

Е.В. Хорошилов

## Способ определения вероятности в задаче Бертрана

Ключевые слова: парадокс Бертрана, равномерное распределение вероятности, множество хорд окружности, центральный угол, свёртка функций распределения плотности вероятности

*Аннотация. В статье предлагается способ решения задачи, связанной с парадоксом Бертрана, который основан на представлении множества хорд окружности в виде прямоугольного участка на плоской поверхности с заданными границами и последующим заданием его точкам вероятности с помощью либо одной функции распределения плотности вероятности двух переменных, либо с помощью двух функций функции распределения плотности вероятности. В заданных границах способ позволяет найти вероятность для условно произвольного распределения вероятности между хордами окружности не только для хорд, соответствующих условию задачи Бертрана, но и для условно произвольно выбранному(-ым) диапазону(-нам) длин хорд окружности.*

## Введение

Задача, предложенная Луи Бертраном в 1889 году связана с т.н. парадоксом Бертрана. В ней требуется найти вероятность того, что длина случайно выбранной хорды на окружности окажется больше длины стороны вписанного в эту окружность равностороннего треугольника [1]. Парадоксальность возникает из-за того, что данная задача имеет несколько, на первый взгляд, правильных вариантов решения, дающих различные результаты. Сам Бертран предложил три геометрических построения, на основе которых, получил три различающихся ответа. Вопрос о том, какой именно результат является корректным, вызвал споры среди математиков того времени, и большинство из них не смогло выразить предпочтение какому-либо из ответов, занимая нейтральную позицию и указывая на то, что проблема не имеет определённого решения, поскольку задача поставлена не корректно – не задан метод, с помощью которого должна выбираться хорда, а это в свою очередь, является основным условием для наличия у задачи чёткого определённого ответа. Решения Бертрана соответствовали различным методам выбора хорд, поэтому у задачи и не существует единственного решения, при этом отсутствие дополнительных условий, определяющих метод выбора хорд, не является основанием для предпочтительного выбора какого-либо из способов. Это и стало классическим решением этой задачи.

В 1973 году Джейнс [2] отметив, что в задаче Бертрана нет информации о размере или положении окружности в пространстве, предположил, что любые объективные и точные решения, во-первых, не должны зависеть от её размера и положения т.е. должны быть инвариантны относительно масштаба и переноса, во-вторых, должны соответствовать принципу «максимального безразличия» согласно которому, нельзя использовать дополнительную информацию, которой нет в условии задачи. Он предложил своеобразный подход к решению задачи, в котором выбор хорд осуществляется движением окружности по плоскости, на которой в произвольном порядке размещено множество прямых линии. Хордами в данном случае становятся отрезки прямых, попавших внутрь окружности при её перемещении. Однако такой подход не соответствует условию задачи согласно которому, хорды должны выбираться на окружности.

Из условия задачи, которая в оригинале выглядит следующим образом «On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?», что можно перевести как, «Проведите произвольную хорду в окружности. Какова вероятность того, что она меньше стороны вписанного равностороннего треугольника?» следует, что хорда должна «выбираться» из всего множества хорд окружности, вероятность между которыми распределена «произвольно» т.е. по неизвестному закону распределения, тогда можно предположить, что помимо условий, предложенных Джейнсом, ещё одним критерием правильного решения должна быть его применимость для различных распределений вероятности между хордами окружности, а также для произвольного диапазона длин хорд. Тогда для решения задачи, необходимо в первую очередь сосредоточиться не на способе выбора хорд, а на способе задания закона распределения между ними.

В данной работе предлагается решение, основанное на представлении множества хорд окружности в виде выбранного прямоугольного участка на плоской поверхности, каждой точке которого, ставится в соответствие значение центрального угла, на который опирается выбранная хорда, значение угла поворота оси, перпендикулярной ей и значение вероятности, заданное функцией(-ями) распределения её плотности.

## 1. Построение на плоскости

Для решения задачи поместим центр окружности радиусом  $R$  в начало прямоугольной системы координат и из точек, составляющих окружность выберем точки  $a$  и  $b$  не занимающие одно положение на ней. Координатные оси системы координат расположим таким образом, чтобы положительная полуось  $OX$  не пересекалась с отрезком  $ab$  в его крайних точках. Далее, одновременно и в противоположных направлениях начнём перемещать точки  $a$  и  $b$  по окружности, при этом считая положительным и отрицательным соответственно, приращения углов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  между положительной полуосью  $OX$  и отрезками, соединяющими начало координат и соответствующие точки (рис.1.1).

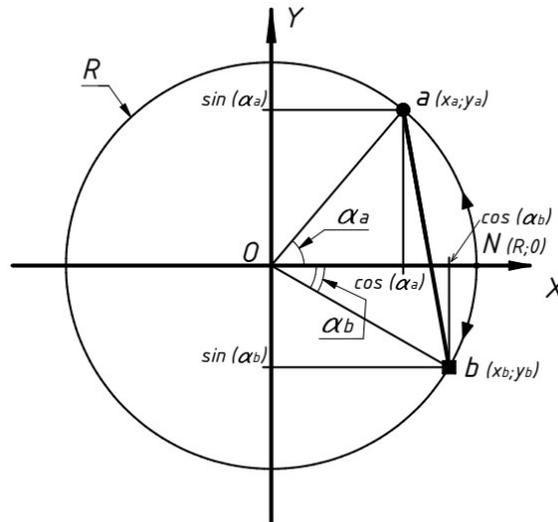


Рисунок 1.1 – Пояснение выбору точек  $a$  и  $b$  на окружности

Тогда перемещение точек  $a$  и  $b$  по окружности от начальной точки  $N(0,R)$  можно будет описать параметрически:

$$a(t) = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha_a(t) \cdot t) + \alpha_{a0} \\ R \sin(\alpha_a(t) \cdot t) + \alpha_{a0} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} x_b(t) \\ y_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha_b(t) \cdot t) + \alpha_{b0} \\ R \sin(\alpha_b(t) \cdot t) + \alpha_{b0} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  – функции положения точек  $a$  и  $b$  на окружности с радиусом  $R$ ,  $\alpha_a(t)$  и  $\alpha_b(t)$  – функции изменения углов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ ,  $\alpha_{a0}$  и  $\alpha_{b0}$  – начальные угловые положения точек  $a$  и  $b$ .

Зависимость длины отрезков  $ab(t)$  при изменении параметра  $t$  и соответственно при перемещении точек  $a$  и  $b$  относительно начальной точки  $N(0,R)$ , можно определить используя теорему Пифагора, как квадратный корень из суммы квадратов длин проекций отрезка  $ab$  на координатные оси, которые равны разности радиуса и проекций точек  $a$  и  $b$  на соответствующие оси:

$$\begin{aligned} |ab(t)| &= \sqrt{(ab_x(t))^2 + (ab_y(t))^2} = \\ &= \sqrt{((R - x_a(t)) - (R - x_b(t)))^2 + ((R - y_a(t)) - (R - y_b(t)))^2} = \\ &= \dots = \sqrt{(R(\cos(\alpha_b(t) \cdot t) + \alpha_{b0}) - (\cos(\alpha_a(t) \cdot t) + \alpha_{a0}))^2 + \\ &\quad + (R(\sin(\alpha_b(t) \cdot t) + \alpha_{b0}) - (\sin(\alpha_a(t) \cdot t) + \alpha_{a0}))^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отсюда зависимость длины хорд  $ab$  от значений углов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  и их начальных угловых положений  $\alpha_{a0}$  и  $\alpha_{b0}$  точек  $a$  и  $b$ :

$$|ab(\alpha_a, \alpha_b)| = \sqrt{(R(\cos(\alpha_b + \alpha_{b0}) - (\cos(\alpha_a + \alpha_{a0})))^2 + (R(\sin(\alpha_b + \alpha_{b0}) - (\sin(\alpha_a + \alpha_{a0})))^2} \quad (1.2.1)$$

Для упрощения решения пусть функции  $\alpha_a(t)$  и  $\alpha_b(t)$  будут определяться постоянными и одинаковыми (по модулю) величинами  $\alpha_a = 360^\circ$  и  $\alpha_b = -360^\circ$  соответственно, а начальные угловые положения будут равны нулю  $\alpha_{a0} = \alpha_{b0} = 0$ . Тогда при изменении параметра  $t$  в диапазоне  $[0;1]$ , точки  $a$  и  $b$  будут совершать один полный оборот по окружности, начиная движение из начальной точки и двигаясь при этом с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Тогда (1.1) примут упрощённый вид:

$$a(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha_a \cdot t) \\ R \sin(\alpha_a \cdot t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(360^\circ t) \\ R \sin(360^\circ t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha_b t) \\ R \sin(\alpha_b t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(360^\circ t) \\ -R \sin(360^\circ t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Множество отрезков  $ab$ , образующихся при вышеописанном упрощённом движении их крайних точек  $a$  и  $b$  будет соответствовать множеству всех хорд окружности  $R$ , перпендикулярных оси  $OX$ , поскольку каждому значению параметра  $t$  будут соответствовать одинаковые (по модулю) значения углов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  и как следствие, одинаковые перемещения точек  $a$  и  $b$  по окружности. Таким образом, при изменении параметра  $t$  в диапазоне  $[0;1]$ , отрезок  $ab$  займёт положение всех хорд окружности перпендикулярных оси  $OX$  (в т.ч. трёх нулевых хорд). При таком движении точек  $a$  и  $b$  зависимость длины отрезков  $ab(t)$  будет определяться только их проекциями на ось  $OY$ , поскольку разность их проекций на ось  $OX$  равна нулю и выражение (1.2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} ab(t) &= R(\sin(\alpha_a \cdot t) - \sin(\alpha_b \cdot t)) = \\ &= R(\sin(360^\circ \cdot t) + \sin(360^\circ \cdot t)) = 2R \sin(360^\circ \cdot t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Длина хорд  $ab(t)$  при вышеописанном перемещении точек (1.3) по всей длине окружности, будет лежать в диапазоне от 0 до  $2R$ , и, как следствие, множество хорд  $ab$  будет опираться на множество центральных углов  $\alpha$ , со значениями в диапазоне от 0 до 720 градусов. Учитывая, что  $\alpha_a = 360^\circ$  и  $\alpha_b = -360^\circ$  ( $|\alpha_a| = |\alpha_b|$ ) при  $t \in [0;1]$  значения центральных углов можно определить, как  $\alpha = (\alpha_a - \alpha_b)t$  соответственно  $\alpha_a = \alpha / 2$  и  $\alpha_b = -\alpha / 2$ . Тогда из (1.4) зависимость длины хорд от значений центральных углов  $ab(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} |ab(\alpha_a, \alpha_b)| &= R(\sin(\alpha_a \cdot t) - \sin(\alpha_b \cdot t)) \rightarrow \\ ab(\alpha) &= R(\sin(\alpha / 2) - \sin(-\alpha / 2)) = 2R \sin(\alpha / 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из соответствия хорд окружности  $R$ , перпендикулярных оси  $OX$  и отрезков  $ab(\alpha)$ , вероятность в задаче Бертрана предлагается найти, заменив выбор хорд выбором центрального угла  $\alpha$  на который они опираются и использовать точки кривой  $ab(\alpha)$  как отображение хорд, при этом сравнивая всю длину кривой с длиной её отрезков соответствующих диапазонам углов  $\alpha$ , соответствующих отрезкам траектории движения точек  $a$  и  $b$  между крайними точками отрезков  $MK$  и  $M_1K_1$ , длина которых равна или больше стороне вписанного в окружность равностороннего треугольника –  $\sqrt{3}R$ . Для этого можно воспользоваться (1.5) и определить значения центральных углов  $\alpha$ , при которых отрезок  $ab$  занимает положения хорд  $MK$  и  $M_1K_1$ , опирающихся на центральные углы  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно. Стоит отметить, что помимо информации о длине отрезков-хорд от значений их центральных углов, выражение (1.5) также содержит информацию о взаимном положении точек  $a$  и  $b$  относительно оси  $OX$ , поскольку оно периодически изменяет знак при пересечении точками оси  $OX$ . Это свойство предлагается использовать для учёта отрезков  $ab$ , занимающих одно и тоже положение на окружности, но отличающихся положением точек  $a$  и  $b$  относительно оси  $OX$ : отрезок  $ab$  составляет разность одинаковых по модулю проекций на ось  $OY$ , которая в диапазоне  $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$  имеет положительную величину, в диапазоне  $\alpha \in (360^\circ; 720^\circ)$  – отрицательную. (рисунок.2.1)

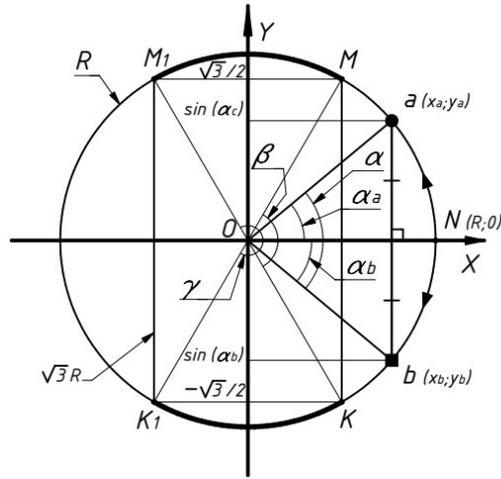


Рисунок 1.2 – Пояснение равномерному перемещению точек  $a$  и  $b$  на окружности

$$ab(\alpha) = \pm\sqrt{3}R \rightarrow R(\sin(\alpha_a) - \sin(\alpha_b)) = \pm\sqrt{3}R \quad (1.6.1)$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha_a) - \sin(\alpha_b) = \sqrt{3}/2 - (-\sqrt{3}/2) \\ \sin(\alpha_a) - \sin(\alpha_b) = -\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Тогда значения углов соответствующих положению отрезков  $MK$  и  $M_1K_1$  при  $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$  и соответственно при  $t \in [0^\circ; 0,5]$ :

$$\begin{cases} \alpha_{an} = (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}/2) + \pi n, \\ \alpha_{bn} = (-1)^n \arcsin(-\sqrt{3}/2) - \pi n, \\ \alpha_n = \alpha_{an} - \alpha_{bn}, \end{cases} \quad n \in Z \quad (1.6.2)$$

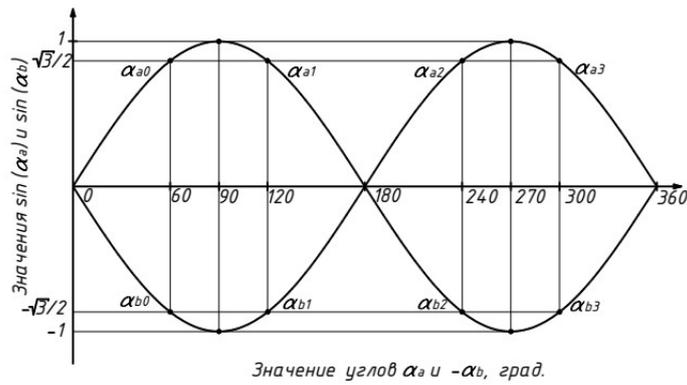
при  $n=0 - \alpha_{a0} = 60^\circ, \alpha_{b0} = -60^\circ$  и  $\alpha_0 = \beta_1 = 120^\circ$ ; при  $n=1 - \alpha_{a1} = 120^\circ, \alpha_{b1} = -120^\circ$  и  $\alpha_1 = \gamma_1 = 240^\circ$ .

и при  $\alpha \in (360^\circ; 720^\circ)$  и  $t \in (0,5; 1)$ :

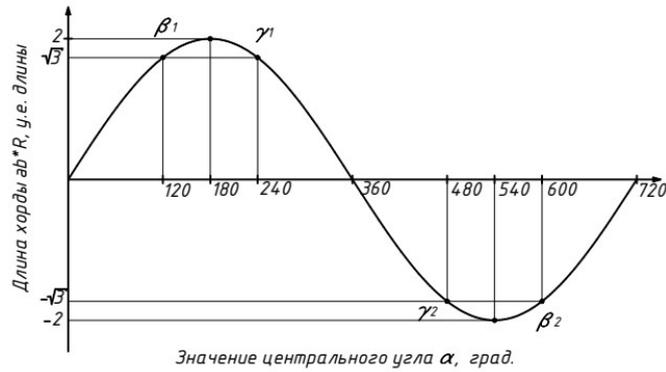
$$\begin{cases} \alpha_{an} = (-1)^n \arcsin(-\sqrt{3}/2) + \pi n, \\ \alpha_{bn} = (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}/2) - \pi n, \\ \alpha_n = \alpha_{an} - \alpha_{bn}, \end{cases} \quad n \in Z \quad (1.6.3)$$

при  $n=1 - \alpha_{a2} = 240^\circ, \alpha_{b2} = -240^\circ$  и  $\alpha_2 = \gamma_2 = 480^\circ$ ; при  $n=2 - \alpha_{a3} = 300^\circ, \alpha_{b3} = -300^\circ$  и  $\alpha_3 = \beta_2 = 600^\circ$ .

Ниже, на рисунках 3.1а и 3.1б, представлены зависимости одного периода функций  $\sin(\alpha_a)$ ,  $\sin(\alpha_b)$  и соответствующей им функции  $ab(\alpha)$  на которых отмечены, найденные выше корни. Синусоидальная форма кривых, хорошо отображает положение крайних точек хорд на окружности и их взаимное расположение относительно оси  $OX$ .



а)



б)

Рисунок 1.3 – Графики, а) функций  $\sin(\alpha_a)$ ,  $\sin(\alpha_b)$  и б)  $ab(\alpha)$

Поскольку функция  $ab(\alpha)$  является гладкой и непрерывной, можно утверждать, что в пределах одного периода функций, каждому значению центрального угла  $\alpha$  или параметра  $t$ , соответствует единственное положение точек  $a$  и  $b$  и соответственно единственная хорда перпендикулярная оси  $OX$ , образованная их взаимным расположением (исключение составляют нули функции –  $ab(0^\circ)$ ,  $ab(360^\circ)$ ,  $ab(720^\circ)$ ).

Для представления всех хорд окружности выбранного диапазона с помощью вышеописанного геометрического построения, необходимо расширить функцию  $ab(\alpha)$  дополнительной переменной –  $\omega$ , отражающей поворот оси симметрии  $OX_0$ , вдоль которой перемещаются точки  $a$  и  $b$  (рис. 4.1).

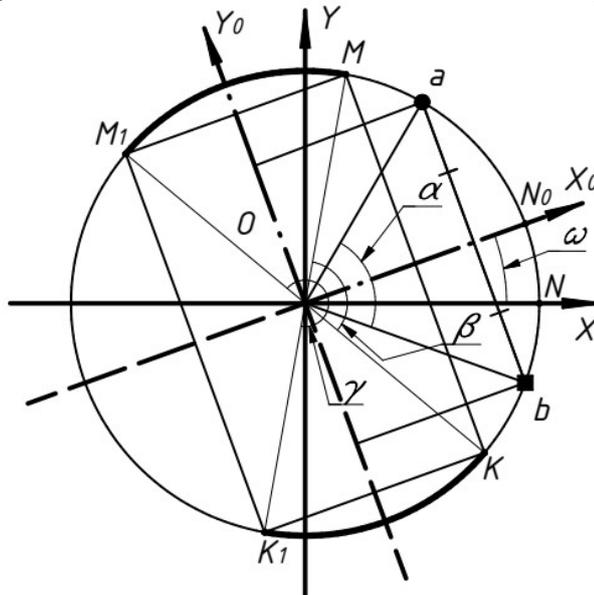


Рисунок 1.4 – Пояснение к повороту оси  $OX_0$

Тогда функцию  $ab(\alpha)$  можно представить в следующем виде:

$$ab(\alpha, \omega) = \begin{cases} 2R \cdot \sin(\alpha / 2), & \alpha \in [0^\circ, 720^\circ] \\ \omega, & \omega \in [0^\circ, 360^\circ] \end{cases} \quad (1.7)$$

Множество точек, полученной таким образом синусоидальной поверхности  $ab(\alpha, \omega)$ , соответствует множеству хорд выбранного диапазона углов  $\alpha$  и  $\omega$ . При этом отрицательная её часть поверхности отображает хорды, в которых положение крайних точек  $a$  и  $b$  которых перевернуто относительно оси симметрии, вдоль которой они движутся. Из вида поверхности  $ab(\alpha, \omega)$  следует, что всё множество точек, лежащее на ней «выше» и «ниже»  $60$  градусов от экстремумов, относятся к хордам, чья длина больше или равна длине  $\sqrt{3}R$ . (рис. 5.1).

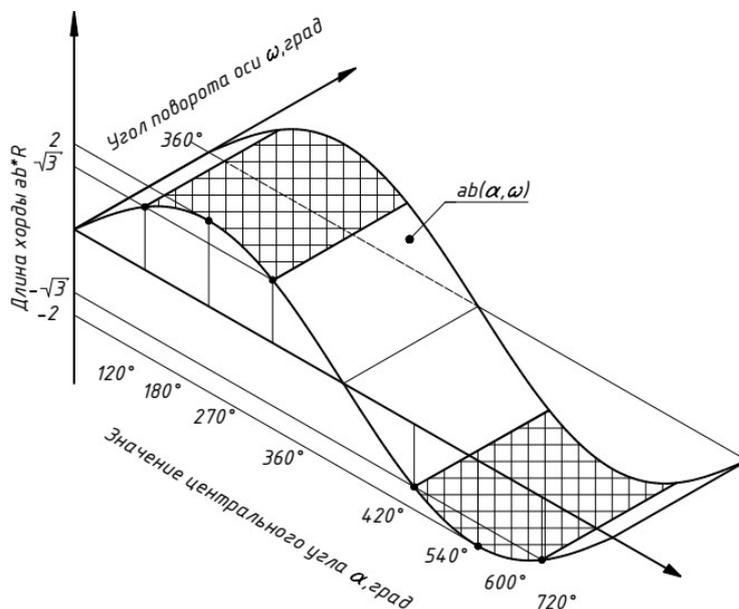


Рисунок 1.5 – Поверхность  $ab(\alpha, \omega)$

Из предположения о равномерном распределении вероятности между всеми точками поверхности  $ab(\alpha, \omega)$ , можно утверждать, что вероятность того, что точки  $a$  и  $b$ , будут образовывать хорду на окружности, длиннее стороны вписанного в эту окружность равностороннего треугольника, равна отношению суммы площадей поверхности  $ab(\alpha, \omega)$  в диапазонах  $[120^\circ; 240^\circ]$  и  $[480^\circ; 600^\circ]$  к общей площади всей поверхности  $ab(\alpha, \omega)$ :

$$P \leq \frac{S_{120-240} + S_{480-600}}{S} \leq \frac{\int_{120}^{240} \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\alpha d\omega + \int_{480}^{600} \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\alpha d\omega}{\int_0^{720} \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\alpha d\omega}, \quad (1.8)$$

где  $S_{120-240}$ ,  $S_{480-600}$  – площади поверхности  $ab(\alpha, \omega)$  при  $\alpha \in [120^\circ; 240^\circ]$ ,  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  и при  $\alpha \in [480^\circ; 600^\circ]$ ,  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  соответственно,  $S_{0-720}$  – площадь всей поверхности  $ab(\alpha, \omega)$ , которые равны произведению длин соответствующих отрезков кривой (1.5) на «ширину» поверхности – максимальное значение угла поворота оси.

Вычислим значение выражения (1.8):

$$P \leq \frac{\int_{120}^{240} \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\alpha d\omega + \int_{480}^{600} \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\alpha d\omega}{\int_0^{720} \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\alpha d\omega} \leq \frac{\left( \int_{120}^{240} ab(\alpha, \omega) d\alpha + \int_{480}^{600} ab(\alpha, \omega) d\alpha \right) \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\omega}{\int_0^{720} ab(\alpha, \omega) d\alpha \cdot \int_0^{360} ab(\alpha, \omega) d\omega} \leq \dots \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{\int_{120}^{240} \sqrt{1 - \frac{R^2 \cdot \sin^2(\alpha/2)}{R^2 + 1}} d\alpha + \int_{480}^{600} \sqrt{1 - \frac{R^2 \cdot \sin^2(\alpha/2)}{R^2 + 1}} d\alpha}{\int_0^{720} \sqrt{1 - \frac{R^2 \cdot \sin^2(\alpha/2)}{R^2 + 1}} d\alpha} \leq \dots \leq \\
& \leq \frac{E(240^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}) - E(120^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}) + E(600^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}) - E(480^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1})}{E(720^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1})} \leq \dots \leq \frac{1}{3}
\end{aligned}
\tag{1.8.1}$$

где  $E\left(240^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}\right)$ ,  $E\left(120^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}\right)$ ,  $E\left(600^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}\right)$ ,  $E\left(480^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}\right)$  и  $E\left(720^\circ; \frac{R^2}{R^2 + 1}\right)$  – эллиптические интегралы 2-го рода.

Использование поверхности  $ab(\alpha, \omega)$  для решения задачи удобно в случае равномерного распределения вероятности между её точками, однако для произвольного распределения данный подход сопряжён с дополнительными трудностями, связанными с заданием её точкам требуемого закона распределения вероятности.

## 2. Построение в пространстве

Наличие двух множеств хорд нулевой длины на границах области определения функции (1.7) –  $ab(0^\circ, \omega)$ ,  $ab(720^\circ, \omega)$ , при  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$ , которые соответствуют «пересечению» крайних точек хорд  $ab$  в «начальной-конечной» точке  $N$  их движения по окружности, косвенно может указывать на недостаточность вышеописанных плоских геометрических построений (рис. 1.2 и 1.4) для решения задачи Бертрана. Кроме того, наличие двух множеств также может указывать на возможность пространственной модификации этих построений. Для этого, необходимо допустить, что множества «нулевых» точек  $ab(0^\circ, \omega)$  и  $ab(720^\circ, \omega)$  при  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  соответствуют к различным множествам хорд нулевой длины. Вариантом такого пространственного расширения может служить представление движения крайних точек хорд  $a$  и  $b$ , движущихся по окружности на плоскости, в виде проекции на плоскости пространственного движения других точек  $A$  и  $B$ , движущихся по одной или нескольким пространственным кривым.

В качестве таких кривых предлагается использовать две спиральные соосные цилиндрические кривые с постоянным шагом  $s$ , одинаковым радиусом  $R$  и противоположными направлениями вращения. Причём ось их вращения берётся за дополнительную координатную ось  $OW$ , которая пересекает плоскость  $XY$  в начале координат под прямым углом, а сами кривые пересекают её в точке  $N(0, R, 0)$  (рис.2.1). Перемещение точек  $A$  и  $B$  вдоль дополнительной пространственной оси  $OW$ , определяется произведением шага спиральных кривых и значениями углов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  между положительной полуосью  $OX$  и отрезками, соединяющими начало координат и проекции соответствующих точек на плоскости  $XY$ . Шаг спиральных кривых выражается отношением длины проекции на ось  $OW$  между отстающими на один оборот точками спирали. Считая положительным направлением вращения то, в результате которого точки  $A$  и  $B$  будут двигаться в положительном направлении вдоль оси  $OW$ . И поскольку точки  $A$  и  $B$  двигаются по спиральным траекториям с противоположными направлениями вращения, значения углов между их проекциями на плоскости  $XY$  и положительной полуосью  $OX$  будут иметь противоположные знаки.

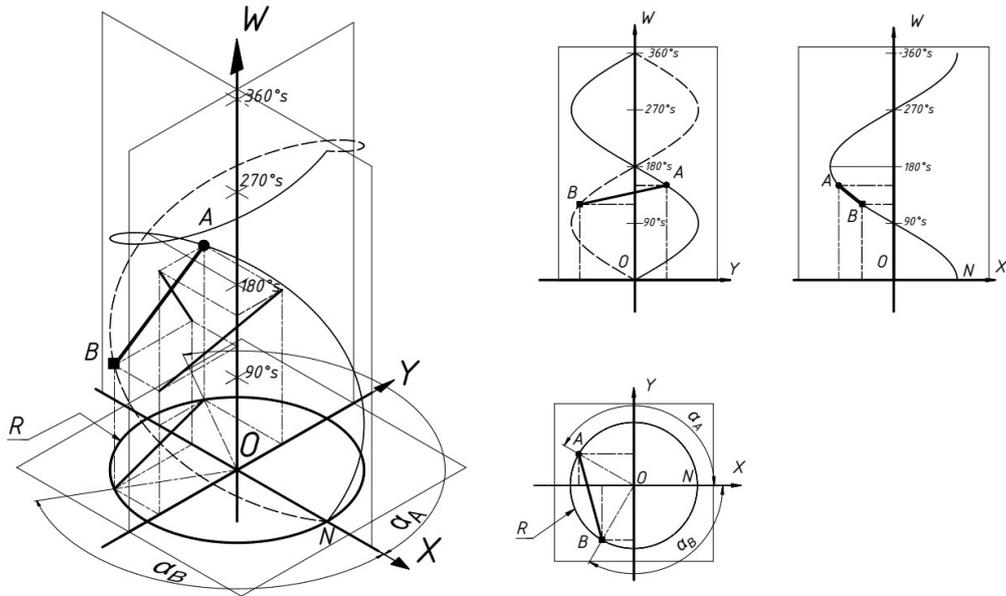


Рисунок 2.1 – Пояснение к движению точек A и B по спиральным кривым

Тогда движение каждой из точек можно A и B можно описать параметрически как движение концов вектора AB:

$$AB(t) = \begin{pmatrix} x_A(t) & x_B(t) \\ y_A(t) & y_B(t) \\ w_A(t) & w_B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha_A \cdot t) + \alpha_{A0} & R \cos(\alpha_B \cdot t) + \alpha_{B0} \\ R \sin(\alpha_A \cdot t) + \alpha_{A0} & - R \sin(\alpha_B \cdot t) + \alpha_{B0} \\ \alpha_A(t) \cdot s + \alpha_{A0} & \alpha_B(t) \cdot s + \alpha_{B0} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $R$  – радиус спиральных кривых,  $\alpha_A(t)$  и  $\alpha_B(t)$  – функции изменения углов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ ,  $\alpha_{A0}$  и  $\alpha_{B0}$  – начальное значение углов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ ,  $s$  – шаг спиральных кривых.

Как и в случае плоского построения, используя теорему Пифагора можно найти зависимость длины вектора  $AB(t)$ , при таком перемещении точек A и B от начальной точки N (0, R, 0):

$$|AB(t)| = \sqrt{\left( \sqrt{(AB_{xy}(t))^2 + (AB_{xw}(t))^2} \right)^2 + (AB_{yw}(t))^2} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} |AB_{xy}(t)| &= \sqrt{((R - x_A(t)) - (R - x_B(t)))^2 + ((R - y_A(t)) - (R - y_B(t)))^2} = \dots = \\ &= \sqrt{(R(\cos(\alpha_B(t) \cdot t + \alpha_{B0}) - \cos(\alpha_A(t) \cdot t + \alpha_{A0})))^2 + \\ &= \sqrt{(R(\sin(\alpha_B(t) \cdot t + \alpha_{B0}) - \sin(\alpha_A(t) \cdot t + \alpha_{A0})))^2} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} |AB_{xw}(t)| &= \sqrt{((R - x_A(t)) - (R - x_B(t)))^2 + (w_A(t) - w_B(t))^2} = \dots = \\ &= \sqrt{(R(\cos(\alpha_B(t) \cdot t + \alpha_{B0}) - \cos(\alpha_A(t) \cdot t + \alpha_{A0})))^2 + \\ &= \sqrt{(((\alpha_A(t) \cdot s \cdot t) + \alpha_{B0}) - ((\alpha_B(t) \cdot s \cdot t) + \alpha_{B0}))^2} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} |AB_{yw}(t)| &= \sqrt{((R - y_A(t)) - (R - y_B(t)))^2 + (w_A(t) - w_B(t))^2} = \dots = \\ &= \sqrt{(R(\sin(\alpha_B(t) \cdot t + \alpha_{B0}) - \sin(\alpha_A(t) \cdot t + \alpha_{A0})))^2 + \\ &= \sqrt{(((\alpha_A(t) \cdot s \cdot t) + \alpha_{B0}) - ((\alpha_B(t) \cdot s \cdot t) + \alpha_{B0}))^2} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Как и в построении на плоскости, для упрощения решения задачи «ограничим» перемещение точек  $A$  и  $B$ , приняв шаг спиральных кривых равным  $360$  условных единиц длины на один оборот  $360/360^\circ$ . При этом пусть функции  $\alpha_A(t)$  и  $\alpha_B(t)$  будут определяться постоянными и одинаковыми величинами  $\alpha_A = \alpha_B = 360^\circ$ , а начальные угловые положения будут равны нулю  $\alpha_{A0} = \alpha_{B0} = 0^\circ$ . Тогда при изменении параметра  $t$  в диапазоне  $[0;1]$ , точки  $A$  и  $B$  будут двигаться по спиральным траекториям с одинаковой скоростью и совершать один полный оборот в противоположных направлениях, начиная движение в точке  $N(0, R, 0)$  и заканчивая в точке  $M(360^\circ, R, 360^\circ)$ . (рис.2.2)

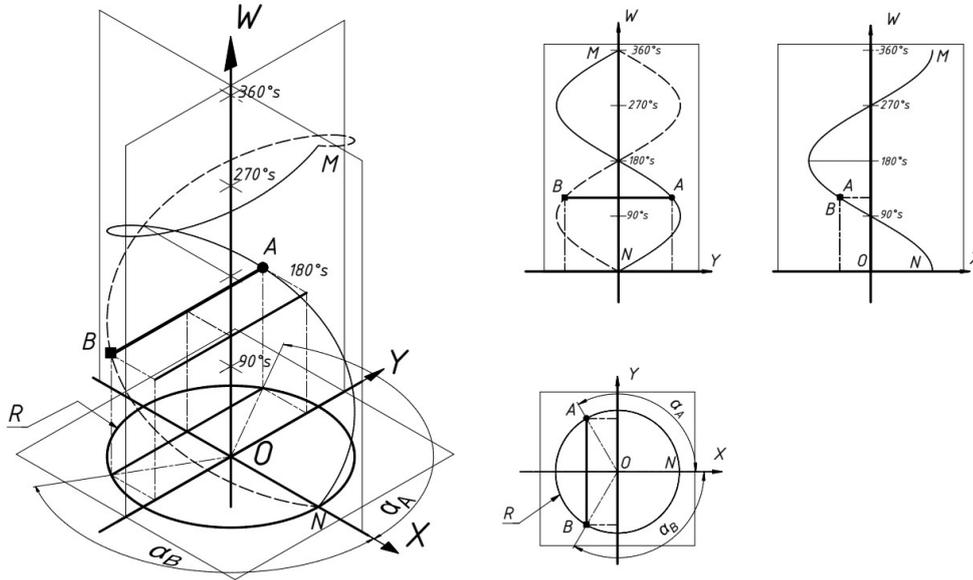


Рисунок 2.2 – Пояснение к движению точек  $A$  и  $B$  с одинаковой скоростью по спиральным кривым

При этом (2.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 AB(t) &= \begin{pmatrix} x_A(t) & x_B(t) \\ y_A(t) & y_B(t) \\ w_A(t) & w_B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha_A \cdot t) & R \cos(\alpha_B \cdot t) \\ R \sin(\alpha_A \cdot t) & -R \sin(\alpha_B \cdot t) \\ \alpha_A \cdot t \cdot s & \alpha_B \cdot t \cdot s \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} R \cos(360^\circ t) & R \cos(360^\circ t) \\ R \sin(360^\circ t) & -R \sin(360^\circ t) \\ 360t & 360t \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

При таких упрощениях зависимость длины проекций вектора  $AB(t)$  будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |AB_{xy}(t)| &= \sqrt{((R - x_A(t)) - (R - x_B(t)))^2 + ((R - y_A(t)) - (R - y_B(t)))^2} = \\
 &= R(\sin(\alpha_A \cdot t) - \sin(\alpha_B \cdot t)),
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$|AB_{xw}(t)| = \sqrt{((R - x_A(t)) - (R - x_B(t)))^2 + (w_A(t) - w_B(t))^2} = 0, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 |AB_{yw}(t)| &= \sqrt{((R - y_A(t)) - (R - y_B(t)))^2 + (w_A(t) - w_B(t))^2} = \\
 &= R(\sin(\alpha_A \cdot t) - \sin(\alpha_B \cdot t)),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

и, следовательно, зависимость длины вектора  $AB(t)$  будет равна длине его проекций на плоскости  $XY$  и  $YW$ :

$$|AB(t)| = |AB_{xy}(t)| = |AB_{yw}(t)| = R(\sin(\alpha_A \cdot t) - \sin(\alpha_B \cdot t)) = 2R(\sin((\alpha_A - \alpha_B) \cdot t)), \tag{2.7}$$

что соответствует выражению (1.5).

Данным упрощённым вариантом пространственного построения множества угловых положений  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  двух точек  $a$  и  $b$  соответственно, движущихся по окружности из точки  $N$  в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью и совершающих один полный оборот каждая, представлены в виде двух множеств точек составляющих две спиральные пространственные кривые с постоянным шагом, одинаковым радиусом и противоположными направлениями вращения, которые описывают концы вектора  $AB$  при изменении параметра  $t$ . При этом его длина и длина его проекций  $AB_{xy}$  и  $AB_{yw}$  всегда равны и изменяют своё значение от 0 до  $2R$

Используя это построение возможно всем парам точек, принадлежащим разным кривым поставить в соответствие одну хорду на окружности  $R$  как проекцию вектора  $AB$  на плоскости  $XY$ , причём эта хорда будет перпендикулярна оси  $OX$ , только если соответствующие ей точки будут иметь одинаковые (по модулю) пространственно-угловые положения. Таким образом устанавливается соответствие между множеством хорд окружности  $R$  перпендикулярных оси  $OX$  как проекциями вектора  $AB$  на плоскости  $XY$  и двумя множествами точек, составляющих трёхмерные спиральные цилиндрические кривые.

Из (1.6.1 и 1.6.2) длина всех проекций  $AB_{xy}$  и соответствующих им хорд окружности  $R$  при  $t \in [1/6; 1/3]$  и  $[2/3; 5/6]$  больше или равна стороне вписанного в эту окружность правильного треугольника, поскольку этому диапазону значений  $t$  соответствует диапазон значений углов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B - [60^\circ; 120^\circ]$  и  $[240^\circ; 300^\circ]$  (Рисунок 2.3).

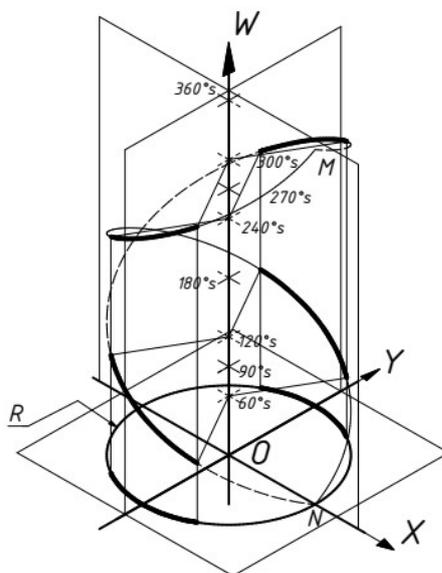


Рисунок 2.3 – Пояснение к движению точек  $A$  и  $B$  с одинаковой скоростью по спиральным кривым и отрезкам траектории соответствующих хордам из условия задачи

С помощью данного пространственного представления возможно описать все хорды окружности как множество множеств хорд, перпендикулярных всем прямым плоскости окружности пересекающих её центр. Для этого необходимо добавить в описание движения концов вектора  $AB$  параметр  $\omega$ , определяющий угол между отрезком, проведённым из начала координат к точке пересечения спиральных кривых с плоскостью  $XY$  и положительной половиной оси  $OX$ :

$$AB(t) = \begin{pmatrix} R \cos(360^\circ t + \omega) & R \cos(360^\circ t + \omega) \\ R \sin(360^\circ t + \omega) & -R \sin(360^\circ t + \omega) \\ 360t & 360t \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Полученное таким образом представление в диапазонах  $t \in [0; 1]$  и  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  будет иметь форму цилиндрической поверхности (рисунок 2.4, а), которая в свою очередь образована двумя цилиндрическими взаимно пересекающимися поверхностями, полученных при вращении спиральных кривых вокруг оси  $OW$  в одном направлении (рисунок 2.4, б и в).

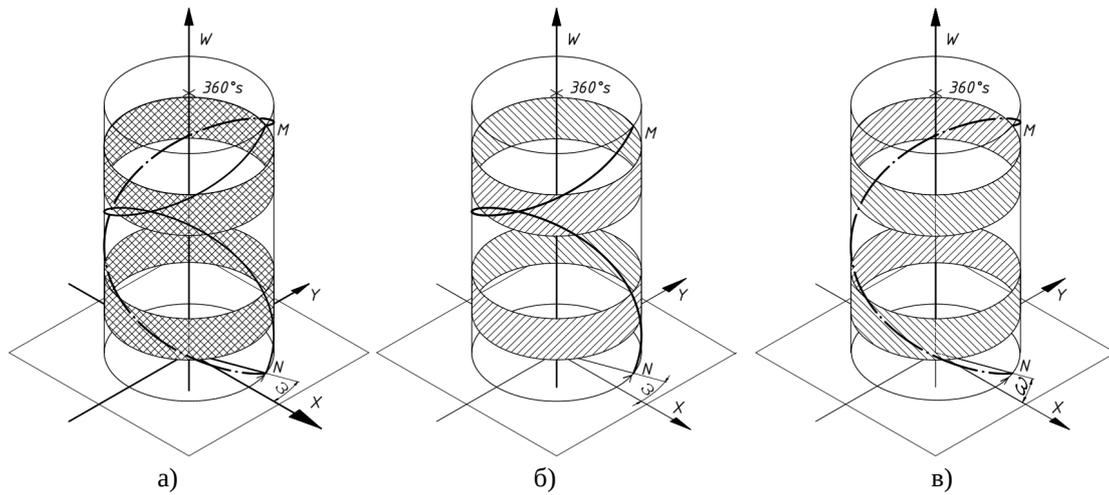


Рисунок 2.4 – Пояснение к движению спиральных кривых вокруг оси OW

Каждая из пересекающихся цилиндрических поверхностей, образована множеством точек «обернутых» вокруг боковой поверхности цилиндра, которые ограничены сторонами параллелограмма. Это можно заметить «развернув» поверхности на плоскости (рис. 2.5, а). Таким образом всё множество хорд окружности  $R$  диапазонов  $t \in [0;1]$   $\omega \in [0^\circ;360^\circ]$  может быть представлено в виде двух поверхностей, точки которых, связаны между собой и отражают положение хорд на окружности в системе «значение угла поворота прямой перпендикулярной хорде – половина значения центрального угла ( $\alpha_A$  или  $\alpha_B$ ) на который эта хорда опирается». Учитывая, что данное представление отражает положение хорд перпендикулярных множеству прямых значение центрального угла которых, есть сумма одинаковых по модулю углов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ , данное представление можно объединить в одно множество и преобразовать в прямоугольные поверхности  $S_\alpha$  и  $S_{\alpha_A}$ , точки которых отражают всё множество хорд окружности в виде участка одной из двух координатных систем:  $S_\alpha$  – «центральный угол  $\alpha$  на который опирается выбранная хорда – угол поворота прямой перпендикулярной хорде  $\omega$ » (рисунок 2.6, б), либо  $S_{\alpha_A}$  – «угол  $\alpha_A$  – угол поворота прямой перпендикулярной хорде  $\omega$ » (рис. 2.5, в). Полученные поверхности можно использовать для решения задачи Бертрона несколькими способами.

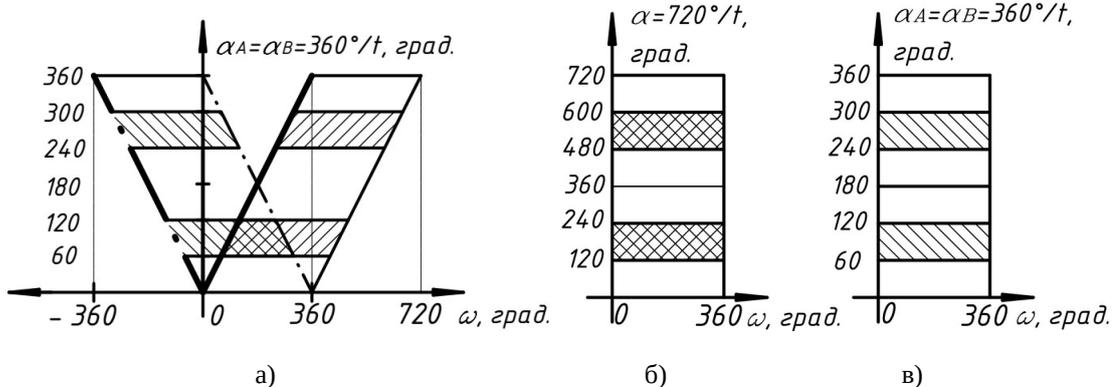


Рисунок 2.5 – Пояснение к развёртке и преобразованию поверхностей, образованных вращением спиральных кривых вокруг оси OW

В первом, обобщённом случае, можно присвоить каждой их точке значение вероятности с помощью функций распределения плотности вероятности двух переменных  $P(\alpha, \omega)$  или  $P(\alpha_A, \omega)$ . Тогда решением задачи будет отношение объёма между точками поверхностей  $S_\alpha$  и  $S_{\alpha_A}$ , соответствующих хордам, чья длина больше или равна  $\sqrt{3}R$  и поверхностями функций  $P(\alpha, \omega)$  или  $P(\alpha_A, \omega)$  к общему объёму лежащего под поверхностями функций  $P(\alpha, \omega)$  или  $P(\alpha_A, \omega)$ :

$$P \leq \frac{V_{120-240} + V_{480-600}}{V_\alpha} \leq \frac{\int_0^{360} \int_{120}^{240} P(\alpha, \omega) d\alpha d\omega + \int_0^{360} \int_{480}^{600} P(\alpha, \omega) d\alpha d\omega}{\int_0^{360} \int_0^{720} P(\alpha, \omega) d\alpha d\omega} \quad (2.9)$$

где  $V_{120-240}$ ,  $V_{480-600}$  – объёмы под поверхностью  $P(\alpha, \omega)$  при  $\alpha \in [120^\circ;240^\circ]$ ,  $\omega \in [0^\circ;360^\circ]$  и при  $\alpha \in [480^\circ;600^\circ]$ ,  $\omega \in [0^\circ;360^\circ]$  соответственно,  $V$  – весь объём под поверхностью  $P(\alpha, \omega)$  численно равный единице по определению вероятности;

$$P \leq \frac{V_{60-120} + V_{240-300}}{V_{\alpha_A}} \leq \frac{\int_0^{360} \int_{60}^{120} P(\alpha_A, \omega) d\alpha_A d\omega + \int_0^{360} \int_{240}^{300} P(\alpha_A, \omega) d\alpha_A d\omega}{\int_0^{360} \int_0^{360} P(\alpha_A, \omega) d\alpha_A d\omega} \quad (2.10)$$

где  $V_{60-120}$ ,  $V_{240-300}$  – объёмы под поверхностью  $P(\alpha_A, \omega)$  при  $\alpha \in [60^\circ; 120^\circ]$ ,  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  и при  $\alpha \in [240^\circ; 300^\circ]$ ,  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  соответственно,  $V_{\alpha_A}$  – весь объём под поверхностью  $P(\alpha_A, \omega)$  численно равный единице по определению вероятности.

При равномерном распределении вероятности выбора каждой из хорд окружности функции  $P(\alpha, \omega)$  и  $P(\alpha_A, \omega)$  можно определить как постоянную величину, равную обратному значению площади поверхностей  $S_\alpha$  и  $S_{\alpha_A}$  –  $1/720^\circ \cdot 360^\circ$  и  $1/360^\circ \cdot 360^\circ$  (рис. 2.6) Тогда отношение объёмов и соответственно решением задачи Бертрана в обоих случаях будет значение равное  $1/3$ .

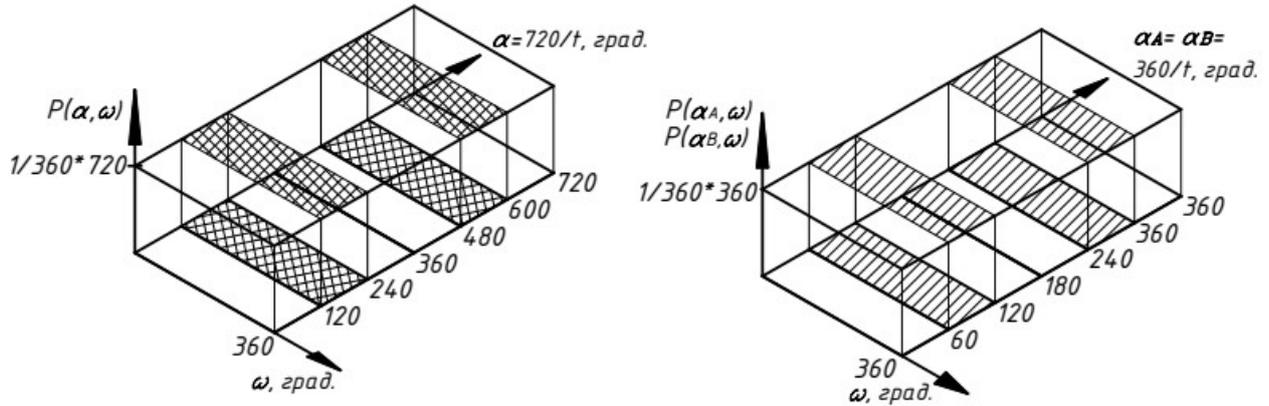


Рисунок 2.6 – К определению вероятности в задаче Бертрана при а)  $P(\alpha, \omega) = 1/720^\circ \cdot 360^\circ$  и б)  $P(\alpha_A, \omega) = 1/360^\circ \cdot 360^\circ$

Во втором случае, при известных парах функций индивидуальных распределений вероятности  $P(\alpha)$  и  $P(\omega)$ ,  $P(\alpha_A)$  и  $P(\omega)$  выбор хорд можно предствить как выбор случайного числа  $\delta$ , являющегося суммой значений центрального угла  $\alpha$  (либо  $\alpha_A$ ) и угла  $\omega$ , которые возможно получить независимым выбором пар значений  $\alpha$  и  $\omega$ , либо  $\alpha_A$  и  $\omega$  из диапазонов их значений.

При этом функции  $P(\alpha, \omega)$  и  $P(\alpha_A, \omega)$  становятся возможно предствать в виде функций одной переменной  $\delta$ , как свёртку их составляющих:

$$P_1(\delta) = [P(\alpha) \otimes P(\omega)](\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha \quad (2.11)$$

$$P_2(\delta) = [P(\alpha_A) \otimes P(\omega)](\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha_A) P(\delta - \omega) d\alpha_A \quad (2.12)$$

Тогда решением задачи Бертрана будут отношения суммы площадей под кривыми  $P_{120-240}(\delta)$  и  $P_{480-600}(\delta)$ , либо кривыми  $P_{60-120}(\delta)$  и  $P_{240-300}(\delta)$ , являющимися соответственно свёртками функций  $P(\alpha)$  и  $P(\omega)$ , на отрезках области их определения, при которых их значения соответствуют хордам, чья длина больше или равна  $\sqrt{3}R$  (т.е. при  $\alpha \in [120^\circ; 240^\circ] \cup [480^\circ; 600^\circ]$  и  $\alpha_A \in [60^\circ; 120^\circ] \cup [240^\circ; 300^\circ]$  (1.6.1 и 1.6.2) с функцией  $P(\omega)$  к общей площади под соответствующими кривыми  $P_1(\delta)$  при  $\delta \in [0^\circ; 720^\circ]$ , либо  $P_2(\delta)$  при  $\delta \in [0^\circ; 1080^\circ]$ :

$$P \leq \frac{S_{\delta 120-240} + S_{\delta 480-600}}{S_{\delta 0-720}} \leq \frac{\int_{120}^{600} \int_{-\infty}^{\infty} P_{120-240}(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha d\delta + \int_{480}^{960} \int_{-\infty}^{\infty} P_{480-600}(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha d\delta}{\int_0^{1080} \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha d\delta} \leq$$

$$\frac{\int_{120}^{600} P_{120-240}(\delta) d\delta + \int_{480}^{960} P_{480-600}(\delta) d\delta}{\int_0^{1080} P_1(\delta) d\delta}, \quad (2.12)$$

где  $S_{\delta_{120-240}}$ ,  $S_{\delta_{480-600}}$  – площадь под кривыми  $P_{120-240}(\delta)$  и  $P_{480-600}(\delta)$  соответственно,  $S_{\delta_1}$  – вся площадь под кривой  $P_1(\delta)$ ;

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{S_{\delta_{60-120}} + S_{\delta_{240-300}}}{S_{\delta_2}} \leq \\ &\leq \frac{\int_{60-\infty}^{480-\infty} \int_{60-120}^{240-\infty} P(\alpha_A) P(\delta - \omega) d\alpha_A d\delta + \int_{240-\infty}^{660-\infty} \int_{240-300}^{300-\infty} P(\alpha_A) P(\delta - \omega) d\alpha_A d\delta}{\int_0^{720-\infty} \int P(\alpha_A) P(\delta - \omega) d\alpha_A d\delta} \leq \\ &\leq \frac{\int_{120}^{600} P_{120-240}(\delta) d\delta + \int_{480}^{960} P_{480-600}(\delta) d\delta}{\int_0^{1080} P_1(\delta) d\delta}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $S_{\delta_{60-120}}$ ,  $S_{\delta_{240-300}}$  – площадь под кривыми  $P_{60-120}(\delta)$  и  $P_{240-300}(\delta)$  соответственно, а  $S_{\delta_2}$  – вся площадь под кривой  $P_2(\delta)$ .

Если в задаче Бертрана вероятности выбора  $\alpha$ ,  $\alpha_A$  и  $\omega$  распределены равномерно в диапазонах их значений, функции  $P(\alpha)$ ,  $P(\alpha_A)$  и  $P(\omega)$  можно определить как постоянную величину равную обратному значению их диапазонов  $\alpha \in [0^\circ; 720^\circ]$  (рисунок 2.6, а),  $\alpha_A \in [0^\circ; 360^\circ]$  и  $\omega \in [0^\circ; 360^\circ]$  (рисунок 2.6, б).

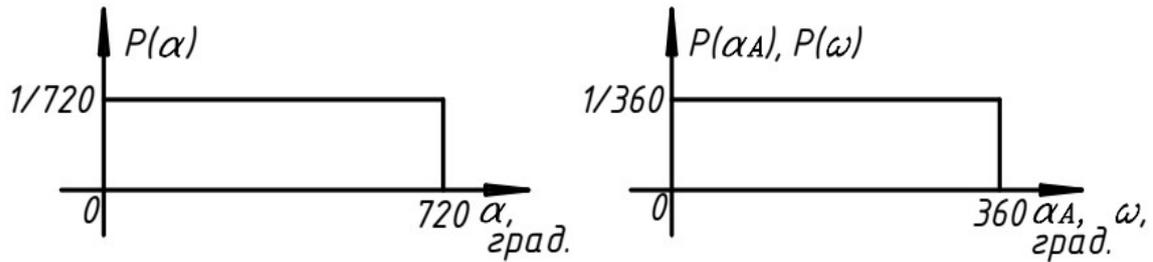


Рисунок 2.6 – Функции  $P(\alpha)$ ,  $P(\alpha_A)$  и  $P(\omega)$

Тогда функции  $P_1(\delta)$ ,  $P_{120-240}(\delta)$ ,  $P_{480-600}(\delta)$  и будут иметь следующий вид:

$$P_1(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha = \begin{cases} 0, & \delta \in (-\infty; 0) \\ (1/720 \cdot 360)\delta, & \delta \in [0; 360) \\ 1/720, & \delta \in [360; 720) \\ -(1/720 \cdot 360)\delta + 1/240, & \delta \in [720; 1080) \\ 0, & \delta \in [1080; \infty) \end{cases}$$

$$P_{120-240}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{120-240}(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha = \begin{cases} 0, & \delta \in (-\infty; 0) \\ (1/720 \cdot 360)\delta - 1/2160, & \delta \in [120; 240) \\ 1/2160, & \delta \in [240; 480) \\ -(1/720 \cdot 360)\delta + 1/432, & \delta \in [480; 600) \\ 0, & \delta \in [600; \infty) \end{cases}$$

$$P_{480-600}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{480-600}(\alpha) P(\delta - \omega) d\alpha = \begin{cases} 0, & \delta \in (-\infty; 480) \\ (1/720 \cdot 360)\delta - 1/540, & \delta \in [480; 600) \\ 1/720, & \delta \in [600; 840) \\ -(1/720 \cdot 360)\delta + 1/240, & \delta \in [840; 960) \\ 0, & \delta \in [960; \infty) \end{cases}$$

а площади под кривыми  $P_1(\delta)$ ,  $P_{120-240}(\delta)$ ,  $P_{480-600}(\delta)$  соответственно:

$$\int_0^{1080} P_1(\delta) d\delta = \int_0^{360} (1/720 \cdot 360) \delta d\delta + \int_{360}^{720} (1/720) d\delta + \int_{720}^{1080} (-1/720 \cdot 360) \delta + 1/240 d\delta = 1$$

$$\int_{120}^{600} P_{120-240}(\delta) d\delta = \int_{120}^{240} \frac{1}{720 \cdot 360} \delta d\delta - \frac{1}{2160} d\delta + \int_{240}^{480} \frac{1}{2160} d\delta + \int_{480}^{600} -\frac{1}{720 \cdot 360} \delta + \frac{1}{432} d\delta = \frac{1}{6}$$

$$\int_{480}^{960} P_{480-600}(\delta) d\delta = \int_{480}^{600} \frac{1}{720 \cdot 360} \delta d\delta - \frac{1}{540} d\delta + \int_{600}^{840} \frac{1}{720} d\delta + \int_{840}^{960} -\frac{1}{720 \cdot 360} \delta + \frac{1}{240} d\delta = \frac{1}{6}$$

Тогда значение вероятности в задаче Бертрана в случае равномерного распределения её плотности между  $\alpha$  и  $\omega$  в их диапазонах по будет равно 1/3. На рисунке 2.7 представлены функции  $P_1(\delta)$ ,  $P_{120-240}(\delta)$ ,  $P_{480-600}(\delta)$ .

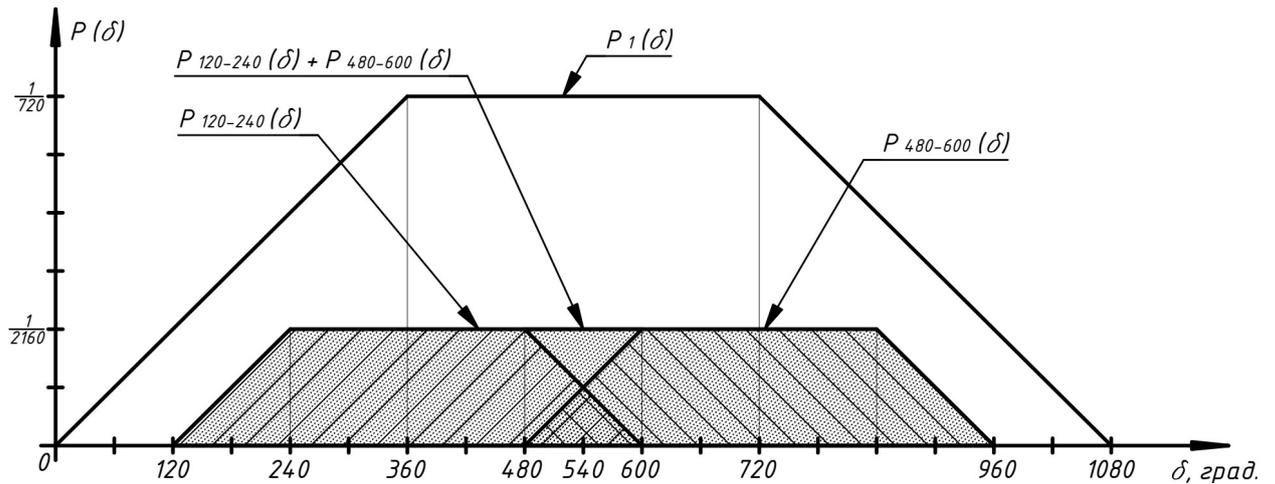


Рисунок 2.7 – Зависимости  $P_1(\delta)$ ,  $P_{120-240}(\delta)$ ,  $P_{480-600}(\delta)$

Значение вероятности в задаче Бертрана в случае равномерного распределения её плотности между  $\alpha_A$  и  $\omega$  также будет равно 1/3. Это можно посчитать по аналогии, определив функции  $P_2(\delta)$ ,  $P_{60-120}(\delta)$ ,  $P_{240-300}(\delta)$  и найдя площадь под кривыми ними. На рисунке 2.8 представлены функции  $P_2(\delta)$ ,  $P_{60-120}(\delta)$ ,  $P_{240-300}(\delta)$ .

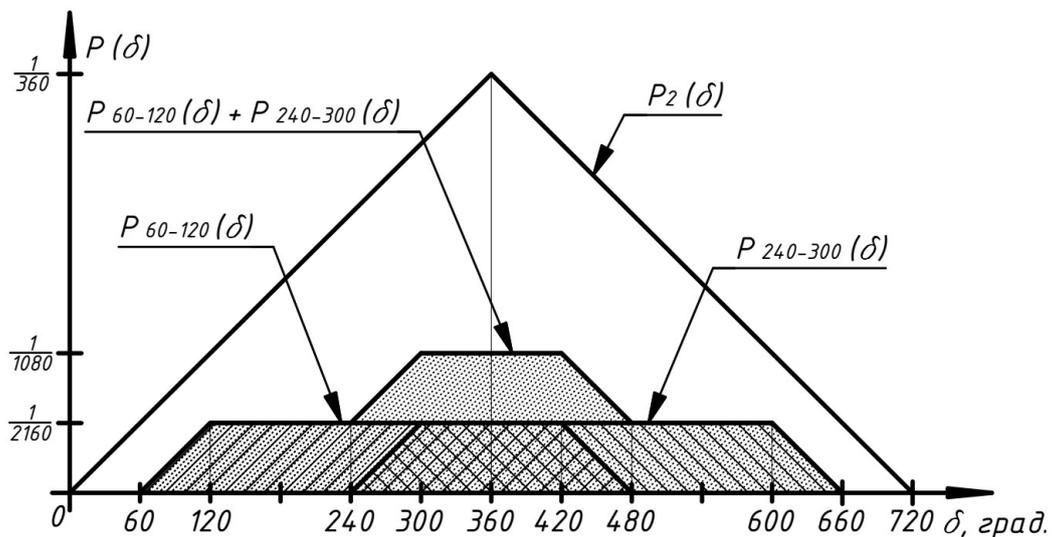


Рисунок 2.8 – Зависимости  $P_2(\delta)$ ,  $P_{60-120}(\delta)$ ,  $P_{240-300}(\delta)$

#### Литература

- [1] Bertrand, J (1889), Calcul des probabilities, Gauthier-Villars, pp. u4-5
- [2] E.T. Jaynes «Well-Posed Problem», Foundations of Physics, 3, (1973, pp 477-493)