

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ	2
ВВЕДЕНИЕ	3
ЧАСТЬ1. УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных.	4
1.1 Успешные решения алгоритма	4
1.2 Примечание к утверждению 1	5
1.3 Доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ 1	6
ЧАСТЬ 2. УТВЕРЖДЕНИЕ 2: не существует последовательностей, уходящих в бесконечность	8
2.1 Множество нечётных Коллатца	8
2.2 Описание механизма перехода числа из одного множества в другое	12
2.3 Ряды групп M1 нечётных Коллатца	17
2.4 Доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ 2	20
ЧАСТЬ 3 Выводы, заключения, результаты.	29
БИЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	30

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА

Ключевые слова: Алгоритм; натуральное число; Гипотеза Коллатца; сиракузская последовательность.

Key words: Algorithm; natural number; Collatz conjecture; Syracuse sequence.

Аннотация: В статье представлено простое доказательство утверждения, что в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных, основанное на свойствах умножения и деления десятичных дробей. Раскрыт механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения, объясняющий, почему число никогда не уйдет в бесконечность, а с самого начала своего движения устремляется к единице, и в конечном итоге достигает её, каким бы длинным и тернистым не был при этом путь.

Abstract: The paper presents a simple proof of the claim that there are no loop sequences in the Collatz algorithm, based on the properties of multiplication and division of decimal fractions. The mechanism of the algorithm is revealed, as a result of which the number changes the direction of its movement, explaining why the number will never go to infinity, but from the very beginning of its movement rushes towards one, and ultimately reaches it, no matter how long and thorny the path may be.

УДК 511.12; УДК 511.13

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.

Цель: Доказать гипотезу простыми средствами.

ВВЕДЕНИЕ: Гипотеза Коллатца, известная также как « $3X+1$ »-гипотеза или как сиракузская последовательность, относится к алгоритмам управления натуральными числами, утверждает, что с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге придём к единице.

Какой интерес был у Коллатца заниматься вообще алгоритмами, подобными « $3X+1$ ». Вероятно были и другие, но именно алгоритм « $3X+1$ » стал проблемой. При этом, с начальными числами из натурального ряда такими, как 1, 2, 3 ... 1 000 ... 1 000 000 ... и т.д., очевидно проблем не было. Они были проверены простым перебором. Нет сомнений в том, что Коллатц исследуя простые алгоритмы, искал ответы на волнующие его вопросы далеко за пределами чистой математики. Возможно, даже не так, Коллатц исследуя простые алгоритмы, за пределами обычной, искал чистую математику, в которой символические действия с числами могут быть тождественны взаимоотношениям Сознания и Материи, если алгоритм уподобить сознательному действию, а натуральное число предмету или явлению физического мира .

Удивительная по своей простоте формулировки гипотеза привлекает к себе внимание. Существует множество попыток её доказательства от простых до невероятно сложных, но пока не признанных математическим сообществом. В 2019 появилось сообщение, отмеченное в [1], что Теренс Тао с помощью теории вероятностей доказал, что почти все орбиты Коллатца ограничены любой функцией, уходящей в бесконечность. В рецензии на эту работу, журнал Quanta Magazine написал, что «это один из самых значительных результатов по гипотезе Коллатца, достигнутых за последние десятилетия». Но, автору представленной здесь статьи хотелось бы отметить ещё одну работу, а именно: [2], по теме, как важный вклад в поиске пути решения гипотезы. Видеоролик, длительностью около 20 минут, на первый взгляд является развлекательным научно-популярным контентом канала Vert Dider, размещённый на площадке Youtube, но представленная в нём информация, да ещё в великолепном изложении ведущего Дерека Мюллера, подтолкнула к ответу, на один из важных вопросов в доказательстве гипотезы, о чём, в том числе, будет далее. С большим Уважением и огромной благодарностью к несравненному Дереку Мюллеру.

Во всех известных, но непризнанных доказательствах гипотезы Коллатца, остаются нерешёнными два принципиальных вопроса:

- * Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, замкнутых в кольцо.
- * Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, уходящих в бесконечность;

Из этих нерешённых вопросов выделим два утверждения, те, которые подтверждают гипотезу. Если они будут доказаны: доказывать какое-либо другое уже не имеет смысла. Выводы построенные на других утверждениях всегда будут вызывать сомнения, если не будут доказаны эти:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность.

ЧАСТЬ 1

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных

1.1 УСПЕШНЫЕ РЕШЕНИЯ АЛГОРИТМА КОЛЛАТЦА

В алгоритме Коллатца конечной целью является единица, но перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2^n . Для ряда 2^n выполним действия обратные алгоритму « $3X+1$ », тем самым выясним, при достижении каких значений 2^n алгоритм сворачивается в 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратных преобразований ряда $2^{(2n)}$ по алгоритму Коллатца (Таблица 1)

N	2^{2n}	$2^{2n}-1$	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
И т.д.	...	...	...

Таблица1. Таблица обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца.

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемое формулой:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} \tag{1}$$

которые в итоге приводят к значению $2^{(2n)}$ и сворачиванию числа в 1. Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие, **успешными решениями алгоритма**. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число $2^{(2n)}-1$ при всех $n \geq 1$ кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n} \tag{2}$$

Это значит, зная решение для предыдущего числа n , решение для следующего $n+1$ можно определить по формуле:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \tag{3}$$

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. И хотя нам, для доказательства гипотезы, уже достаточно утверждения, что количество успешных решений бесконечное множество, мы всегда можем его усилить. Например, каждое значение натурального ряда, определяемое (1) можно дополнительно умножить на 2^n . Например, число 5 умножить на 2^n , число 7 умножить на 2^n . Каждое число, из уже известных, ранее пройденных и завершённых единиц маршрутов, умножить на 2^n . Тогда мы должны удивляться уже не тому, что каждое число по алгоритму Коллатца завершается единицей, а почему вообще существуют числа с большими маршрутами. Оказавшись в значении успешного решения, число должно немедленно свернуться в единицу. Ответ находим простой. Во первых: множество чисел сворачивается действительно быстро, во вторых: каждый длинный маршрут составлен из уже известных, ранее пройденных и завершённых единиц маршрутов.

Предположим, между успешными решениями всё же существуют значения, не относящиеся к успешным. Сколько их. Определённо, должно быть ограниченное количество, значит мы простым перебором неизбежно их преодолеем. Каждое новое число на пути алгоритма есть очередной шаг к цели. Успешное решение алгоритма - это просто один из очередных шагов. Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единиц маршрутов, можно считать завершённым и текущий. Формула $(3X+1)/2$ производит движение вперёд, в сторону увеличения текущего числа, а формула $(3X+1)/2n$, где $n>1$, назад, в сторону его уменьшения. Действие $+1$ в алгоритме « $3X+1$ » гарантирует его непрерывность, способствует непрерывности движения числа к успешному решению. Для того, чтобы этот процесс движения не прерывался необходимо чтобы каждое очередное число последовательности отличалось от любого из предыдущих. Иначе будет образовано так называемое кольцо – бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности.

Мы должны доказать, что алгоритм « $3X+1$ » исключает повторения.

1.2 ПРИМЕЧАНИЕ К УТВЕРЖДЕНИЮ 1:

К слову сказать, так называемый цикл 4-2-1, часто упоминаемый в связи с гипотезой Коллатца, по определению не является кольцом. Алгоритм « $3X+1$ », или « $3n+1$ » – гипотеза: есть сокращённое название гипотезы Коллатца, сокращённая запись алгоритма, а полный алгоритм перехода из одного состояния в другое, от одного нечётного к другому нечётному, включает ещё и деление на два, сформулирован в самом определении: с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге придём к единице.

Является ли такая формулировка гипотезы точной, максимально приближенной к формулировке, какую изложил в 1932 году сам Лотар Коллатц, уточнял ли он её позднее – это нам достоверно не известно. Утверждается, что эта простая формулировка понятна практически всем здравомыслящим людям. После того, как мы пришли к единице алгоритм завершается, точка.

Кольцом может называться последовательность, состоящая из нескольких нечётных. Фраза “С какого бы числа мы не начали...” - между строк содержит смысл, в котором имеется в виду, что несомненно, это число должно быть натуральное и оно должно быть больше единицы и больше известного проверенного. С этого - только начинается ГИПОТЕЗА.

Но, мы работаем с разными натуральными числами, маленькими, большими. Если гипотеза верна, она верна для любого натурального.

1.3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1

Пусть $X_0 = 71$ число произвольной последовательности. Предположим оно является исходным числом закольцованного фрагмента. Отследим маршрут исходного числа этого предположительно закольцованного фрагмента.

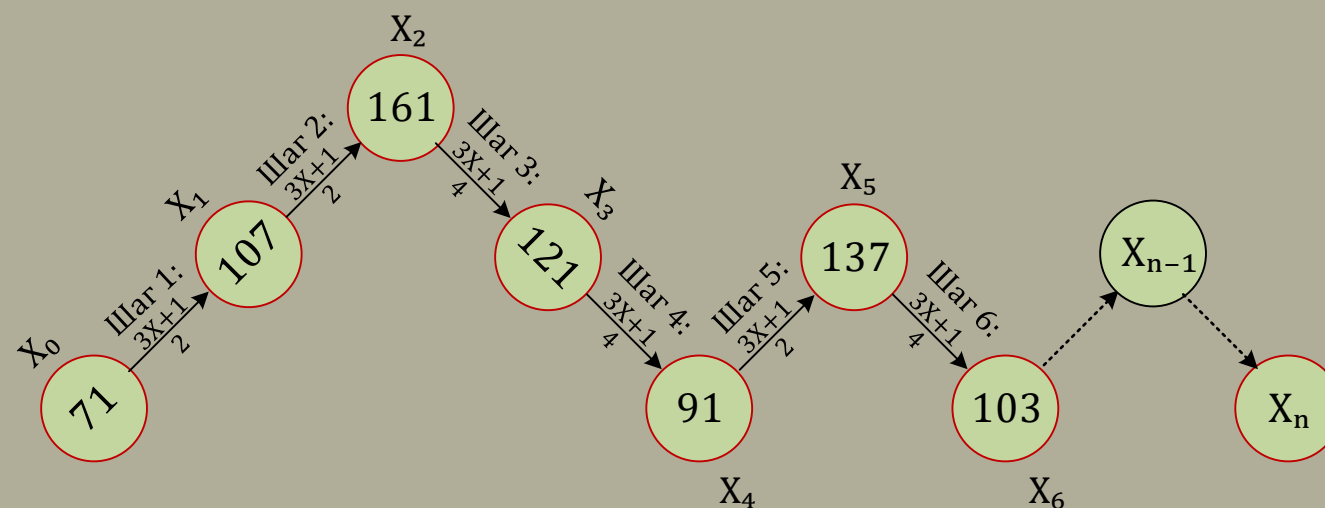


Рис.1 Маршрут числа 71 по алгоритму Коллатца

Шаг 1 (вперёд):

$$X_1 = \frac{3X_0 + 1}{2} \Rightarrow X_1 = \frac{3 \cdot 71 + 1}{2} = 107 \quad (4)$$

С другой стороны переход от $X_0 = 71$ к числу $X_1 = 107$ можно выразить через коэффициент K_1

$$X_1 = K_1 \cdot X_0 \Rightarrow K_1 = \frac{X_1}{X_0} \Rightarrow K_1 = \frac{107}{71} \approx 1,50704 \dots \quad (5)$$

Шаг 2 (вперёд):

$$X_2 = \frac{3X_1 + 1}{2} \Rightarrow X_2 = \frac{3 \cdot 107 + 1}{2} = 161 \quad (6)$$

Аналогично с шагом 1, переход от $X_1 = 107$ к $X_2 = 161$ можно выразить через коэффициент K_2

$$X_2 = K_2 \cdot X_1 \Rightarrow K_2 = \frac{X_2}{X_1} \Rightarrow K_2 = \frac{161}{107} \approx 1,50467 \dots \quad (7)$$

Шаг 3 (назад):

$$X_3 = \frac{3X_2 + 1}{4} \Rightarrow X_3 = \frac{3 \cdot 161 + 1}{4} = 121 \quad (8)$$

Переход от $X_2 = 161$ к $X_3 = 121$ можно выразить через коэффициент K_3

$$X_3 = K_3 \cdot X_2 \Rightarrow K_3 = \frac{X_3}{X_2} \Rightarrow K_3 = \frac{121}{161} \approx 0,75155 \dots \quad (9)$$

Шаг 4 (назад):

$$X_4 = \frac{3X_3+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_4 = \frac{3 \cdot 121 + 1}{2} = 91 \tag{10}$$

Переход от $X_3=121$ к $X_4=91$ можно выразить через коэффициент K_4

$$X_4 = K_4 \cdot X_3 \quad \Rightarrow \quad K_4 = \frac{X_4}{X_3} \quad \Rightarrow \quad K_4 = \frac{91}{121} \approx 0,75206 \dots \tag{11}$$

В приведённых примерах, а также в любом шаге любой последовательности мы всегда имеем дробный переходный коэффициент от одного нечётного к другому нечётному. При этом, в шаге (вперёд), когда делитель равен 2 переходный коэффициент больше единицы. Представленный в десятичном виде он имеет более одного количество знаков после запятой. В шаге (назад), когда делитель равен 2^n , где $n > 1$ переходный коэффициент всегда меньше единицы. Представленный в десятичном виде он также имеет более одного количество знаков после запятой.

Если представленный на рис. 1 фрагмент последовательности является закольцованным, значит одно из его очередных чисел равно исходному. Переход от исходного к этому очередному можно выразить через произведение промежуточных коэффициентов.

$$X_n = K \cdot X_0 = (K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \dots) X_0 \tag{12}$$

Для того, чтобы соблюдалось условие закольцованности $X_n = X_0$, необходимо, чтобы коэффициент K был равен единице,

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \dots \quad \Rightarrow \quad K = 1,50704 \cdot 1,50467 \cdot 0,75155 \cdot 0,75206 \dots = 1,2816705673914566224 \dots > 1 \tag{13}$$

$$K = K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \dots \quad \Rightarrow \quad K = 1,50467 \cdot 0,75155 \cdot 0,75206 \dots = 0,85045557343631 \dots < 1 \tag{14}$$

Произведение всех промежуточных коэффициентов в любом их сочетании может принимать только два значения: или больше единицы, или меньше единицы, и никогда равным ей. Потому что в этом произведении абсолютно все промежуточные коэффициенты являются нечётными десятичными дробями. При умножении двух нечётных дробных чисел, представленных в десятичном виде, количество знаков после запятой в произведении равно сумме знаков после запятой, которые имели множители. Это есть одно из известных свойств умножения десятичных дробей. Результатом произведения всех промежуточных коэффициентов в любом их сочетании всегда является десятичная дробь с количеством знаков после запятой больше одного, т.е. число, отличающееся от единицы. Значит очередное никогда не станет равным ни одному из предыдущих. Что и требовалось доказать.

Вывод: С какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, вперёд-назад, увеличиваясь или уменьшаясь, в процессе своего движения алгоритм исключает повторения. Применяя алгоритм к единице можно убедиться, что единица остаётся на своём месте. Единица не передвигается ни вперёд, ни назад, не увеличивается и не уменьшается. Работа, совершённая алгоритмом по отношению к единице равна нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1, что в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных - **ДОКАЗАНО**.

ЧАСТЬ 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: из всех натуральных, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, не существует таких, которые бы уходили в бесконечность.

2.1. МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Перед нами бесконечный ряд нечётных (Рис.2):



Рис.2 Ряд натуральных чисел

Представим путь нечётного числа к следующему нечётному. Умножаем на 3, прибавляем 1: получаем чётное (Рис.3):



Рис.3 Ряд промежуточных чётных в алгоритме Коллатца

В половине случаев деление на 2 нас тут же вернёт к нечётному (Рис.4):



Рис.4 Первое множество Коллатца

Но каждое 4-е число, делить придётся дважды т.е. на 4.



Рис.5 Второе множество Коллатца

Каждое 8-е число, делить придётся на 8, чтобы получить следующее:



Каждое 16-е на 16, и т.д



Взяв среднее геометрическое:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{16}} \dots \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx \frac{3}{4} < 1 \quad (15)$$

мы увидим, что в среднем, чтобы добраться от одного нечётного числа к другому, нужно умножить его примерно на 3/4, что меньше единицы. При больших значениях нечётного единиц в алгоритме можно пренебречь. Выходит, чисто статистически, последовательности «3X+1» уменьшаются чаще, чем растут. Ведущий видеоролика [2] в своих рассуждениях использовал идею такого наглядного представления структуры натурального ряда для вывода статистической формулы (15), а получив её, переключился развивать мысль в другом направлении.

Нам потребуется выполнить ещё один маленький шаг, и мы **сможем увидеть механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения**, будет понятно, почему следуя одному и тому же алгоритму, с одним и тем же делителем в знаменателе формулы алгоритма, число может “неожиданно” изменить направление своего движения.

Введем новые понятия: Множество нечётных Коллатца; Производительность числа в алгоритме Коллатца; Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца.

МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Обозначение: M_n

Назовём ряд нечётных {3, 7, 11, 15 ...} - **первым множеством** Коллатца, далее по тексту просто первым множеством или M1. Первым оно называется по признаку, того, что в результате действия алгоритма «3X+1», числа этого ряда становятся сначала четными, а затем после деления на два сразу нечётными. В результате выполнен только один полный шаг алгоритма. Позиции нечётного числа в M1 продвигают очередное всегда вперёд, в сторону его увеличения, в бесконечность. Каждое очередное число 1-го множества отличается от предыдущего на 4, и описывается формулой:

$$Y_n \in M_1 = 4n - 1 \quad (16)$$

Где: $n = 1, 2, 3, \dots$ и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего M1;

Назовём ряд нечётных { 1, 9, 17, 25 ...} - **вторым множеством** Коллатца, обозначим его M2 . Вторым оно называется по признаку, того, что чётные полученные в результате действия алгоритма «3X+1» приходится делить 2 раза на 2, чтобы получить очередное нечётное. Позиции нечётного числа в M2 продвигают число в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 2-го множества отличается от предыдущего уже на 8, и описывается формулой:

$$Y_n \in M_2 = 8n - 7 \quad (17)$$

Где $n = 1, 2, 3, \dots$ и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего M2.

Назовём ряд нечётных {13, 29, 45, 61 ...} - **третьим множеством** Коллатца. По аналогии с первым и вторым множеством, обозначим его M3. Позиции нечётного числа в M3 продвигают число также в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 3-го множества отличается от предыдущего на 16, и описывается формулой:

$$Y_n \in M_3 = 16n - 3 \quad (18)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего M3.

И так далее. У каждого множества своя формула числа, которая в общем виде выглядит, как:

$$Y_n \in M_m = 2^{m+1} n - C_m$$

(19)

Где: m =1,2,3... и т.д. – порядковый номер множества;
n =1,2,3... и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего множеству;
 2^{m+1} - первая константа множества Коллатца.
 C_m - вторая константа множества Коллатца.

$$C_m = 2^{m+1} - Y_0$$

(20)

Где: $Y_0 \in M_m$ - начальное число множества M_m .

Формула (19) имеет ограниченное применение, т.к. ей можно воспользоваться только когда известно начальное число $Y_0 \in M_m$. В таблице 2 приведен вариант определения числа $Y_n \in M_m$ с использованием предыдущего, уже известного, значения C_{m-2} . Так мы последовательно можем легко составить таблицу формул для всех множеств от M_1 до M_m

Порядковый номер: m	$Y_n \in M_m$	Порядковый номер: m	$Y_n \in M_m$
1	$Y_n \in M_1 = 4n - 1$	2	$Y_n \in M_2 = 8n - 7$
3	$Y_n \in M_3 = 16n - 3$	4	$Y_n \in M_4 = 32n - 27$
5	$Y_n \in M_5 = 64n - 11$	6	$Y_n \in M_6 = 128n - 107$
7	$Y_n \in M_7 = 256n - 43$	8	$Y_n \in M_8 = 512n - 427$
9	$Y_n \in M_9 = 1024n - 171$	10	$Y_n \in M_{10} = 2048n - 1707$
...	...	...	...
m-нечётное	$Y_n \in M_m = 2^{m+1}n - (C_{m-2} + 2^{m-2})$	m-чётное	$Y_n \in M_m = 2^{m+1}n - (C_{m-2} + 2^{m-2}5)$

Таблица 2. Таблицы определения произвольного значения $Y_n \in M_m$ с использованием предыдущего значения C_{m-2}

Подводя итог описаниям основных характеристик множеств, отметим следующий факт: первое множество, единственное из всех, увеличивает значение числа , все остальные N-множества его уменьшают.

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА

Обозначение: **W**

Определение: Производительностью числа в алгоритме Коллатца называется количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма « $3X+1$ » за один полный шаг. В последовательности Коллатца не существует времени. Единицей отсчёта событий является шаг алгоритма. Значение производительности определяется модулем разности между очередным нечётным и исходным.

РАБОТА ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА

Обозначение: **A**

Определение: Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца - есть количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма « $3X+1$ » за несколько последовательных шагов в пределах одного множества, в пределах интервала последовательности, или всей последовательности.

2.2 ОПИСАНИЕ МЕХАНИЗМА ПЕРЕХОДА ЧИСЛА ИЗ ОДНОГО МНОЖЕСТВА В ДРУГОЕ

Возьмём число 7. В результате исполнения алгоритма $(3X+1)/2$, число 7 увеличилось примерно в $3/2$ раза, переместилось в позицию числа 11. На маленьких числах, таких как 7 и 11, неочевидно, но на больших: значением $+1$ в формуле алгоритма можно пренебречь, и тогда действительно, в результате действия $(3X+1)/2$, число увеличивается примерно в $3/2$ раза. С другой стороны очередное число 11 стало больше исходного на значение $11-7=4$. Числа 7 и 11, отличающиеся на 4, принадлежат одному и тому же множеству M1. Числа множества M1 занимают позиции в натуральном ряду, которые продвигают очередное число всегда вперёд, в сторону его увеличения, т.е. в бесконечность.

Каковы шансы теперь уже у исходного числа 11 следующим шагом остаться в этом же множестве. Шансы ещё есть. Та же самая формула увеличивает исходное число примерно в те же $3/2$ раза $(3 \cdot 11 + 1)/2 = 17$, но теперь уже разница между очередным и исходным не 4, а $17-11=6$. Потому что, действие умножения мы провели для большего числа, а 11 больше 7. С ещё большими числами будет ещё больше разница. Так число 11 переходит из первого множества в другое, потому, что очередное число 17 принадлежит уже другому множеству, если конкретно, то второму. Но большее число окажется в любом другом, потому что разница будет ещё больше. Таким образом, очевидных предпосылок остаться в исходном множестве следующим шагом, тем более последовательно несколько раз, у числа 11 нет. Нет таких же предпосылок по тем же причинам и у любого другого числа принадлежащего первому множеству. Нет таких же предпосылок остаться в исходном множестве по тем же причинам и у любого другого числа принадлежащего вообще любому множеству.

Механизм перехода из одного множества в другое является математическим описанием известного закона перехода количественных изменений в качественные. Число в новом множестве обретает возможность изменяться алгоритмом уже с другим делителем, поэтому переход числа в другое множество всегда является качественным переходом.

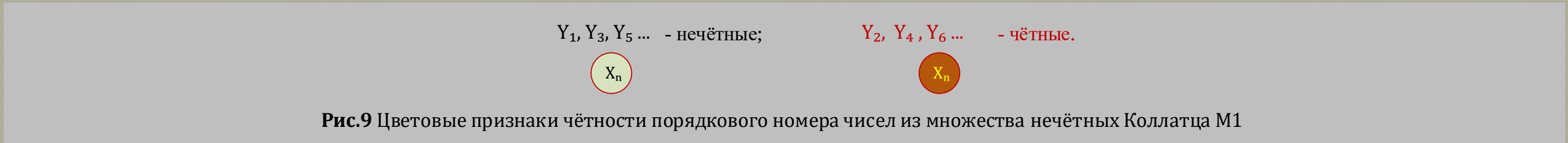
Алгоритм « $3X+1$ » имеет закономерный механизм перехода из одного множества нечетных в другое. Алгоритму не важно в какую сторону будет изменяться очередное число. Он просто совершает свою работу. Каждая вторая позиция числа в натуральном ряду принадлежит первому множеству. Вероятность попадания очередного числа в первое множество равна 50 на 50. Такая же вероятность попадания очередного числа в любое из множеств M2, M3, M4 ... M_m, ведь они также занимают каждую вторую позицию. Один очередной шаг, следующий и т.д. В какую бы сторону мы не направились, мы можем оказаться вообще в любом множестве, в любой момент сменить направление.

Теперь, когда мы знаем, механизм перехода числа из одного множества в другое, каждый шаг алгоритма можно легко просчитать. Значит, абсолютно все последовательности Коллатца закономерны.

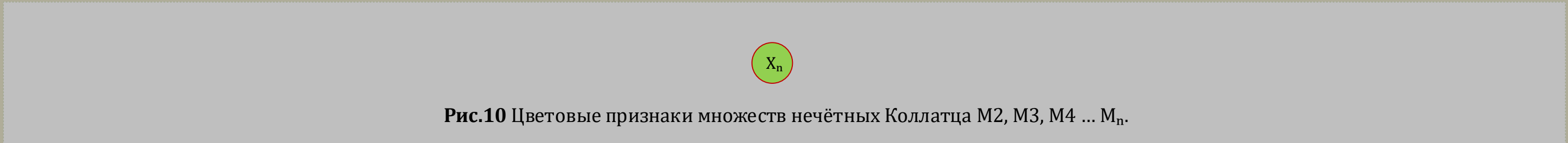
Рассмотрим первые 32 числа из множества нечётных Коллатца M1 (Рисунок 8):



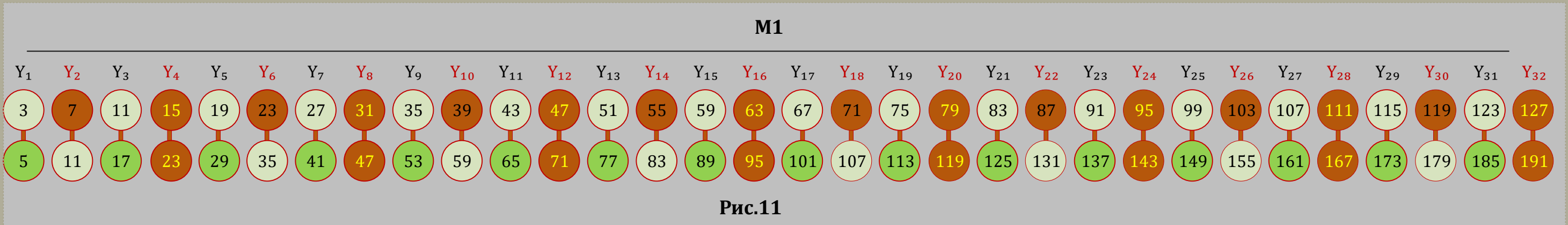
Для наглядности, числа первого множества будем различать по цветовым признакам, в зависимости от чётности их порядкового номера, как на Рис9:



Числа, принадлежащие множествам M2, M3, M4 ... M_m обозначим одинаково, в виде (Рис.10):



Найдём очередное значение каждого числа из M1 (Рис.11).



После первого хода все числа множества M1, с нечётным порядковым номером Y₁, Y₃, Y₅ ... перешли в одно из множеств M2, M3, M4 ... M_m. а числа с чётным Y₂, Y₄, Y₆ ... остались в M1. Но, каждое второе чётное, т.е. ровно половина от их общего числа, осталось в M1 чётным. Вторая половина чётных в M1 перешла в разряд нечётных. Как видим из Рис.11 - такое поведение чисел M1, в результате действия на них алгоритма Коллатца является закономерным

Выполним очередной шаг алгоритма.

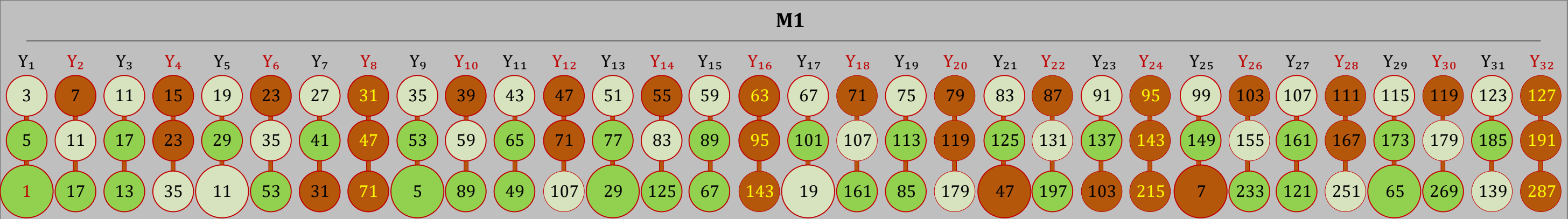


Рис.12

Очередное число в каждой пятой последовательности из М1 стало меньше исходного. Эти последовательности мы больше рассматривать не будем. Они абсолютно точно устремляются к единице, т.к. число меньше исходного, является числом уже проверенным, и относится к уже известным, ранее пройденным и завершённым единицей маршрутам.

Количество чётных последовательностей только с чётными порядковыми номерами входящих в них чисел, сократилось вдвое: было восемь: Y₄, Y₈, Y₁₂, Y₁₆, Y₂₀, Y₂₄, Y₂₈, Y₃₂, стало четыре: Y₈, Y₁₆, Y₂₄, Y₃₂.

Выполним очередной шаг алгоритма.

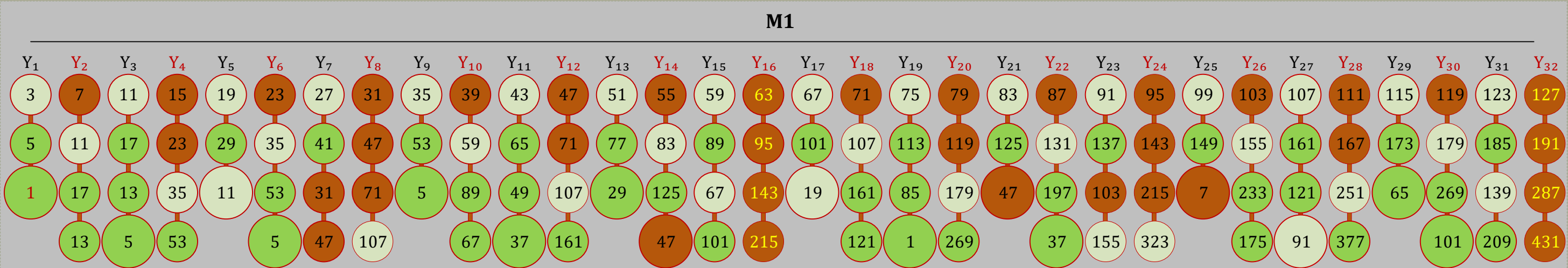


Рис.13

Из оставшихся - третья часть стала меньше исходного. Эти последовательности мы также больше рассматривать не будем. Количество чётных последовательностей только с чётными номерами входящих в них чисел опять сократилось вдвое, было четыре: Y₈, Y₁₆, Y₂₄, Y₃₂, стало две: Y₁₆, Y₃₂. Мы всегда можем легко определить, является ли очередное число принадлежащим М1 и какую чётность имеет его порядковый номер. Для этого достаточно воспользоваться формулой (16). Прибавим к числу единицу и разделим результат на четыре, если делится без остатка, значит принадлежит. Если после деления на четыре делится без остатка на два, значит чётное.

Выполним очередной шаг алгоритма.

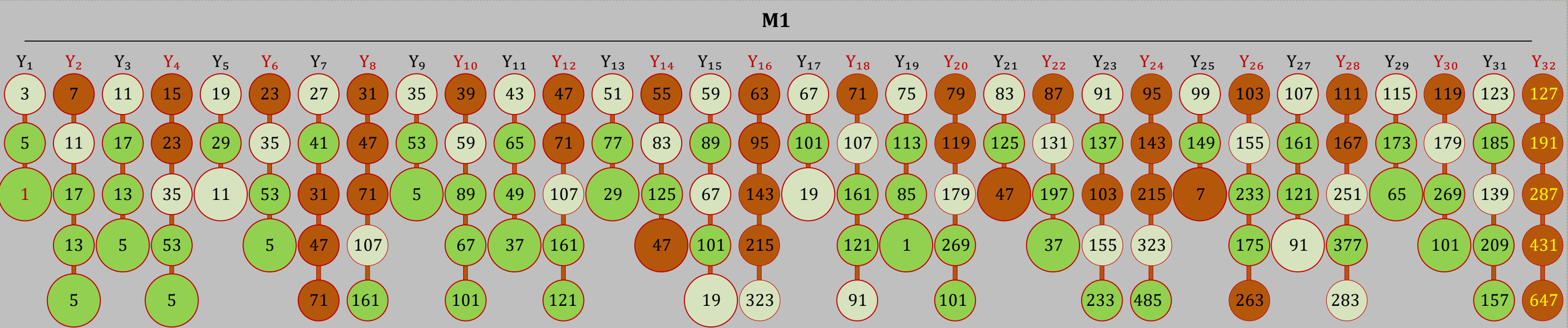


Рис.14

Количество последовательностей только с чётными номерами входящих в неё чисел опять сократилось вдвое, было две: Y_{16} , Y_{32} , осталась одна : Y_{32} . Следующим шагом исчезнет и эта. Но, далее в натуральном ряду, ещё остаются Y_{64} , Y_{128} , ... и т.д.

В бесконечном натуральном ряду существует бесконечное количество последовательностей, принадлежащих M_1 , состоящих только из чисел с чётными порядковыми номерами отстоящих друг от друга на дистанции 2^n , до тех пор пока очередным $n+1$ - ходом не исчезнут и они. Но здесь мы сталкиваемся с проблемой. Дело в том, что существует следующее число с чётным порядковым номером, отстоящим на дистанции 2^n , а затем следующее и т.д. до бесконечности. Какую точку зрения принять в этой дилемме в качестве истинной становится проблемой. Разрешением дилеммы может стать формулировка гипотезы: “С какого бы числа мы не начали, двигаясь ... и т.д.”. В формулировке гипотезы указывается на какое удобное, но всё же конкретное число, а не абстрактное бесконечное. Последовательность начинается с конкретного числа. А пребывание конкретного, какого угодно бесконечно большого числа с чётным порядковым номером во множестве M_1 - ограничено. С точкой зрения определились. При этом, отдаем себе отчёт: существует и другая точка зрения, основанная на существовании бесконечного количества чисел с чётными порядковыми номерами, отстоящими на дистанции 2^n . Подобные дилеммы не имеют одного решения. Поэтому мы вынуждены принять ту аргументированную точку зрения, которая ближе соответствует формулировке гипотезы, тем более, что гипотеза предполагает существование бесконечного количества любых натуральных.

Подведём итог: среди множества чисел, принадлежащих M_1 мы обнаружили числа с чётными порядковыми номерами, с уникальной возможностью увеличиваясь по алгоритму продолжать оставаться в M_1 , но, тем не менее, в пределах формулировки гипотезы, получили очередное доказательство ограниченности пребывания их там.

Аргументов в пользу Гипотезы приведено уже достаточно много. Но, они по-прежнему не закрывают вопрос существования числа, уходящего в бесконечность. Пока мы убедились в том, что у числа нет возможности, попав однажды в первое множество пребывать там неограниченно долго. Тем не менее остаётся теоретическая возможность чередования множеств M_1 и M_2 , периодически покидая одно, снова возвращаться и двигаться далее вперёд. Закономерный переход из одного множества в другое этому не противоречит.

Чередование множеств M_1 и M_2 обеспечивает числу неуклонное продвижение вперёд. Какова вероятность бесконечного чередование множеств M_1 и M_2 . Проблема такого сценария для числа устремлённого в бесконечность заключается в существовании равновероятной возможности, хоть при движении вперёд, хоть при движении назад, проявиться всё тому же закону перехода количественных изменений в качественные, перейти в другое множество, и таким образом прервать бесконечный процесс чередования.

Рассмотрим сценарий возвращений числа в M1 из одного из множеств M2, M3, M4 ... M_m. Какова его дальнейшая судьба - продолжает оно движение вперёд или возвращается ниже исходного. Сможем ответить на этот вопрос после того, когда проведём дополнительную работу по изучении структуры множества M1. Символом {Y_n}∈M_m будем обозначать порядковые номера чисел, принадлежащих M1, M2, M3 ... M_m, где m=1, 2, 3, ... - порядковый номер множества. Рассмотрим фрагмент произвольной последовательности:

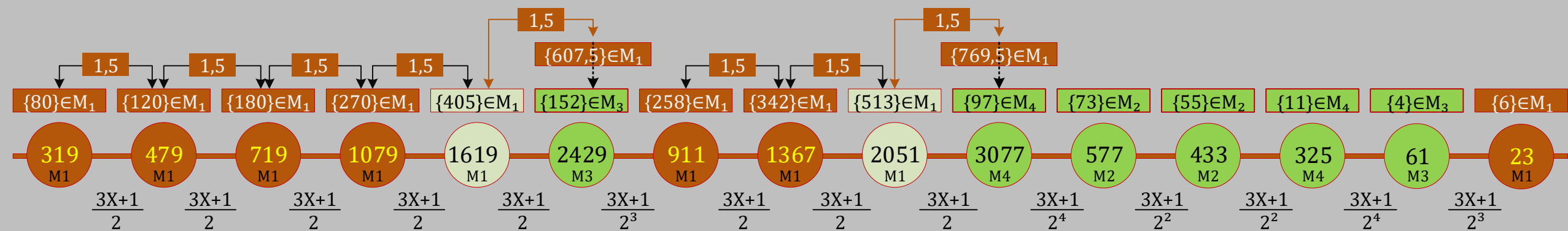


Рис.115 Фрагмент последовательности с исходным 319

Обратим внимание на одну закономерность, касающуюся первой последовательности. В результате действия алгоритма число принадлежащее M1 увеличивается приблизительно в 1,5 раза, в соответствии с полной формулой алгоритма,

$$\frac{3 \cdot 479 + 1}{2} = 719 \quad \Rightarrow \quad \frac{719}{479} \approx 1,50104 \tag{21}$$

а порядковый номер очередного числа увеличивается ровно в 1,5 раза.

$$\frac{\{120\}}{\{80\}} = 1,5; \quad \frac{\{180\}}{\{120\}} = 1,5; \quad \frac{\{270\}}{\{180\}} = 1,5; \quad \frac{\{405\}}{\{270\}} = 1,5; \quad \frac{\{342\}}{\{228\}} = 1,5; \quad \frac{\{513\}}{\{342\}} = 1,5; \tag{22}$$

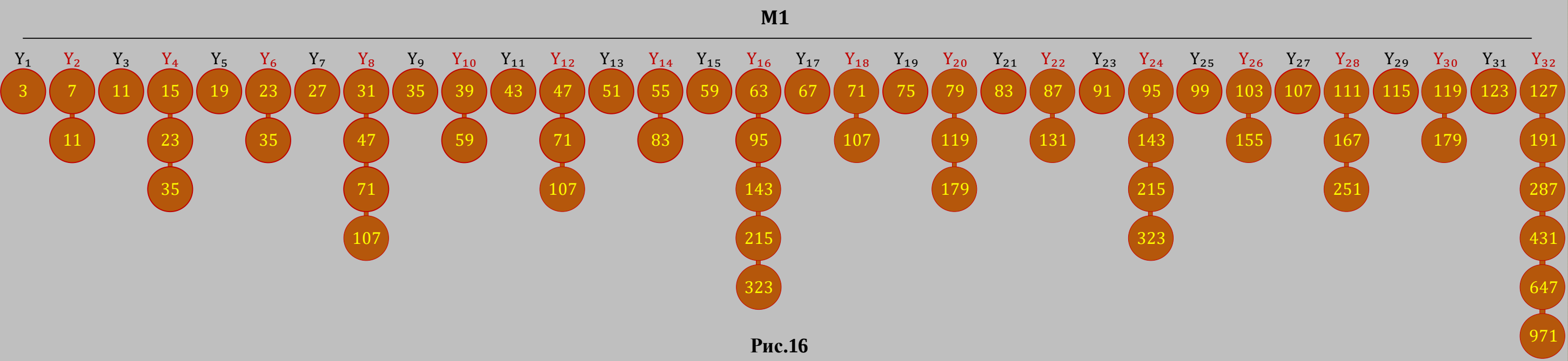
Почему так происходит, становится ясно, после того как применим алгоритм к формуле числа, принадлежащего M1 (16):

$$\frac{3 \cdot (4n-1) + 1}{2} = \frac{12n-2}{2} = 6n-1 \tag{23}$$

Алгоритм, воздействуя на формулу числа M1 изменил значение коэффициента при номере n числа. Было 4n-1 стало 6n-1, а 6/4=1,5. Увеличение чётного в 1,5 раза, последовательно несколько раз, в конечном итоге приводит к нечётному. Движение чётного к нечётному через умножение на 1,5 равносильно делению чётного пополам, значит движение чётного к нечётному в M1 для любого чётного закономерно. Другой закономерностью множества M1 является неизбежность перехода числа с нечётным порядковым номером следующим ходом в одно из множеств M2, M3, M4 ... и т.д. Это видно из Рис. 15. Например, при умножении нечётного номера {405}∈M₁ числа 1619 на 1,5 очередное число 2429 должно было получить порядковый номер {607,5}∈M₁, но число 607,5 не является натуральным, значит номером чего либо оно не может быть. Оно занимает промежуточное положение между двумя рядом стоящими номерами {607}∈M₁ и {608}∈M₁. Так число 2429 оказалось в M3, но уже с натуральным порядковым номером {152}∈M₃. Следующим ходом число 2429 вернулось в M1, но уже в другой линии последовательности чётных. Между отдельными последовательностями чётных в M1 не существует возможности перехода из одной в другую не покидая M1. Сценарий движения числа с чётным порядковым номером в M1, всегда один: сначала закономерное движение к нечётному, а затем переход в любое другое множество.

2.3 РЯДЫ ГРУПП МНОЖЕСТВА М1 НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Группа нечётных М1 - последовательность нечётных М1, в которой порядковый номер очередного больше предыдущего ровно в 1,5. Количество членов в группе нечётных может быть любым, в том числе состоящей из одного, с нечётным порядковым номером. Если группа состоит из нескольких нечётных, то её возглавляет нечётное-лидер с чётным порядковым номером, а замыкает группу замыкающее с нечётным порядковым номером. Для того чтобы выявить структуру множества М1, воспользуемся Рисунком 14, предварительно избавившись от информации непосредственно не относящейся к М1 (Рис.16).



В математике при решении уравнений часто применяют метод приведения подобных. Одним из этапов которого является перестановка слагаемых, таким образом, чтобы подобные слагаемые оказались рядом. Нечто подобное выполним и мы для множества групп принадлежащих М1. Разделим множество групп Рис.16 по признаку количества находящихся в них членов:



Очередное число ряда нечётных одиночных отличается от предыдущего на одно то же значение 8, и оно описывается формулой:

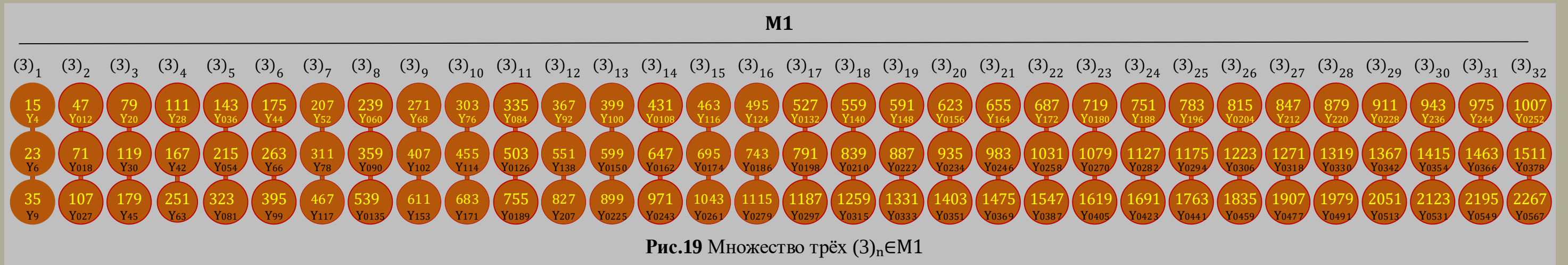
$$(1)_n \in M_1 = 8n - 5 \tag{24}$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$ - порядковый номер, который имеет число из натурального ряда X_n , но теперь уже в ряду нечётных одиночных $(1)_n$, принадлежащих М1. Например числом с порядковым номером $n=14$ из ряда $(1) \in M_1$ является: $(1)_{14} \in M_1 = 8 \cdot 14 - 5 \Rightarrow (1)_{14} \in M_1 = 107$. Если требуется определить какое положение будет занимать число из натурального ряда $X_{107} = 107$ в ряду $(1) \in M_1$: $X_{107} \in (1) = (107 + 5) / 8 \Rightarrow X_{107} \in (1) = 14$



Очередное число-лидер ряда нечётных двух отличается от предыдущего на одно то же значение 16, и оно описывается формулой:

$$(2)_n \in M_1 = 16n - 9 \tag{25}$$



Очередное число-лидер ряда нечётных трёх отличается от предыдущего на одно то же значение 32, и оно описывается формулой:

$$(3)_n \in M_1 = 32n - 17 \tag{26}$$

И так далее. Каждый следующий ряд, содержащий большее количество членов в группе описывается формулой общего вида:

$$(N)_n \in M_1 = 2^{N+2}n - (2^{N+1} + 1) \tag{27}$$

Где N-номер ряда, с количеством членов в группе равным N.

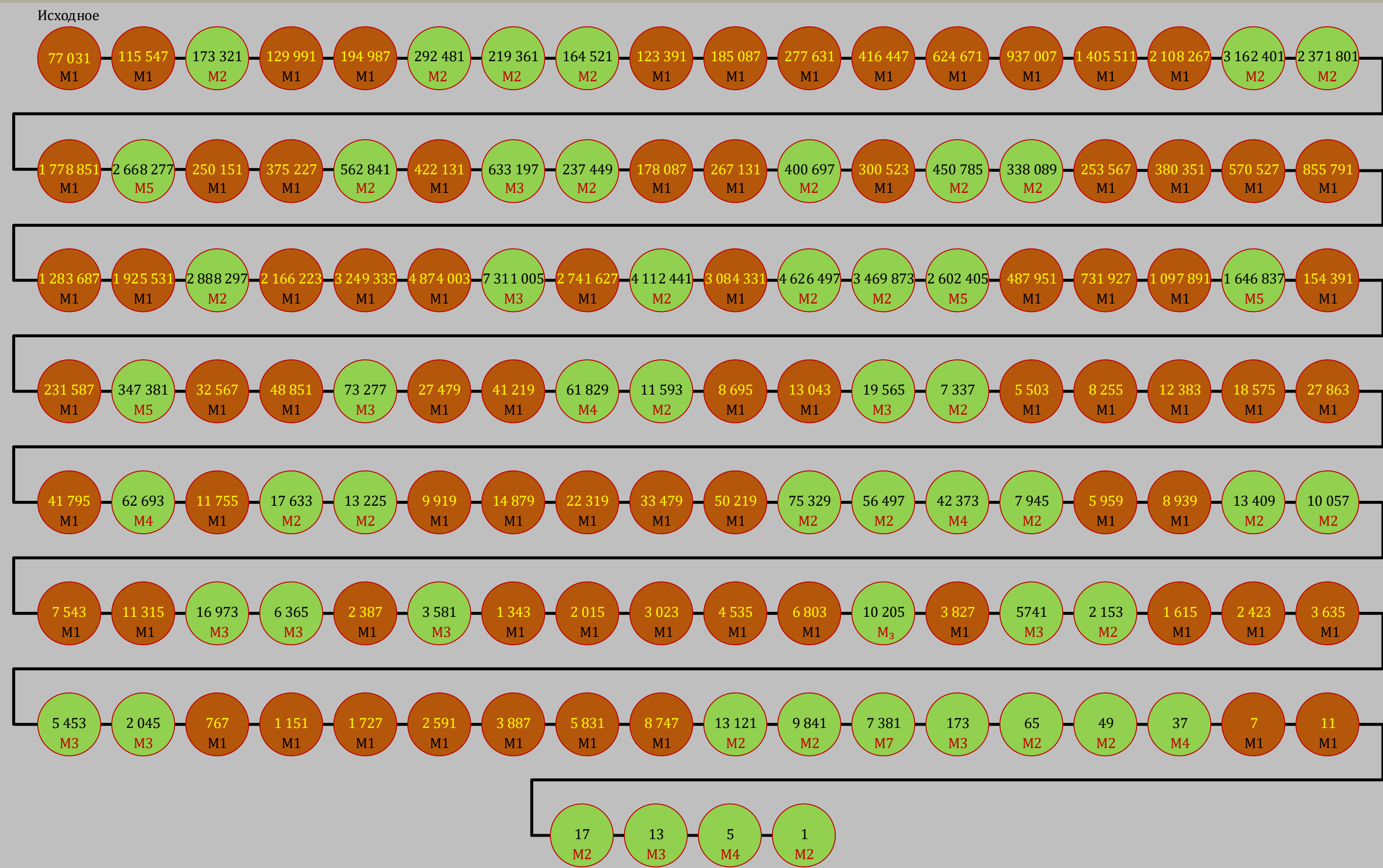
n - порядковый номер числа в ряде N

Таким образом, каждое нечётное, принадлежащее M1 анатомически проявляет себя, как минимум, в трёх измерениях. В каждом из этих измерений оно имеет свой порядковый номер. Совокупность всех признаков числа определяет его положение в структуре множества нечётных M1. На Рис.20 представлена анатомия нечётного числа, принадлежащего множеству M1:



2.4 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2, что не существует последовательностей, уходящих в бесконечность

Рассмотрим произвольную последовательность Коллатца с исходным $X_0=77\ 031$:



Определим положение промежуточных позиций, которые исходное число проходит при выполнении алгоритма Коллатца в рядах групп, принадлежащих M1. Для определения Y_n используем формулу (16). При определении порядкового номера ряда групп по количеству членов группы, учитываем лидера: дело в том, что маршрут исходного числа иногда его обходит стороной. Лидера всегда находим через коэффициент равный 1,5. Номера Y_n всех членов группы делятся без остатка на 1,5, а число-лидер не делится. Далее, по номеру ряда можно определить порядковый номер числа в этом ряду по соответствующим формулам (24), (25) ... (27), замыкающее делится без остатка на 1,5, но, при умножении становится дробным:

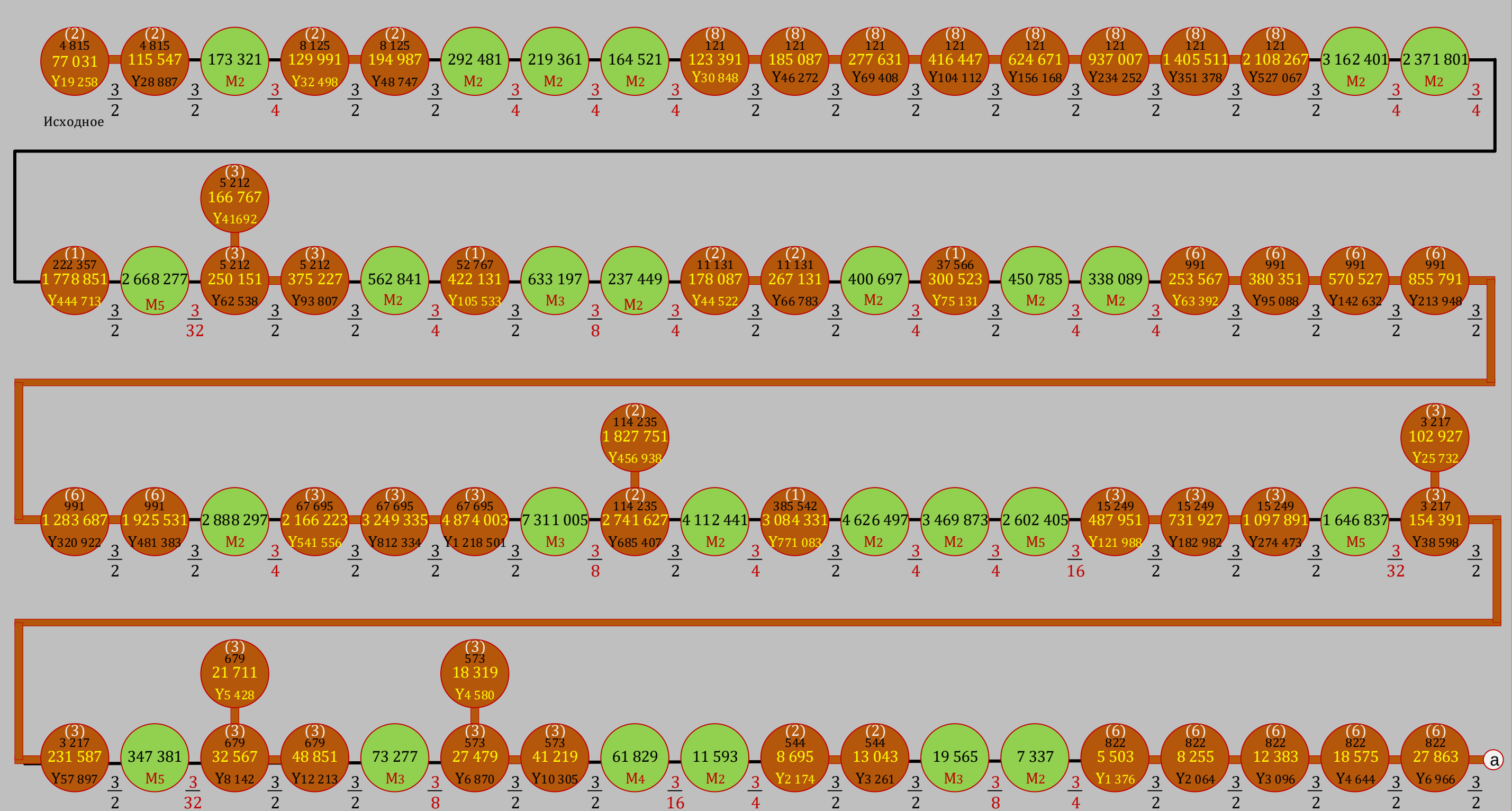


Рис. 22.1 1-й фрагмент последовательности Коллатца с исходным 77031

Продолжение следует

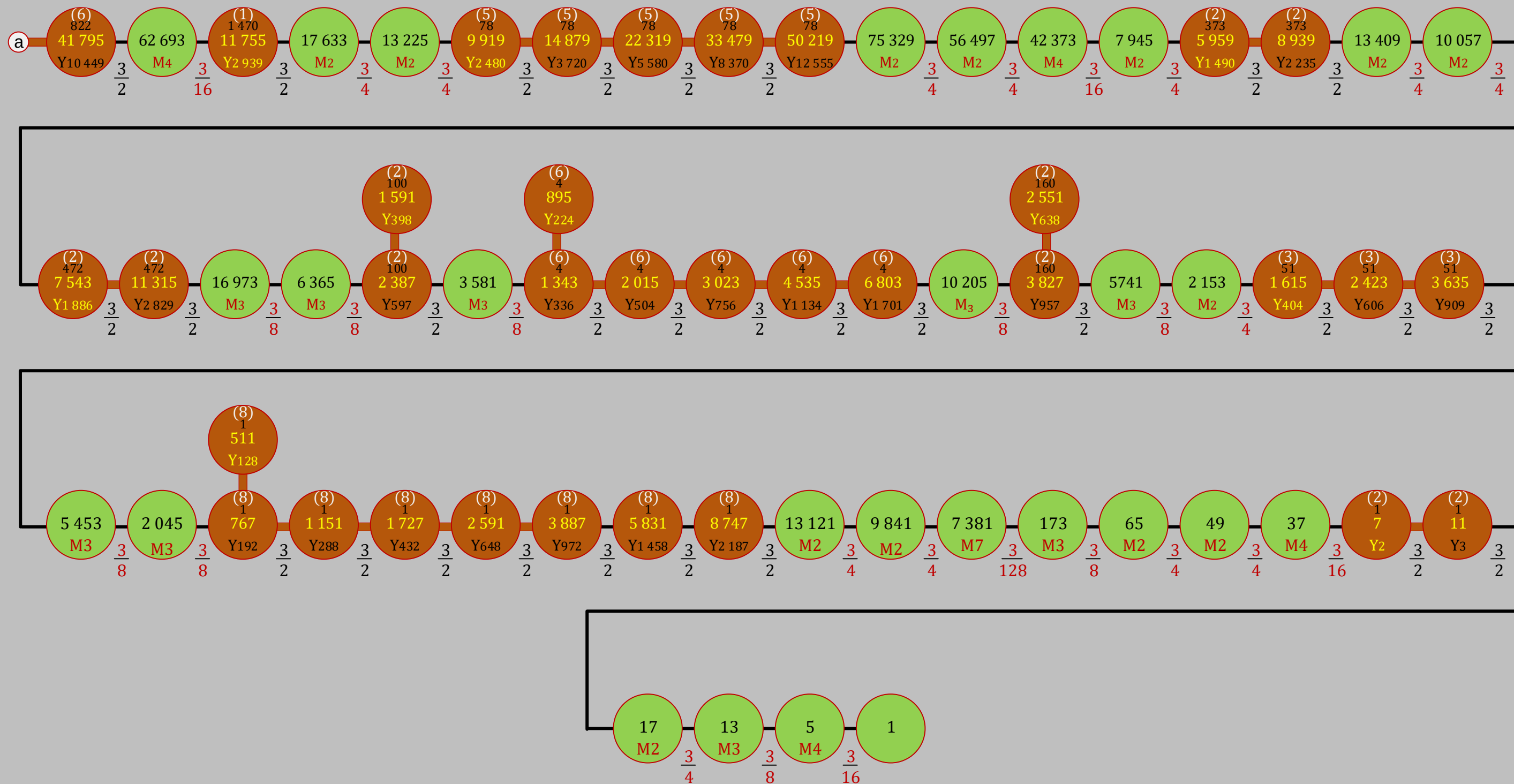


Рис. 22.2 2-й фрагмент последовательности Коллатца с исходным 77031

Упростим выражение последовательности Коллатца с исходным натуральным 77031 следующим образом:

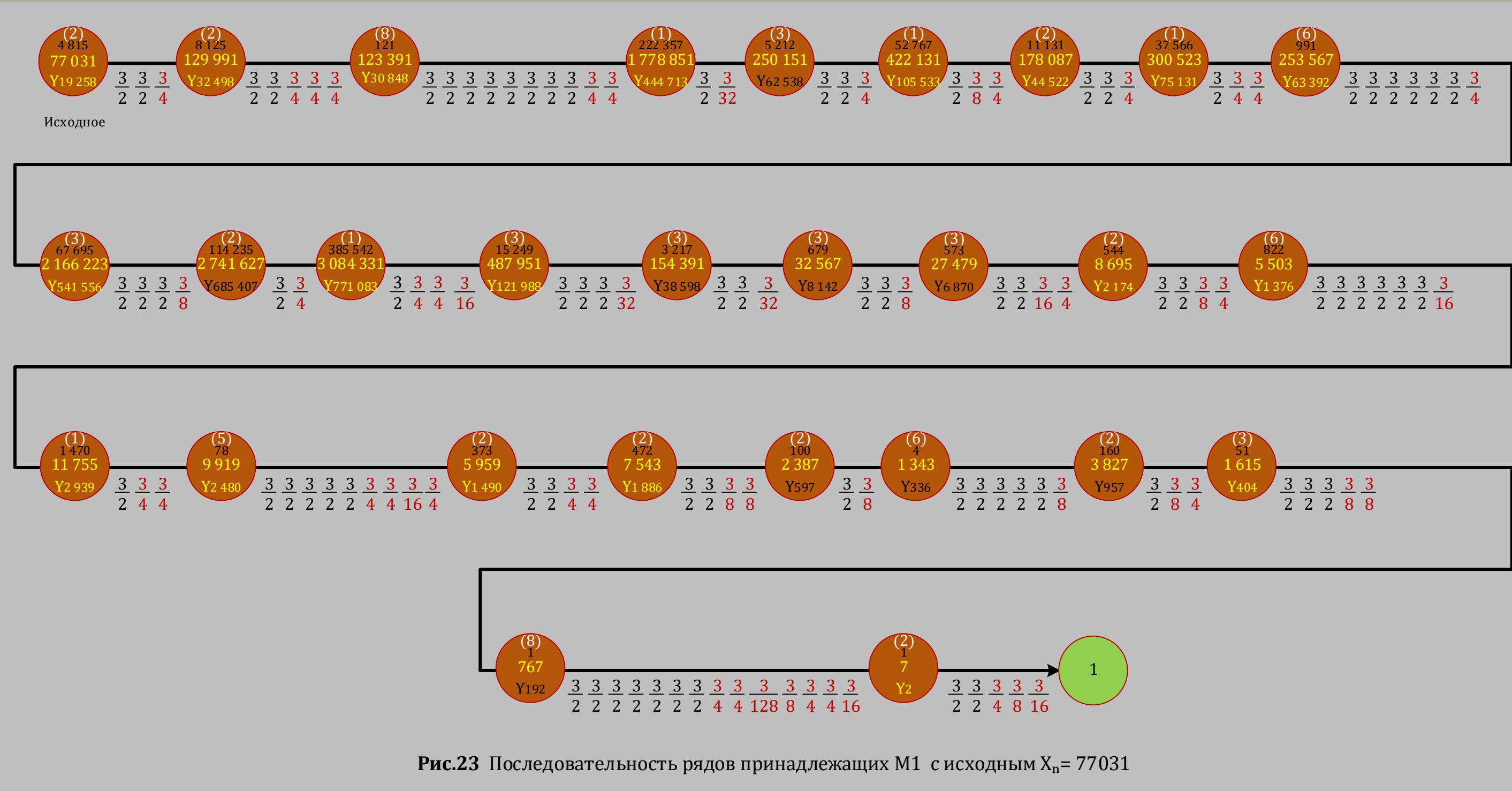


Рис.23 Последовательность рядов принадлежащих M1 с исходным $X_n = 77031$

Исходное, в результате выполнения алгоритма даже в пределах множества M1, проходит путь через разные ряды этого множества. Возвращаясь очередным ходом в M1 оно может оказаться, в равной степени, как в старшем по статусу ряде, так и в младшем. Но, нас интересует возвращение числа в один и тот же ряд, и траектория движения числа в пределах этого ряда. Разделим один общий маршрут исходного $X_n = 77031$ на отдельные маршруты в пределах каждого закономерного ряда, и приведём подобные:



Рис.24 Маршрут исходного натурального 77031 в пределах ряда одиночных $(1)_n \in M_1 = 8n-5$



Рис.25 Траектория исходного в пределах ряда одиночных $(1)_n \in M_1 = 8n-5$

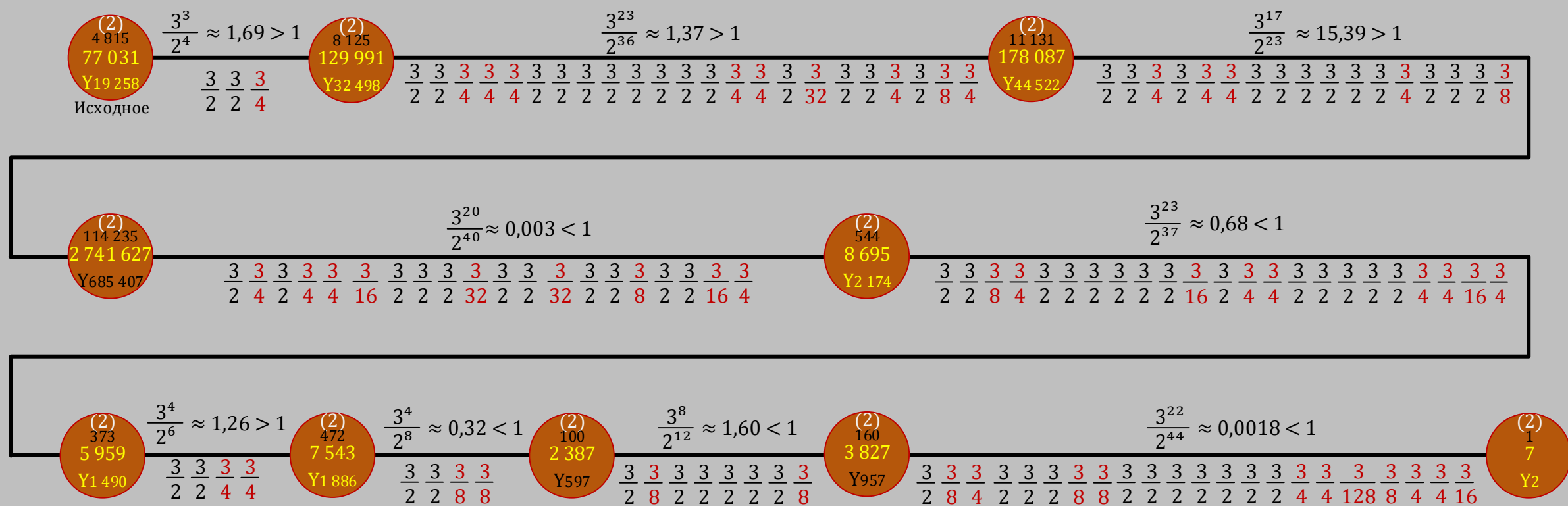


Рис.26 Маршрут исходного 77031 в пределах ряда двух $(2)_n \in M1 = 16n - 9$

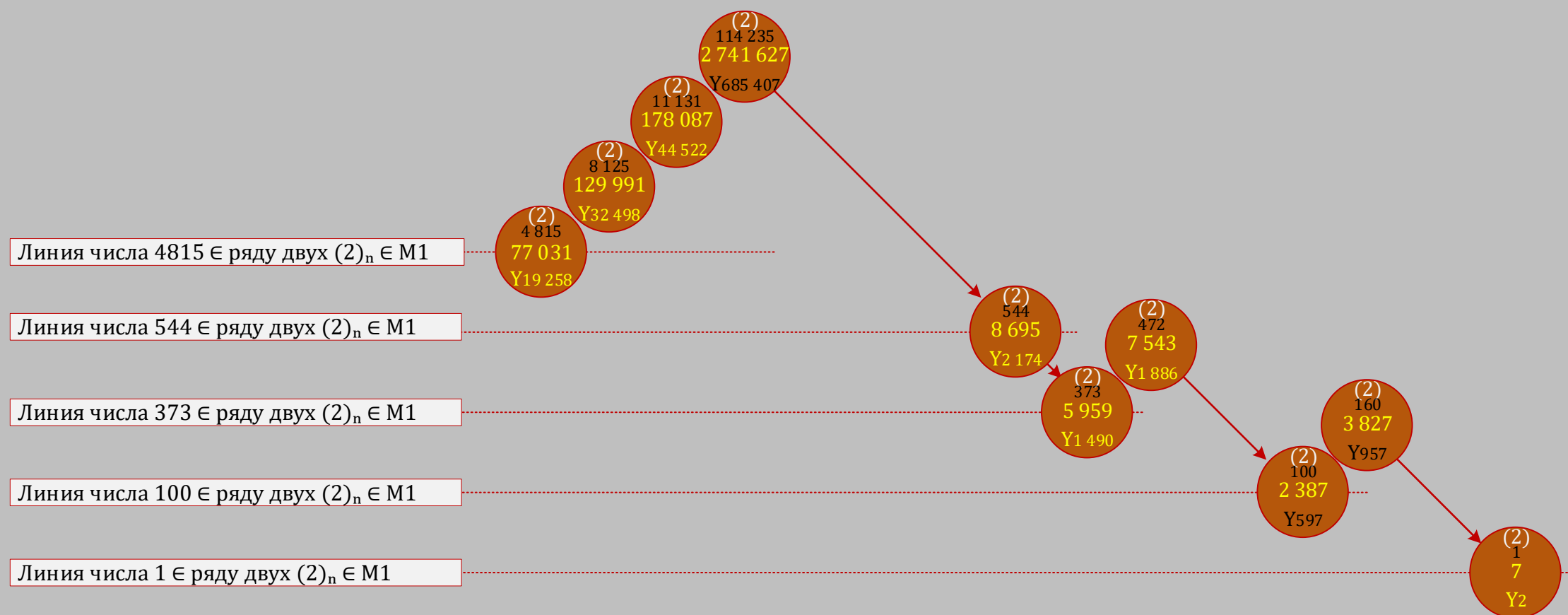


Рис.27 Траектория исходного 77031 в пределах ряда двух $(2)_n \in M1 = 16n - 9$

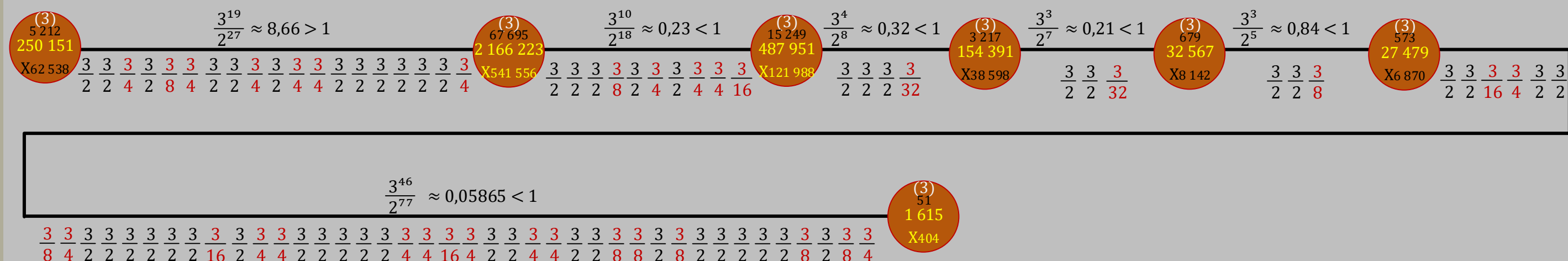


Рис.28 Маршрут исходного 77031 в пределах ряда трёх $(3)_n \in M_1 = 32n-17$

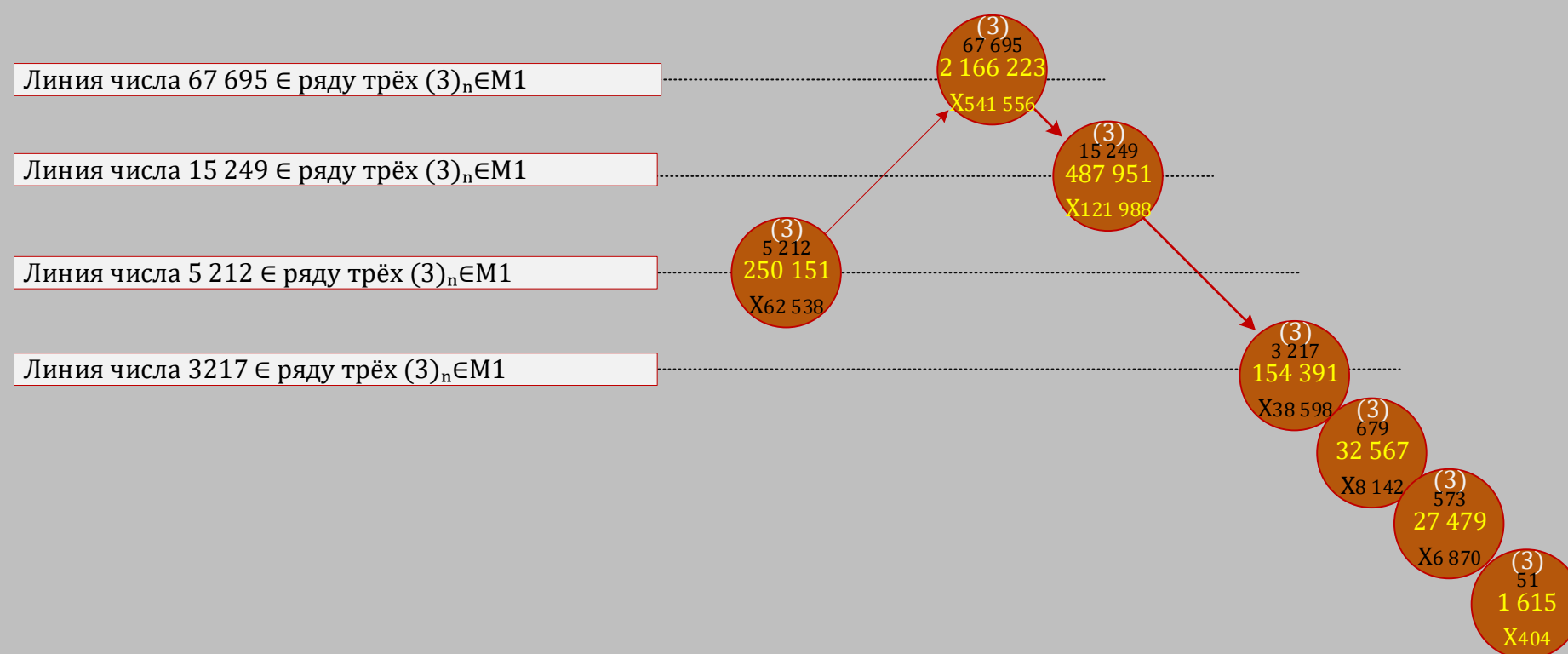


Рис.29 Траектория исходного 77031 в пределах ряда трёх $(3)_n \in M_1 = 32n-17$



Рис.30 Ниспадающие траектории исходного 77031 в пределах отдельных рядов групп $(N)_n \in M_1$

Число продвигается не только вперёд и назад, и переходит из одного множества в другое, но ещё переходит из одного параллельного ряда групп в другой параллельный. И здесь в параллельных рядах становится ещё более очевидным стремление числа сворачиваться в единицу.

Периодически число возвращается в M_1 . Существуют два сценария его дальнейшего продвижения: или вперёд, или назад. Если в общей последовательности очередное число отличается от предыдущего в k_n раз, где коэффициент $k_n = (3X_n + 1)/2^m$, а m - степень двух в знаменателе алгоритма, соответствующая текущему шагу, то тогда число вернувшееся в один из закономерных параллельных рядов групп будет отличаться от предыдущего в этом ряду в число раз, определяемым произведением всех промежуточных коэффициентов (Рис24, Рис25... Рис.30). На приведенных рисунках, значение коэффициента k_n представлено в упрощенном виде $3/2^m$. Этого достаточно, чтобы иметь возможность сравнить произведение всех промежуточных коэффициентов с единицей. Если произведение всех промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим больше единицы – число растёт, если меньше – уменьшается. Третьего не дано. Никогда такое произведение, в любом сочетании промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим не будет равным единице. Ранее, мы уже убедились в том, что возможность образования кольца в алгоритме Коллатца исключена. Поэтому мы имеем только два сценария, или вперёд, или назад. С увеличением их общего количества, становится актуальным известный закон диалектики – закон перехода количественных изменений в качественные. Увеличение общего количества шагов неизбежно ведёт к увеличению разнообразия коэффициентов. Факт, который становится в итоге определяющим в закономерной общей тенденции движения числа.

Логический вывод о том, что стремление любого натурального к единице является закономерным, представим в простых формулах. Мы уже знаем, что половина нечётных из натурального ряда принадлежит первому множеству, а вторая половина нечётных является суммой всех нечётных остальных множеств:

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 + \dots + M_m \quad (28)$$

у каждого числа последовательности, даже в пределах одного множества своя, отличающаяся от других чисел последовательности, производительность.

$$W_2 < \textcolor{red}{W}_1 < W_3 < W_4 \dots < W_m \quad (29)$$

Производительность числа напрямую зависит от делителя, входящего в формулу алгоритма. Сравнивая делители разных множеств, мы косвенно, сравниваем их производительности. Производительность W_2 оказалась меньше W_1 , несмотря на то, что делитель $4 \in M_2$ больше делителя $2 \in M_1$. Продвижение назад никогда не бывает тождественным по совершаемой работе продвижению вперёд. Формула неравенства (29) наглядный пример проявления асимметричности алгоритма. Такая асимметричность алгоритма только способствует обретению статистического разнообразия делителей. Единственная возможность для числа увеличиваться существует в условиях, описываемых формулой (30):

$$\begin{array}{c} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{3}{2}\right)}_a * \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \dots \left(\frac{3}{4}\right)}_b * \underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) \dots \left(\frac{3}{8}\right)}_c * \underbrace{\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{3}{16}\right) \dots \left(\frac{3}{16}\right)}_d * * * \underbrace{\left(\frac{3}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right) \dots \left(\frac{3}{m}\right)}_z > 1 \end{array} \quad (30)$$

Количество множителей =

Здесь: a, b, c, d ... z – произвольное количество множителей в последовательности. Результат зависит от количественного соотношения множителей. В отдельных фрагментах последовательности можно наблюдать ситуацию, когда произведение всех промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим больше единицы. Но, стремление последовательности в бесконечность неизбежно ведёт к увеличению общего количества множителей, состав которых, к тому же, обогащается разнообразием делителей. Чем дальше продвигаемся вдоль натурального ряда, тем с большим значением делители там обретаем. И тогда закономерным результатом произведения всех промежуточных коэффициентов между очередным и предыдущим становится уже значение, меньшее единицы, потому что в пределе формула (30) трансформируется в (31).

$$\begin{array}{c} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{3}{2}\right)}_{\frac{n}{2}} * \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \dots \left(\frac{3}{4}\right)}_{\frac{n}{4}} * \underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) \dots \left(\frac{3}{8}\right)}_{\frac{n}{8}} * \underbrace{\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{3}{16}\right) \dots \left(\frac{3}{16}\right)}_{\frac{n}{16}} * * * \underbrace{\left(\frac{3}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right) \dots \left(\frac{3}{m}\right)}_{\frac{n}{m}} < 1 \end{array} \quad (31)$$

Количество множителей =

Произведение всех промежуточных коэффициентов меньшее единицы переводит число ниже исходного. Всё выглядит так, как будто каждое натуральное продвигаясь по алгоритму Коллатца накапливает необходимое количество множителей с максимальным разнообразием делителей для того, чтобы осуществилась формула (31). Так мы приходим к неожиданному выводу: становится очевидным, что именно формула (31) является решением алгоритма Коллатца, его конечной целью. А завершение последовательности в единице для любого натурального есть уже её неизбежное следствие.

Формулу (31) упростим:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{4}} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n}{8}} \dots \left(\frac{3}{m}\right)^{\frac{n}{m}} < 1 \quad (32)$$

ЧАСТЬ 3: Выводы, заключение, результаты

ВЫВОДЫ: Все натуральные, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, устремляются к единице.

Не существует таких, которые бы уходили в бесконечность, **потому что существует закономерный переход из одного множества в другое, из одного параллельного ряда групп в другой параллельный.** Закономерный переход из одного множества в другое является математическим описанием известного закона перехода количественных изменений в качественные. Из чего следует другой, не менее важный, вывод - переход из одного множества в другое, свидетельствует о его качественных изменениях, которые достигаются делением числа пополам. **Следствием перехода из одного множества в другое является обретение новых промежуточных коэффициентов в формуле (31) или (32);**

Не существует предпосылок, указывающих на какую либо иную возможность числу, принадлежащему M_1 преодолеть преграду нечётных из $M_2, M_3, M_4 \dots M_n$. **А непрерывное продвижение числа вперёд в чётных последовательностях множества M_1 , с чётными порядковыми номерами входящих в них чисел, ограничено количеством шагов алгоритма, до тех пор, пока порядковый номер последовательности делится пополам.** Деление пополам в алгоритме Коллатца и здесь оказалось главным действием, определяющим дальнейшую судьбу натурального;

Не существует таких, которые бы уходили в бесконечность, потому что на своих маршрутах, какими бы сложными и длинными они не были, **последовательности накапливают, обогащают себя необходимым количеством разнообразных коэффициентов до тех пор, пока их произведение не станет меньше единицы для того, чтобы в конечном итоге осуществилась формула (31).** Формула (31) открывает прямой путь к единице. На этом алгоритм завершается. Значит абсолютно все последовательности, с любым натуральным в качестве исходного завершаются в единице.

Таким образом, в совокупности приведенных выше аргументов, **утверждение 2 доказано:** не существует последовательностей уходящих в бесконечность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Существование бесконечного количества **успешных решений**, верность **утверждения 1** и **утверждения 2** позволяют нам сделать заключительное: с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге обязательно выйдем на маршрут **успешного решения алгоритма**, приводящего к единице. Таким образом,

ГИПОТЕЗА КОЛЛАТЦА ДОКАЗАНА.

Библиографический список:

1. Тао, Теренс. [Электронный ресурс] // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тао,_Теренс (дата обращения: 21.03.2025)
2. Derek Muller. Самая простая нерешённая задача – гипотеза Колатца [Veritasium]/[Электронный ресурс]//
Студия Vert Dider: сайт. - URL: <https://youtu.be/QgzBDZwanWA?si=QW5HRHFjov1Y5F5l> (дата обращения: 21.03.2025)