ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ ____ **2**

ВВЕДЕНИЕ ____ **3**

ЧАСТЬ1. УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных. ____ **4**

1.1 Успешные решения алгоритма ____ **4**

1.2 Примечание к утверждению 1 ____ **5**

1.3 Доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ 1 ____ **6**

ЧАСТЬ 2. УТВЕРЖДЕНИЕ 2: не существует последовательностей, уходящих в бесконечность ____ **8**

2.1 Множество нечётных Коллатца ____ **8**

2.2 Описание механизма перехода числа из одного множества в другое ____ **12**

2.3 Ряды групп М1 нечётных Коллатца ____ **17**

2.4 Доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ 2 ____ **20**

ЧАСТЬ 3 Структурный анализ произвольной последовательности по алгоритму Коллатца ____

ЧАСТЬ 4 Выводы, заключения, результаты. ____

БИЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ____

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА

Ключевые слова: Алгоритм; натуральное число; Гипотеза Коллатца; сиракузская последовательность.

Key words: Algorithm; natural number; Collatz conjecture; Syracuse sequence.

Аннотация: В статье представлено простое доказательство утверждения, что в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных, основанное на свойствах умножения и деления десятичных дробей. Раскрыт механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения, объясняющий, почему число никогда не уйдет в бесконечность, а с самого начала своего движения устремляется к единице, и в конечном итоге достигает её, каким бы длинным и тернистым не был при этом путь.

Abstract: The paper presents a simple proof of the claim that there are no loop sequences in the Collatz algorithm, based on the properties of multiplication and division of decimal fractions.The mechanism of the algorithm is revealed, as a result of which the number changes the direction of its movement, explaining why the number will never go to infinity, but from the very beginning of its movement rushes towards one, and ultimately reaches it, no matter how long and thorny the path may be.

УДК 511.12;   УДК 511.13

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.

Цель: Доказать гипотезу простыми средствами.

ВВЕДЕНИЕ: Гипотеза Коллатца, известная также как «3X+1»-гипотеза или как сиракузская последовательность, относится к алгоритмам управления натуральными числами, утверждает, что с какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице.

Какой интерес был у Коллатца заниматься вообще алгоритмами, подобными «3X+1». Вероятно были и другие, но именно алгоритм «3X+1» стал проблемой. При этом, с начальными числами из натурального ряда такими, как 1, 2, 3 … 1 000 ... 1 000 000 … и т.д., очевидно проблем не было. Они были проверены простым перебором. Нет сомнений в том, что Коллатц исследуя простые алгоритмы, искал ответы на волнующие его вопросы далеко за пределами чистой математики. Возможно, даже не так, Коллатц исследуя простые алгоритмы, за пределами обычной, искал чистую математику, в которой символические действия с числами могут быть тождественны взаимоотношениям Сознания и Материи, если алгоритм уподобить сознательному действию, а натуральное число предмету или явлению физического мира .

Удивительная по своей простоте формулировки гипотеза привлекает к себе внимание. Существует множество попыток её доказательства от простых до невероятно сложных, но пока не признанных математическим сообществом. Исследователи всегда отмечают одну особенность в доказательстве гипотезы; добившись определённых результатов, сделав очередной шаг в доказательстве они сталкиваются с новой проблемой. Доказательство постоянно ускользает. Создаётся иллюзия недосягаемости доказательства. В 2019 появилось сообщение, отмеченное в [1], что Теренс Тао с помощью теории вероятностей доказал, что почти все орбиты Коллатца ограничены любой функцией, уходящей в бесконечность. В рецензии на эту работу, журнал Quanta Magazine написал, что «это один из самых значительных результатов по гипотезе Коллатца, достигнутых за последние десятилетия». Но, автору представленной здесь статьи хотелось бы отметить ещё одну работу, а именно видеоролик: [2], по теме, как важный вклад в поиске пути решения гипотезы. Видеоролик, длительностью около 20 минут, на первый взгляд является развлекательным научно-популярным контентом канала Vert Dider, размещённый на площадке Yutube, но представленная в нём информация, да ещё в великолепном изложении ведущего Дерека Мюллера, подтолкнула к ответу, на один из важных вопросов в доказательстве гипотезы, о чём, в том числе, будет далее. С большим Уважением и огромной благодарностью к несравненному Дереку Мюллеру.

Во всех известных, но непризнанных доказательствах гипотезы Коллатца, остаются нерешёнными два принципиальных вопроса:

1) Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, замкнутых в кольцо.
2) Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, уходящих в бесконечность;

Из этих нерешённых вопросов выделим два утверждения, те, которые подтверждают гипотезу. Если они будут доказаны: доказывать какое-либо другое уже не имеет смысла. Выводы построенные на других утверждениях всегда будут вызывать сомнения, если не будут доказаны эти:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность.

ЧАСТЬ 1

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных

1.1 УСПЕШНЫЕ РЕШЕНИЯ АЛГОРИТМА КОЛЛАТЦА

В алгоритме Коллатца конечной целью является единица, но перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2^n. Для ряда 2^n выполним действия обратные алгоритму «3X+1», тем самым выясним, при достижении каких значени 2^n алгоритм сворачивается в 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца (Таблица 1)

N	2^{2n}	2^{2n}-1	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
И т.д.	...	...	...

Таблица1. Таблица обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца.

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемое формулой:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} \tag{1}$$

которые в итоге приводят к значению 2^{2n} и сворачиванию числа в 1. Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие, **успешными решениями алгоритма**. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число 2^{2n}-1 при всех n≥1 кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n} \tag{2}$$

Это значит, зная решение для предыдущего числа n, решение для следующего n+1 можно определить по формуле:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \tag{3}$$

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. И хотя нам, для доказательства гипотезы, уже достаточно утверждения, что количество успешных решений бесконечное множество, мы всегда можем его усилить. Например, каждое значение натурального ряда, определяемое (1) можно дополнительно умножить на 2^n. Например, число 5 умножить на 2^n, число 7 умножить на 2^n. Каждое число, из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, умножить на 2^n. Тогда мы должны удивляться уже не тому, что каждое число по алгоритму Коллатца завершается единицей, а почему вообще существуют числа с большими маршрутами. Оказавшись в значении успешного решения, число должно немедленно свернуться в единицу. Ответ находим простой. Во первых: множество чисел сворачивается действительно быстро, во вторых: каждый длинный маршрут составлен из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов.

Предположим, между успешными решениями всё же существуют значения, не относящиеся к успешным. Сколько их. Определённо, должно быть ограниченное количество, значит мы простым перебором неизбежно их преодолеем. Каждое новое число на пути алгоритма есть очередной шаг к цели. Успешное решение алгоритма - это просто один из очередных шагов. Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, можно считать завершённым и текущий. Формула (3X+1)/2 производит движение вперёд, в сторону увеличения текущего числа, а формула (3X+1)/2n, где n>1, назад, в сторону его уменьшения. Действие +1 в алгоритме «3X+1» гарантирует его непрерывность, способствует непрерывности движения числа к успешному решению. Для того, чтобы этот процесс движения не прерывался необходимо чтобы каждое очередное число последовательности отличалось от любого из предыдущих. Иначе будет образовано так называемое кольцо – бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности.

Мы должны доказать, что алгоритм «3X+1» исключает повторения , каждое очередное число последовательности отличается от любого из предыдущих.

1.2 ПРИМЕЧАНИЕ К УТВЕРЖДЕНИЮ 1:

К слову сказать, так называемый цикл 4-2-1, часто упоминаемый в связи с гипотезой Коллатца, по определению не является кольцом. Алгоритм «3X+1», или «3n+1» – гипотеза: есть сокращённое название гипотезы Коллатца, сокращённая запись алгоритма, а полный алгоритм перехода из одного состояния в другое, от одного нечётного к другому нечётному, включает ещё и деление на два, в общем виде выражается формулой (4):

$$X_{n+1} = \frac{3X_n+1}{2^m} \tag{4}$$

Здесь: X_n- исходное (или предыдущее) нечётное, X_{n+1} - очередное нечётное, m – количество делений на два до очередного нечётного. Запись алгоритма в виде формулы (4) предполагает начинать именно с нечётного. С какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице. Известны и другие формулировки гипотезы, не меняющие её сути. Например такая: Берём любое натуральное число; Если оно чётное, разделим его на два, а если нечётное, то умножаем на три и прибавляем единицу; Над полученным числом выполняем те же действия, и так далее. Какое бы начальное число мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу. Утверждается, что эта простая формулировка понятна практически всем здравомыслящим людям. После того, как мы пришли к единице алгоритм завершается, точка.

Кольцом может называться последовательность, состоящая из нескольких нечётных. Фраза “С какого бы числа, целого и положительного, мы не начали…” - между строк содержит смысл, в котором имеется в виду, что несомненно, это число должно быть натуральное и оно должно быть больше единицы и больше известного проверенного. С этого - только начинается ГИПОТЕЗА.

Но, мы работаем с разными натуральными числами, маленькими, большими. Если гипотеза верна, она верна для любого натурального.

1.3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1

Пусть $X_0 = 107$ число произвольной последовательности. Предположим оно является исходным числом закольцованного фрагмента. Отследим маршрут исходного числа этого предположительно закольцованного фрагмента.

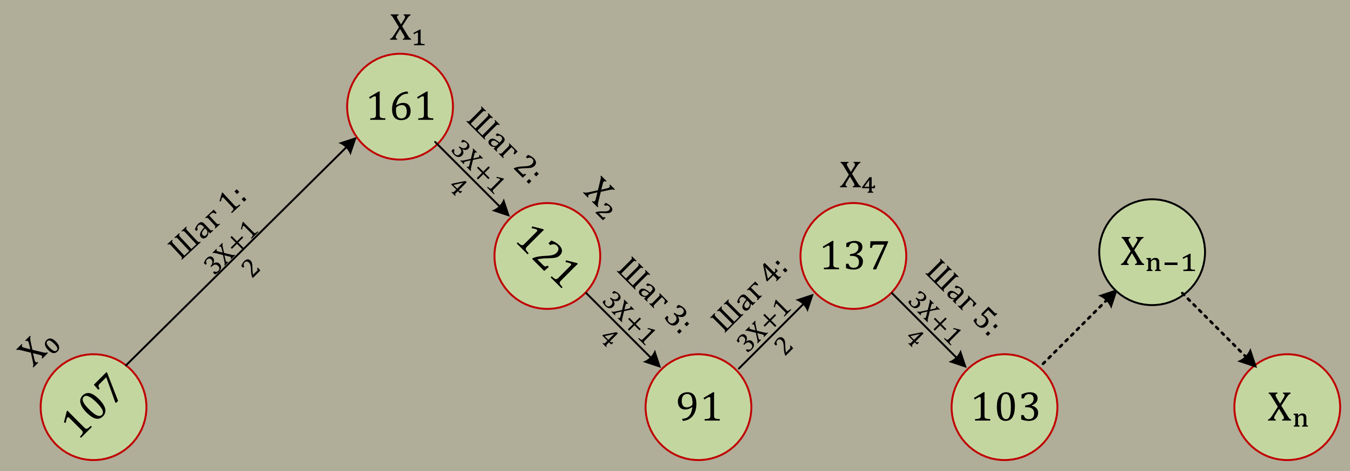

Рис.1 Маршрут числа 71 по алгоритму Коллатца

Шаг 1 (вперёд):

$$X_1 = \frac{3X_0+1}{2} \Rightarrow X_1 = \frac{3\cdot107+1}{2} = 161 \qquad (5)$$

С другой стороны переход от $X_0=107$ к числу $X_1=161$ можно выразить через коэффициент K_1

$$X_1 = K_1 \cdot X_0 \Rightarrow K_1 = \frac{X_1}{X_0} \Rightarrow K_1 = \frac{161}{107} \approx 1{,}50467 \qquad (6)$$

Шаг 2 (назад):

$$X_2 = \frac{3X_1+1}{4} \Rightarrow X_2 = \frac{3\cdot161+1}{4} = 121 \quad \text{или} \quad X_2 = K_2 \cdot X_1 \Rightarrow K_2 = \frac{X_2}{X_1} \Rightarrow K_2 = \frac{121}{161} \approx 0{,}75155 \qquad (7)$$

Шаг 3 (назад):

$$X_3 = \frac{3X_2+1}{4} \Rightarrow X_3 = \frac{3\cdot121+1}{4} = 91 \quad \text{или} \quad X_3 = K_3 \cdot X_2 \Rightarrow K_3 = \frac{X_3}{X_2} \Rightarrow K_3 = \frac{91}{121} \approx 0{,}75206 \qquad (8)$$

Шаг 4 (вперёд):

$$X_4 = \frac{3X_3+1}{2} \Rightarrow X_4 = \frac{3\cdot91+1}{2} = 137 \quad \text{или} \quad X_4 = K_4 \cdot X_3 \Rightarrow K_4 = \frac{X_4}{X_3} \Rightarrow K_4 = \frac{137}{91} \approx 1{,}50549 \qquad (9)$$

Шаг 5 (назад):

$$X_5 = \frac{3X_4+1}{4} \Rightarrow X_5 = \frac{3\cdot137+1}{4} = 103 \quad \text{или} \quad X_5 = K_5 \cdot X_4 \Rightarrow K_5 = \frac{X_5}{X_4} \Rightarrow K_5 = \frac{103}{137} \approx 0{,}75182 \qquad (10)$$

В приведённых примерах, а также в любом шаге любой последовательности мы всегда имеем дробный переходный коэффициент от одного нечётного к другому нечётному. При этом, в шаге (вперёд), когда делитель равен 2 переходный коэффициент больше единицы. Представленный в десятичном виде он имеет более одного количество знаков после запятой. В шаге (назад), когда делитель равен 2^n, где n>1 переходный коэффициент всегда меньше единицы. Представленный в десятичном виде он также имеет более одного количество знаков после запятой.
Если представленный на рис. 1 фрагмент последовательности является закольцованным, значит одно из его очередных чисел равно исходному. Переход от исходного к этому очередному можно выразить через произведение промежуточных коэффициентов (11).

$$X_n = K \cdot X_0 = (K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots) X_0 \quad (11)$$

Для того, чтобы соблюдалось условие закольцованности $X_n = X_0$, необходимо, чтобы коэффициент К был равен единице,

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \ldots \quad \Rightarrow \quad K = 1{,}50467 \cdot 0{,}75155 \cdot 0{,}75206 \cdot 1{,}50549 \ldots = 1{,}2803523612526303419 \ldots > 1 \quad (12)$$

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \ldots \quad \Rightarrow \quad K = 1{,}50467 \cdot 0{,}75155 \cdot 0{,}75206 \cdot 1{,}50549 \cdot 0{,}75182 \ldots = 0{,}96259451223695254364725 8 \ldots < 1 \quad (13)$$

Произведение всех промежуточных коэффициентов в любом их сочетании между очередным и любым из предыдущих может принимать только два значения: или больше единицы, или меньше единицы, и никогда равным ей. Потому что в этом произведении абсолютно все промежуточные коэффициенты являются нечётными десятичными дробями. При умножении двух нечётных дробных чисел, представленных в десятичном виде, количество знаков после запятой в произведении равно сумме знаков после запятой, которые имели множители. Это есть одно из известных свойств умножения десятичных дробей. Результатом произведения всех промежуточных коэффициентов в любом их сочетании всегда является десятичная дробь с количеством знаков после запятой больше одного, т.е. число, отличающееся от единицы. Значит очередное никогда не станет равным ни одному из предыдущих. Что и требовалось доказать.

Вывод: С какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, вперёд-назад, увеличиваясь или уменьшаясь, в процессе своего движения алгоритм исключает повторения. Применяя алгоритм к единице можно убедиться, что единица остаётся на своём месте. Единица не передвигается ни вперёд, ни назад, не увеличивается и не уменьшается. Работа, совершённая алгоритмом по отношению к единице равна нулю.

В алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных. УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ДОКАЗАНО.

ЧАСТЬ 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: из всех натуральных, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, не существует таких, которые бы уходили в бесконечность.

Доказательство утверждения 2 будет строиться на поиске потенциальных возможностей для натуральных, следовать описанным алгоритмом по сценарию непрерывного роста.

2.1. МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

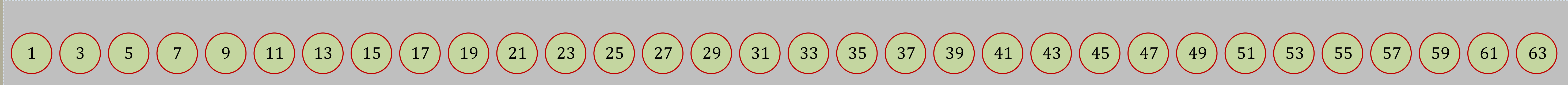

Рис.2 Ряд натуральных чисел

Представим путь нечётного числа к следующему нечётному. Умножаем на 3, прибавляем 1: получаем чётное (Рис.3):

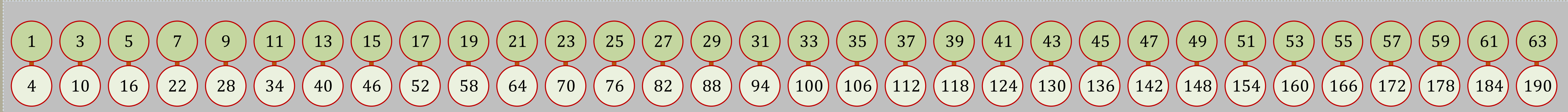

Рис.3 Ряд промежуточных чётных в алгоритме Коллатца

В половине случаев деление на 2 нас тут же вернёт к нечётному (Рис.4):

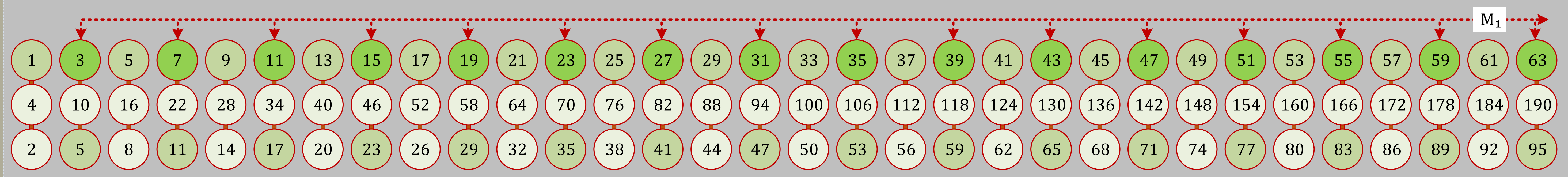

Рис.4 Первое множество Коллатца

Но каждое 4-е число, делить придётся дважды т.е. на 4.

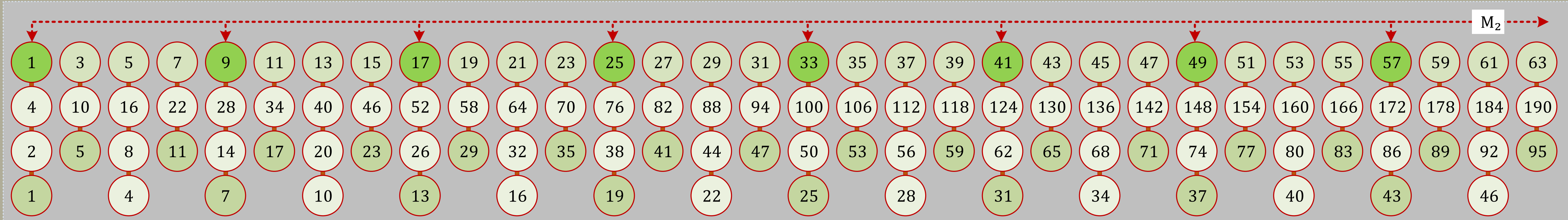

Рис.5 Второе множество Коллатца

Каждое 8-е число, делить придётся на 8, чтобы получить следующее нечётное:

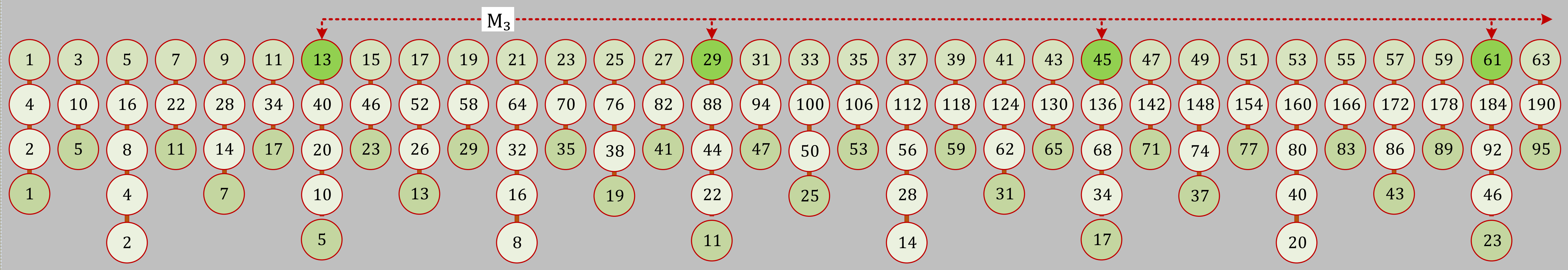

Рис.6 Третье множество Коллатца

Каждое 16-е на 16, и т.д

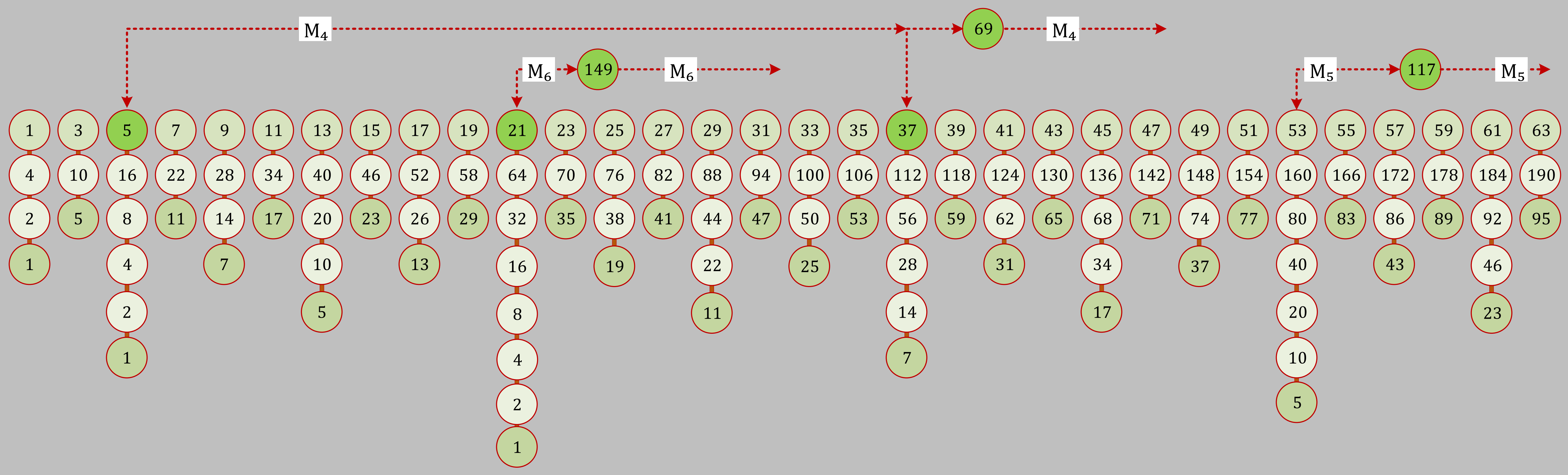

Рис.7 Четвёртое, пятое, шестое и далее другие множества Коллатца

Взяв среднее геометрическое:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{16}}\cdots\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\approx\frac{3}{4}<1 \qquad (14)$$

мы увидим, что в среднем, чтобы добраться от одного нечётного числа к другому, нужно умножить его примерно на 3/4, что меньше единицы. При больших значениях нечётного единицей в алгоритме можно пренебречь. Выходит, чисто статистически, последовательности «3Х+1» уменьшаются чаще, чем растут. Ведущий видеоролика [2] в своих рассуждениях использовал идею такого наглядного представления структуры натурального ряда для вывода статистической формулы (14), а получив её, переключился развивать мысль в другом направлении.

Нам потребуется выполнить ещё один маленький шаг, и мы **сможем увидеть механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения,** будет понятно, почему следуя одному и тому же алгоритму, с одним и тем же делителем в знаменателе формулы алгоритма, число может "неожиданно" изменить направление своего движения.

Введем новые понятия: Множество нечётных Коллатца; Производительность числа в алгоритме Коллатца; Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца.

МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Обозначение: **Mm,** где **m-** порядковый номер множества

Назовём ряд нечётных {3, 7, 11, 15 …} - **первым множеством** Коллатца, далее по тексту просто первым множеством или М1. Первым оно называется по признаку, того, что в результате действия алгоритма «3Х+1», числа этого ряда становятся сначала четными, а затем после деления на два сразу нечётными. В результате выполнен только один полный шаг алгоритма. Позиции нечётного числа в М1 продвигают очередное всегда вперёд, в сторону его увеличения, в бесконечность. Каждое очередное число 1-го множества отличается от предыдущего на 4, и описывается формулой (15):

$$Y_n \in M_1 = 4n-1 \qquad (15)$$

Где: n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего М1;

Назовём ряд нечётных { 1, 9, 17, 25 …} - **вторым множеством** Коллатца, обозначим его М2 . Вторым оно называется по признаку, того, что чётные полученные в результате действия алгоритма «3Х+1» приходится делить 2 раза на 2, чтобы получить очередное нечётное. Позиции нечётного числа в М2 продвигают число в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 2-го множества отличается от предыдущего уже на 8, и описывается формулой (16):

$$Y_n \in M_2 = 8n-7 \qquad (16)$$

Где n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего М2.

Назовём ряд нечётных {13, 29, 45, 61 …} - **третьим множеством** Коллатца. По аналогии с первым и вторым множеством, обозначим его М3. Позиции нечётного числа в М3 продвигают число также в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 3-го множества отличается от предыдущего на 16, и описывается формулой (17):

$$Y_n \in M_3 = 16n-3 \qquad (17)$$

где n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего М3.

И так далее. У каждого множества своя формула числа, которая в общем виде выглядит, как (18):

$$Y_n \in M_m = 2^{m+1}\,n - C_m \tag{18}$$

Где: m =1,2,3… и т.д. – порядковый номер множества;
n =1,2,3… и т.д. – порядковый номер числа принадлежащего множеству;
2^{m+1} - первая константа множества Коллатца.
C_m - вторая константа множества Коллатца.

$$C_m = 2^{m+1} - Y_0 \tag{19}$$

Где: $Y_0 \in M_m$ - начальное число множества Mm.
Формула (18) имеет ограниченное применение, т.к. ей можно воспользоваться только когда известно начальное число $Y_0 \in M_m$. В таблице 2 приведен вариант определения числа $Y_n \in M_m$ с использованием предыдущего, уже известного, значения C_{m-2}. Так мы последовательно можем легко составить таблицу формул для всех множеств от M_1 до M_m

Порядковый номер: m	$Y_n \in M_m$
1	$Y_n \in M_1 = 4n-1$
3	$Y_n \in M_3 = 16n-3$
5	$Y_n \in M_5 = 64n-11$
7	$Y_n \in M_7 = 256n-43$
9	$Y_n \in M_9 = 1024n-171$
...	...
m-нечётное	$Y_n \in M_m = 2^{m+1}n - (C_{m-2}+2^{m-2})$

Порядковый номер: m	$Y_n \in M_m$
2	$Y_n \in M_2 = 8n-7$
4	$Y_n \in M_4 = 32n-27$
6	$Y_n \in M_6 = 128n-107$
8	$Y_n \in M_8 = 512n-427$
10	$Y_n \in M_{10} = 2048n-1707$
...	...
m-чётное	$Y_n \in M_m = 2^{m+1}n - (C_{m-2}+2^{m-2}5)$

Таблица 2. Таблицы определения произвольного значения $Y_n \in M_m$ с использованием предыдущего значения C_{m-2}

Подводя итог описаниям основных характеристик множеств, отметим следующий факт: множество М1, единственное из всех, следующим ходом увеличивает значение числа , все остальные M_m -множества его уменьшают.

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА

Обозначение: **W**

Определение: Производительностью числа в алгоритме Коллатца называется количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма «3X+1» за один полный шаг. В последовательности Коллатца не существует времени. Единицей отсчёта событий является шаг алгоритма. Значение производительности определяется модулем разности между очередным нечётным и исходным.

РАБОТА ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА

Обозначение: **A**

Определение: Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца - есть количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма «3X+1» за несколько последовательных шагов в пределах одного множества, в пределах интервала последовательности, или всей последовательности.

2.2 ОПИСАНИЕ МЕХАНИЗМА ПЕРЕХОДА ЧИСЛА ИЗ ОДНОГО МНОЖЕСТВА В ДРУГОЕ

Возьмём число 7. В результате исполнения алгоритма (3X+1)/2, число 7 увеличилось примерно в 3/2 раза, переместилось в позицию числа 11. На маленьких числах, таких как 7 и 11, неочевидно, но на больших: значением +1 в формуле алгоритма можно пренебречь, и тогда действительно, в результате действия (3X+1)/2, число увеличивается примерно в 3/2 раза. С другой стороны очередное число 11 стало больше исходного на значение 11-7=4. Числа 7 и 11, отличающиеся на 4, принадлежат одному и тому же множеству М1. Числа множества М1 занимают позиции в натуральном ряду, которые продвигают очередное число всегда вперёд, в сторону его увеличения.

Каковы шансы теперь уже у исходного числа 11 следующим шагом остаться в этом же множестве. Шансы ещё есть. Та же самая формула увеличивает исходное число примерно в те же 3/2 раза (3·11+1)/2 =17, но теперь уже разница между очередным и исходным не 4, а 17-11=6. Потому что, действие умножения мы провели для большего числа, а 11 больше 7. С ещё большими числами будет ещё больше разница. Так число 11 переходит из первого множества в другое, потому, что очередное число 17 принадлежит уже другому множеству, если конкретно, то второму. Но большее число окажется в любом другом, потому что разница будет ещё больше. Таким образом, очевидных предпосылок остаться в исходном множестве следующим шагом, тем более последовательно несколько раз, у числа 11 нет. Нет таких же предпосылок по тем же причинам и у любого другого числа принадлежащего первому множеству. Нет таких же предпосылок остаться в исходном множестве по тем же причинам и у любого другого числа принадлежащего вообще любому множеству.

Механизм перехода из одного множества в другое является математическим описанием известного закона перехода количественных изменений в качественные. Число в новом множестве обретает возможность изменяться алгоритмом уже с другим делителем, поэтому переход числа в другое множество всегда является качественным переходом.

Алгоритм «3X+1» имеет закономерный механизм перехода из одного множества нечетных в другое. Алгоритму не важно в какую сторону будет изменяться очередное число. Он просто совершает свою работу. Каждая вторая позиция числа в натуральном ряду принадлежит первому множеству. Вероятность попадания очередного числа в первое множество равна 50 на 50. Такая же вероятность попадания очередного числа в любое из множеств М2, М3, М4 … M_m, ведь они также занимают каждую вторую позицию. Один очередной шаг, следующий и т.д. В какую бы сторону мы не направились, мы можем оказаться вообще в любом множестве, в любой момент сменить направление.

Теперь, когда мы знаем механизм перехода числа из одного множества в другое, когда знаем формулу числа каждого множества, каждый шаг алгоритма можно легко просчитать. Это только подтверждает, что абсолютно все последовательности Коллатца закономерны.

Рассмотрим первые 32 числа из множества нечётных Коллатца M1 (Рисунок 8). Порядковый номер числа в M1определим по формуле (15). Прибавим к числу единицу и разделим результат на четыре.

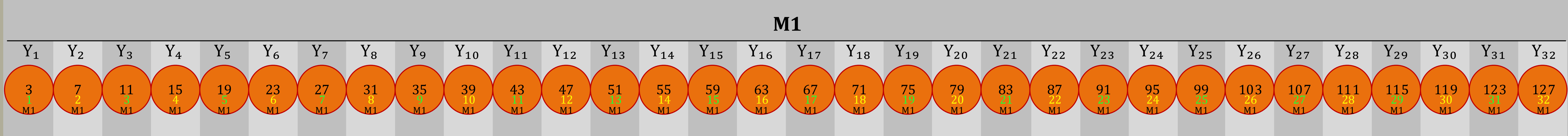

Рис.8 Первое множество Коллатца

Для наглядности, числа первого множества будем различать по цветовым признакам, в зависимости от чётности их порядкового номера, как на Рис 9.

Рис.9 Цветовые признаки чётности порядкового номера чисел из множества нечётных Коллатца M1

Числа, принадлежащие множествам M2, M3, M4 … M_m обозначим зелёным цветом как на Рис.10:

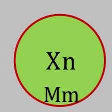

Рис.10 Цветовые признаки множеств нечётных Коллатца M2, M3, M4 … Mm.

Найдём очередное значение каждого числа из M1 (Рис.11).

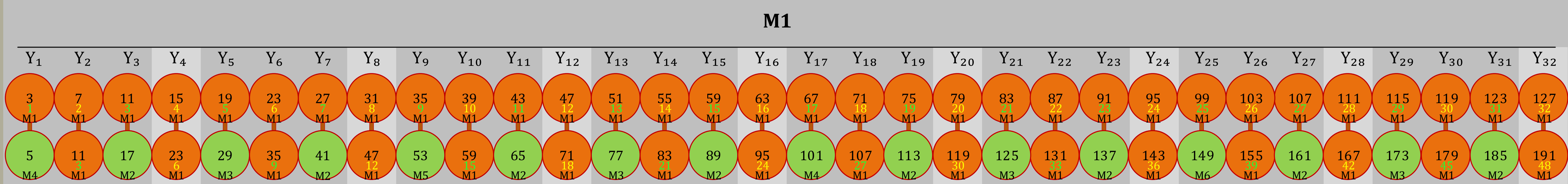

Рис.11

После первого хода все числа множества M1, с нечётным порядковым номером Y_1, Y_3, Y_5 … перешли в одно из множеств M2, M3, M4 … M_m. а числа с чётным Y_2, Y_4 , Y_6 … остались в M1. **Но, каждое второе чётное, т.е. ровно половина от их общего числа, осталось в M1 чётным.** Вторая половина чётных в M1 перешла в разряд нечётных, значит следующим ходом из нечётных эта часть перейдёт в одно из множеств M2, M3, M4 … M_m. Как видим из Рис.11 - такое поведение чисел M1, в результате действия на них алгоритма Коллатца является закономерным.

Выполним очередной шаг алгоритма.

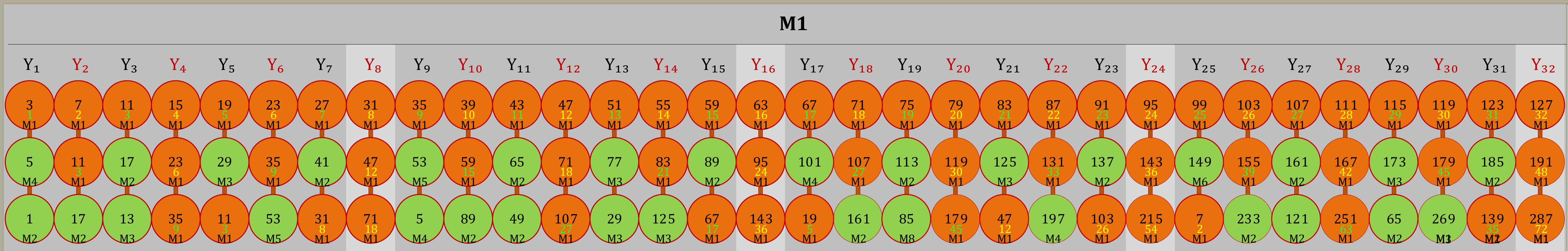

Рис.12

Очередное число в каждой четвёртой последовательности из M1 стало меньше исходного. Эти последовательности Y_1, Y_5, Y_9, Y_{17}, Y_{21}, Y_{25}, Y_{29} мы больше рассматривать не будем. Исходим из того, что число меньше исходного, является числом проверенным, и относится к уже известным, ранее пройденным и завершённых единицей маршрутам.

Количество чётных последовательностей только с чётными порядковыми номерами входящих в них чисел, сократилось вдвое: было восемь: Y_4, Y_8 , Y_{12} Y_{16}, Y_{20} , Y_{24}, Y_{28} , Y_{32}, стало четыре: Y_8 , Y_{16}, Y_{24}, Y_{32},

Выполним очередной шаг алгоритма.

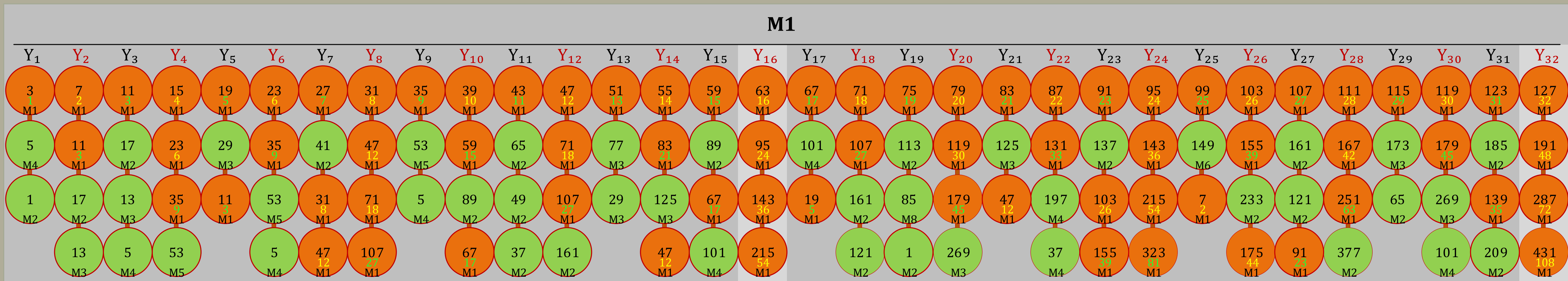

Рис.13

Из оставшихся - третья часть стала меньше исходного. Эти последовательности Y_3, Y_6, Y_{11}, Y_{14}, Y_{19}, Y_{22}, Y_{27}, Y_{30} мы также больше рассматривать не будем. Количество чётных последовательностей только с чётными номерами входящих в них чисел опять сократилось вдвое, было четыре: Y_8 , Y_{16}, Y_{24}, Y_{32}, стало две: Y_{16}, Y_{32}.

Выполним очередной шаг алгоритма.

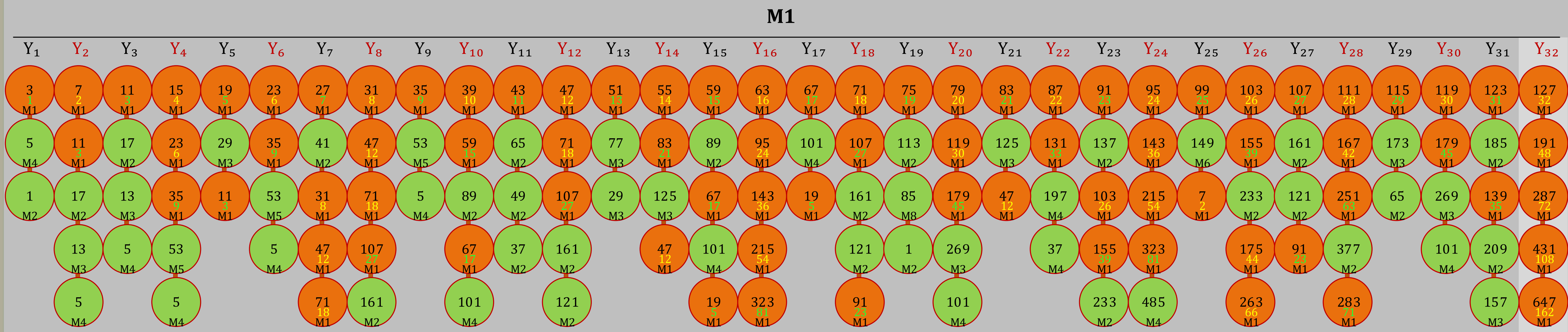

Рис.14

Количество последовательностей только с чётными номерами входящих в неё чисел опять сократилось вдвое, было две: Y_{16}, Y_{32}, осталась одна : Y_{32}. Следующим шагом исчезнет и эта. Но, далее в натуральном ряду, ещё остаются Y_{64}, Y_{128}, … и т.д.

В бесконечном натуральном ряду существует бесконечное количество последовательностей, принадлежащих M_1, состоящих только из чисел с чётными порядковыми номерами отстоящих друг от друга на дистанции 2^n, до тех пор пока очередным “n+1”- ходом они не перейдут в число с нечётным порядковым номером, а затем в одно из множеств M2, M3, M4… и т.д. Таким образом, можно утверждать: любая последовательность, состоящая только из чисел с чётными порядковыми номерами в M1, отстоящими друг от друга на дистанции 2^n **конечна**.

Можно предположить, что самая длинная последовательность имеет исходное из M1 с порядковым номером 2^n, при $n \to \infty$, или просто содержит такие числа.

Проведём дополнительную работу по изучении структуры множества M1. Рассмотрим фрагмент произвольной последовательности:

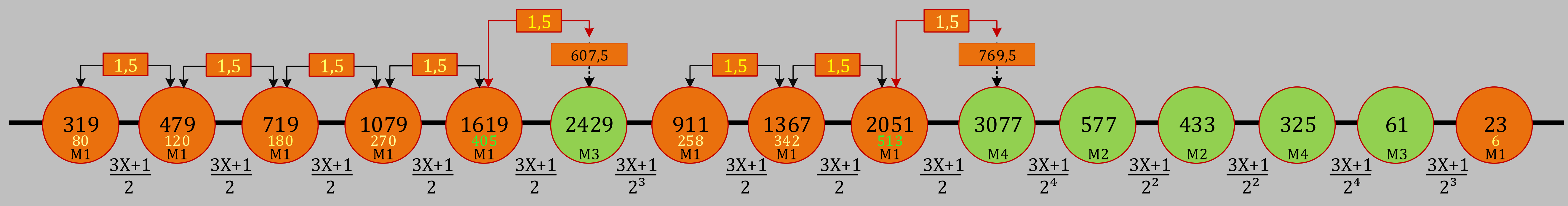

Рис.15 Фрагмент последовательности с исходным 319

Обратим внимание на одну закономерность, касающуюся последовательности чисел с чётными порядковыми номерами в M1. В результате действия алгоритма число увеличивается приблизительно в 1,5 раза, в соответствии с полной формулой алгоритма (20), :

$$\frac{3 \cdot 479+1}{2} = 719 \quad \Rightarrow \quad \frac{719}{479} \approx 1{,}50104 \tag{20}$$

а порядковый номер очередного числа увеличивается ровно в 1,5 раза (21):

$$\frac{\{120\}}{\{80\}} = 1{,}5\ ; \quad \frac{\{180\}}{\{120\}} = 1{,}5\ ; \quad \frac{\{270\}}{\{180\}} = 1{,}5\ ; \quad \frac{\{405\}}{\{270\}} = 1{,}5\ ; \quad \frac{\{342\}}{\{228\}} = 1{,}5\ ; \quad \frac{\{513\}}{\{342\}} = 1{,}5\ ; \tag{21}$$

Почему так происходит, становится ясно, после того как применим алгоритм к формуле (15) числа, принадлежащего M1:

$$\frac{3 \cdot (4n-1)+1}{2} = \frac{12n-2}{2} = 6n-1 \tag{22}$$

Алгоритм, воздействуя на формулу числа M1 изменил значение коэффициента при номере n числа в формуле (22). Было 4n-1 стало 6n-1, а 6/4=1,5.
Увеличение чётного в 1,5 раза, последовательно несколько раз, в конечном итоге закономерно приводит к нечётному. Движение чётного к нечётному через умножение на 1,5 равносильно делению чётного пополам, значит движение чётного к нечётному в M1 для любого чётного закономерно. Другой закономерностью множества M1 является неизбежность перехода числа с нечётным порядковым номером следующим ходом в одно из множеств M2, M3, M4 … M_m. Это видно из Рис.15. Например, при умножении нечётного номера $Y_n=\{405\}\in M_1$ числа 1619 на 1,5 очередное число 2429 должно было получить порядковый номер в M1 $Y_n=\{607{,}5\}\in M_1$, но число {607,5} не является натуральным, значит номером чего либо оно не может быть. Оно занимает промежуточное положение между двумя рядом стоящими номерами $\{607\}\in M_1$ и $\{608\}\in M_1$. Так число 2429 оказалось в другом множестве, а именно M3, но уже с натуральным порядковым номером $\{152\}\in M_3$. Следующим ходом число 2429 вернулось в M1, но уже в другой последовательности чётных. Между отдельными последовательностями чётных в M1 не существует возможности перехода из одной в другую не покидая M1. Сценарий движения числа с чётным порядковым номером в M1, всегда один: сначала закономерное движение к нечётному, а затем переход в любое другое множество. Коэффициент 1,5 является простым и удобным инструментом распознавания группы нечётных в M1, следующих один за другим по алгоритму Коллатца. Последовательности чисел, непрерывно следующих в одном и том же множестве M1 можно объединить в отдельные ряды групп: одиночных, двух, трёх, четырёх и т.д.

Для наглядности, ряды групп первого множества будем различать по цветовым признакам как на Рис9:

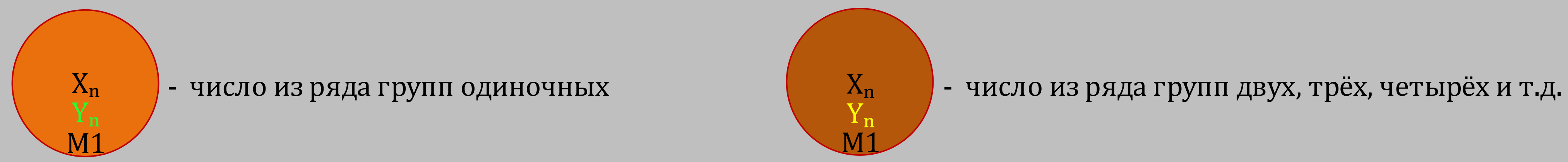

Рис.16 Цветовые признаки числа принадлежащего одному из рядов групп нечётных множества М1

2.3 РЯДЫ ГРУПП МНОЖЕСТВА М1 НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Группа нечётных М1 - последовательность нечётных М1, в которой порядковый номер очередного больше предыдущего ровно в 1,5. Количество членов в группе нечётных может быть любым, в том числе состоящей из одного, с нечётным порядковым номером. Если группа состоит из нескольких нечётных, то её возглавляет нечётное-**лидер** с чётным порядковым номером, а замыкает группу **замыкающее** с нечётным порядковым номером (Рис.17).

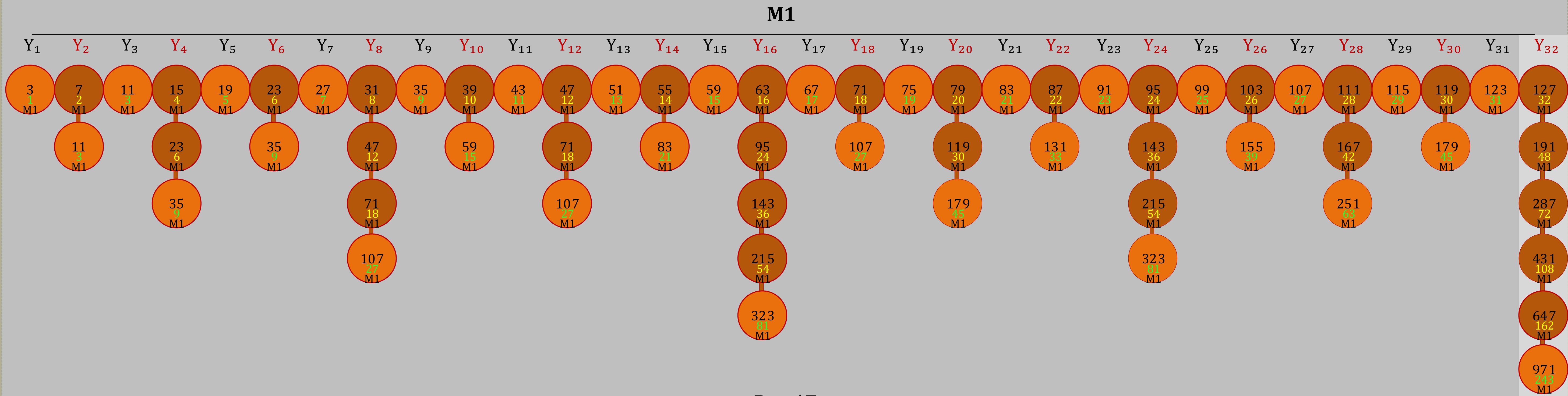

Рис.17

В математике при решении уравнений часто применяют метод приведения подобных. Нечто подобное выполним и мы для множества групп принадлежащих М1. Разделим множество групп, представленных Рис.17, по признаку количества находящихся в них членов:

M1

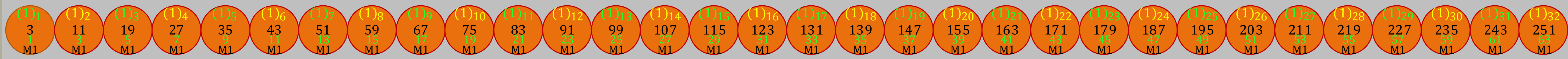

Рис.18 Множество одиночных $(1)_n \in M_1$

Очередное число ряда нечётных одиночных отличается от предыдущего на одно то же значение 8, и оно описывается формулой (23):

$$(1)_s \in M_1 = 8s-5 \qquad (23)$$

где s = 1, 2 , 3 … - порядковый номер натурального в ряду нечётных одиночных $(1)_s$, принадлежащих M1.

Например числом с порядковым номером s=14 из ряда $(1)_s \in M_1$ является: $(1)_{14} \in M_1 = 8 \cdot 14 - 5 = 107$.

Если требуется определить какое положение будет занимать число из натурального ряда $X_{107} = 107$ в ряде $(1)_s \in M_1$: $X_{107} \in (1) = (107+5)/8 \Rightarrow X_{107} \in (1) = 14$

M1

Рис.19 Множество двух $(2)_n \in M1$

Очередное число-лидер ряда нечётных двух отличается от предыдущего на одно то же значение 16, и оно описывается формулой (24):

$$(2)_s \in M_1 = 16s-9 \qquad (24)$$

M1

Рис.20 Множество трёх $(3)_n \in M1$

Очередное число-лидер ряда нечётных трёх отличается от предыдущего на одно то же значение 32, и оно описывается формулой(25):

$$(3)_s \in M_1 = 32n-17 \tag{25}$$

И так далее. Каждый следующий ряд, содержащий большее количество членов в группе описывается формулой общего вида (26):

$$(G)_s \in M_1 = 2^{G+2}n - (2^{G+1}+1) \tag{26}$$

Где G-номер ряда, с количеством членов в группе равным G.

s - порядковый номер числа в ряде (G).

В таблице 3 приведены формулы первых десяти рядов групп нечётных принадлежащих множеству M1

Порядковый номер: s	$(G)_s \in M_1 = 2^{G+2}n - (2^{G+1}+1)$
1	$(1)_s = 8n-5$
2	$(2)_s = 16n-9$
3	$(3)_s = 32n-17$
4	$(4)_s = 64n-33$
5	$(5)_s = 128n-65$
6	$(6)_s = 256n-129$
7	$(7)_s = 512n-257$
8	$(8)_s = 1024n-513$
9	$(9)_s = 2048n-1025$
10	$(10_s = 4096n-2049$
И т.д.	. . .

Таблица 3. Таблица формул рядов групп нечётных принадлежащих множеству M1

Таким образом, каждое нечётное, принадлежащее M1 анатомически проявляет себя, как минимум, в трёх измерениях. В каждом из этих измерений число имеет свой порядковый номер. Совокупность всех признаков числа определяет его положение в структуре множества нечётных M1. На **Рис.21** представлена анатомия нечётного числа, принадлежащего множеству M1:

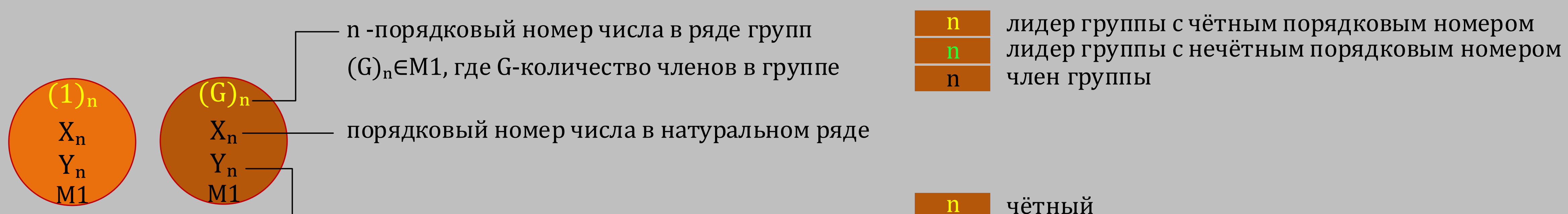

Рис.21 Анатомия нечётного числа, принадлежащего множеству M1

2.4 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность.

Сделаем выборку последовательностей следующих по сценарию неуклонного продвижения вперёд.
Мы уже знаем, что неуклонное продвижение нечётного с чётным порядковым номером ВПЕРЁД в пределах одного множества M1 ограничено. Оно завершается числом с нечётным порядковым номером и следующим шагом переходит в одно из множеств M2, M3, M4, … M_m. Другим самым очевидным сценарием неуклонного продвижения вперёд является чередование нечётных M1и M2. Сценарий, в котором число покидая множество M1 попадает в M2, а следующим шагом возвращается в M1, в любой из рядов групп нечётных M1.

Любые другие чередования с привлечением множеств M3, M4, M5 … M_m малопригодны для выявления сценариев неуклонного продвижения вперёд, потому что они, чаще всего, возвращают число к исходному и ниже исходного.

Фрагменты последовательностей нечётных с чётным порядковым номером в M1в любой произвольной последовательности всегда содержат нечётное из ряда одиночных в качестве завершающего (Рис.17), поэтому ряд одиночных (Рис.22) можно рассматривать в качестве базового, при построении ряда закономерных последовательностей

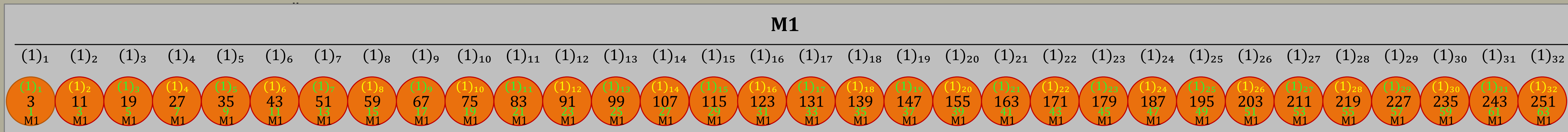

Рис.22

Из ряда одиночных групп нечётных М1 сделаем первый шаг по алгоритму Коллатца к очередному нечётному (Рис.23):

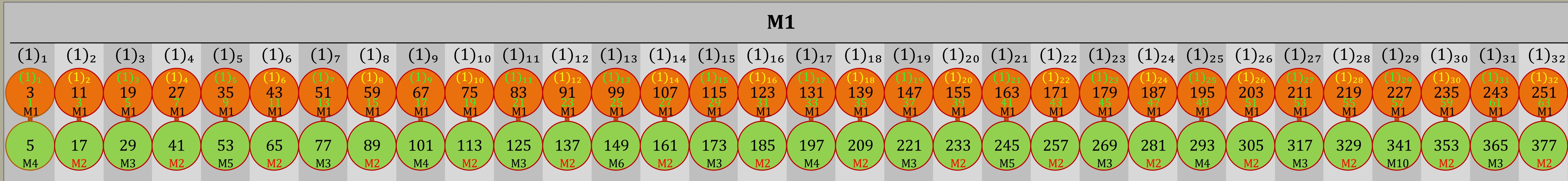

Рис.23

Каждое число ряда одиночных является исходным для своей отдельной последовательности. После первого шага все числа ряда одиночных с чётным порядковым номером $(1)_2$,$(1)_4$, $(1)_6$ ... перешли в М2, а числа с нечётным порядковым номером $(1)_1$, $(1)_3$, $(1)_5$ ... перешли в одно из множеств М3, М4, М5 … M_m. Любое из множеств М3, М4, М5 … M_m следующим шагом возвращает число ниже исходного, поэтому сценарии представленные этими линиями далее не рассматриваем. Но, зафиксируем факт: все числа ряда одиночных с **нечётным** порядковым номером, пошли по сценарию уменьшения числа, а все числа ряда одиночных с чётным порядковым номером, остаются в сценарии неуклонного продвижения вперёд.

Опираясь на этот факт, далее, когда мы будем выполнять структурный анализ произвольной последовательности, мы разделим маршруты исходного в пределах отдельных групп с учётом чётности порядковых номеров их членов.

Сделаем выборку чисел ряда одиночных с чётным порядковым номером $(1)_2$,$(1)_4$, $(1)_6$ ... $(1)_s$.

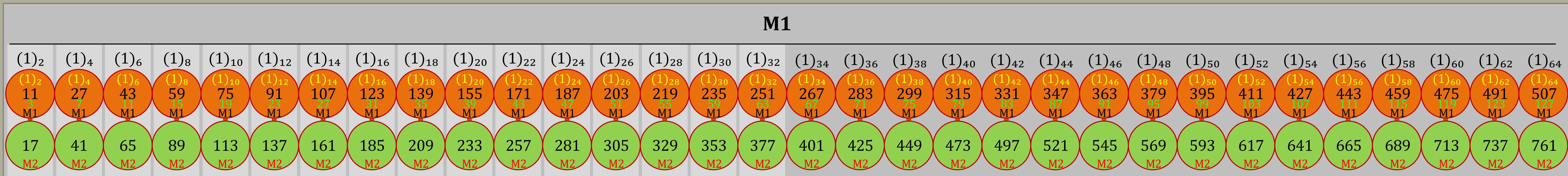

Рис.24

Выполним очередной шаг алгоритма для каждой отдельной последовательности, с исходным из ряда одиночных групп нечётных М1с чётным порядковым номером.

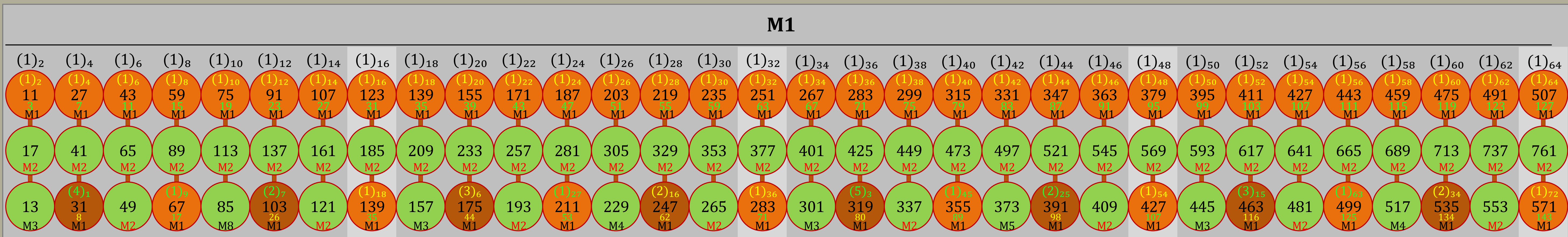

Рис.25

Из 32 представленных последовательностей осталось четыре $(1)_{16}$, $(1)_{32}$, $(1)_{48}$, $(1)_{64}$ в которых соблюдается чередование одиночных с чётным порядковым номером $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (1)_s \in M1$.

Сформируем из них новый бесконечный ряд последовательностей, с исходными из ряда одиночных.

Из Рис.25 выделим последовательности $(1)_8$, $(1)_{16}$, $(1)_{24}$, $(1)_{32}$ ... и т.д., следующие по сценарию $(1)_s \in M1 \Rightarrow \{M2 \Rightarrow (1)_s \in M1\}$. Содержащееся в скобках $\{M2 \Rightarrow (1)_s \in M1\}$ есть повторяющийся фрагмент. Для краткости обозначим такой сценарий последовательностей как $F_k\{(1)_s, \{M2, (1)_s\}\}$, где индекс k при F_k показывает порядковый номер очередной выборки такого сценария из ряда одиночных.

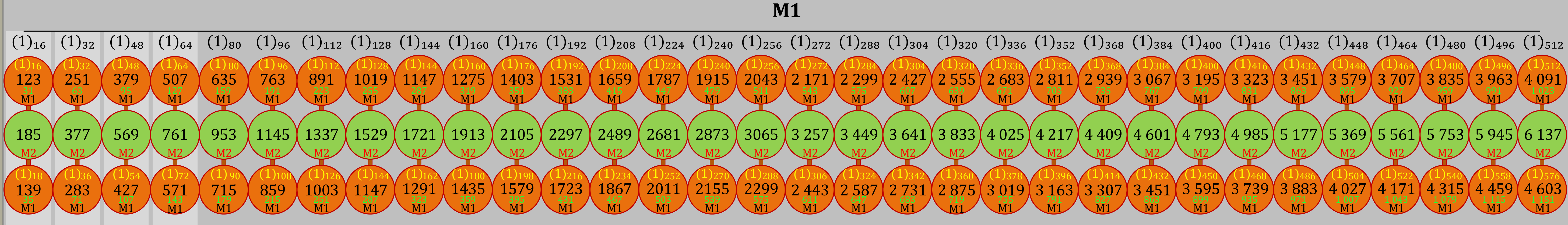

Рис.26

Каждое исходное число очередной последовательности в этом сценарии 123, 251, 379, 507 … и т.д., отличается от исходного предыдущей на 128. Таким образом исходные образуют закономерный ряд, описываемый формулой:

$$F_1\{(1)_s, \{M2, (1)_s\}\} = 128n-5 \qquad (22)$$

Выполним два следующих шага

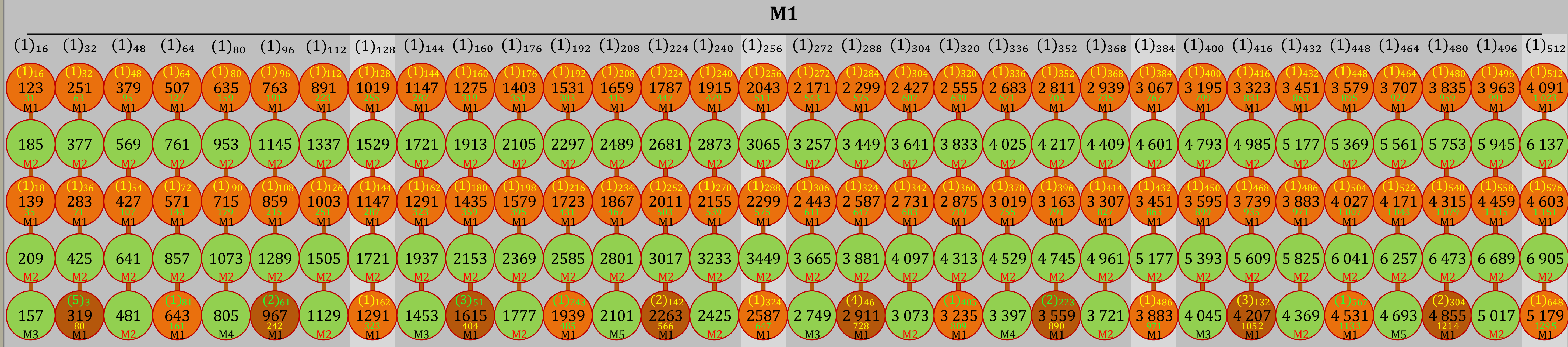

Рис.27

Из 32 представленных последовательностей осталось четыре $(1)_{128}$, $(1)_{256}$, $(1)_{384}$, $(1)_{512}$ в которых соблюдается чередование $\{M2, (1)_s\}$

Сформируем из них новый бесконечный ряд последовательностей, с исходными из ряда одиночных.

Рис.28

Каждое исходное число очередной последовательности в этом сценарии отличается от исходного предыдущей на 1024. Таким образом исходные образуют закономерный ряд, описываемый формулой:

$$F_2\,\{(1)_s\,\{M2,\,(1)_s\}\}= 1024n-5 \qquad (22)$$

Выполним два следующих шага

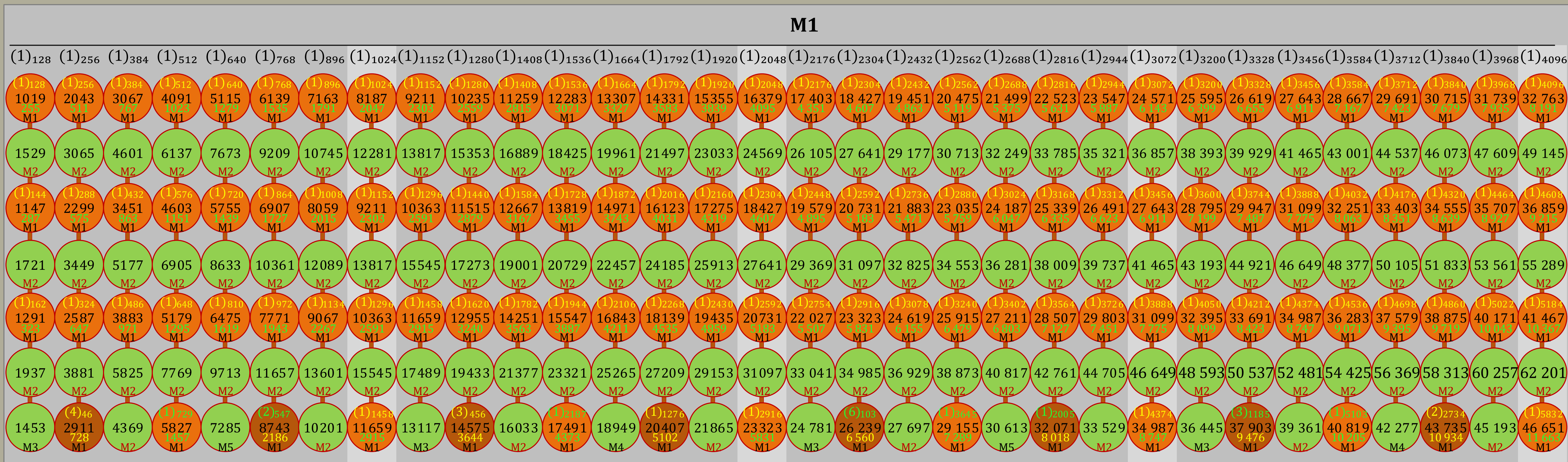

Рис.29

Из 32 представленных последовательностей опять осталось четыре $(1)_{1024}$, $(1)_{2048}$, $(1)_{3072}$, $(1)_{4096}$ в которых соблюдается чередование чисел ряда одиночных с чётным порядковым номером и чисел множества М2

После того, как мы сформируем из них новый бесконечный ряд последовательностей - каждое исходное число очередной последовательности в этом сценарии будет отличаться от исходного предыдущей уже на 8192, поэтому очередной новый ряд будет описываться формулой:

$$F_3\,\{(1)_s\,,\{M2,\,(1)_s\}\}=8192n-5 \qquad (22)$$

Так можно продолжать бесконечно. Для сценария $(1)_s \in M1 \Rightarrow \{M2 \Rightarrow (1)_s \in M1\}$.существует бесконечное количество последовательностей, описываемых формулой

$$F_k\,\{(1)_s,\{M2,\,(1)_s\}\}=2^k 64n-5 \qquad (22)$$

Где k-количество повторений сценария $\{M2,\,(1)_s\}$, по завершению которого нечётное переходит в другой сценарий.

Рассмотрим другой сценарий неуклонного продвижения нечётного вперёд, в котором число из М2 следующим шагом по алгоритму Коллатца оказывается в одном из рядов групп, состоящих из нечётных с чётным порядковым номером, например $(2)_s \in M1$. В качестве исходного используем Рис.25 ⇒ Рис.30:

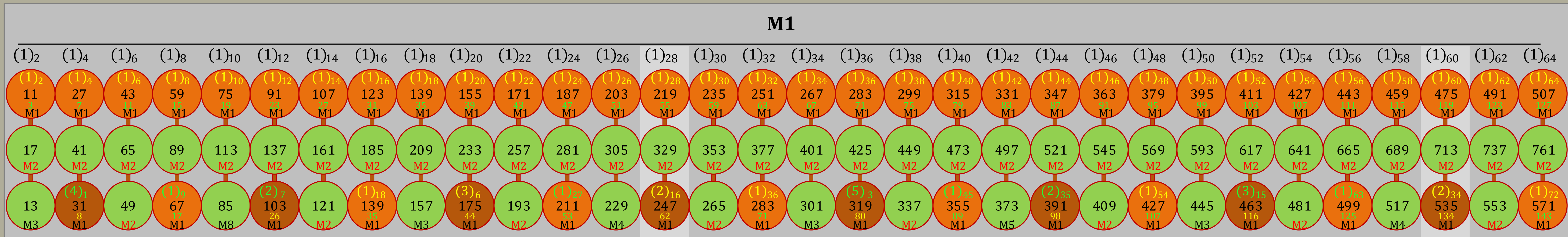

Рис.30

Из Рис.30 выделим последовательности $(1)_{12}$, $(1)_{28}$, $(1)_{44}$, $(1)_{60}$ ... и т.д., следующие по одному и тому же сценарию $(1)_s \in M1 \Rightarrow \{M2 \Rightarrow (2)_s \in M1\}$. Содержащееся в скобках $\{M2 \Rightarrow (2)_s \in M1\}$ есть повторяющийся фрагмент. Для краткости обозначим такой сценарий последовательностей как $F_k\{(1)_s,\{M2,\,(2)_s\}\}$, где индекс k при F_k показывает порядковый номер очередной выборки из ряда двух.

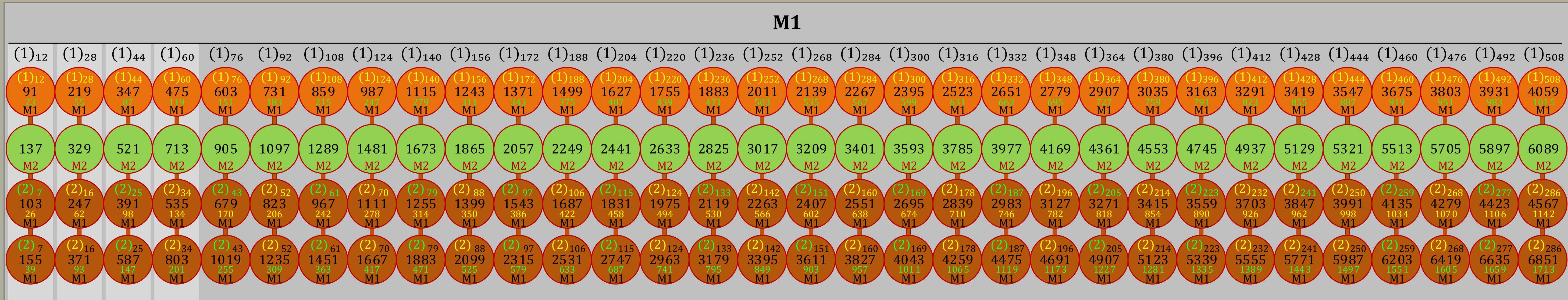

Рис.31

Каждое исходное число очередной последовательности в этом сценарии 91, 219, 347, 475 … и т.д., отличается от исходного предыдущей на 128. Таким образом исходные образуют закономерный ряд, описываемый формулой (31):

$$F_1\{(1)_n, \{M2, (2)_s\}\} = 128n-37 \quad (31)$$

Для того, чтобы увидеть повторения сценария необходимо выполнить уже три очередных шага (Рис.32)

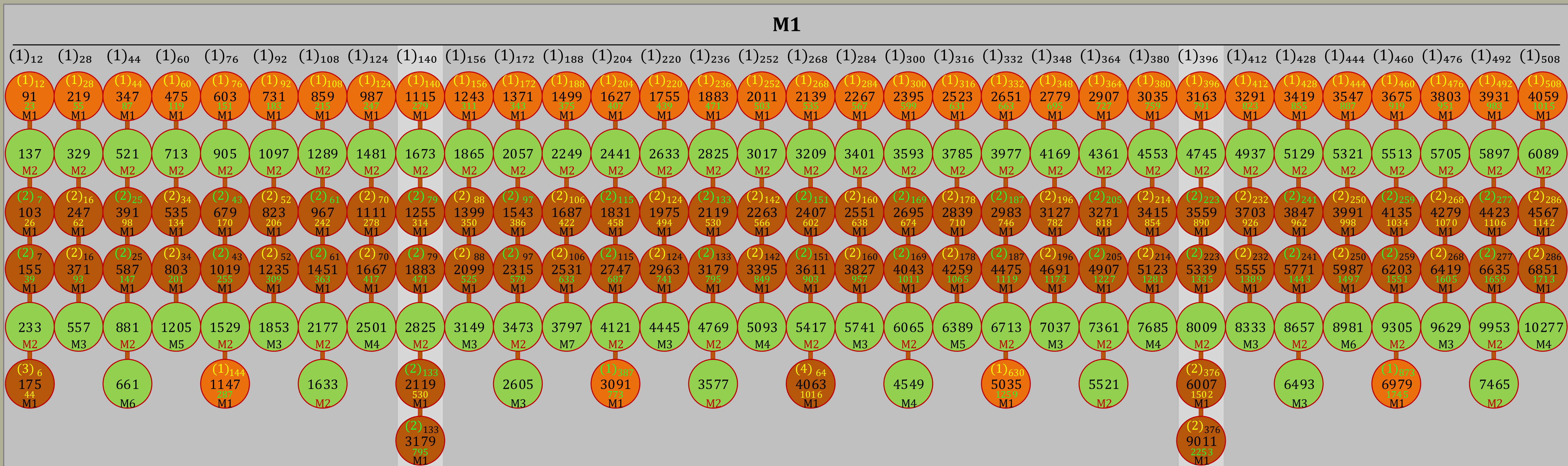

Рис.32

Все числа ряда двух с нечётным порядковым номером перешли в М2, а числа с чётным порядковым номером перешли в одно из множеств М3, М4, М5 … M_m. Любое из множеств М3, М4, М5 … M_m следующим шагом возвращает число ниже исходного, поэтому сценарии представленные этими линиями далее не рассматриваем. Но, зафиксируем факт: все числа ряда двух с **чётным** порядковым номером, пошли по сценарию уменьшения числа, а все числа ряда двух с **нечётным** порядковым номером, остаются в сценарии неуклонного продвижения вперёд.

Из 32 представленных последовательностей осталось две $(1)_{140}$, $(1)_{396}$, в которых соблюдается чередование $\{M2, (2)_s\}$

Сформируем из них новый бесконечный ряд последовательностей, с исходными из ряда одиночных (Рис.33)

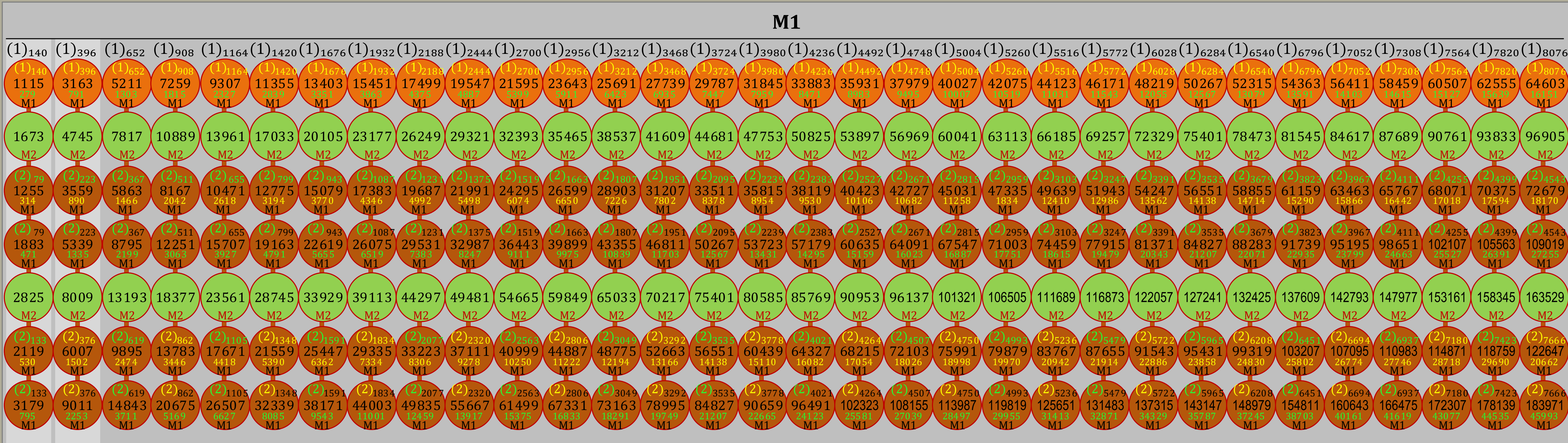

Рис.33

Каждое исходное число очередной последовательности в этом сценарии 1115, 3163, 5211,7259 … и т.д., отличается от исходного предыдущей на 2048. Таким образом исходные образуют закономерный ряд, описываемый формулой (32):

$$F_2\{(1)_n, \{M2, (2)_s\}\} = 2048n-933 \quad (32)$$

Выполним три очередных шага (Рис.34)

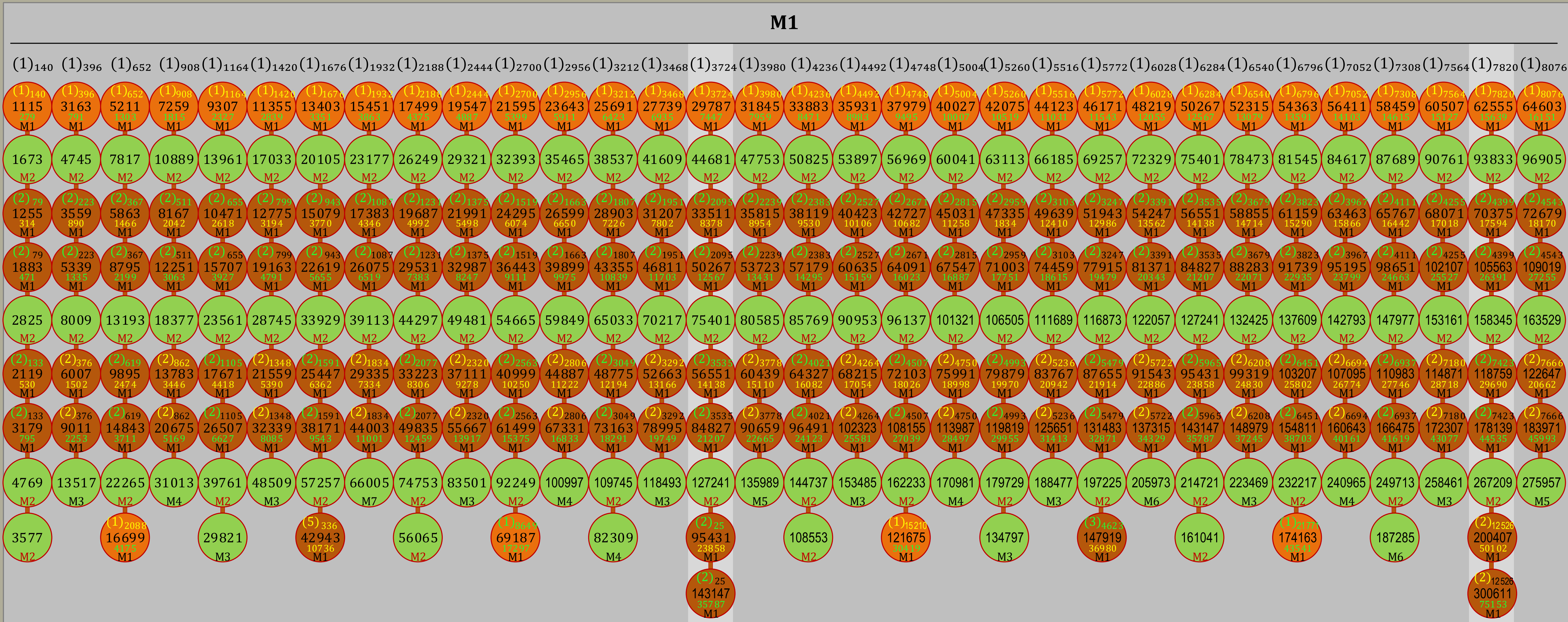

Рис.34

Из 32 представленных последовательностей осталось опять две $(1)_{140}$, $(1)_{7820}$, в которых соблюдается чередование {M2, $(2)_s$∈M1}. Можно из них сформировать новый бесконечный ряд последовательностей, и так продолжать бесконечно. Но, самое главное, что мы должны вынести из этих преобразований: каждая отдельно взятая последовательность, с исходным из ряда одиночных, принадлежащих множеству M1 – конечна, и имеет свой максимум. При этом, максимум в очередной последовательности увеличивается вместе с ростом исходного.

Существует бесконечное количество других сценариев $(1)_s$∈M1⇒{M2, $(G)_s$∈M1} или $(1)_s$∈M1⇒{M_m, $(G)_s$∈M1}⇒M_m ⇒ ...), т.е., любых других сценариев, чередование которых обеспечивает продвижение вперёд. Проделав подобные преобразования и с ними, мы убедимся, что каждая отдельно взятая последовательность, состоящая из чередования этих сценариев также конечна. Причина одна и та же – переход количественных изменений в качественные, которые происходят с очередным числом в результате действия алгоритма.

В результате действия закона перехода количественных изменений в качественные, каждый очередной шаг алгоритма делит общее количество сценариев ВПЕРЁД пополам, при этом одна половина последовательностей продолжает следовать сценарию ВПЕРЁД, и в итоге приходит к своему максимуму, а другая половина следует сценарию НАЗАД. Аналогично, можно утверждать, что каждый очередной шаг алгоритма делит общее количество сценариев НАЗАД также пополам, при этом ровно половина из них встанет опять на путь сценария продвижения ВПЕРЁД, но уже с меньших стартовых позиций. Из этого следует два вывода:

Вывод 1: не существует количественного доминирования одного сценария над другим.

Вывод 2: сценарий продвижения ВПЕРЁД с меньших стартовых позиций в очередных этапах указывает на стремление алгоритма, перемещаться в область меньших значений, т.е. в сторону единицы.

Из всех натуральных мы сделали выборку таких, которые обеспечивают продвижение вперёд. И получили результат: каждая отдельно взятая последовательность, состоящая из чередования абсолютно любых сценариев, чередование которых обеспечивает продвижение вперёд – конечна и имеет свой максимум.
У любой известной последовательности, фрагмента последовательности с известным исходным и известным максимумом найдётся впереди бесконечное количество таких же фрагментов, но уже с другим максимумом, и если каждая из них – конечна, значит, из всех натуральных, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, не существует таких, которые бы уходили в бесконечность. **Утверждение 2 ДОКАЗАНО**.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ ...

Библиографический список:

1. Тао, Теренс. [Электронный ресурс] // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тао,_Теренс (дата обращения: 21.03.2025)

2. Derek Muller. Самая простая нерешённая задача – гипотеза Колатца [Veritasium]/[Электронный ресурс]// Студия Vert Dider: сайт. - URL: https://youtu.be/QgzBDZwanWA?si=QW5HRHFjov1Y5F5l (дата обращения: 21.03.2025)