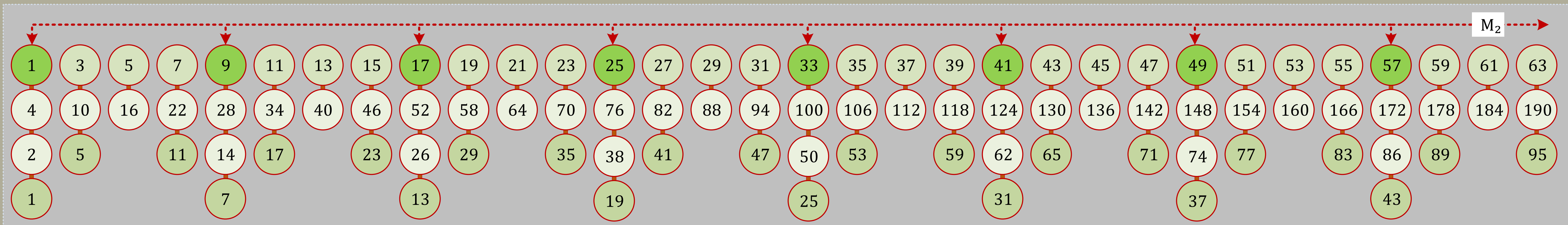

Рис.6 Второе множество Коллатца

Каждое 8-е число, делить придётся на 8, чтобы получить следующее:

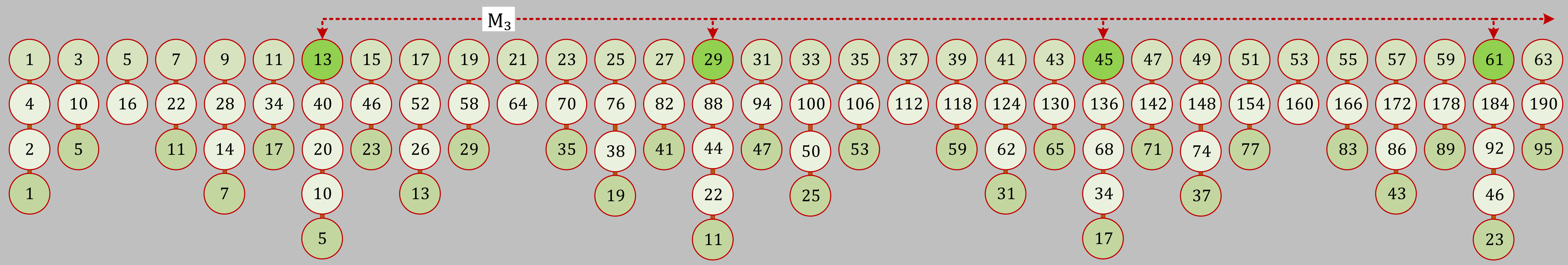

Рис.7 Третье множество Коллатца

Каждое 16-е на 16, и т.д

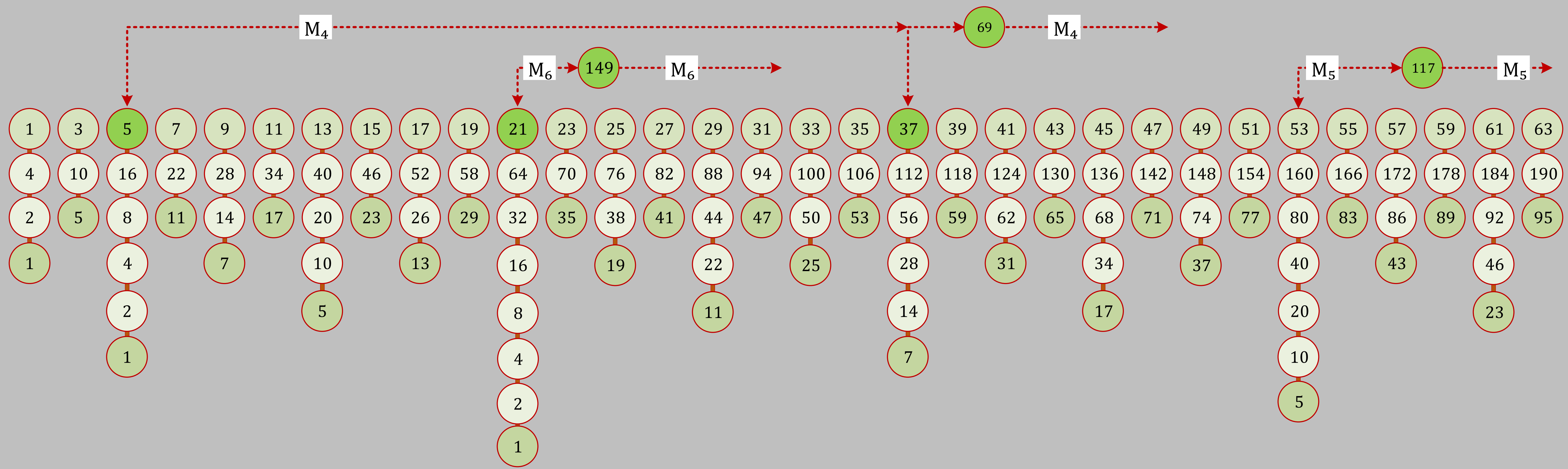

Рис.8 Четвёртое, пятое, шестое и далее другие множества Коллатца

Взяв среднее геометрическое:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{16}} \cdot\cdot\cdot \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx \frac{3}{4} < 1 \qquad (29)$$

мы увидим, что в среднем, чтобы добраться от одного нечётного числа к другому, нужно умножить его примерно на 3/4, что меньше единицы. При больших значениях нечётного единицей в алгоритме можно пренебречь. Выходит, чисто статистически, последовательности «3X+1» уменьшаются чаще, чем растут. Ведущий видеоролика [2] в своих рассуждениях использовал идею такого наглядного представления структуры натурального ряда для вывода статистической формулы (29), а получив её, переключился развивать мысль в другом направлении.

Нам потребуется выполнить ещё один маленький шаг, и мы **сможем увидеть механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения,** будет понятно, почему следуя одному и тому же алгоритму, с одним и тем же делителем в знаменателе формулы алгоритма, число может "неожиданно" изменить направление своего движения.

Введем новые понятия: Множество нечётных Коллатца; Производительность числа в алгоритме Коллатца; Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца.

МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Обозначение: M_n

Назовём ряд нечётных {3, 7, 11, 15 …} - первым множеством Коллатца, далее по тексту просто первым множеством или M1. Первым оно называется по признаку, того, что в результате действия алгоритма «3X+1», числа этого ряда становятся сначала четными, а затем после деления на два сразу нечётными. В результате выполнен только один полный шаг алгоритма. Позиции нечётного числа в M1 продвигают очередное всегда вперёд, в сторону его увеличения, в бесконечность. Каждое очередное число 1-го множества отличается от предыдущего на 4, и описывается формулой:

$$Y_n \in M_1 = 4n-1 \qquad (30)$$

Где: n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего M1;

Назовём ряд нечётных { 1, 9, 17, 25 …} - вторым множеством Коллатца, обозначим его M2 . Вторым оно называется по признаку, того, что чётные полученные в результате действия алгоритма «3X+1» приходится делить 2 раза на 2, чтобы получить очередное нечётное. Позиции нечётного числа в M2 продвигают число в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 2-го множества отличается от предыдущего уже на 8, и описывается формулой:

$$Y_n \in M_2 = 8n-7 \qquad (31)$$

Где n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего M2.

Назовём ряд нечётных {13, 29, 45, 61 …} - третьим множеством Коллатца. По аналогии с первым и вторым множеством, обознчим его M3. Позиции нечётного числа в M3 продвигают число также в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 3-го множества отличается от предыдущего на 16, и описывается формулой:

$$Y_n \in M_3 = 16n-3 \qquad (32)$$

где n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего M3.

И так далее. У каждого множества своя формула числа, которая в общем виде выглядит, как:

$$Y_n \in M_m = 2^{m+1}\, n - C_m \tag{33}$$

Где: m =1,2,3… и т.д. – порядковый номер множества;

n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего множеству;

2^{m+1} - первая константа множества Коллатца.

C_m - вторая константа множества Коллатца.

$$C_m = 2^{m+1} - Y_0 \tag{34}$$

Где: $Y_0 \in M_m$ - начальное число множества M_m.

В таблице 2 приведен другой вариант, универсальный, определения следующего значения $Y_n \in M_m$ с использованием предыдущего, уже известного, значения C_{m-2}

Порядковый номер: m	$Y_n \in M_m$
1	$Y_n \in M_1 = 4n-1$
3	$Y_n \in M_3 = 16n-3$
5	$Y_n \in M_5 = 64n-11$
7	$Y_n \in M_7 = 256n-43$
9	$Y_n \in M_9 = 1024n-171$
...	...
m-нечётное	$Y_n \in M_m = 2^{m+1}n - (C_{m-2} + 2^{m-2})$

Порядковый номер: m	$Y_n \in M_m$
2	$Y_n \in M_2 = 8n-7$
4	$Y_n \in M_4 = 32n-27$
6	$Y_n \in M_6 = 128n-107$
8	$Y_n \in M_8 = 512n-427$
10	$Y_n \in M_{10} = 2048n-1707$
...	...
m-чётное	$Y_n \in M_m = 2^{m+1}n - (C_{m-2} + 2^{m-2}5)$

Таблица 2. Таблицы определения произвольного значения $Y_n \in M_m$ с использованием предыдущего значения C_{m-2}

Подводя итог описаниям основных характеристик множеств, отметим следующий факт: первое множество продвигает число в сторону увеличения значения исходного, все остальные N-множества продвигают очередное число в сторону его уменьшения, т.е. в сторону единицы.

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА

Обозначение: W

Определение: Производительностью числа в алгоритме Коллатца называется количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма «3X+1» за один полный шаг. В последовательности Коллатца не существует времени. Единицей отсчёта событий является шаг алгоритма. Значение производительности определяется модулем разности между очередным нечётным и исходным.

РАБОТА ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА

Обозначение: A

Определение: Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца - есть количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма «3X+1» за несколько последовательных шагов в пределах одного множества, в пределах интервала последовательности, или всей последовательности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2:

Возьмём число 7. В результате исполнения алгоритма (3X+1)/2, число 7 увеличилось примерно в 3/2 раза, переместилось в позицию числа 11. На маленьких числах, таких как 7 и 11, неочевидно, но на больших: значением +1 в формуле алгоритма можно пренебречь, и тогда действительно, в результате действия (3X+1)/2, число увеличивается примерно в 3/2 раза. С другой стороны очередное число 11 стало больше исходного на значение 11-7=4. Числа 7 и 11, отличающиеся на 4, принадлежат одному и тому же множеству M1. Числа множества M1 занимают позиции в натуральном ряду, которые продвигают очередное число всегда вперёд, в сторону его увеличения, т.е. в бесконечность.

Каковы шансы теперь уже у исходного числа 11 следующим шагом остаться в этом же множестве. Шансы ещё есть. Та же самая формула увеличивает исходное число примерно в те же 3/2 раза (3 · 11+1) / 2 =17, но теперь уже разница между очередным и исходным не 4, а 17-11=6. Потому что, действие умножения мы провели для большего числа, а 11 больше 7. С ещё большими числами будет ещё больше разница. Так число 11 переходит из первого множества в другое, потому, что очередное число 17 принадлежит уже другому множеству, если конкретно, то второму. Но большее число окажется в любом другом, потому что разница будет ещё больше. Таким образом, очевидных предпосылок остаться в исходном множестве следующим шагом, тем более последовательно несколько раз, у числа 11 нет. Нет таких же предпосылок по тем же причинам и у любого другого числа принадлежащего первому множеству. Нет таких же предпосылок остаться в исходном множестве по тем же причинам и у любого другого числа принадлежащего вообще любому множеству. Механизм перехода из одного множества в другое является математическим описанием известного закона перехода количественных изменений в качественный.

Алгоритм «3X+1» имеет закономерный механизм перехода из одного множества нечетных в другое. Алгоритму не важно в какую сторону будет изменяться очередное число. Он просто совершает свою работу. Каждая вторая позиция числа в натуральном ряду принадлежит первому множеству. Вероятность попадания очередного числа в первое множество равна 50 на 50. Такая же вероятность попадания очередного числа в любое из множеств M2, M3, M4 … M_m, ведь они также занимают каждую вторую позицию. Один очередной шаг, следующий и т.д. В какую бы сторону мы не направились, мы можем оказаться вообще в любом множестве, в любой момент сменить направление.

Теперь, когда мы знаем, механизм перехода числа из одного множества в другое, каждый шаг алгоритма можно легко просчитать. Значит, абсолютно все последовательности Коллатца закономерны. Закономерным является для любого числа также его устремление к единице. Этот логический вывод вытекает из формулы среднегеометрического (29).

Аргументов в пользу Гипотезы приведено уже достаточно много. Все они важны. Но, они по-прежнему не закрывают вопрос существования числа, уходящего в бесконечность. Мы убедились в том, что у числа нет возможности, попав однажды в первое множество пребывать там неограниченно долго. Тем не менее остаётся теоретическая возможность, периодически его покидая, снова возвращаться и двигаться далее вперёд, в бесконечность. Закономерный переход из одного множества в другое этому не противоречит. Какова вероятность иметь на пути числа бесконечное чередование множеств М1 и М2. Проблема такого сценария для числа устремлённого в бесконечность заключается в существовании равной возможности числа двигаться как вперёд так и назад. Когда число возвращается ниже предыдущего возникает ситуация простого перебора новых сценариев движения числа. Если шаг алгоритма назад число продвигалось вперёд, то в новом сценарии оно возможно будет двигаться назад, при этом подчиняясь более крупным значениям делителей на два. Обрести более крупный делитель можно и впереди. Закон перехода количественных изменений в качественные проявляется и здесь.

Рассмотрим первые 32 числа из множества нечётных Коллатца М1 (Рисунок 9):

М1

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{16}	Y_{17}	Y_{18}	Y_{19}	Y_{20}	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}	Y_{26}	Y_{27}	Y_{28}	Y_{29}	Y_{30}	Y_{31}	Y_{32}
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127

Рис.9 Первое множество Коллатца

Для наглядности, числа первого множества будем различать по цветовым признакам, в зависимости от чётности их порядкового номера, как на Рис10:

Y_1, Y_3, Y_5 ... - нечётные; Y_2, Y_4, Y_6 ... - чётные.

X_n X_n

Рис.10 Цветовые признаки чётности порядкового номера чисел из множества нечётных Коллатца М1

Числа, принадлежащие множествам М2, М3, М4 ... M_m обозначим одинаково, в виде (Рис.11):

X_n

Рис.11 Цветовые признаки множеств нечётных Коллатца М2, М3, М4 ... M_n.

Вычислим очередное значение каждого числа из М1 (Рис.12).

М1

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{16}	Y_{17}	Y_{18}	Y_{19}	Y_{20}	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}	Y_{26}	Y_{27}	Y_{28}	Y_{29}	Y_{30}	Y_{31}	Y_{32}
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179	185	191

Рис.12

После первого хода все числа множества М1, с нечётным порядковым номером Y_1, Y_3, Y_5 ... перешли в одно из множеств М2, М3, М4 ... M_m. а числа с чётным Y_2, Y_4 , Y_6 ... остались в М1. **Но, каждое второе чётное, т.е. ровно половина от их общего числа, осталось в М1 чётным.** Вторая половина чётных в М1 перешла в разряд нечётных. Как видим из Рис.1 - такое поведение чисел М1, в результате действия на них алгоритма Коллатца является закономерным.

Выполним очередной шаг алгоритма.

М1

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{16}	Y_{17}	Y_{18}	Y_{19}	Y_{20}	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}	Y_{26}	Y_{27}	Y_{28}	Y_{29}	Y_{30}	Y_{31}	Y_{32}
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179	185	191
1	17	13	35	11	53	31	71	5	89	49	107	29	125	67	143	19	161	85	179	47	197	103	215	7	233	121	251	65	269	139	287

Рис.13

Очередное число в каждой пятой последовательности из М1 стало меньше исходного. Эти последовательности мы больше рассматривать не будем. Они абсолютно точно устремляются к единице. Мы исходим из того, что число меньше исходного, является числом уже проверенным, и относится к уже известным, ранее пройденным и завершённых единицей маршрутам.

Количество чётных последовательностей только с чётными порядковыми номерами входящих в них чисел, сократилось вдвое: было восемь: Y_4, Y_8 , Y_{12} Y_{16}, Y_{20} , Y_{24}, Y_{28} , Y_{32}, стало четыре: Y_8 , Y_{16}, Y_{24}, Y_{32}, Выполним очередной шаг алгоритма.

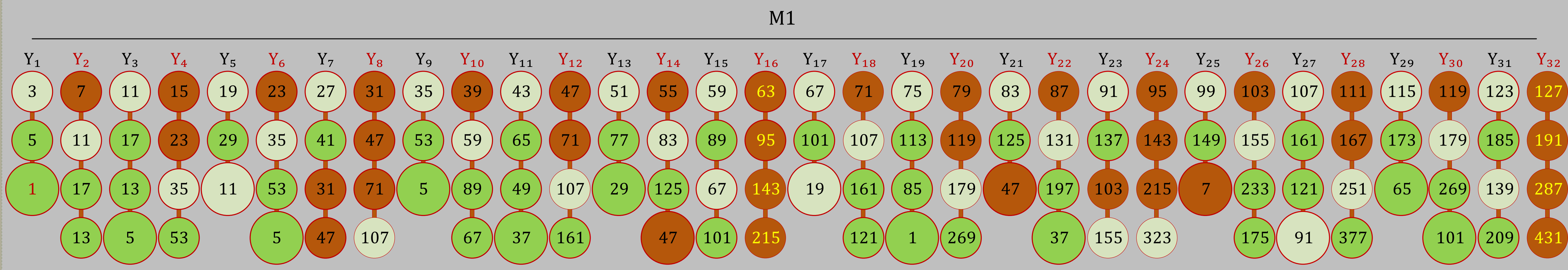

Рис.14

Из оставшихся - третья часть стала меньше исходного. Эти последовательности мы также больше рассматривать не будем. Количество чётных последовательностей только с чётными номерами входящих в них чисел опять сократилось вдвое, было четыре: Y_8 , Y_{16}, Y_{24}, Y_{32}, стало две: Y_{16}, Y_{32}. Мы всегда можем легко определить, является ли очередное число принадлежащим М1 и какую чётность имеет его порядковый номер. Для этого достаточно воспользоваться формулой (30). Прибавим к числу единицу и разделим результат на четыре, если делится без остатка, значит принадлежит. Если после деления на четыре делится без остатка на два, значит чётное.

Выполним очередной шаг алгоритма.

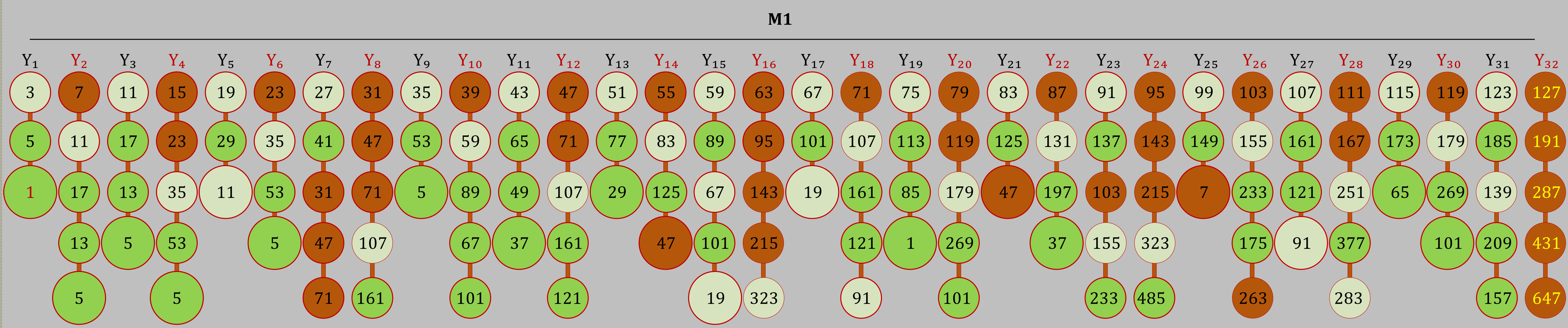

Рис.15

Количество последовательностей только с чётными номерами входящих в неё чисел опять сократилось вдвое, было две: Y_{16}, Y_{32}, осталась одна : Y_{32}. Следующим шагом исчезнет и эта. Но, далее в натуральном ряду, ещё остаются Y_{64}, Y_{128}, … и т.д.

В бесконечном натуральном ряду существует бесконечное количество последовательностей, принадлежащих M_1, состоящих только из чисел с чётными порядковыми номерами отстоящих друг от друга на дистанции 2^n , до тех пор пока очередным n+1- ходом и они не исчезнут.

Подведём промежуточный текущий итог: среди множества чисел, принадлежащих М1 мы обнаружили числа с чётными порядковыми номерами, с уникальной возможностью увеличиваясь по алгоритму продолжать оставаться в M_1, но, тем не менее, получили очередное доказательство ограниченности их там пребывания их там.

Рассмотрим сценарий возвращений числа в М1 из одного из множеств М2, М3, М4 … M_m. Какова его дальнейшая судьба - продолжает оно движение вперёд или возвращается ниже исходного. Сможем ответить на этот вопрос после того, когда проведём дополнительную работу по изучении структуры множества М1.
Символом $\{Y_n\}\in M_m$ будем обозначать порядковые номера чисел, принадлежащих М1, М2, М3 … M_m, где m=1, 2, 3, … - порядковый номер множества.
Рассмотрим фрагмент произвольной последовательности:

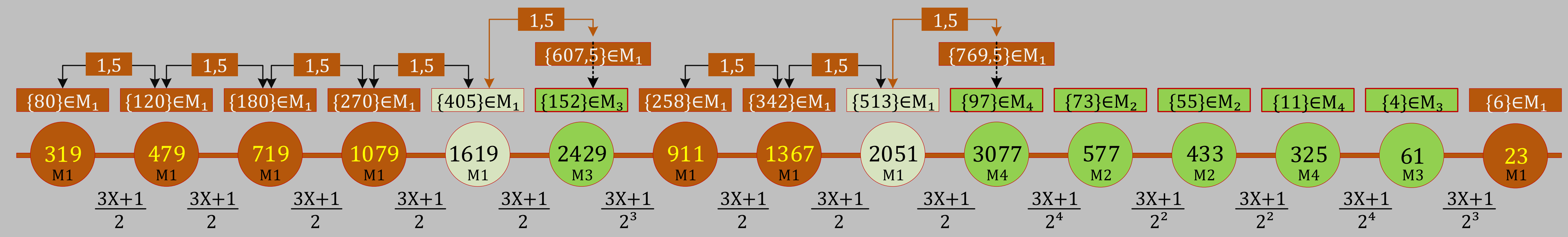

Рис.16 Фрагмент последовательности с исходным 319

Обратим внимание на одну закономерность, касающуюся первой последовательности. В результате действия алгоритма число принадлежащее М1 увеличивается приблизительно в 1,5 раза, в соответствии с полной формулой алгоритма,

$$\frac{3\cdot 479+1}{2}=719 \quad \Rightarrow \quad \frac{719}{479}\approx 1{,}50104 \qquad (35)$$

а порядковый номер очередного числа увеличивается ровно в 1,5 раза.

$$\frac{\{180\}}{\{120\}}=1{,}5\,; \quad \frac{\{270\}}{\{180\}}=1{,}5\,; \quad \frac{\{405\}}{\{270\}}=1{,}5\,; \quad \frac{\{342\}}{\{228\}}=1{,}5\,; \quad \frac{\{513\}}{\{342\}}=1{,}5\,; \qquad (36)$$

Почему так происходит, становится ясно, после того как применим алгоритм к формуле числа, принадлежащего М1 (30):

$$\frac{3\cdot(4n\text{-}1)+1}{2}=\frac{12n\text{-}2}{2}=6n\text{-}1 \qquad (37)$$

Алгоритм, воздействуя на формулу числа М1 изменил значение коэффициента при номере n числа. Было 4n-1 стало 6n-1, а 6/4=1,5.
Увеличение чётного в 1,5 раза, последовательно несколько раз, в конечном итоге приводит к нечётному. Движение чётного к нечётному через умножение на 1,5 равносильно делению чётного пополам, значит движение чётного к нечётному в М1 для любого чётного закономерно. Другой закономерностью множества М1 является неизбежность перехода числа с нечётным порядковым номером следующим ходом в одно из множеств М2, М3, М4 … и т.д. Это видно из Рис. 16. Например, при умножении нечётного номера $\{405\}\in M_1$ числа 1619 на 1,5 очередное число 2429 должно было получить порядковый номер $\{607{,}5\}\in M_1$, но число 607,5 не является натуральным, значит номером чего либо оно не может быть. Оно занимает промежуточное положение между двумя рядом стоящими номерами $\{607\}\in M_1$ и $\{608\}\in M_1$. Так число 2429 оказалось в М3, но уже с натуральным порядковым номером $\{152\}\in M_3$. Следующим ходом число 2429 вернулось в М1, но уже в другой линии последовательности чётных. Между отдельными последовательностями чётных в М1 не существует возможности перехода из одной в другую не покидая М1.

3.4 Ряды групп М1 нечётных Коллатца

Введём новые понятия:

Группа нечётных М1 - последовательность нечётных *М1*, в которой порядковый номер очередного больше предыдущего ровно в *1,5*. Количество членов в группе нечётных может быть любым, в том числе состоящей из одного, с нечётным порядковым номером. Если группа состоит из нескольких нечётных, то её возглавляет нечётное с чётным порядковым номером, а замыкает группу число с нечётным порядковым номером. Число, возглавляющее группу является её ***лидером***.

Для того чтобы выявить структуру множества М1, воспользуемся Рисунком 15, предварительно избавившись от информации непосредственно не относящейся к М1 (Рис.17).

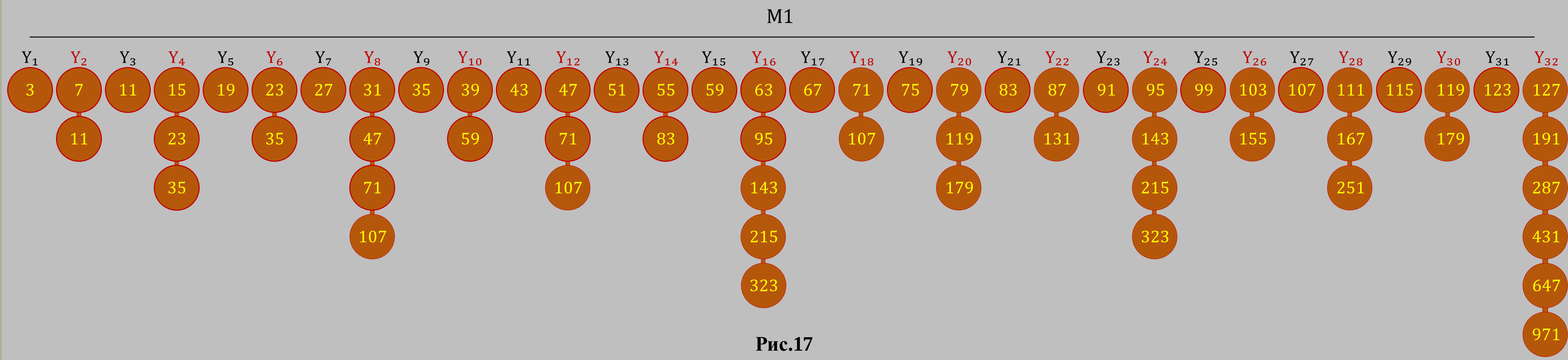

Рис.17

В математике при решении уравнений часто применяют метод приведения подобных. Одним из этапов котого является перестановка слагаемых, таким образом, чтобы подобные слагаемые оказались рядом. Нечто подобное выполним и мы для множества групп принадлежащих *М1*. Разделим множество групп Рис.17 по признаку количества находящихся в них членов:

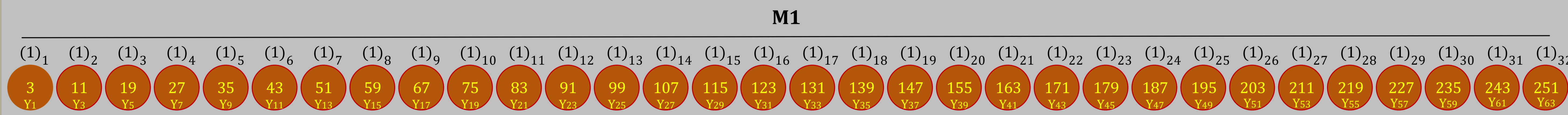

Рис.18 Множество одиночных $(1)_n \in M_1$

Очередное число ряда нечётных одиночных отличается от предыдущего на одно то же значение 8, и оно описывается формулой:

$$(1)_n \in M_1 = 8n-5 \tag{38}$$

где n = 1, 2 , 3 … - порядковый номер, который имеет число из натурального ряда X_n , но теперь уже в ряду нечётных одиночных $(1)_n$, принадлежащих М1.

Например числом с порядковым номером n=14 из ряда $(1) \in M_1$ является: $(1)_{14} \in M_1 = 8 \cdot 14 - 5 \Rightarrow (1)_{14} \in M_1 = 107$.

Если требуется определить какое положение будет занимать число из натурального ряда $X_{107} = 107$ в ряде $(1) \in M_1$: $X_{107} \in (1) = (107+5)/8 \Rightarrow X_{107} \in (1) = 14$

M1

$(2)_{1}$	$(2)_{2}$	$(2)_{3}$	$(2)_{4}$	$(2)_{5}$	$(2)_{6}$	$(2)_{7}$	$(2)_{8}$	$(2)_{9}$	$(2)_{10}$	$(2)_{11}$	$(2)_{12}$	$(2)_{13}$	$(2)_{14}$	$(2)_{15}$	$(2)_{16}$
7 Y2	23 Y06	39 Y10	55 Y14	71 Y018	87 Y22	103 Y26	119 Y030	135 Y34	151 Y38	167 Y042	183 Y46	199 Y50	215 Y054	231 Y58	247 Y62
11 Y3	35 Y09	59 Y15	83 Y21	107 Y027	131 Y33	155 Y39	179 Y045	203 Y51	227 Y57	251 Y063	275 Y69	299 Y75	323 Y081	347 Y87	371 Y93

$(2)_{17}$	$(2)_{18}$	$(2)_{19}$	$(2)_{20}$	$(2)_{21}$	$(2)_{22}$	$(2)_{23}$	$(2)_{24}$	$(2)_{25}$	$(2)_{26}$	$(2)_{27}$	$(2)_{28}$	$(2)_{29}$	$(2)_{30}$	$(2)_{31}$	$(2)_{32}$
263 Y066	279 Y70	295 Y74	311 Y078	327 Y82	343 Y86	359 Y090	375 Y94	391 Y98	407 Y0102	423 Y106	439 Y110	455 Y0114	471 Y118	487 Y122	503 Y0126
395 Y099	419 Y105	443 Y111	467 Y0117	491 Y123	515 Y129	539 Y0135	563 Y141	587 Y0147	611 Y0153	635 Y0159	659 Y0165	683 Y0171	707 Y0177	731 Y0183	755 Y0189

Рис.19 Множество двух $(2)_n \in$ M1

Очередное число-лидер ряда нечётных двух отличается от предыдущего на одно то же значение 16, и оно описывается формулой:

$$(2)_n \in M_1 = 16n-9 \tag{39}$$

M1

$(3)_{1}$	$(3)_{2}$	$(3)_{3}$	$(3)_{4}$	$(3)_{5}$	$(3)_{6}$	$(3)_{7}$	$(3)_{8}$	$(3)_{9}$	$(3)_{10}$	$(3)_{11}$	$(3)_{12}$	$(3)_{13}$	$(3)_{14}$	$(3)_{15}$	$(3)_{16}$
15 Y4	47 Y012	79 Y20	111 Y28	143 Y036	175 Y44	207 Y52	239 Y060	271 Y68	303 Y76	335 Y084	367 Y92	399 Y100	431 Y0108	463 Y116	495 Y124
23 Y6	71 Y018	119 Y30	167 Y42	215 Y054	263 Y66	311 Y78	359 Y090	407 Y102	455 Y114	503 Y0126	551 Y138	599 Y0150	647 Y0162	695 Y0174	743 Y0186
35 Y9	107 Y027	179 Y45	251 Y63	323 Y081	395 Y99	467 Y117	539 Y0135	611 Y153	683 Y171	755 Y0189	827 Y207	899 Y0225	971 Y0243	1043 Y0261	1115 Y0279

$(3)_{17}$	$(3)_{18}$	$(3)_{19}$	$(3)_{20}$	$(3)_{21}$	$(3)_{22}$	$(3)_{23}$	$(3)_{24}$	$(3)_{25}$	$(3)_{26}$	$(3)_{27}$	$(3)_{28}$	$(3)_{29}$	$(3)_{30}$	$(3)_{31}$	$(3)_{32}$
527 Y0132	559 Y140	591 Y148	623 Y0156	655 Y164	687 Y172	719 Y0180	751 Y188	783 Y196	815 Y0204	847 Y212	879 Y220	911 Y0228	943 Y236	975 Y244	1007 Y0252
791 Y0198	839 Y0210	887 Y0222	935 Y0234	983 Y0246	1031 Y0258	1079 Y0270	1127 Y0282	1175 Y0294	1223 Y0306	1271 Y0318	1319 Y0330	1367 Y0342	1415 Y0354	1463 Y0366	1511 Y0378
1187 Y0297	1259 Y0315	1331 Y0333	1403 Y0351	1475 Y0369	1547 Y0387	1619 Y0405	1691 Y0423	1763 Y0441	1835 Y0459	1907 Y0477	1979 Y0491	2051 Y0513	2123 Y0531	2195 Y0549	2267 Y0567

Рис.20 Множество трёх $(3)_n \in$ M1

Очередное число-лидер ряда нечётных трёх отличается от предыдущего на одно то же значение 32, и оно описывается формулой:

$$(3)_n \in M_1 = 32n-17 \tag{40}$$

И так далее. Каждый следующий ряд, содержащий большее количество членов в группе описывается формулой общего вида:

$$(N)_n \in M_1 = 2^{N+2}n - (2^{N+1}+1) \tag{41}$$

Где N-номер ряда, с количеством членов в группе равным N.

n - порядковый номер числа в ряде N

Таким образом, каждое нечётное, принадлежащее М1 анатомически проявляет себя, как минимум, в трёх измерениях. В каждом из этих измерений оно имеет свой порядковый номер. Совокупность всех признаков числа определяет его положение в структуре множества нечётных М1 (**Рис.21** Анатомия нечётного числа, принадлежащего множеству М1):

М1

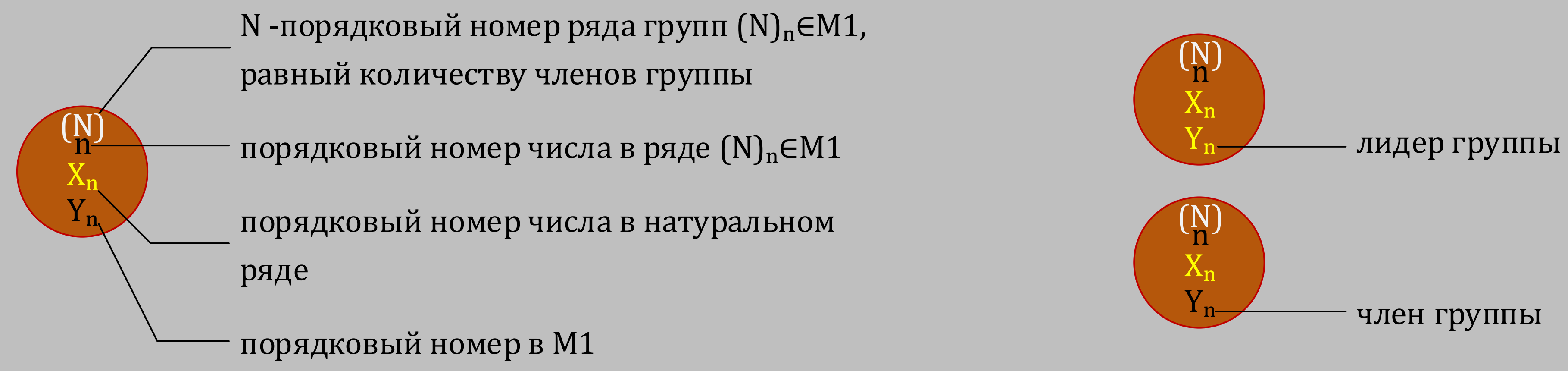

Рис.21 Анатомия нечётного числа, принадлежащего множеству М1

Рассмотрим произвольную последовательность Коллатца с исходным X_0=77 031:

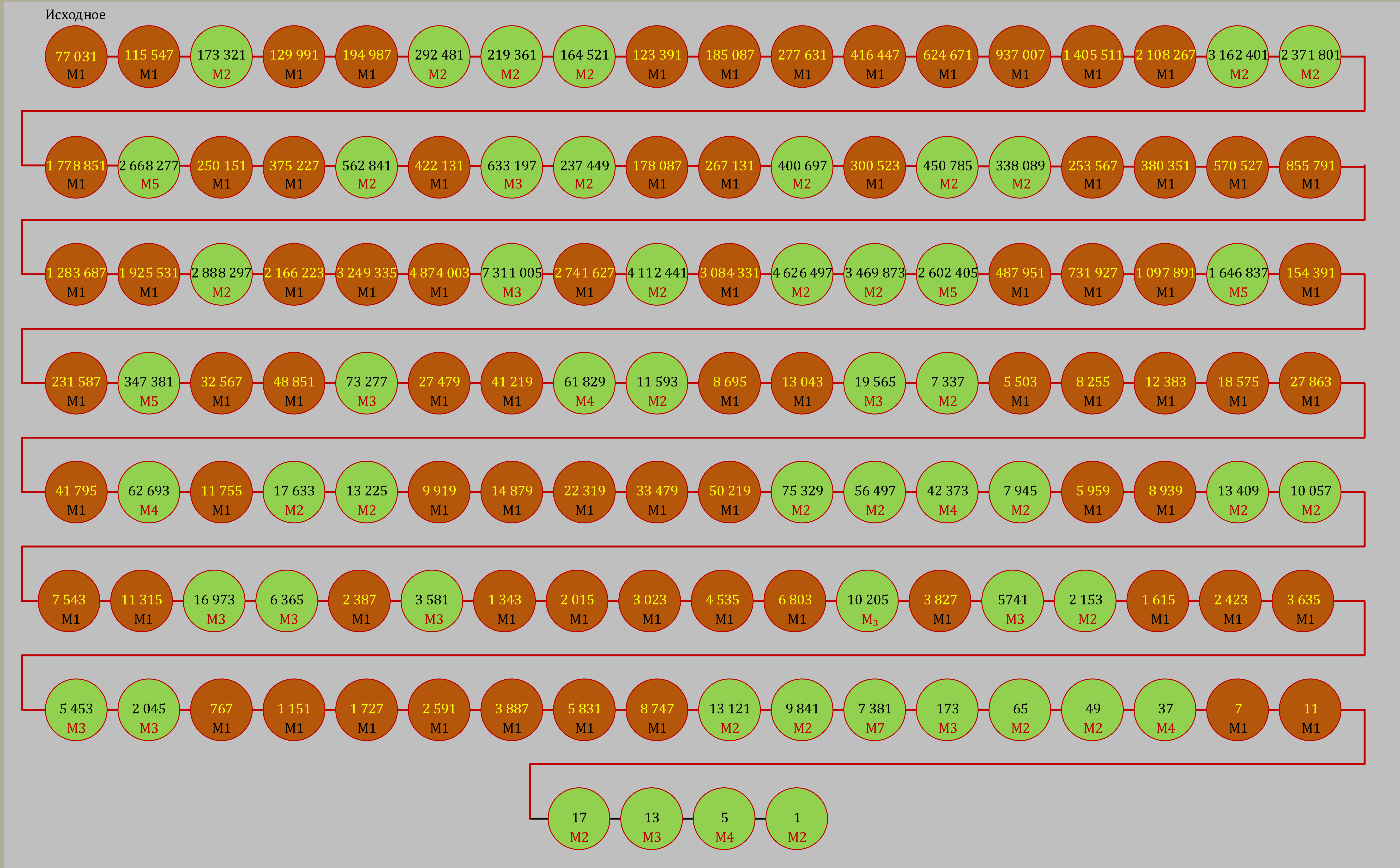

Рис.22 Последовательность Коллатца с исходным 77031

Определим положение промежуточных позиций, которые исходное число проходит при выполнении алгоритма Коллатца в рядах групп, принадлежащих М1. Для определения Y_n Используем формулу (30). При определении порядкового номера ряда групп по количеству членов группы, учитываем лидера: дело в том, что маршрут исходного числа иногда его обходит стороной. Лидера всегда находим через коэффициент равный 1,5. Номера Y_n всех членов группы делятся без остатка на 1,5, а число-лидер не делится. Далее, по номеру ряда можно определить порядковый номер числа в этом ряде по соответствующим формулам (38), (39) ... (41) :

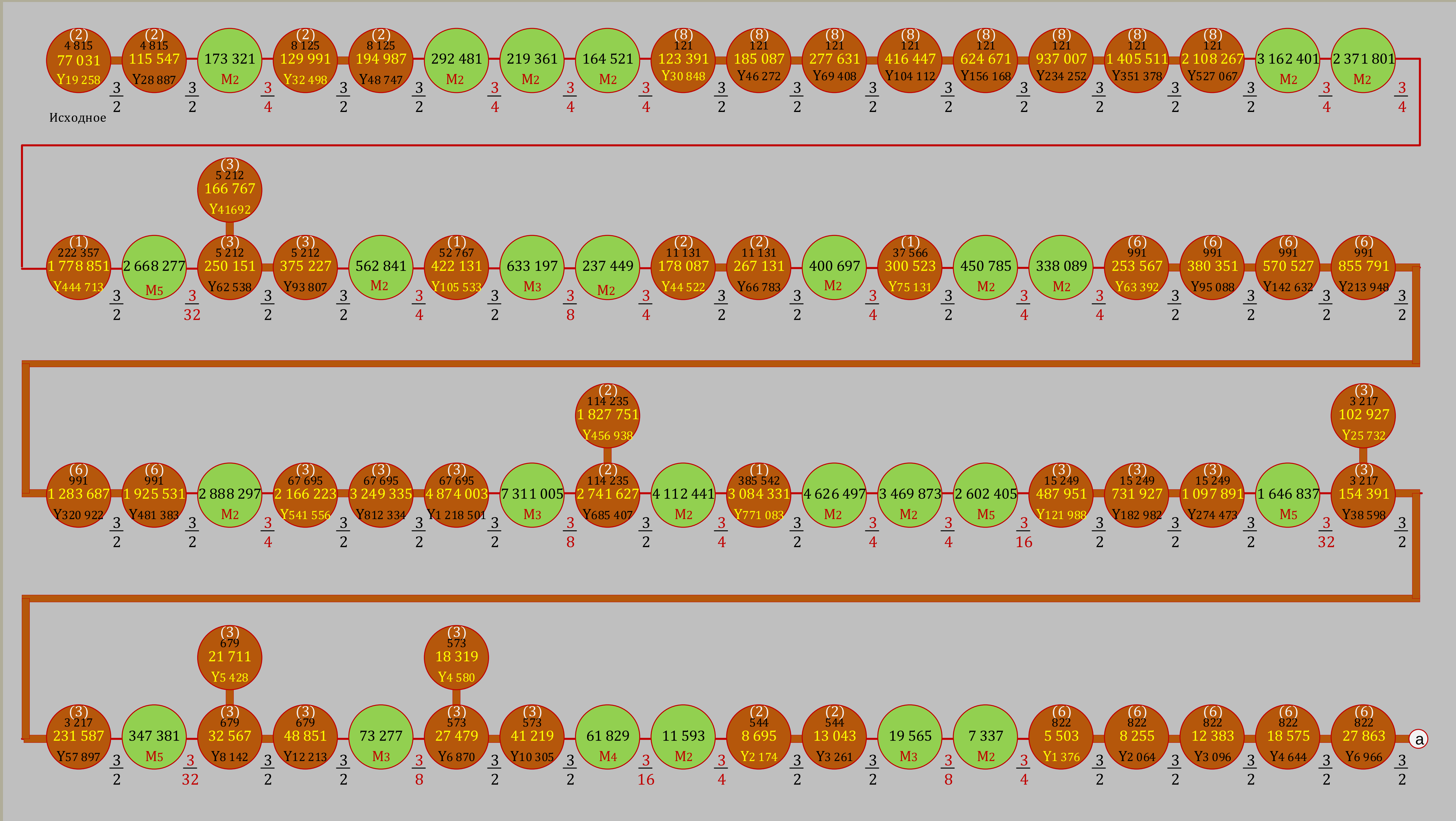

Рис. 23.1 1-й фрагмент последовательности Коллатца с исходным 77031

Продолжение следует

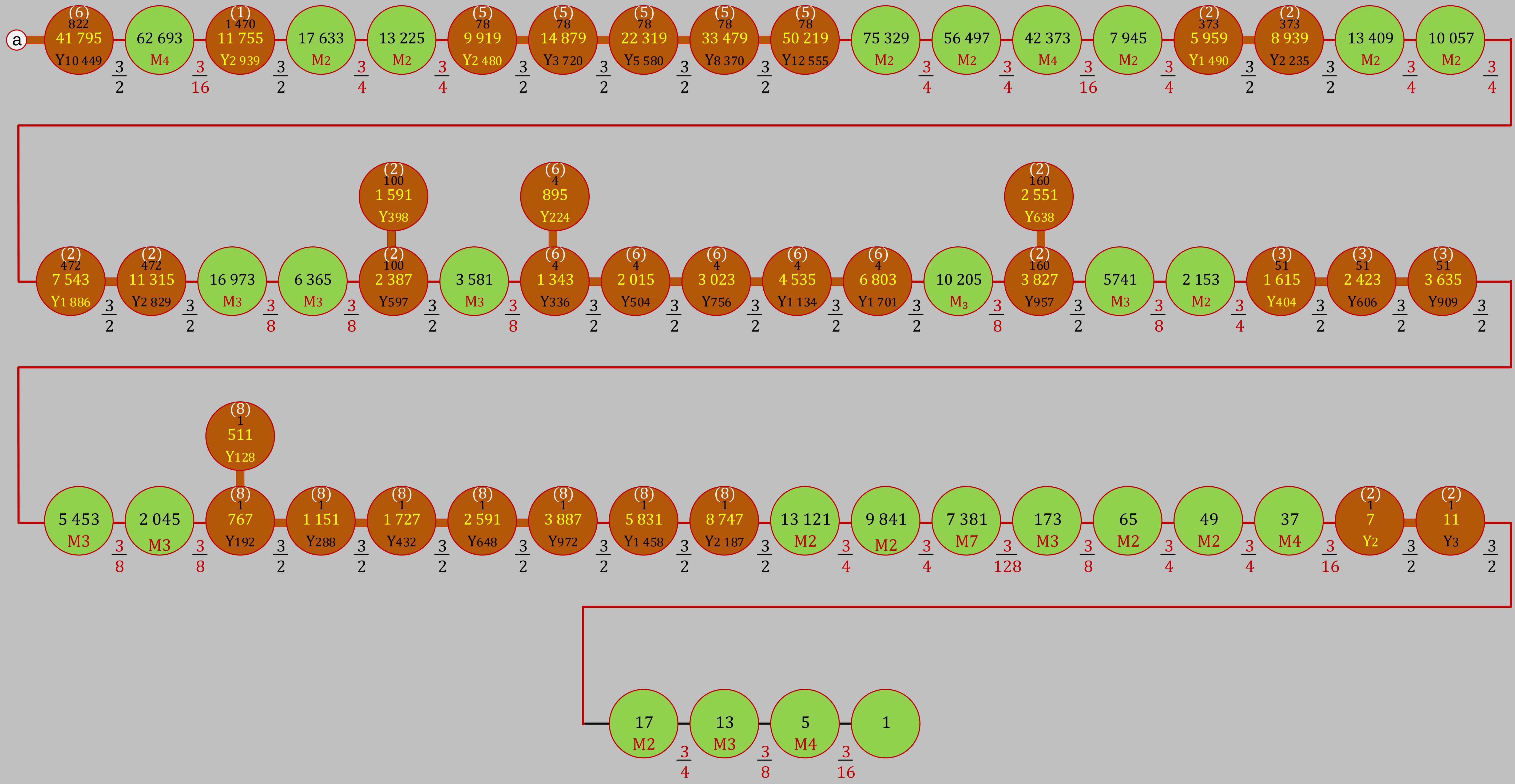

Рис. 23.2 2-й фрагмент последовательности Коллатца с исходным 77031

Упростим выражение последовательности Коллатца с исходным натуральным 77031 следующим образом:

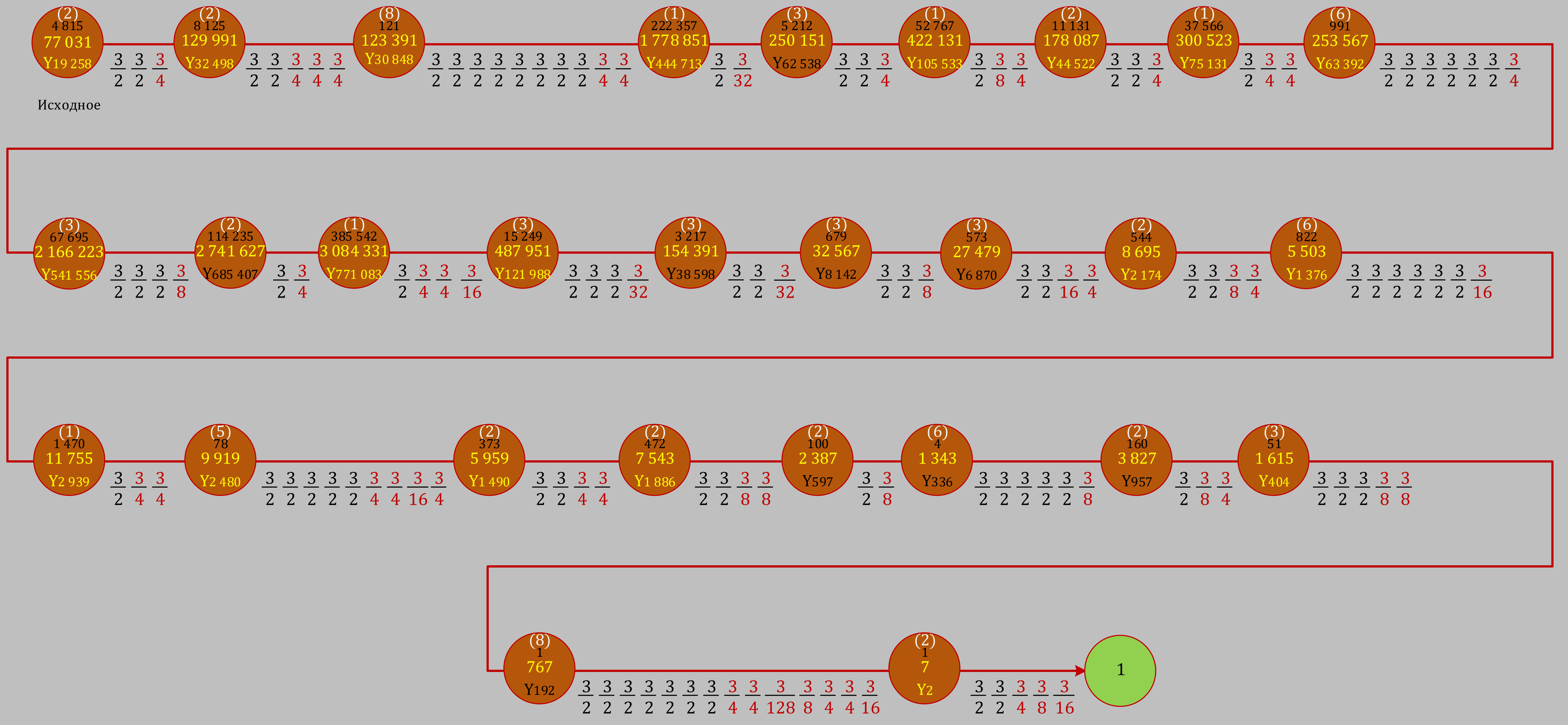

Рис.24 Последовательность рядов принадлежащих М1 с исходным X_n= 77031

Исходное, в результате выполнения алгоритма даже в пределах множества М1, проходит путь через разные ряды этого множества. Возвращаясь очередным ходом в M_1 оно может оказаться, в равной степени, как в старшем по статусу ряде, так и в младшем. Но, нас интересует возвращение числа в один и тот же ряд, и траектория движения числа в пределах этого ряда. Разделим один общий маршрут исходного X_n= 77031 на отдельные маршруты в пределах каждого закономерного ряда, и приведём подобные:

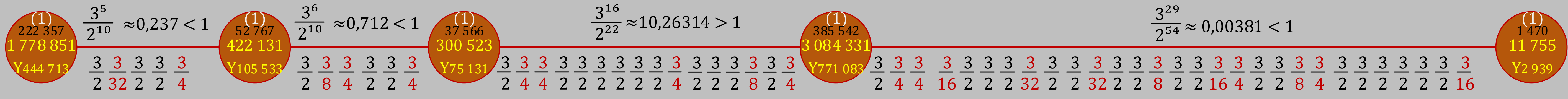

Рис.25 Маршрут исходного натурального 77031 в пределах ряда одиночных $(1)_n \in M1 = 8n-5$

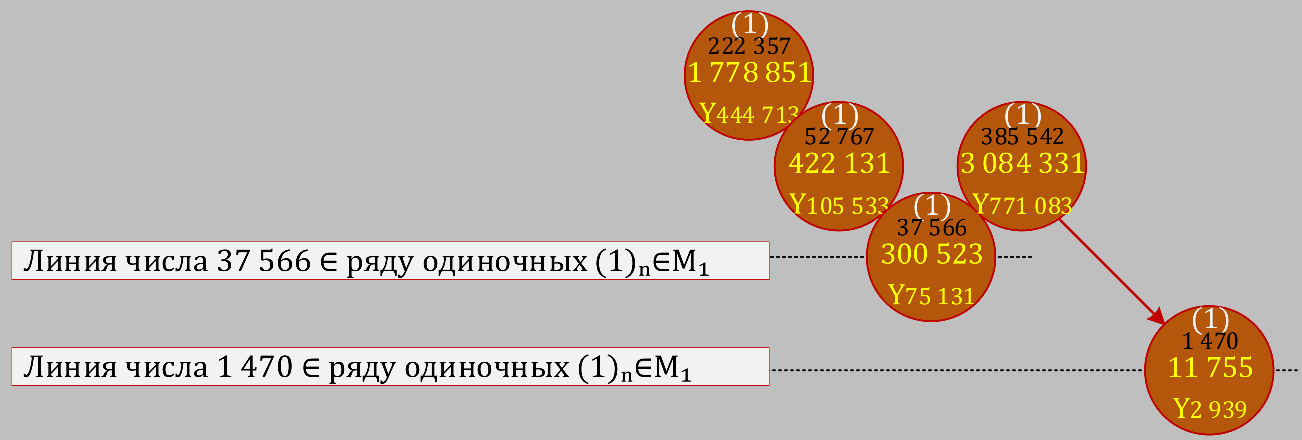

Рис.26 Траектория исходного в пределах ряда одиночных $(1)_n \in M1 = 8n-5$

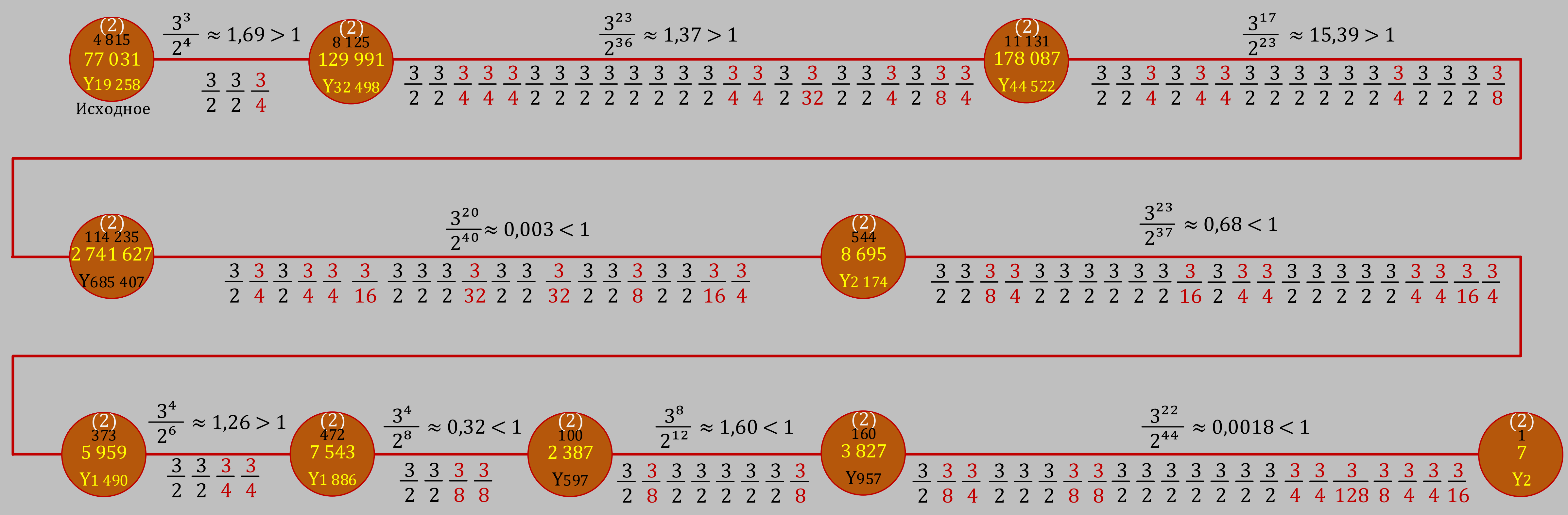

Рис.27 Маршрут исходного 77031 в пределах ряда двух $(2)_n \in M1 = 16n\text{-}9$

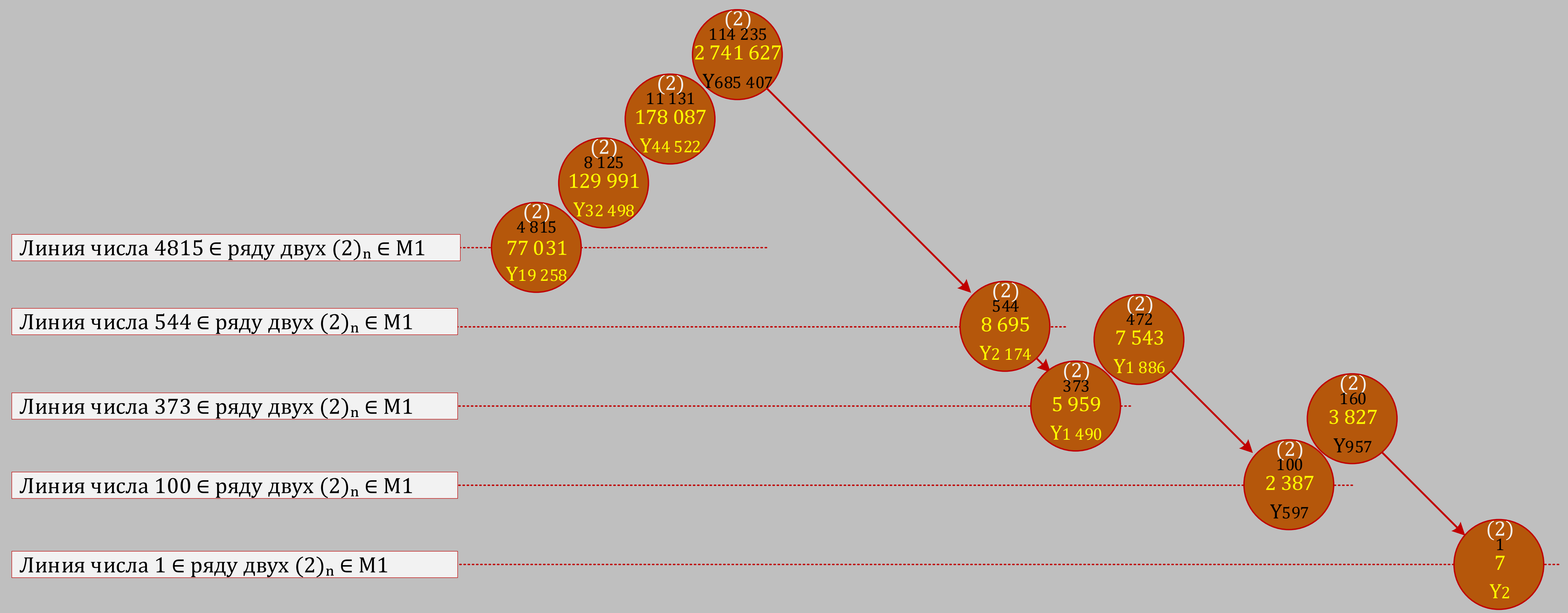

Рис.28 Траектория исходного 77031 в пределах ряда двух $(2)_n \in M1 = 16n\text{-}9$

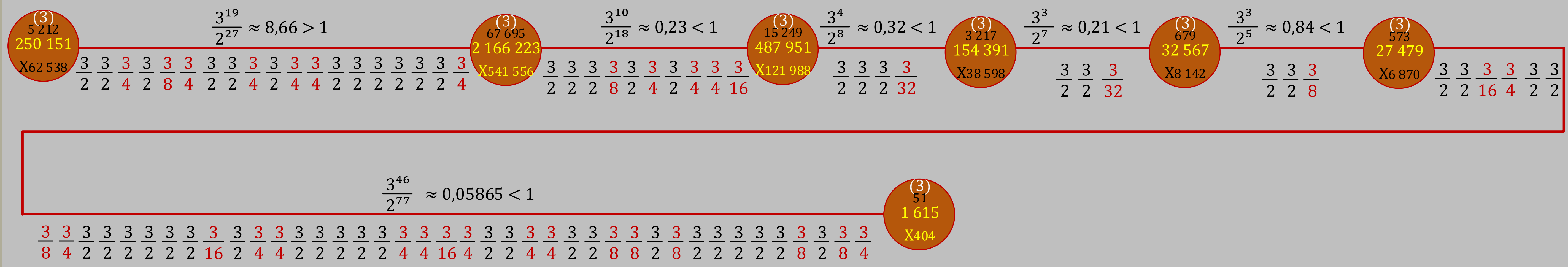

Рис.29 Маршрут исходного 77031 в пределах ряда трёх $(3)_n \in M_1 = 32n-17$

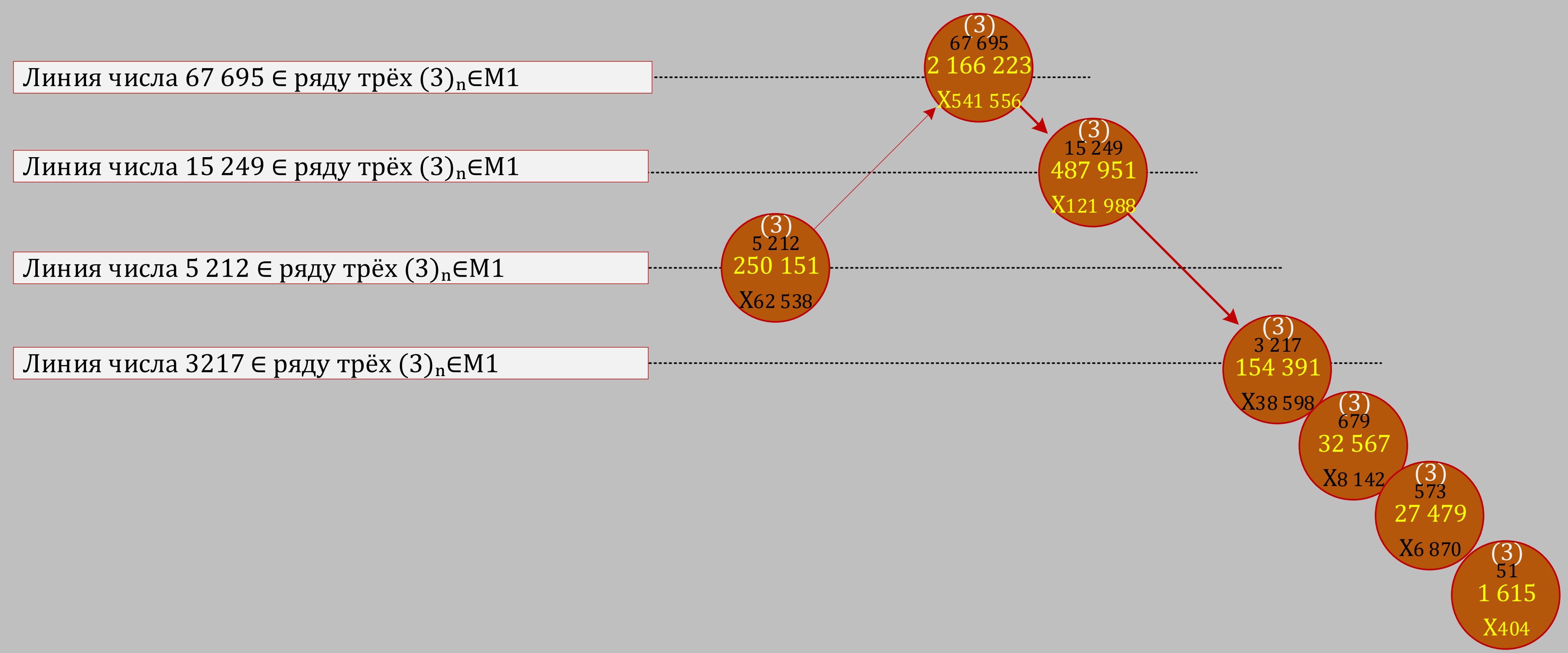

Рис.30 Траектория исходного 77031 в пределах ряда трёх $(3)_n \in M_1 = 32n-17$

Рис.31 Ниспадающие траектории исходного 77031 в пределах отдельных рядов групп $(N)_n \in$ M1

Число продвигается не только вперёд и назад, и переходит из одного множества в другое, но ещё и переходит из одного параллельного ряда групп в другой параллельный. И здесь в параллельных рядах становится ещё более очевидным стремление числа сворачиваться в единицу.

Периодически число возвращается в M1. Существуют два сценария продолжения движения, после того, как число возвращается в M1. В первом сценарии число продолжает возрастать, во втором сценарии уменьшаться.

Если в общей последовательности очередное число отличается от предыдущего в k_n раз, где коэффициент $k_n = (3X_n+1)/2^m$, а m - степень двух в знаменателе алгоритма, соответствующая текущему шагу, то тогда число возвращающееся в один из закономерных параллельных рядов групп будет отличаться от предыдущего в этом ряду в число раз, определяемым произведением всех промежуточных коэффициентов (Рис25, Рис26… Рис.31). Здесь, на приведенных рисунках, значение коэффициента k_n представлено в упрощенном виде $3/2^m$. Этого достаточно, чтобы сравнить произведение всех промежуточных коэффициентов с единицей. Если произведение всех промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим больше единицы – число растет, если меньше – уменьшается. Третьего не дано. Никогда такое произведение, в любом сочетании промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим не будет равным единице. Ранее, мы уже убедились в том, что возможность образования кольца в алгоритме Коллатца исключена. Поэтому мы имеем только два сценария, или вперёд, или назад. Сколько будет и тех и других для произвольного исходного натурального – предугадать сложно. Рисунки Рис.25 – Рис.31 показывают, что будут иметь место оба сценария. Но, с увеличением их количества, становится актуальным известный закон диалектики – закон перехода количественных изменений в качественные, т.е. вступает в действие статистическая формула (29). В алгоритме созданы все условия для его бесконечного продолжения, но бесконечным оно не будет. Потому что два противоположных по направлению сценария не являются симметричными, не являются тождественными по алгоритмическому содержанию. Асимметричность алгоритма в каждом своём шаге вносит корректировку в формировании теперь уже закономерной общей тенденции движения числа.

Логический вывод о том, что стремление любого натурального к единице является закономерным, представим в простых формулах. Мы уже знаем, что половина нечётных из натурального ряда принадлежит первому множеству, а вторая половина нечётных является суммой всех нечётных остальных множеств:

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 \,.... + M_m \tag{42}$$

у каждого числа последовательности, даже в пределах одного множества своя, отличающаяся от других чисел последовательности, производительность.

$$W_2 < W_1 < W_3 < W_4 \,.... < W_m \tag{43}$$

Производительность числа напрямую зависит от делителя, входящего в формулу алгоритма. Сравнивая делители разных множеств, мы косвенно, сравниваем их производительности. Но, значения делителей 4,8,16… и т.д., множеств M2, M3, M4 … M_n, благодаря которым очередное число уменьшается, в совокупности перевешивают по производительности единственный делитель 2, принадлежащий M1. Единственная возможность для числа увеличиваться существует в условиях, описываемых формулой:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)}_{a} * \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{3}{4}\right)}_{b} * \underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\cdots\left(\frac{3}{8}\right)}_{c} * \underbrace{\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{3}{16}\right)\cdots\left(\frac{3}{16}\right)}_{d} *** \underbrace{\left(\frac{3}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\cdots\left(\frac{3}{m}\right)}_{z} > 1 \tag{44}$$

Количество множителей = a b c d z

Здесь: a, b, c, d … z – количество множителей в последовательности. Результат зависит от количественного соотношения множителей. В отдельных фрагментах последовательности можно наблюдать ситуацию, когда произведение всех промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим больше единицы. Но, стремление последовательности в бесконечность неизбежно ведёт к увеличению общего количества множителей, состав которых, к тому же, обогащается разнообразием делителей, и тогда закономерным результатом произведения всех промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим становится уже значение, меньшее единицы. Произведение всех промежуточных коэффициентов меньшее единицы переводит число ниже исходного. В пределе формула (44) трансформируется в (45)

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)}_{\frac{n}{2}} * \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{3}{4}\right)}_{\frac{n}{4}} * \underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\cdots\left(\frac{3}{8}\right)}_{\frac{n}{8}} * \underbrace{\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{3}{16}\right)\cdots\left(\frac{3}{16}\right)}_{\frac{n}{16}} *** \underbrace{\left(\frac{3}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\cdots\left(\frac{3}{m}\right)}_{\frac{n}{m}} < 1 \tag{45}$$

Количество множителей = $\frac{n}{2}$ $\frac{n}{4}$ $\frac{n}{8}$ $\frac{n}{16}$ $\frac{n}{m}$

Каждое натуральное продвигаясь по алгоритму в своей последовательности Коллатца накапливает необходимое количество множителей с максимальным разнообразием делителей для того, чтобы реализоваться в формуле (45). Так мы приходим к неожиданному выводу: становится очевидным, что именно формула (45) является решением алгоритма Коллатца, его конечной целью. А завершение последовательности в единице для любого натурального есть уже её следствие. Подтверждение факта, что цель достигнута.

Представим формулу (45) в краткой форме:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n}{8}}\cdots\left(\frac{3}{m}\right)^{\frac{n}{m}} < 1 \qquad (46)$$

ЧАСТЬ 4: Выводы, заключение, результаты

ВЫВОДЫ: Все натуральные, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, устремляются к единице.

Не существует таких, которые бы уходили в бесконечность, потому что существует закономерный переход из одного множества в другое, из одного параллельного ряда групп в другой параллельный. Потому что в основе закономерного перехода из одного множества в другое стоит фундаментальный закон перехода количественных изменений в качественные. Из чего следует другой, не менее важный, вывод - переход из одного множества в другое, свидетельствует о его качественных изменениях, которые достигаются делением числа пополам. Деление пополам есть прямой путь к совершенствованию, оно присутствует в каждом шаге алгоритма, в качестве завершающего. Значит из всех натуральных, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, не существует таких, которые бы уходили в бесконечность, деление пополам является определяющим, в том, куда следует двигаться натуральному. Следствием перехода из одного множества в другое является обретение новых промежуточных коэффициентов в формуле (45) или (46);

Не существует предпосылок, указывающих на какую либо иную возможность числу, принадлежащему M1 преодолеть преграду нечётных из M2, M3, M4 … M_n.
А непрерывное продвижение числа вперёд в чётных последовательностях множества M1, с чётными порядковыми номерами входящих в них чисел, ограничено количеством шагов алгоритма, до тех пор, пока порядковый номер последовательности делится пополам. Деление пополам в алгоритме Коллатца и здесь оказалось главным действием, определяющим дальнейшую судьбу натурального;

Не существует таких, которые бы уходили в бесконечность, потому что на своих маршрутах, какими бы сложными и длинными они не были, последовательности накапливают, обогащают себя необходимым количеством разнообразных коэффициентов до тех пор, пока их произведение не станет меньше единицы для того, чтобы в конечном итоге реализоваться в формуле (45). Формула (45) открывает прямой путь к единице. Значит абсолютно все последовательности, с любым натуральным в качестве исходного стремятся к единице.

Таким образом, в совокупности приведенных выше аргументов, **утверждение 2 доказано:** не существует последовательностей уходящих в бесконечность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Существование бесконечного количества **успешных решений**, доказанность **утверждения 1** и **утверждения 2** позволяют нам сделать заключительное: с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге обязательно выйдем на маршрут **успешного решения алгоритма**, приводящего к единице. Таким образом,

ГИПОТЕЗА КОЛЛАТЦА ДОКАЗАНА.

Библиографический список:

1. Тао, Теренс. [Электронный ресурс] // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тао,_Теренс (дата обращения: 21.03.2025)

2. Derek Muller. Самая простая нерешённая задача – гипотеза Колатца [Veritasium]/[Электронный ресурс]// Студия Vert Dider: сайт. - URL: https://youtu.be/QgzBDZwanWA?si=QW5HRHFjov1Y5F5l (дата обращения: 21.03.2025)