## Содержание

## Введение

В современной теории сетей и графов часто возникает задача упрощения сложных моделей при сохранении их ключевых свойств. Метод редукции графов Крона — названный в честь инженера Габриэля Крона — предоставляет систематический подход к сокращению числа узлов в графе без существенной потери информации. Изначально возникнув в середине XX века в контексте электрических цепей, этот метод позволяет заменять фрагменты сети электрически эквивалентными более простыми схемами. Применяя редукцию Крона, исследователи могут преобразовать большой граф (например, модель энергосистемы) в меньший граф, который легче анализировать и обрабатывать, сохраняя при этом основные характеристики оригинальной сети.

## Основы метода

Ключевая идея метода Крона состоит в устранении внутренних узлов графа с одновременной корректировкой связей между оставшимися узлами. Математически этот процесс эквивалентен вычислению так называемого дополнения Шура матрицы Лапласа графа (матрицы проводимостей) по отношению к выбранному подмножеству узлов. Проще говоря, если представить исходный граф в виде матрицы проводимости между узлами, то редукция Крона вычисляет новую, уменьшенную матрицу для оставшихся узлов, учитывая влияние исключенных узлов. Такой подход гарантирует, что электрические свойства графа (например, токи и напряжения в случае цепей) для наблюдаемых узлов остаются теми же, как если бы удаленные узлы все еще присутствовали.

Важно отметить, что редукция Крона сохраняет эффективное сопротивление между оставшимися узлами графа. Эффективное сопротивление между двумя узлами — это величина, определяющая условное сопротивление всей сети между этими узлами при единичном токе. Благодаря редукции Крона, такие метрические свойства графа, как эффективное сопротивление, остаются неизменными для пар узлов, оставшихся после исключения промежуточных вершин. Более того, метод Крона не нарушает связность графа: если исходный граф был связным (или сильно связным в случае ориентированного графа), то и редуцированный граф сохраняет эту структуру.

Метод Крона базируется на идее упрощения сетевых моделей путем устранения внутренних узлов с сохранением электрической эквивалентности. Рассмотрим взвешенный связный неориентированный граф $\mathrm{G}$ с множеством узлов $\mathrm{V}$ и матрицей лапласиана (или проводимостей) $\mathrm{Q} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. Элементы $\mathrm{Q}$ задаются так: $\mathrm{Q}_{\mathrm{ij}} = -\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$ для $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, а на диагонали$\mathrm{Q}_{\mathrm{ii}} = \mathrm{A}_{\mathrm{ii}} + \sum_{\mathrm{j}\neq\mathrm{i}} \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$. Здесь $\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$— вес ребра (например, проводимость) между узлами $\mathrm{i}$ и $\mathrm{j}$.

Для выделения интересующей подсети узлов $\alpha \subset V$ вводится разбиение множества узлов на граничные узлы $\alpha$и внутренние узлы $\beta = V \setminus \alpha$. Тогда матрица $Q$ представляется в блочном виде:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{\alpha\alpha} & Q_{\alpha\beta} \\ Q_{\beta\alpha} & Q_{\beta\beta} \end{pmatrix}.$$

Редукция Крона заключается в вычислении дополнения Шура относительно внутренних узлов $\beta$. В результате получается редуцированная матрица:

$$Q_{\mathrm{red}} = Q_{\alpha\alpha} - Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\beta}^{-1} Q_{\beta\alpha}.$$

Она представляет собой корректную матрицу лапласиана (включая возможные шунты на узлах) и задает эквивалентный граф, в котором сохранены токи и напряжения на узлах $\alpha$. Таким образом, для узлов $\alpha$ выполняется соотношение:

$$I_\alpha = Q_{\mathrm{red}} V_\alpha,$$

где $I_\alpha$ и $V_\alpha$ — векторы токов и напряжений на граничных узлах.

## Физическая интерпретация

Редукция Крона эквивалентна электрическому эквивалентированию схемы. При условии отсутствия внешних токов в узлах β (нагрузки отсутствуют), выполняется баланс токов, и токи и напряжения на узлах α остаются такими же, как если бы узлы β присутствовали в сети. Таким образом, редуцированная схема корректно отражает электрические свойства исходной сети для граничных узлов.

## Свойства

Метод Крона обладает рядом ключевых свойств:

- Сохранение эффективного сопротивления. Эффективное сопротивление между любыми двумя граничными узлами не изменяется при редукции. Эффективное сопротивление $R_{ij}$ вычисляется как: $R_{ij} = (e_i - e_j)^\top Q^\dagger (e_i - e_j)$, где $e_i$ и $e_j$ — стандартные базисные векторы, а $Q^\dagger$ — псевдообратная матрица $Q$.
- Уплотнение связей. При редукции графа могут появляться новые ребра между оставшимися узлами, если существовали пути через исключенные узлы.
- Перемежающийся спектр. Для положительно определенных лапласианов собственные значения редуцированной матрицы вписаны в спектр исходной матрицы (между некоторыми соседними значениями).
- Сохранение связности. Если исходный граф связен, редуцированный граф также будет связным.

## Ориентированные графы

Для ориентированных графов также возможна редукция Крона. Здесь матрица $Q$ может быть несимметричной, однако сохраняется форма дополнения Шура:

$$Q_{\mathrm{red}} = Q_{\alpha\alpha} - Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\beta}^{-1} Q_{\beta\alpha}.$$

При этом сохраняются важные свойства, такие как сильная связность (если исходный граф сильно связен) и, при определенных условиях, весовой баланс. Также для ориентированных графов определяется обобщенное эффективное сопротивление на основе марковских процессов, которое также сохраняется при редукции.

Таким образом, редукция Крона выступает как универсальный инструмент для упрощения анализа сетей с сохранением их ключевых характеристик.

## Применения метода Крона

Метод редукции графов Крона нашел широкое применение в различных областях:

- Энергетические системы. В электрических энергосетях редукция Крона давно используется для упрощения схем при расчетах устойчивости и режимов. Большие энергосистемы можно заменить эквивалентными по периферии моделями меньшего размера. Например, внешние узлы и линии электропередачи, мало влияющие на интересующую область сети, могут быть “свернуты” с помощью метода Крона. Полученная эквивалентная схема содержит меньше узлов, что упрощает моделирование, но ведет себя практически так же, как исходная сеть на границе сочленения.
- Оптимизация топологии сетей. В современных исследованиях предлагаются алгоритмы, совмещающие редукцию Крона с методами оптимизации для выбора наилучшего подмножества узлов, подлежащих исключению. Одним из таких подходов является OptiKRON, позволяющий добиться сокращения числа узлов в модели сети на 80–95% при минимальном отклонении результатов. Такие оптимизированные техники особенно полезны для больших графов, где прямое применение редукции может привести к накоплению погрешности или избыточным связям между оставшимися узлами.
- Микросети и управление. В рамках интеллектуальных энергосистем и микросетей метод Крона внедряется для улучшения управляемости и надежности. Разработаны алгоритмы редукции Крона, которые в реальном времени упрощают модель распределенной энергосети по мере изменения ее конфигурации. Это находит применение, например, в распределенном управлении частотой: коммуникационная сеть управляющих устройств сокращается динамически, исключая узлы и связи, незначимые для текущего режима, что повышает экономичность и стабильность контроля.

- Анализ свойств графов. Редукция Крона является не только прикладным, но и теоретическим инструментом в графовой теории. Недавно метод был обобщен на ориентированные графы: показано, что правильное применение процедуры редукции сохраняет важные структурные свойства, такие как сильная связность или балансировка весов дуг. Кроме того, сохраняются и специальные метрики, например упомянутое выше эффективное сопротивление, даже в направленных графах (с определенными условиями). Это открывает возможности для анализа устойчивости и проходимости сложных сетей, включая, например, сети транспорта или коммуникаций, с использованием аппарата редукции Крона.

## Заключение

Метод редукции графов Крона зарекомендовал себя как мощный инструмент для упрощения сложных сетевых моделей. Сохраняя ключевые электрические и структурные свойства исходного графа, редукция Крона позволяет исследователям и инженерам значительно снизить расчетную сложность, что особенно актуально при работе с большими системами. Современное развитие метода — от оптимизированных алгоритмов выбора узлов до распространения на нелинейные и ориентированные сети — подтверждает его актуальность и гибкость. Благодаря этим достижениям метод Крона продолжает находить новые области применения, облегчая анализ и управление сложными сетями без существенной потери точности.

## Литературный обзор

В настоящее время метод редукции Крона находит широкое применение при анализе и моделировании электрических сетей (см. [1, 2, 3–7]). Его основой является использование метода дополнения Шура блочной матрицы — метода, хорошо известного в матричной алгебре и первоначально описанного в [8].

Метод редукции Крона особенно эффективен в ситуациях, когда математическая модель системы строится на основе графов. Это характерно, в частности, для ряда работ [1, 2] и других исследований, в которых активно применяются матричные характеристики графов, включая матрицы инцидентности, смежности, валентности и лапласианы.

Сам по себе термин «редукция» трактуется в литературе как процесс уменьшения, сокращения или снижения. В контексте математического моделирования редукция чаще всего означает понижение порядка, степени или размерности модели. Существует множество подходов к такой редукции, одним из которых является подход, предложенный Габриэлем Кроном в [9].

В последние годы наблюдается всё более активное применение современных графовых структур, таких как гиперграфы и мета-графы, которые являются более гибкими и обобщёнными по сравнению с традиционными графами [10, 11]. Эти структуры позволяют более точно моделировать сложные взаимосвязи в инженерных, физических и информационных системах. В таких условиях особенно актуальной становится задача упрощения моделей без потери их ключевых свойств — и здесь важную роль играет метод редукции Крона.

## Список литературы


1. F. Dorfler and F. Bullo, "Kron Reduction of Graphs with Applications to Electrical Networks," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 60, no. 1, pp. 150–163, Jan. 2013, doi: 10.1109/TCSI.2012.2215780.
2. F. Dorfler, J. W. Simpson-Porco and F. Bullo, "Electrical Networks and Algebraic Graph Theory: Models, Properties, and Applications," in Proceedings of the IEEE, vol. 106, no. 5, pp. 977–1005, May 2018, doi: 10.1109/JPROC.2018.2821924.
3. R. C. Degeneff, M. R. Gutierrez, S. J. Salon, D. W. Burow and R. J. Nevins, "Kron's Reduction Method Applied to the Time Stepping Finite Element Analysis of Induction Machines," in IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 10, no. 4, pp. 669–674, Dec. 2002, doi: 10.1109/60.476184.
4. S. Y. Caliskan and P. Tabuada, "Towards Kron Reduction of Generalized Electrical Networks," in Automatica, vol. 50, no. 10, pp. 2586–2590, Oct. 2014, doi: 10.1016/j.automatica.2014.07.037.
5. N. Monshizadeh, C. De Persis, A. J. van der Schaft and J. M. A. Scherpen, "A Novel Reduced Model for Electrical Networks with Constant Power Loads," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 63, no. 5, pp. 1288–1299, May 2018, doi: 10.1109/TAC.2017.2733519.
6. A. Floriduz, M. Tucci, S. Riverso and G. Ferrari-Trecate, "Approximate Kron Reduction Methods for Electrical Networks with Applications to Plug-and-Play Control of AC Islanded Microgrids," in IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 27, no. 6, pp. 2403–2416, Nov. 2019, doi: 10.1109/TCST.2018.2877727.
7. M. Singh, S. Dhople, F. Dorfler and G. Giannakis, Time-domain Generalization of Kron Reduction, arXiv:2203.12084v1, 2022. – 15 p. – URL: https://arxiv.org/abs/2203.12084 (дата обращения: 03.06.2025).
8. J. Schur, "Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind," in Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol. 147, pp. 205–232, 1917.

9. G. Kron, Tensor Analysis of Networks, New York: Wiley, 1939. – Текст: электронный. – URL: https://archive.org/details/dli.ernet.8037 (дата обращения: 03.06.2025).

10. A. Bretto, Hypergraph Theory. An Introduction, New York: Springer, 2013. – 129 p. – ISBN 978-3-319-00080-0. – Текст: непосредственный.

11. A. Basu and R. Blanning, Metagraphs and Their Applications, New York: Springer, 2007. – 174 p. – ISBN 978-0387-37234-1. – Текст: непосредственный.