

# УТОЧНЁННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН СЛОЁВ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ ДЛЯ МАКСИМИЗАЦИИ НАГРУЗКИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Селюгин С.В.

e-mail: *selyugin@rambler.ru*

Рассмотрена задача максимизации нагрузки потери устойчивости тонкой композитной пластины за счёт выбора наилучшей локальной ориентации волокон слоёв. Пластина является линейно-упругой и подчиняется гипотезе прямых нормалей Кирхгоффа. Её деформирование описывается классической теорией тонких композитных пластин. В отличие от традиционных подходов, пластина предполагается не только напряженной, но и деформированной при нагружении вплоть до потери устойчивости. Следуя принципу виртуальных работ, получены и проанализированы уравнения предельного равновесия. На основе использования последних уравнений выведены необходимые условия локальной оптимальности первого порядка в этой задаче. Показано, что полученные условия являются следствием предложенного в работе вариационного принципа. Для выявления закономерностей оптимальной укладки выполнен анализ этих условий.

**Ключевые слова:** композитная пластина, углы укладки волокон слоёв, максимизация нагрузки потери устойчивости, вариационный принцип, необходимые условия локальной оптимальности первого порядка.

## 1. Введение

Как известно, до 50% силовой конструкции современного самолёта (например, таких, как Airbus A350, Boeing B787) изготовлено из композиционных материалов. В связи с этим чрезвычайно актуальными сегодня являются вопросы оптимизации и обеспечения весовой эффективности конструкций из таких материалов.

Важной характеристикой, определяющей несущую способность конструкции, является устойчивость элементов конструкции, таких, как сжатые панели крыльевых поверхностей, сдвиговые стенки (лонжероны, нервюры) и т. д. Условия оптимальности первого порядка в задаче максимизации нагрузки потери устойчивости композитных пластин изучались, в различных постановках, во многих работах (см. Selyugin 2013, Селюгин 2024 и цитирование в этих работах).

Настоящая работа посвящена получению и анализу уточненных условий оптимальности первого порядка в задачах устойчивости композитных пластин. Под уточнением понимается учёт упругих деформаций пластины в состоянии в момент начала нагружения и после него, когда пластина ещё не потеряла устойчивость. Заметим, что наиболее распространённым является подход, при котором (см. Васидзу 1987) пластина в состоянии до потери устойчивости считается напряжённой, но недеформированной.

Работа состоит из 6 Разделов (включая Введение как Раздел 1).

В Разделе 2 приведены основные допущения работы.

В Разделе 3, на основе принципа виртуальных работ и следующих из него уравнений равновесия и краевых условий, получен и представлен вариационный принцип для рассматриваемой задачи устойчивости композитной пластины.

В Разделе 4 приведен вывод необходимых условий первого порядка локальной оптимальности задачи.

Раздел 5 посвящен обсуждению полученных соотношений.

Раздел 6 содержит выводы работы.

## 2. Допущения

Рассмотрим тонкую плоскую композитную пластину толщиной  $h$ , составленную из  $2K$  симметрично уложенных локально ортотропных слоёв (при необходимости обобщение на нечётное число слоёв может быть легко выполнено).

Толщина пластины много меньше любого её линейного размера.

На Рис. 1 показана декартова система координат  $XYZ$ , срединная плоскость  $\Gamma$  пластины, ограниченная кусочно-гладким контуром  $C$ , нормаль и касательный вектор к этому контуру. Перемещения по координатам  $x, y, z$  обозначаются соответственно  $u, v, w$ . Объём пластины равен  $V$ .

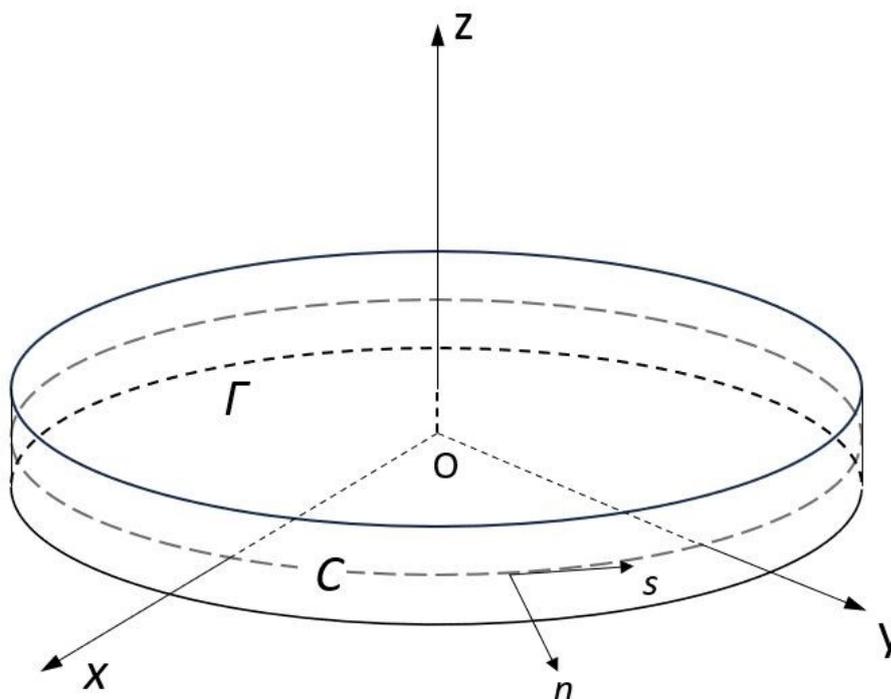


Рис. 1. Тонкая пластина.

Волокна слоёв композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Справедлива гипотеза Кирхгоффа прямых нормалей к поверхности  $\Gamma$ , означающая равенство нулю  $xz$ ,  $yz$ ,  $zz$  компонент тензора деформаций Грина.

Контур  $C$  состоит из контуров  $C_1$  и  $C_2$ . Краевые условия для пластины – защемление по контуру  $C_2$ . На контуре  $C_1$  заданы внешние силы  $N_{xv}$ ,  $N_{yv}$ , действующие в плоскости  $\Gamma$  по  $X$  и  $Y$ , соответственно.

Первое (наименьшее) собственное значение потери устойчивости считается некрратным (изолированным).

Поведение пластины описывается классической теорией слоистых пластин (Gibson 1994, Лехницкий 1947, Reddy 2004, Васильев 1988). Компоненты тензора деформаций Грина даются формулами:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - zw_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - zw_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy} \end{cases} \quad (1)$$

где запись в нижнем индексе вида  $,x$  означает дифференцирование по координате  $x$ .

Соотношения, описывающие потерю устойчивости пластины при нагружении по граничному контуру  $C_1$  в плоскости  $XY$ , соответствуют подходу (Васидзу 1987).

Везде далее, говоря о деформированной поверхности пластины, будем иметь в виду поверхность собственной формы потери устойчивости.

### 3. Анализ условий устойчивости

Получим уравнения предельного равновесия при потере устойчивости пластины, используя принцип виртуальных работ (Васидзу 1987). При этом будем удерживать члены всех порядков малости.

В соответствии с принципом виртуальных работ справедливо равенство:

$$\iiint dx dy dz [\sigma_x \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_y \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}] - \int dC_1 [N_{xv} \delta u + N_{yv} \delta v] = 0 \quad (2)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  – соответствующие компоненты тензора напряжений Кирхгоффа,  $N_{xv}, N_{yv}$  – внешние погонные нагрузки по  $x$  и  $y$ , приложенные на контуре  $C_1$ . Второй интеграл в (2) берётся по контуру  $C_1$ .

Введем погонные силы  $N_x, N_y, N_{xy}$  и погонные моменты  $M_x, M_y, M_{xy}$ , соответствующим образом интегрируя  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  по толщине пластины:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, & N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz, \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (1) и (3) в (2), после интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} &\iint d\Gamma \left\{ (N_{x,x} + N_{xy,y}) \delta u + (N_{xy,x} + N_{y,y}) \delta v - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y}) + \right. \right. \\ &\frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}) + M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} \left. \right] \delta w + \frac{\partial}{\partial x} [N_x \delta u + N_{xy} \delta v + \\ &N_x w_{,x} \delta w + N_{xy} w_{,y} \delta w - M_x \delta w_{,x} - M_{xy} \delta w_{,y} + M_{xy,y} \delta w] + \frac{\partial}{\partial y} [N_y \delta v + N_{xy} \delta u + \\ &N_y w_{,y} \delta w + N_{xy} w_{,x} \delta w - M_y \delta w_{,y} - M_{xy} \delta w_{,x} + M_{xy,y} \delta w] \left. \right\} - \int dC_1 [N_{xv} \delta u + \\ &N_{yv} \delta v] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Введём некоторый уровень везде одинаково пропорционально уменьшенных граничных сил  $N_{xv}^{(0)}, N_{yv}^{(0)}$ , при котором потеря устойчивости отсутствует при любой возможной укладке волокон слоёв. Тогда внешние силы на контуре  $C_1$ , приводящие к потере устойчивости, могут быть записаны в виде

$$N_x = \lambda N_{xv}^{(0)} ; \quad N_y = \lambda N_{yv}^{(0)} \quad (5)$$

где  $\lambda$  – характеризует нагрузку потери устойчивости. Наименьшее возможное значение этой величины будем называть первым собственным значением потери устойчивости.

Используя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем два последних члена в интеграле по  $\Gamma$ . Имеем из (4):

$$\begin{aligned}
& \iint d\Gamma \left\{ (N_{x,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{y,y})\delta v - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y}) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}) + M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} \right] \delta w \right\} + \int dC \{ l [ N_x \delta u + \\
& N_{xy} \delta v + N_x w_{,x} \delta w + N_{xy} w_{,y} \delta w - M_x \delta w_{,x} - M_{xy} \delta w_{,y} + M_{xy,y} \delta w ] + \\
& m [ N_y \delta v + N_{xy} \delta u + N_y w_{,y} \delta w + N_{xy} w_{,x} \delta w - M_y \delta w_{,y} - M_{xy} \delta w_{,x} + \\
& M_{xy,y} \delta w ] \} - \int dC_1 [ N_{x\nu} \delta u + N_{y\nu} \delta v ] = 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $l, m$  – направляющие косинусы относительно  $X$  и  $Y$  нормали к граничному контуру.

Учтем, что дифференцирование по нормали  $\nu$  к граничному контуру и вдоль контура (по  $s$ ) связано с дифференцированием по  $x, y$  соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x} = l \frac{\partial}{\partial \nu} - m \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial \nu} + l \frac{\partial}{\partial s} \quad (7)$$

Рассмотрим отдельно интегралы по контуру из (6). Имеем, с учётом заземления на  $C_2$ :

$$\begin{aligned}
& \int dC \{ l [ N_x \delta u + N_{xy} \delta v + N_x w_{,x} \delta w + N_{xy} w_{,y} \delta w - M_x \delta w_{,x} - M_{xy} \delta w_{,y} + \\
& M_{xy,y} \delta w ] + m [ N_y \delta v + N_{xy} \delta u + N_y w_{,y} \delta w + N_{xy} w_{,x} \delta w - M_y \delta w_{,y} - M_{xy} \delta w_{,x} + \\
& M_{xy,y} \delta w ] \} - \int dC_1 [ N_{x\nu} \delta u + N_{y\nu} \delta v ] = \int dC_1 \{ l [ N_x \delta u + N_{xy} \delta v + N_x w_{,x} \delta w + \\
& N_{xy} w_{,y} \delta w - M_x \delta w_{,x} - M_{xy} \delta w_{,y} + M_{xy,y} \delta w ] + m [ N_y \delta v + N_{xy} \delta u + N_y w_{,y} \delta w + \\
& N_{xy} w_{,x} \delta w - M_y \delta w_{,y} - M_{xy} \delta w_{,x} + M_{xy,y} \delta w ] \} - \int dC_1 [ N_{x\nu} \delta u + N_{y\nu} \delta v ] \quad (8)
\end{aligned}$$

Далее, следуя выкладкам, приведенным в книге Васидзу (1987) и используя основную лемму вариационного исчисления, приходим к уравнениям равновесия по  $X, Y, Z$ , соответственно:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (9)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (10)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \frac{\partial}{\partial x} (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}) = 0 \quad (11)$$

и краевым условиям на  $C_1$ , соответствующим вариациям  $u, v, w, w_{,\nu}$ :

$$\begin{aligned}
N_{xv} &= \lambda N_{xv}^{(0)}, \quad N_{yv} = \lambda N_{yv}^{(0)} \\
lM_{x,x} + lM_{xy,y} + mM_{xy,x} + mM_{y,y} + N_{xv}w_{,x} + N_{yv}w_{,y} + \\
\frac{\partial}{\partial s} [-(M_x - M_y)lm + M_{xy}(l^2 - m^2)] &= 0 \\
M_x l^2 + 2M_{xy}lm + M_y m^2 &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Далее введем векторы-столбцы деформаций  $\vec{\varepsilon}_0$  и кривизн  $\vec{k}$  в нейтральной плоскости:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Также нам потребуются векторы-столбцы погонных сил  $\vec{N}$  и погонных моментов  $\vec{M}$ :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} \tag{14}$$

которые выражаются через деформации, кривизны и матрицы жесткости композитной пластины  $A$  и  $D$ :

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon}_0, \quad \vec{M} = D\vec{k} \tag{15}$$

Определим функционал потенциальной энергии  $\Phi$  пластины в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] - \lambda \int dC_1 [N_{xv}^{(0)} u + N_{yv}^{(0)} v] \tag{16}$$

Первый интеграл в (16) – это потенциальная энергия деформации  $\Pi$  сжато-изогнутой пластины, а второй интеграл – это работа приложенных контурных сил, равная  $\lambda W^{(0)}$ . Варьирование  $\Phi$  по  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и приравнивание этой вариации нулю, как нетрудно проверить, приводит к (9)-(12). Таким образом, нуль вариации (16) по  $u$ ,  $v$ ,  $w$  позволяет определить первое собственное значение потери устойчивости. Это значение может быть вычислено из (варьируется  $u$ ,  $v$ ,  $w$ )

$$\delta\Phi = 0 \tag{17}$$

либо

$$\delta \frac{\frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^{-T} A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}]}{\frac{1}{2} \int dC_1 [N_{xv}^{(0)} u + N_{yv}^{(0)} v]} = 0 \quad (18)$$

Собственное значение потери устойчивости, при найденных  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , даётся формулой, подобной формуле Рэлея:

$$\lambda = \frac{\Pi}{\frac{1}{2} W^{(0)}} = \frac{\frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^{-T} A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}]}{\frac{1}{2} \int dC_1 [N_{xv}^{(0)} u + N_{yv}^{(0)} v]} \quad (19)$$

Отметим, что полученные строгие соотношения (16) - (19) различаются, по сравнению с известными соотношениями, приведенными в (Васидзу, 1987, §8.6), тем, что варьируются все перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , а не только прогиб  $w$ , и учитываются члены более высокого порядка малости (последнее повлияет на вариацию собственного значения по углам укладки волокон слоёв).

#### 4. Условия оптимальности первого порядка

Используя представленный в предыдущем Разделе вариационный подход (16)-(19), получим необходимые условия локальной оптимальности для максимизации нагрузки потери устойчивости композитной пластины с углом укладки волокон каждого из слоёв, зависящим от положения на пластине.

Вычислим полную вариацию от  $\lambda$  по углам укладки волокон слоёв в соответствии с (19). Эту вариацию вычислим как сумму вариаций по перемещениям  $\delta_{u,v,w}$  при постоянных конструктивных параметрах, и только по конструктивным параметрам - углам укладки  $\delta_\theta$  - при постоянных перемещениях. Учтем при этом вариационный принцип (17). Имеем

$$\delta\lambda = \delta_{u,v,w}\lambda + \delta_\theta\lambda = \delta_\theta\lambda \quad (20)$$

где изменения перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , обусловлены изменениями углов укладки по пластине, и вариационный принцип (18) учтен в виде:

$$\delta_{u,v,w}\lambda = 0 \quad (21)$$

Тогда необходимые условия локальной оптимальности первого порядка в результате записываются, с учётом основной леммы вариационного исчисления, в виде:

$$\frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 T \frac{dA}{d\theta_i} + \frac{1}{2}k_1 T \frac{dD}{d\theta_i}}{\frac{1}{2}W^{(0)}} = 0 \quad i=1, \dots, K \quad (22)$$

Вычисляя (22) в осях координат, совпадающих с направлениями главных деформаций (для первого члена в числителе) и главных кривизн деформированной срединной поверхности (для второго члена в числителе), подобно (Селюгин 2024), окончательно получаем условия оптимальности для углов укладки  $\theta_i$ ,  $i=1, \dots, K$ , с криволинейными волокнами слоёв, с точностью до положительных множителей, в виде

$$\begin{aligned} & -\sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] (z_i - z_{i-1}) - \\ & \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3) = 0, \\ & i=1, \dots, K \quad (23) \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2, \psi, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi, U_2, U_3, z_i, z_{i-1}$  - наибольшее и наименьшее значение главных кривизн срединной плоскости пластины ( $k_1 \geq k_2$ ), угол между направлением  $k_1$  и осью X, наибольшее и наименьшее значение главных деформаций срединной плоскости пластины ( $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ ), угол между направлением  $\varepsilon_1$  и осью X, две упругие константы слоя, верхняя и нижняя z координаты i-го слоя,  $i=1, \dots, K$ . Отсчет слоёв при этом ведётся от срединной плоскости пластины.

Полученные уточненные условия оптимальности углов ориентации волокон слоёв являются существенно нелинейными. Тем не менее, можно указать важное частное решение (23), когда углы ориентации  $\varphi, \psi$  и угол ориентации волокон слоя  $\theta_i$  либо совпадают, либо различаются между собой на  $\pi/2$ .

## 5. Обсуждение

Обсудим полученные выше результаты.

В условиях оптимальности (23), за счет учета упругого деформирования до потери устойчивости, появляется дополнительный (первый) член, по сравнению с условиями оптимальности, приведенными в (Селюгин 2024). Второй член в (23) становится все более весомым, по сравнению с первым, при переходе от внутренних к внешним слоям.

Условия (23) могут быть линейно скомбинированы (аналогично работе Селюгина 2024), приводя к соотношению

$$N_{xy}^{pr.str.}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + M_{xy}^{pr.cur.}(k_1 - k_2) = 0 \quad (24)$$

где *pr.str.* и *pr.cur.* соответствует величинам в координатах осей главных (principal) 2D деформаций (strains) и главных кривизн (curvatures). Это условие означает, что погонные сдвиговое усилие и крутящий момент (в соответствующих осях координат) в каждой точке пластины – противоположных знаков, и пропорциональны между собой с коэффициентом пропорциональности, зависящим от главных значений 2D деформаций и кривизн. Отметим, что при неучете упругого деформирования до потери устойчивости, первый член в (24) – исчезает.

Условия оптимальности (23) подобны по структуре условиям оптимальности для задачи выбора наилучшей по жесткости укладки в случае закритического деформирования потерявшей устойчивость пластины (Селюгин 2024).

## 6. Выводы

Получены и проанализированы необходимые условия локальной оптимальности первого порядка для рассматриваемой задачи максимизации нагрузки потери устойчивости композитной пластины, учитывающие упругое деформирование вплоть до потери устойчивости.

Одно из оптимальных решений, удовлетворяющих необходимым условиям локальной оптимальности первого порядка – совпадение либо различие на  $\pi/2$  в каждой точке пластины углов ориентации одного из главных направлений кривизны деформированной поверхности, одного из главных направлений 2D деформации и направления волокон слоя.

## Литература

Васидзу К. 1987. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир.

Васильев В. В. 1988. Механика конструкций из композиционных материалов. Москва.: Машиностроение.

Вольмир А. С. 1967. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 984 стр.

Лехницкий С. Г. 1947. Анизотропные пластинки. Москва, Ленинград, ОГИЗ.

Селюгин С. В. 2024. Анализ и проектирование пластин и панелей из композиционных материалов. М.: МАИ, 156 стр.

Gibson RF 1994. Principles of composite material mechanics. McGraw-Hill, Inc., 425 pp.

Reddy JN 2004. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2<sup>nd</sup> edition. CRC Press, 831 pp.

Selyugin S. 2013. On Choice of Optimal Anisotropy of Composite Plates against Buckling, with Special Attention to Bending-twisting Coupling. *Struct Multidisc Optim* 48: 279–294