УДК 517.53, 517.54

ТЕОРЕМА РИССА-ФЕЙЕРА И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ

Ступин Д. Л.

Изложена классическая теорема Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов, охарактеризовано множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью, дано одно условие единственности такого многочлена и связь этого результата с условием единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа.

The classical Fejer-Riesz theorem for trigonometric polynomials is expounded, the set of all polynomials with a positive real part in the unit circle is characterized, and one condition for uniqueness of such a polynomial and the connection of this result with the condition for uniqueness of an extremal function in the Krzyz problem is given.

Ключевые слова: Теорема Рисса-Фейера, тригонометрические многочлены, тригонометрические полиномы, многочлены Лорана, полиномы Лорана, многочлены с положительной действительной частью, полиномы с положительной вещественной частью, класс Каратеодори, гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции

Keywords: Fejer-Riesz Theorem, trigonometric Polynomials, Laurent Polynomials, polynomials with positive real part, Caratheodory class, the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions

Введение

Обозначим единичный круг через $\Delta := \{z \;:\; z \in \mathbb{C},\; |z| < 1\}$, а единичную окружность через $\partial\Delta$.

Множество функций, имеющих положительную вещественную часть в круге Δ, обозначим через C. Это множество будем называть классом Каратеодори. Фиксируем $t > 0$. Множество функций h из C, нормированных условием $h(0) = t$, обозначим через C_t и будем называть нормированным классом Каратеодори, или просто классом Каратеодори, если это не вызовет недоразумений. Заметим, что $C = \bigcup\limits_{t>0} C_t$. Подмножество полиномов степени n из классов C и C_t обозначим соответственно через C^n и C_t^n.

Пусть $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Функция вещественного аргумента φ

$$T(\varphi) := a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$$

называется тригонометрическим многочленом степени n, если выполнено условие $a_n^2 + b_n^2 > 0$.

Утверждение 1. *Тригонометрический полином* $T(\varphi) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$ *принимает действительные значения для всех* $\varphi \in \mathbb{R}$ *если и только если все коэффициенты* a_k *и* b_k *являются действительными числами.*

Доказательство. Если $T(\varphi) \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то $T(\varphi) = \overline{T(\varphi)}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Так как

$$\overline{T(\varphi)} = \overline{a_0} + \sum_{k=1}^{n} (\overline{a_k} \cos k\varphi - \overline{b_k} \sin k\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

то

$$0 = T(\varphi) - \overline{T(\varphi)} = 2i \left(\operatorname{Im} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Im} a_k \cos k\varphi - \operatorname{Im} b_k \sin k\varphi) \right), \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Перед нами тригонометрический полином с действительными коэффициентами, тождественно равный нулю. По теореме о единственности разложения в ряд Фурье все его коэффициенты равны нулю. Что и требовалось. Обратное утверждение очевидно. ■

Очевидно, имеет место следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть задан полином*

$$H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^{n} h_k z^k, \tag{1}$$

где

$$h_0 := a_0 \in \mathbb{R}, \qquad h_k := \frac{a_k + i b_k}{2}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad h_n \neq 0. \tag{2}$$

Тогда сужение $\operatorname{Re} H$ *на единичную окружность* $\partial\Delta$ *является тригонометрическим полиномом степени* n

$$T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \tag{3}$$

В частности, если $h_k \in \mathbb{R}$ $(b_k = 0)$, $k = 1, \ldots, n$, *то*

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi.$$

Более того, если $H \in C^n$, *то* $T(\varphi) \geqslant 0$ *для всех* $\varphi \in \mathbb{R}$.

Как отмечается в статье [4], в начале XX века Л. Фейер [1] впервые обратил внимание на важность класса тригонометрических полиномов, принимающих неотрицательные значения на всей вещественной прямой. Его гипотеза о структуре таких многочленов была впоследствии доказана Ф. Риссом [2] и ныне известна как теорема Рисса-Фейера.

В этой статье мы изложим классическую теорему Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов. Доказательство теоремы Рисса-Фейера приведено ниже для полноты изложения. Его также можно найти в [3] и в [5, стр. 154].

Далее, охарактеризуем множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью. В книге [6, стр. 64] имеется задача 4, в которой нужно показать, что если коэффициенты многочлена H имеют специальный вид, то $H \in C$.

Затем, покажем единственность многочлена с положительной вещественной частью и ограничением на коэффициенты $h_0 = 2h_n$, а также укажем на связь этого результата и условия единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа. Отметим, что в [15, стр. 736] доказано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

В заключении, на основе известных свойств функций, экстремальных в проблеме Кшижа сформулируем метод построения функций, по своим свойствам напоминающих экстремальные. Обзор известных свойств функций, экстремальных в проблеме Кшижа мы здесь также приводим.

Все изложенные здесь результаты даются в замкнутой и самодостаточной форме, а ссылки на литературу приведены для дополнительного ознакомления или как источники.

1 Теорема Рисса-Фейера (комплексные коэффициенты)

Полиномом Лорана называется выражение вида

$$Q(z) = \sum_{k=-n_1}^{n_2} q_k z^k, \qquad n_1 \in \mathbb{N}, \quad n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Утверждение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq 0$, $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$. Если $T(\varphi) \coloneqq |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существуют $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, такие что*

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi).$$

Коэффициенты a_k и b_k определяются единственным образом.

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем:

$$0 \leqslant T(\varphi) = P(z)\overline{P(z)} = P(z)\overline{P(1/\bar{z})} = \sum_{k=-n}^{n} h_k z^k =: Q(z), \qquad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Заметим, что из третьего равенства непосредственно видно, что $h_{-k} = \bar{h}_k$, для всех $k = 0, \ldots, n$. Откуда $T(\varphi) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$, где $a_0 \coloneqq h_0$, $a_k \coloneqq 2\operatorname{Re} h_k$, $b_k \coloneqq 2\operatorname{Im} h_k$, $k = 1, \ldots, n$. Функция Q голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T(\varphi) = Q(e^{i\varphi})$,

$\varphi \in \mathbb{R}$, следовательно по внутренней теоремы единственности для голоморфных функций, функция Q определена единственным образом, как и её представление в виде конечного ряда лорана (многочлена Лорана). $\blacksquare$

Сформулируем и докажем утверждение, обратное утверждению 2.

Теорема 1 (Рисс, Фейер)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Если $T(\varphi) := a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существует многочлен $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$ такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Более того, P может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае P определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказательство. Если $z = e^{i\varphi}$, то $z^k = e^{ik\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$. Откуда $\cos k\varphi = \dfrac{z^k + z^{-k}}{2}$, $\sin k\varphi = \dfrac{z^k - z^{-k}}{2i}$. Такая замена преобразует тригонометрический полином T в многочлен Лорана:

$$\begin{aligned} Q(z) &:= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \frac{z^k + z^{-k}}{2} - b_k \frac{z^k - z^{-k}}{2i} \right) = \\ &= \sum_{k=n}^{1} \frac{a_k - ib_k}{2} z^{-k} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} z^k = \sum_{k=n}^{1} \bar{h}_k z^{-k} + h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k z^k, \end{aligned} \tag{4}$$

где коэффициенты h_k, $k = 1, \ldots, n$, определены формулой (2).

Рассмотрим многочлен

$$S(z) := z^n Q(z) = \bar{h}_n + \bar{h}_{n-1} z + \ldots + \bar{h}_1 z^{n-1} + h_0 z^n + h_1 z^{n+1} + \ldots + h_n z^{2n}.$$

Поскольку $h_n \neq 0$, то по основной теореме алгебры многочлен S имеет ровно $2n$ корней в комплексной плоскости с учётом их кратностей. При этом $z = 0$ не является корнем S, так как $h_n \neq 0$. Заметим, что S — возвратный многочлен.

Очевидно, что корни Q и S совпадают. Из свойств комплексного сопряжения следует, что $Q(z) = \overline{Q\left(1/\bar{z}\right)}$. Следовательно, если z_k — корень Q с $|z_k| > 1$, то $1/\bar{z}_k$ также является корнем Q (случай $|z_k| = 1$ рассмотрим ниже). Поэтому:

$$S(e^{i\varphi}) = h_n \prod_{k=1}^{n} (e^{i\varphi} - z_k) \left(e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right).$$

Учитывая, что

$$e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_k} = -\frac{e^{i\varphi}}{\bar{z}_k} \overline{(e^{i\varphi} - z_k)},$$

получаем:

$$S(e^{i\varphi}) = h_n \frac{(-1)^n e^{in\varphi}}{\bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^{n} |e^{i\varphi} - z_k|^2.$$

Отсюда, учитывая $T(\varphi) = S(e^{i\varphi})/e^{in\varphi}$, имеем:

$$T(\varphi) = \frac{h_n}{(-1)^n \bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^{n} |e^{i\varphi} - z_k|^2. \tag{5}$$

Исходя из последней формулы и замены $z = e^{i\varphi}$ мы можем задать искомый многочлен P следующим образом,

$$P(z) \coloneqq p_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k). \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда Q имеет корень $z_k = e^{i\varphi_k}$, где $\varphi_k \in \mathbb{R}$. Поскольку z_k лежит на единичной окружности, то $z_k = 1/\bar{z}_k$. Покажем, что такой корень тем не менее должен иметь чётную кратность m. Действительно, по условию $T(\varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, поэтому если $T(\varphi_k) = 0$, то φ_k является точкой строгого локального минимума функции T, а согласно достаточному условию минимума, число m должно быть чётным числом, а производные в этой точке должны удовлетворять условиям $T^{(j)}(\varphi_k) = 0$, $j = 1, \ldots, m-1$, и $T^{(m)}(\varphi_k) > 0$. Следовательно, корень φ_k (и соответствующий ему корень $z_k = e^{i\varphi_k}$ полинома Лорана Q) должен иметь чётную кратность.

Так как по построению все корни P лежат вне открытого единичного круга Δ и $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, то многочлен P определён единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы. ■

Отметим, что в случае действительных коэффициентов h_k многочлена S все его корни либо вещественные, либо образуют комплексно-сопряжённые пары. Следовательно, в этом случае многочлен P можно выбрать так, чтобы все его коэффициенты были действительными.

Заметим, что если из формулировки теоремы 1 убрать требование о том, чтобы все корни многочлена P, заданного формулой (6), лежали вне Δ, то P определяется неоднозначно, что видно из построений, проведённых в доказательстве этой теоремы.

Из теоремы 1 сразу вытекает, что если m из n корней полинома P лежат на единичной окружности, то неотрицательный тригонометрический многочлен T имеет $2m$ корней. Чтобы показать, что любой тригонометрический многочлен имеет не более $2n$ корней достаточно первых двух абзацев доказательства теоремы 1.

Утверждение 3. *Тригонометрический многочлен степени n имеет не более чем $2n$ корней на $[0, 2\pi)$ с учётом их кратностей.*

2 Теорема Рисса-Фейера (действительные коэффициенты)

Рассмотрим пример. Если $H(z) = 1 + z$, то $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = 1 + \cos\varphi$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Вообще, согласно лемме 1, если многочлен H степени n имеет действительные коэффициенты, то соответствующий ему по формуле (3) тригонометрический полином степени n не содержит синусов, то есть $T(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что если P — полином степени n с действительными коэффициентами и $T(\varphi) \coloneqq |P(e^{i\varphi})|^2$, то $T(\varphi) \geqslant 0$ при $\varphi \in \mathbb{R}$. Нетрудно также показать, что

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \ldots, n, \quad a_n \neq 0.$$

Например, для $P(z) = 1 + z$ получаем $|P(e^{i\varphi})|^2 = 2 + 2\cos\varphi$. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$. Если $T(\varphi) \coloneqq |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существуют $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$, такие что $T(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$. При этом коэффициенты a_k определяются единственным образом.*

Сформулируем обратное утверждение.

Теорема 2 (Рисс, Фейер)**.** *Пусть $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{R}$. Если $T(\varphi) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существует многочлен $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{R}$, $p_n \neq 0$, такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Более того, P можно выбрать так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В этом случае P определяется единственным образом с точностью до мультипликативной унимодулярной константы.*

Утверждение 4 и теорема 2 является частными случаями утверждения 2 и теоремы 1 соответственно. Тем не менее, случай действительных коэффициентов представляет самостоятельный интерес и заслуживает отдельного рассмотрения.

3 Возвратные многочлены и теорема Рисса-Фейера

Как следует из формулы (4), произвольный тригонометрический полином степени n допускает представление в виде

$$T(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} h_k e^{ik\varphi}. \tag{7}$$

Условие вещественности $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ эквивалентно выполнению соотношений $h_{-k} = \bar{h}_k$, $k = 0, \ldots, n$, $(h_0 \in \mathbb{R})$.

Для произвольного многочлена $S(z) = s_0 + \ldots + s_n z^n$ определим взаимный многочлен $S^*(z) \coloneqq \bar{s}_0 z^n + \ldots + \bar{s}_n$. Ясно, что $S^*(z) = z^n \overline{S\left(1/\bar{z}\right)}$. Многочлен S называется возвратным, если выполняется тождество $S(z) = S^*(z)$.

По аналогии с доказательством теоремы 1 можно установить, что условие возвратности многочлена S степени $2n$ эквивалентно существованию такого многочлена P степени n, что

$$S_{2n}(z) = P_n(z) P_n^*(z).$$

Обобщая понятие возвратности на полиномы Лорана, теорему Рисса-Фейера (теорема 1) можно переформулировать следующим образом [3]:
Пусть задан полином Лорана $T(z) \coloneqq \sum\limits_{k=-n}^{n} h_k z^k$, где $h_n \neq 0$, $h_0 \in \mathbb{R}$ и $h_{-k} \coloneqq \bar{h}_k$ для $k = 1, \ldots, n$, причём $T(z) \geqslant 0$ при $|z| = 1$. Тогда существует многочлен $P(z)$ степени n с комплексными коэффициентами такой, что $T(z) = P(z)\overline{P\left(1/\bar{z}\right)}$.

Справедливо утверждение, обратное лемме 1:

Утверждение 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если T — тригонометрический полином, то существует единственный многочлен $H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_k \in \mathbb{C}$, такой, что $T(\varphi) = \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Если $T(\varphi) \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то $H \in C$.*

Доказательство. Так как $h_0 \in \mathbb{R}$, $h_{-k} = \bar{h}_k$, $k = 0, \ldots, n$, то по формуле (7) имеем

$$T(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} h_k e^{ik\varphi} = h_0 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} h_k e^{ik\varphi} = \operatorname{Re}\left(h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k\right) = \operatorname{Re} H(z)$$

при $\varphi \in \mathbb{R}$ и $z = e^{i\varphi}$. Единственность вытекает из внутренней теоремы единственности для голоморфных функций, равенств

$$T(\varphi) = \operatorname{Re} H(z) = \tfrac{1}{2}(H(z) + \overline{H(z)}) = \tfrac{1}{2}(H(z) + \overline{H(1/\bar{z})}), \qquad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\varphi},$$

и того, что многочлен Лорана $H(z) + \overline{H(1/\bar{z})}$ голоморфен в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Вторая часть утверждения очевидна. ■

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Итак, лемма 1 и утверждение 5 говорят о том, что тригонометрический полином T степени n всегда связан с обычным полиномом H степени n и наоборот тождеством

$$T(\varphi) = \operatorname{Re} H(z), \qquad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Утверждение 2 и теорема Рисса-Фейера говорят о том, что полином $H \in C$ степени n всегда связан с полиномом P степени n и наоборот тождеством

$$\operatorname{Re} H(z) = |P(z)|^2, \qquad |z| = 1.$$

Подчеркнём, что эти тождества имеют место только на единичной окружности, поскольку в единичном круге $\operatorname{Re} H(z)$ — гармоническая, а $|P(z)|^2$ — субгармоническая функция. Заметим, что $z = 1/\bar{z}$, $|z| = 1$, поэтому последнее тождество можно переписать в виде

$$z^n(\overline{H(1/\bar{z})} + H(z)) = 2z^n\overline{P(1/\bar{z})}P(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Подчеркнём, что это тождество, благодаря внутренней теореме единственности для голоморфных функций, верно во всей комплексной плоскости, так как функции $z^n\overline{H(1/\bar{z})}$ и $z^n\overline{P(1/\bar{z})}$ являются полиномами.

4 Многочлены с положительной действительной частью

Следующее утверждение является аналогом критерия Каратеодори-Тёплица [18, 39] (см. теорему 10) для полиномов.

Теорема 3. *Многочлен* $H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$*,* $h_0 > 0$*,* $h_k \in \mathbb{C}$ *имеет положительную действительную часть в* Δ *тогда и только тогда, когда существуют числа* $p_k \in \mathbb{C}$*, не равные нулю одновременно, такие, что*

$$h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{9}$$

Более того, если $h_k \in \mathbb{R}$*,* $k = 0, \ldots, n$*, то существуют* $p_k \in \mathbb{R}$*,* $k = 0, \ldots, n$*, такие, что выполняются равенства* (9)*; если* $p_k \in \mathbb{R}$*,* $k = 0, \ldots, n$*, то* $h_k \in \mathbb{R}$*,* $k = 0, \ldots, n$*.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно использовать тождество (8). ■

Теорему 3 можно переформулировать на геометрическом языке следующим образом. Каждой точке $(p_0, \ldots, p_n)$ пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ соответствует единственный многочлен H степени не выше n, удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$. Из теоремы Рисса-фейера следует, что каждому многочлену H степени не выше n с $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, соответствует непрерывное семейство точек, образующее окружность $e^{i\theta}(p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Например, многочлену $H(z) = 2(1+z)$ соответствуют точки: $c\,(1,1)$, при $|c| = 1$.

Формула (9) естественным образом возникает при перемножении рядов для $P(z)$ и $\overline{P(1/\bar{z})}$. Ученые того времени, работавшие в этой области, безусловно, знали об этой связи сразу после публикации основополагающих работ Л. Фейера [1], Ф. Рисса [2], К. Каратеодори [18] и О. Тёплица [39].

5 Ещё одно доказательство

Дадим ещё одно доказательство теоремы 3. Приведём здесь некоторые теоремы о гармонических функциях, которые нам понадобятся при доказательстве необходимого условия теоремы 3. Все формулировки адаптированы для случая единичного круга Δ.

Теорема 4. *Для любой гармонической в* Δ *функции* g *можно построить голоморфную в* Δ *функцию* h*, для которой* g *является действительной частью. Причём* h *единственна с точностью до аддитивной чисто мнимой константы.*

Теорема 5 (о единственности)**.** *Если две гармонические в* Δ *функции* g_1 *и* g_2 *совпадают на множестве* $A \subset \Delta$*, имеющем хотя бы одну внутреннюю точку, то* $g_1 \equiv g_2$ *в* Δ*.*

Заметим, что теорема единственности для гармонических функций накладывает более жёсткие условия, чем аналогичная теорема для голоморфных функций, где требуется только, чтобы множество A содержало предельную точку. Например, функция $u(z) \coloneqq x$, где $x \coloneqq \operatorname{Re} z$, равна нулю на мнимой оси, но $u(z) \not\equiv 0$.

Теорема 6 (о решении задачи Дирихле для круга)**.** *Если функция g непрерывна на $\partial\Delta$, то существует единственная гармоническая в Δ функция h, совпадающая с g на $\partial\Delta$.*

Теоремы 4, 5 и 6 взяты из книги [21] (стр. 239, 240 и 246 соответственно).

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и произвольный многочлен $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$. Рассмотрим многочлен $Q(z) \coloneqq q_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} q_k z^k$, где $q_k \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j$, $k = 0, \ldots, n$. Пусть $T(\varphi) \coloneqq \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$. Для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant{}& \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2 = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^{n} p_k e^{ik\varphi} \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k e^{-ik\varphi} = \\
&= |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&+ (p_0\bar{p}_1 + p_1\bar{p}_2 + \ldots + p_{n-1}\bar{p}_n)e^{-i\varphi} + (p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})e^{i\varphi} + \\
&+ (p_0\bar{p}_2 + p_1\bar{p}_3 + \ldots + p_{n-2}\bar{p}_n)e^{-i2\varphi} + (p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2})e^{i2\varphi} + \\
&\ldots \\
&+ p_0\bar{p}_n e^{-in\varphi} + p_n\bar{p}_0 e^{in\varphi} = \\
&= |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&+ 2\operatorname{Re}((p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})e^{i\varphi}) + \\
&+ 2\operatorname{Re}((p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2})e^{i2\varphi}) + \\
&\ldots \\
&+ 2\operatorname{Re}(p_n\bar{p}_0 e^{in\varphi}) = \\
&= \operatorname{Re} Q(e^{i\varphi}),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Необходимость. Пусть $H \in C$. Покажем, что H имеет коэффициенты (9). По лемме 1, выражение $T(\varphi) \coloneqq \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ является тригонометрическим полиномом степени n, причём $T(\varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, так как $H \in C$. Согласно теореме 1, существует многочлен P такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Таким образом, из (10) следует, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = \operatorname{Re} Q(e^{i\varphi})$.

Выполним обратную замену $e^{i\varphi} = z$. Имеем $\operatorname{Re} H(z) \equiv \operatorname{Re} Q(z)$, $z \in \partial\Delta$. Согласно теореме 5 это не означает, что функции $\operatorname{Re} H(z)$ и $\operatorname{Re} Q(z)$ совпадают всюду в Δ. Однако по теореме 6 эти функции продолжаются единственным образом до гармонической в Δ функции. Восстановим аналитические функции Q и H по их совпадающей в Δ действительной части (это можно сделать согласно теореме 4). Принимая во внимание нормировку $Q(0) = H(0) > 0$, заключаем, что $H \equiv Q$ в Δ, так как голоморфная в Δ функция по теореме 4 восстанавливается по своей действительной части единственным образом с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной. Что и требовалось.

Достаточность. Покажем теперь, что если H имеет коэффициенты (9), то $H \in C$. Пусть H имеет коэффициенты (9), то есть $H \equiv Q$. Проведя вычисления (10) в обратном порядке получаем, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Поскольку $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$ при $z \in \Delta$. Что и требовалось. ■

Если все коэффициенты многочлена H действительные, то вместо теоремы 1 можно использовать теорему 2.

6 Условия единственности многочлена из класса Каратеодори

В этом пункте полагаем, что $n \in \mathbb{N}$, $h_0 > 0$, а многочлен H имеет вид

$$H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k. \tag{11}$$

Класс $C^n_{h_0}$ инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z. То есть, если $H \in C^n_{h_0}$, то мы можем считать без ограничения общности, что $h_n > 0$. При таких ограничениях на многочлен H можно ставить вопрос о его единственности.

Лемма 2. *Существует единственный с точностью до вращений в плоскости переменной z многочлен H вида* (11), *удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C^n_{h_0}$;
- $h_0 = 2|h_n| > 0$.

Более того, $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, где $\eta \coloneqq \exp(i \arg h_n)$.

Доказательство. Согласно теореме 3, существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, удовлетворяющие соотношениям:

$$h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2, \qquad h_n = p_n \bar{p}_0.$$

Из условия $h_0 = 2|h_n|$ получаем:

$$|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2|p_n p_0|.$$

Данное равенство эквивалентно следующему:

$$(|p_0|^2 - 2|p_n p_0| + |p_n|^2) + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$(|p_0| - |p_n|)^2 + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что $|p_0| = |p_n|$ и $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$. Таким образом,

$$H(z) = 2|p_0|^2 + 2p_n\bar{p}_0 z^n = 2|p_0|^2(1 + \eta z^n), \quad \text{где} \quad \eta \coloneqq \exp(i \arg h_n).$$

Так как числа p_k, $k = 0, \dots, n$, определены единственным образом, то и многочлен H определён единственным образом. ■

Заметим, что корнями z_k многочлена $H(z) = h_0(1 + z^n)$ являются все корни n-й степени из -1 и только они, то есть $z_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Утверждение 6. *Существует единственный многочлен H вида* (11)*, удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C^n_{h_0}$*;*
- $h_n > 0$*;*
- *Все корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена H лежат на единичной окружности $\partial\Delta$.*

Более того, $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. Поскольку $z_1, \dots, z_n$ — корни многочлена H, то его можно представить в виде: $H(z) = 2h_n \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k) = 2h_n((-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n + \ldots + z^n)$. Так как все корни многочлена H лежат на единичной окружности ($|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| = 1$), то $h_0 = 2|h_n|$. Применив лемму 2, получаем, что $H(z) = h_0(1 + z^n)$. ■

Очевидно, что имеет место следующее утверждение:

Утверждение 7. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{R}$, а H и P — многочлены степени n такие, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Тогда условие $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_j}) = 0$ эквивалентно $P(e^{i\varphi_j}) = 0$ для всех $j = 1, \dots, m$.*

Иными словами, полином P имеет корни на единичной окружности тогда и только тогда, когда действительная часть многочлена H имеет нули на единичной окружности. Приведём примеры.

Многочлен $H_3(z) := 1 + 3/2z + z^2 + 1/2z^3$ ($p_0 = \ldots = p_3 = 1$) имеет один простой корень $z = -1$ на $\partial\Delta$, тогда как $\operatorname{Re} H_3$ имеет 3 нуля кратности 2 на $\partial\Delta$ (в том числе $z = -1$) и $\operatorname{Im} H_3$ имеет 2 простых нуля на $\partial\Delta$ (в том числе $z = -1$).

Многочлен $H_2(z) := 1 + 4/3z + 2/3z^2$ ($p_0 = p_1 = p_2 = 1$) не имеет корней на $\partial\Delta$, но $\operatorname{Re} H_2$ имеет 2 нуля кратности 2 на $\partial\Delta$ и $\operatorname{Im} H_2$ имеет 2 простых нуля на $\partial\Delta$.

Нули многочлена $H(z) := 1 + z^n$ ($p_0 = p_n = 1$, $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$) есть всевозможные корни n-й степени из -1. $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2. $\operatorname{Im} H$ имеет те же простые корни и ещё n корней на $\partial\Delta$.

Утверждение 8. *Существует единственный многочлен H вида* (11)*, удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C^n_{h_0}$*;*
- $h_n > 0$*;*
- *Все корни n-й степени из -1 и только они являются корнями $\operatorname{Re} H$.*

Более того, $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. Согласно утверждению 6, многочлен $H(z) = h_0(1+z^n)$ является единственным многочленом, удовлетворяющим условию $H \in C^n_{h_0}$ и имеющим своими нулями всевозможные корни n-й степени из -1. По утверждению 7, гармоническая функция $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2 (см. утверждение 3). Так как восстановление аналитической функции, заданной в Δ по её действительной части единственно с точностью до чисто мнимой аддитивной константы, то с учётом нормировки $H(0) > 0$ получаем требуемое. ■

Лемма 3. *Выражение* $\dfrac{x_0 x_n}{x_0^2 + \ldots + x_n^2}$ *при* $x_0, \ldots, x_n \geqslant 0$, $x_0^2 + \ldots + x_n^2 = c$, $c > 0$, *достигает своего максимального значения* $1/2$ *если и только если* $x_k = 0$ *при* $k = 1, \ldots n-1$ *и* $x_0 = x_n = \sqrt{c/2}$.

Доказательство. Введём обозначение

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{x_0 x_n}{x_0^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Поскольку f является однородной функцией степени 0, то можно без потери общности считать $c = 1$. Тогда задача сводится к максимизации $f(x_0, \ldots, x_n) = x_0 x_n$ при ограничении $x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Методом множителей Лагранжа получим необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = x_n - 2\lambda x_0 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_n} = x_0 - 2\lambda x_n = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = -2\lambda x_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

где $L(x_0, \ldots, x_n, \lambda) = x_0 x_n - \lambda(x_0^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1)$. Из (13) следует, что либо $\lambda = 0$, либо $x_k = 0$ для $k = 1, \ldots, n-1$. Если $\lambda = 0$, то из (12) получаем $x_0 = 0$ и $x_n = 0$, но тогда $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, что не является максимумом. Значит $x_0 > 0$, $x_n > 0$, а $x_k = 0$ для $k = 1, \ldots, n-1$.

Теперь система уравнений принимает вид:

$$x_n = 2\lambda x_0, \qquad x_0 = 2\lambda x_n, \qquad x_0^2 + x_n^2 = 1.$$

Из первых двух уравнений получаем, что $x_n = 4\lambda^2 x_n$. Так как $x_n > 0$, то $\lambda = \pm 1/2$. При $\lambda = 1/2$ получим $x_n = x_0 = 1/\sqrt{2}$, а $f(x_0, \ldots, x_n) = 1/2$. При $\lambda = -1/2$ получим $x_n = -x_0$, что не подходит, так как $x_0 > 0$, $x_n > 0$. ■

Утверждение 9. *Среди всех многочленов* $H \in C^n_{h_0}$ *вида* (11) *максимальное значение* $|h_n|$ *достигается только для многочленов вида* $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, *где* $\eta \coloneqq \exp(i \arg h_n)$.

Доказательство. Так как h_0 — фиксированное положительное число, то задача максимизации $|h_n|$ равносильна задаче максимизации отношения $|h_n|/h_0$. Согласно теореме 3, существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, такие, что

$$h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2, \qquad h_n = p_n \bar{p}_0,$$

а по лемме 3

$$\frac{|h_n|}{h_0} = \frac{|p_0 p_n|}{|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2} \leqslant \frac{1}{2},$$

что эквивалентно $h_0 = 2|h_n|$. ■

7 О корнях многочлена P

Теорема 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, многочлены H и P определены формулами* (1) *и* (6) *соответственно,* $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, *и корни $z_1, \ldots, z_n$ многочлена P удовлетворяет неравенству $|\psi| \geqslant 1$, где $\psi := (-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$. Тогда*

$$h_n = \overline{\psi}_0 |p_n|^2 = p_n \bar{p}_0 = |p_0|^2/\psi, \qquad \arg h_n = -\arg \psi. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как выполнены условия теоремы Рисса-Фейера, то мы можем рассмотреть тригонометрический многочлен

$$T(\varphi) = \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2.$$

Из формул (5), (6) и условий $h_n \neq 0$, $T(\varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ следует, что

$$|p_n|^2 = \frac{h_n}{\overline{\psi}_0} = \frac{\bar{h}_n}{\psi} > 0. \tag{15}$$

По основной теореме алгебры

$$P(z) = p_n (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Следовательно, имеют место соотношения:

$$p_0 = \psi p_n, \quad \arg h_n = -\arg \psi, \tag{16}$$

где h_n определяется формулой (2). Из (15) следует, что $\psi = \bar{h}_n / |p_n|^2$. Подставляя это выражение в первое равенство (16) получим, что $h_n = p_n \bar{p}_0$. Выразив из последнего равенства p_n и подставив его во второе равенство (16) получим, что $|p_0|^2 = \psi h_n$, откуда сразу следует (14). ∎

Как отмечалось в предыдущем пункте, мы можем без ограничения общности считать, что $h_n > 0$. Если $h_n > 0$, то $\psi \geqslant 1$. Поскольку P определён с точностью до унимодулярной мультипликативной константы, то мы можем считать, что $p_n > 0$, откуда сразу получаем, что $p_0 > 0$.

8 О корнях многочлена H

Из основной теоремы алгебры следует, что $h_0 = \xi 2 h_n$, где $\xi := (-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, а $z_1, \ldots, z_n$ — корни многочлена H. Из теоремы 3 получаем $h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2$ и $h_n = p_n \bar{p}_0$. Таким образом, (также используем формулу (14))

$$h_0 = 2\xi h_n = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2\xi p_n \bar{p}_0 = 2\xi \overline{\psi}_0 |p_n|^2 = 2\frac{\xi}{\psi}|p_0|^2. \tag{17}$$

Так как $h_0 > 0$ и $h_n > 0$, то $\xi > 0$ как у всевозможных корней n-й степени из -1. В силу принципа сохранения области и того, что $H \in C^n_{h_0}$

$$|z_k| \geqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

стало быть,

$$\xi \geqslant 1. \tag{19}$$

Кроме того,

$$\arg p_0 = \arg p_n. \tag{20}$$

9 Связь корней H(z) и P(z)

Утверждение 10. *Многочлены $H(z)$ и $P(z)$ не могут иметь общих корней вне $\overline{\Delta}$.*

Доказательство. Предположим, существует общий корень z_0 с $|z_0| > 1$. Тогда $H(z_0) = 0$ и $P(z_0) = 0$. Из тождества (8) следует, что $H(1/\bar{z}_0) = 0$. Но если $H(1/\bar{z}_0) = 0$, то $1/\bar{z}_0$ должен быть корнем $H(z)$. При этом $|1/\bar{z}_0| = 1/|z_0| < 1$. Это противоречит условию, что все корни $H(z)$ лежат в области $|z| \geqslant 1$. ■

Заметим, что полиномы $H(z)$ и $P(z)$ могут иметь общие корни на единичной окружности $|z| = 1$. Например, оба многочлена $P(z) = z + 1$ и $H(z) = 2(z + 1)$ имеют корень $z_0 = -1$.

Напомним, что $\psi := (-1)^n \prod w_j$, где w_j — все корни $P(z)$ и $\xi := (-1)^n \prod z_k$, где z_k — все корни $H(z)$.

Из формул (16) и (17) следует:

$$\psi = \frac{p_0}{p_n}, \qquad \xi = \frac{h_0}{2h_n} = \frac{|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2}{2p_n\bar{p}_0}.$$

Откуда

$$\frac{\psi}{\xi} = \frac{p_0}{p_n}\frac{2p_n\bar{p}_0}{|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2} = \frac{2|p_0|^2}{|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2} < 2,$$

так как $p_n \neq 0$, поскольку $h_n > 0$.

Если $\psi = 1$, то $p_0 = p_n$ и формула упрощается:

$$\frac{\psi}{\xi} = \frac{2|p_0|^2}{2|p_0|^2 + (|p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2)}$$

Теорема 8. *Если $\psi = 1$, то отношение ψ/ξ удовлетворяет неравенству:*

$$0 < \frac{\psi}{\xi} \leqslant 1$$

Равенство $\psi/\xi = 1$ достигается тогда и только тогда, когда все промежуточные коэффициенты $p_1, \ldots, p_{n-1}$ равны нулю. В этом случае $P(z) = p_0(1 + z^n)$ и $H(z) = 2p_0^2(1 + z^n)$, то есть полиномы имеют одинаковые корни.

10 Полиномиальные элементы класса Каратеодори

Если $H(z) := h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_n \neq 0$, и $H \in C^n$, то $H/h_0 \in C_1^n$. Из теоремы 3 следует, что

$$\frac{H(z)}{h_0} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{h_0}\sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j\right)z^k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(2\sum_{j=0}^{n-k}\frac{p_{j+k}}{\sqrt{h_0}}\frac{\bar{p}_j}{\sqrt{h_0}}\right)z^k,\ h_0 = \sum_{j=0}^{n}|p_j|^2.$$

Выполнив замену переменных $q_j = p_j/\sqrt{h_0}$, $j = 0, \ldots, n$ видим, что имеет место следующее

Следствие 1. *Принадлежность многочлена* $H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} h_k z^k$, $h_0 = 1$, $h_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, *классу* C_1^n *эквивалентна существованию комплексных чисел* p_j, $j = 0, \ldots, n$, *не равных нулю одновременно, таких, что*

$$\sum_{j=0}^{n} |p_j|^2 = 1, \qquad h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad h_n \neq 0.$$

Более того, $h_k \in \mathbb{R}$ *равносильно* $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$.

Следствие 1 допускает следующую интерпретацию. Каждой точке $(p_0, \ldots, p_n)$ единичной гиперсферы евклидова пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ соответствует единственный многочлен $H \in C_1^n$. Каждому многочлену $H \in C_1^n$ соответствуют все точки окружности $e^{i\theta}(p_0, \ldots, p_n)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ единичной гиперсферы в $\mathbb{C}^{n+1}$. Например, многочлену $H(z) = 1 + z$ соответствуют точки: $c\,(1, 1)/\sqrt{2}$ при $|c| = 1$.

Как известно [14, стр. 57], если $h \in C_1$, то $|\{h\}_j| \leqslant 2$, $j \in \mathbb{N}$, где $\{h\}_j$ — тейлоровские коэффициенты функции h. В [14] также перечислены функции, для которых $|\{h\}_j| = 2$, но среди них нет многочленов. Следовательно, если многочлен $H \in C_1^n$, то $|h_j| < 1$, $j = 1, \ldots, n$. Уточним эту оценку.

Теорема 9. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $H \in C_1^n$, *то*

$$|h_k| \leqslant \frac{r}{r+1} = \frac{\lfloor n/k \rfloor}{\lfloor n/k \rfloor + 1} < 1,\ k = 1, \ldots, n, \quad \text{где } r = r(n,k) \coloneqq \lfloor n/k \rfloor.$$

При фиксированном $k \in \{1, \ldots, n\}$ *равенство достижимо если и только если*

$$h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j$$

- $x = 1/\sqrt{N}$, *где* $N = N(n,k)$ — *количество ненулевых переменных*:

$$N = \begin{cases} r+1, & n = rk, \\ 2(r+1), & n \neq rk; \end{cases}$$

- $|p_j| = x$ *для всех* j *таких, что* $j = ik$ *или* $j = n - ik$, $i = 0, \ldots, r$;

- $p_j = 0$ *для всех остальных* j;

- *аргументы ненулевых* p_j *должны образовывать арифметическую прогрессию с разностью* φ, *чтобы все произведения* $p_{j+k}\bar{p}_j$ *имели одинаковый аргумент* φ.

Доказательство. Фиксируем произвольным образом номера $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$. Согласно следствию 1, задача оценки функционала $|h_k|$ на классе C_1^n эквивалентна задаче оценки выражения

$$|h_k| = \left| \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \bar{p}_j \right| \text{ при условиях } h_0 = \sum_{j=0}^{n} |p_j|^2 = 1 \text{ и } h_n = p_n \bar{p}_0 \neq 0.$$

Поскольку

$$\left| \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \bar{p}_j \right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-k} |p_{j+k} \bar{p}_j|,$$

а на $\arg p_j$ ограничений нет, то можно положить $x_j \coloneqq |p_j|$, $j = 0, \ldots, n$. Тогда задача сводится к следующей:

$$\sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k} x_j \to \max, \quad \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 1, \quad x_0 > 0,\ x_n > 0, \quad x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n-1.$$

Будем понимать выражение $m \coloneqq x_k x_0 + \ldots + x_n x_{n-k}$ как евклидово скалярное произведение векторов

$$a \coloneqq (x_k, \ldots, x_{k+j-1}, x_{k+j}, x_{k+j+1}, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad b \coloneqq (x_0, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-k})$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n-k+1}$. Чтобы скалярное произведение было максимальным, векторы a и b должны быть коллинеарны, а значит иметь пропорциональные координаты. Поскольку $x_0 > 0$, то $x_k > 0$, поэтому векторы a и b сонаправлены. Следовательно, $x_{j+k} = \alpha x_j$, $j = 0, \ldots, n-k$, и $\alpha > 0$. Фиксируем $j \in \{0, \ldots, n-k\}$. С другой стороны, выражение m можно рассматривать как скалярное произведение

$$c \coloneqq (x_k, \ldots, x_{k+j-1}, x_j, x_{k+j+1}, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad d \coloneqq (x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{k+j}, x_{j+1}, \ldots, x_{n-k}).$$

Из этого следует $x_{j+k} = \alpha x_j$ и $x_j = \alpha x_{k+j}$, откуда $\alpha = 1$. Так как j — произвольный номер из набора $\{0, \ldots, n-k\}$, то $x_{j+k} = x_j$, $j \in \{0, \ldots, n-k\}$.

Количество переменных равно $n+1$, а количество слагаемых в $m - n + 1 - k$. Индексы этих переменных образуют две цепочки: $0, k, 2k, \ldots, rk \leqslant n$ и $n, n-k, n-2k, \ldots, n-rk \geqslant 0$, где $r = \lfloor n/k \rfloor$. Эти цепочки совпадают если и только если n кратно k. Переменные, не входящие ни в одну из цепочек выгодно обнулить, чтобы они не крали норму, так как при $k = 1, \ldots, n$ слагаемых в сумме m меньше чем в ограничении ($n + 1 - k < n + 1$). Переменные $x_j > 0$ если и только если $j = ik$, $0 \leqslant ik \leqslant n$, или $j = n - ik$, $0 \leqslant n - ik \leqslant n$. Количество ненулевых переменных x_j вычисляется по формуле

$$N = \begin{cases} r+1, & n \text{ кратно } k, \\ 2(r+1), & n \text{ не кратно } k. \end{cases}$$

Количество ненулевых слагаемых $x_{j+k} x_j$ в сумме m вычисляется по формуле:

$$M = \begin{cases} r, & n \text{ кратно } k, \\ 2r, & n \text{ не кратно } k. \end{cases}$$

Если цепочки совпадают, то все ненулевые переменные равны между собой. Если же цепочки не совпадают, то все ненулевые переменные равны между собой из соображений симметрии. Поэтому

$$\max m = \frac{M}{N} = \frac{r}{r+1} = \frac{\lfloor n/k \rfloor}{\lfloor n/k \rfloor + 1}.$$

Заметим, что если цепочки совпали, то мы свели задачу к поиску максимума функции одной положительной переменной, а если не совпали, то мы свели задачу к поиску максимума функции двух положительных переменных. ■

Из теоремы Рунге [21, стр. 109] о приближении аналитических функций многочленами следует, что множество полиномиальных элементов из C_1 всюду плотно в C_1. Таким образом, из теоремы 9 вытекает

Следствие 2. *Если* $h \in C_1$, *то* $|\{h\}_n| \leqslant 2$.

11 Гипотеза Кшижа

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество функций f, голоморфных в единичном круге Δ и удовлетворяющих условиям $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж выдвинул гипотезу [7], согласно которой, если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\theta} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{21}$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Задачу о нахождении

$$m_n := \max_{f \in B} |\{f\}_n|,$$

будем называть проблемой Кшижа для номера n. Задачу о точной оценке величины $|\{f\}_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$ на классе B будем называть проблемой Кшижа. Проблему Кшижа для фиксированного n также допустимо называть просто проблемой Кшижа, если это не приводит к недоразумениям.

Существование экстремалей в проблеме Кшижа для фиксированного номера n очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, сопоставляющий каждой функции из B её тейлоровский коэффициент с номером n, является непрерывным на B.

Функцию $f \in B$ будем называть глобально экстремальной в проблеме Кшижа для номера n, если $|\{f\}_n| = m_n$. Понятие локально экстремальной функции [36] мы вводить не будем, так как оно нам здесь не понадобится. Поэтому далее по тексту мы будем называть функцию просто экстремальной, хотя необходимо понимать, что возможно речь идёт о локально экстремальной функции, так как понятие локально экстремальной функции включает в себя понятие глобально экстремальной функции.

12 Подклассы

Через Ω_0 обозначим класс функций ω, голоморфных в Δ и удовлетворяющих условиям $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть отображения G и g голоморфны в Δ. Функция g называется подчинённой для функции G в единичном круге Δ, если она может быть представлена в Δ в виде $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. В этом случае функцию G будем называть мажорантой для g в Δ. Теория подчинения изложена, в частности, в работе [14].

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in (0, +\infty)$. Соответствующие подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [14], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h \in C_1. \tag{22}$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1 и B_t. Очевидно также, что при каждом фиксированном $t > 0$ функция $F(z, t)$ является мажорантой для каждой функции из класса B_t.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t.

Класс, состоящий из функций $h \in C_t$ с действительными коэффициентами обозначим через C_t^r, а класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами обозначим через B_t^r. При каждом $t \geqslant 0$ формула (22) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1^r и B_t^r. Аналогичным образом определим классы B^r и Ω_0^r как подклассы классов B и Ω_0 с действительными коэффициентами.

13 Краткий обзор результатов по гипотезе Кшижа

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана для первых шести тейлоровских коэффициентов включительно. Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leqslant 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах, начиная с 1934 года; первой из них была работа [8]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает затруднений с 1943 года [14]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, опираясь на оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [17]. Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t была получена в работе [22]. Аналогичная оценка на множестве функций из B_t с вещественными коэффициентами представлена в работе [23]. Для случая $n = 4$ следует упомянуть доказательство В. Шапеля [9]. Впервые оценка пятого коэффициента методом Шапеля была дана в работе Н. Самариса [10]. Автор данной статьи в работе [11], используя метод Шапеля, получил оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e + 0.00116077$, а в работе [12] — оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e$ с помощью численного метода.

Исследования по проблеме Кшижа можно разделить на несколько основных направлений. Одно из них — это оценки начальных коэффициентов, упомянутые в предыдущем абзаце. Отдельного внимания заслуживают так называемые асимптотические оценки, освещённые, например, в работах [24, 25]. Также выделяются равномерные по n оценки, полученные с использованием интегральной формулы Коши для всех натуральных n. В статье [26] была получена оценка $|\{f\}_n| \leqslant 1 - \frac{1}{3\pi} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{1}{12} = 0.999877\ldots$, а в диссертации [16, стр. 19] — улучшенная оценка $|\{f\}_n| \leqslant \frac{4}{5} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{20} = 0.999178\ldots$ Ещё одно важное направление связано с изучением свойств экстремальной функции и поиском функций класса B, обладающих этими свойствами. К этому направлению относятся, в частности, работы [17, 27, 15], а также настоящая статья.

Проблемы геометрической теории функций комплексного переменного, так или иначе связанные с гипотезой Кшижа, рассмотрены в работах [29, 30, 9, 31, 32, 33, 27, 34, 35]. Некоторые обобщения гипотезы Кшижа описаны в статье [17, стр. 187].

С. Л. Крушкаль в работе [28] получил доказательство гипотезы Хаммеля-Шейнберга-Зальцмана [17, стр. 189] для функций из пространства H^p. Это доказательство получено благодаря применению нового метода, основанного на привлечении глубоких особенностей пространств Тейхмюллера. Гипотеза Кшижа является следствием гипотезы Хаммеля-Шейнберга-Зальцмана при $p \to \infty$.

Эта статья посвящена поискам элементарного доказательства гипотезы Кшижа.

14 Критерий Каратеодори-Тёплица

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат, который можно найти в [18, 39, 19]:

Теорема 10 (Каратеодори, Тёплиц). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_0 > 0$, $\{h\}_1, \ldots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. Многочлен*

$$Q_n(z) := \{h\}_0 + \sum_{k=1}^{n} \{h\}_k z^k \tag{23}$$

можно продолжить до функции

$$h(z) := Q_n(z) + o(z^n) \ \in \ C$$

тогда и только тогда, когда определители

$$M_k := \begin{vmatrix} 2\{h\}_0 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}}_1 & 2\{h\}_0 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}}_{k-1} & \overline{\{h\}}_{k-2} & \cdots & 2\{h\}_0 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}}_k & \overline{\{h\}}_{k-1} & \cdots & \overline{\{h\}}_1 & 2\{h\}_0 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

либо все положительны, либо положительны до некоторого номера $m \leqslant n$, начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно *и существуют числа* $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, *и числа* $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ *такие, что*

$$h(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}. \tag{25}$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{n+1}$, точками которого являются наборы из $(n+1)$-го комплексного числа $h^{(n+1)} := (\{h\}_0, \ldots, \{h\}_n)$. Множество точек $h^{(n+1)}$ из пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ таких, что числа $\{h\}_0, \ldots, \{h\}_n$ являются первыми $n+1$ коэффициентами некоторой функции $h \in C$, обозначим через $C^{(n+1)}$ и будем называть $(n+1)$-ым телом коэффициентов класса C.

Проблема коэффициентов на классе C формулируется следующим образом: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа $\{h\}_0, \{h\}_1, \{h\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{h\}_0 + \{h\}_1 z + \{h\}_2 z^2 + \ldots$ являлся рядом Тейлора некоторой функции из класса C. Критерий Каратеодори-Тёплица даёт полное решение этой задачи.

Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе C считается статья Каратеодори [38] 1911 года, однако первые исследования по этой тематике Каратеодори опубликовал в 1907 году в статье [37]. Отметим, что класс C обозначается по первой букве фамилии Carathéodory и в его честь часто именуется классом Каратеодори, в литературе, посвящённой однолистным, функциям классом Каратеодори обычно называют множество C_1.

Для границы тела коэффициентов $C^{(n+1)}$, Каратеодори установил параметрическое представление, которое полностью описывает эту границу тригонометрическим полиномом. Тёплицу в 1911 году удалось найти [39] простое и очень красивое представление этой границы в детерминантной форме, посредством которого все результаты Каратеодори были приведены к алгебраическому виду.

15 Общий вид экстремальных функций

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z и относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и функция f является экстремальной в проблеме Кшижа для этого номера n, то функция $\eta f(\zeta z)$ при $|\eta| = |\zeta| = 1$ также является экстремальной. При этом вращение в плоскости переменной z не затрагивает коэффициент $\{f\}_0$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что если f — экстремальная, то $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. В дальнейшем, говоря о функции f, экстремальной в проблеме Кшижа, будем подразумевать, что $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и $f \in B_t$, где $t = -\ln\{f\}_0$. Также, функцию, экстремальную в проблеме Кшижа для номера n часто будем называть просто экстремальной, если из контекста понятно о каком конкретно n идёт речь.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Если $f(z) = e^{-h(z)}$ — экстремальная функция, то, как известно [19, 20], точка $h^{(n+1)}$ принадлежит границе множества $C^{(n+1)}$, что равносильно тому, что $M_n = 0$ (M_n определён формулой (24)). Согласно критерию Каратеодори-Тёплица, это означает, что продолжение многочлена Q_n, определённого формулой (23), единственно. Следовательно, любая экстремальная функция имеет вид $f(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (25). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Следствие 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция f является экстремальной в проблеме Кшижа и $t := -\ln\{f\}_0$. Тогда найдутся числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = t$, и числа $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$, такие, что $f(z) = e^{-h(z)}$, где функция h задана формулой (25), причём $m \leqslant n$.*

Этот результат хорошо известен с начала XX века (см., например, [17, стр. 171] и [15, стр. 725]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, а функция f, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, является экстремальной в проблеме Кшижа. Если считать, что $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n$, из формулы (21) и следствия 3 следует, что

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} F(-e^{i\varphi_k} z, \alpha_k), \qquad f(0) = e^{-t}. \tag{26}$$

Чтобы при помощи следствия 3 найти экстремальную функцию необходимо определить $2n+1$ действительных параметров (t, α_k, φ_k, $k = 1, \ldots, n$). Если f имеет, действительные коэффициенты, то и коэффициенты h тоже будут действительными, поэтому для некоторого k, такого, что $\alpha_k > 0$ и $0 < \varphi_k < \pi$ кроме слагаемого $\alpha_k \frac{1+e^{i\varphi_k} z}{1-e^{i\varphi_k} z}$ формула (25) должна содержать также слагаемое $\alpha_k \frac{1+e^{-i\varphi_k} z}{1-e^{-i\varphi_k} z}$.

Отсюда следует, что если f имеет, действительные коэффициенты, то для отыскания явного представления f, при помощи следствия 3, нужно определить $n+1$ действительных параметров.

16 Некоторые свойства экстремальных функций

Заметим, что если $n \in \mathbb{N}$, а f и g — голоморфные в Δ функции, то

$$\{f \cdot g\}_n = \{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0 \{g\}_n. \tag{27}$$

Лемма 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f, g — голоморфные в Δ функции, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и*

$$v(z) := f(z) e^{-\varepsilon g(z)}, \tag{28}$$

тогда

$$\{v\}_n = \{f\}_n - \varepsilon \{f \cdot g\}_n + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{29}$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию v функции f функцией $e^{-\varepsilon g}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Устремив ε к нулю имеем:

$$v(z) := f(z) e^{-\varepsilon g(z)} = f(z)(1 - \varepsilon g(z) + o(\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon f(z) g(z) + o(\varepsilon).$$

Вычислив теперь $\{v\}_n$ мы получим формулу (29). ■

Следующий результат позаимствован из [15, стр. 726]. Для полноты изложения приведём его вместе с доказательством, также взятым из указанной работы.

Теорема 11. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда для любой функции $g \in C$*

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n) \geqslant 0. \tag{30}$$

В частности,

$$\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0, \tag{31}$$

а

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) = 0 \quad \text{при} \quad h = -\ln f. \tag{32}$$

Пусть

$$H(z) \coloneqq \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n, \tag{33}$$

тогда

$$H \in C^n. \tag{34}$$

Более того, пусть $m \leqslant n$, а числа $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ частично определяют функцию $h \coloneqq -\ln f$ (см. формулу (25)), тогда

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{35}$$

Доказательство. 1. Докажем справедливость неравенства (30). Пусть $g \in C$. Вариация v функции f, заданная формулой (28), при $\varepsilon > 0$ является внутренней, то есть $v \in B$. При $\varepsilon \to 0$ справедлива лемма 4, а по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, следовательно, $\operatorname{Re}\{v\}_n \leqslant \{f\}_n$. Отсюда (см. (29)) и вытекает справедливость неравенства (30).

2. Подставив коэффициенты функции $g(z) = \frac{1-z^n}{1+z^n} = 1 - 2z^n + \ldots$ в неравенство (30) получим неравенство (31).

3. Докажем равенство (32). Возьмём теперь $g = h$. Так как $g = h$, то вариация v функции f, заданная формулой (28), при $\varepsilon < 0$ и $|\varepsilon| < h_0$ является внутренней вариацией, то есть $v = f \cdot f^{-\varepsilon} \in B$. Поскольку по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, то из формулы (29) для $\varepsilon < 0$ получаем

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon > 0$ справедлива неравенство (30), то есть

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) \geqslant 0,$$

откуда делаем вывод, что равенство (32) верно.

4. Докажем предложение (34). Зафиксируем $\zeta \in \overline{\Delta}$ и положим

$$g(z) \coloneqq \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} = 1 + 2\zeta z + 2\zeta^2 z^2 + \ldots$$

Ясно, что $g \in C_1$. Подставив коэффициенты функции g в неравенство (30), получим

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}\zeta + \ldots + 2\{f\}_0\zeta^n) \geqslant 0, \qquad |\zeta| \leqslant 1,$$

что равносильно $\operatorname{Re} H(z) \geqslant 0$, $z \in \overline{\Delta}$. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, что эквивалентно предложению (34).

5. Докажем равенства (35). Фиксируем k чтобы выбрать конкретное число φ_k, частично определяющее функцию h (см. формулу (25)) и рассмотрим функцию

$$g(z) \coloneqq \frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z} = 1 + 2e^{i\varphi_k}z + 2e^{2i\varphi_k}z^2 + \dots$$

Тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$ как при $\varepsilon \geqslant 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$. То есть при $|\varepsilon| \leqslant \alpha_k$, где α_k частично определяет функцию h (см. формулу (25)). Из леммы 4, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f следует, что для $\varepsilon < 0$

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k}\right) \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon \geqslant 0$

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k}\right) \geqslant 0,$$

что эквивалентно равенству $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

Заметим, что неравенство (31) можно вывести также из утверждения (9). Покажем, что неравенство (30) эквивалентно предложению (34) и, в частности, что равенство (32) эквивалентно всем равенствам (35).

Теорема 12. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $f \coloneqq e^{-h}$, *причём* $h(z) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1+e^{i\varphi_k}z}{1-e^{i\varphi_k}z}$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, $0 \leqslant \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ *и пусть* $g(z) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k \frac{1+e^{i\theta_k}z}{1-e^{i\theta_k}z}$, $\beta_k \geqslant 0$, $k = 1, \dots, m$, $0 \leqslant \theta_1 < \dots < \theta_m < 2\pi$, *а полином* H *сгенерирован из коэффициентов функции* f *по формуле* (33), *причём* $H \in C^n$. *Тогда*

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \dots + \{f\}_0\{g\}_n\right) \geqslant 0$$

если и только если $H \in C^n$. *В частности, равенство*

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \dots + \{f\}_0\{g\}_n\right) = 0$$

справедливо если и только если $\theta_k = \varphi_k$, $k = 1, \dots, m$ *и справедливы все равенства*

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \dots, m,$$

неравенство

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \dots + \{f\}_0\{g\}_n\right) > 0$$

справедливо если и только если $\theta_k \neq \varphi_j$, $j, k = 1, \dots, m$, *и* $H \in C^n$.

Доказательство. Имеем

$$g(z) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \frac{1+e^{i\theta_k}z}{1-e^{i\theta_k}z} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k (1 + 2e^{i\theta_k}z + \dots + 2e^{in\theta_k}z^n + \dots).$$

Применяя формулу (27), получаем:

$$\{f \cdot g\}_n = \sum_{k=1}^{m} \beta_k (\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\theta_k} + \dots + \{f\}_0 2e^{in\theta_k}) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k H(e^{i\theta_k}). \tag{36}$$

По условию $H \in C^n$, что равносильно $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \overline{\Delta} \setminus \{e^{\varphi_1}, \ldots, e^{\varphi_m}\}$ и $\operatorname{Re} H(e^{\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому:
1. из формулы (36) следует, что если $\theta_k = \varphi_k$, $k = 1, \ldots, m$, то

$$\operatorname{Re}\{f \cdot g\}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} \beta_k \operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0,\ k = 1, \ldots, m;$$

2. из формулы (36) следует, что если $\theta_k \neq \varphi_k$, $k = 1, \ldots, m$, то

$$\operatorname{Re}\{f \cdot g\}_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} \beta_k \operatorname{Re} H(e^{i\theta_k}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} H(e^{i\theta_k}) > 0,\ k = 1, \ldots, m.$$

Что и требовалось. ■

Из теоремы 12 вытекает:

Следствие 4. *Пусть $n, N \in \mathbb{N}$, $N \leqslant n$, f — экстремальная функция и пусть $g(z) := \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k \dfrac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}$, $\beta_k > 0$, $k = 1, \ldots, N$, $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$. Тогда, если функция g удовлетворяет равенству* (32)*, то есть*

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n \{g\}_0 + \ldots + \{f\}_0 \{g\}_n) = 0,$$

то

$$f(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}\right).$$

То есть $m = N$ и числа φ_k, $k = 1, \ldots, N$, нам известны.

Доказательство. Согласно следствию 3, существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, и $0 \leqslant \theta_1 < \ldots < \theta_m < 2\pi$, где $m \leqslant n$ такие, что $h(z) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \dfrac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}$ и $f = e^{-h}$.

Сгенерируем полином H из коэффициентов экстремальной функции f по формуле (33). Так как $H \in C^n$ согласно теореме 11, то все условия теоремы 12 выполнены. Применяя теорему 12 видим, что $m = N$ и $\theta_k = \varphi_k$, $k = 1, \ldots, N$. ■

17 Свойства производных коэффициентов

Лемма 5. *Пусть c — гладкая комплекснозначная функция аргумента $t \in \mathbb{R}$, $|c(t)| < 1$, t^* — точка строгого локального максимума функции $|c|$ и $c(t^*) > 0$. Тогда $\operatorname{Re} c'(t^*) = 0$ если и только если $|c|'(t^*) = 0$.*

Доказательство. Пусть $u := \operatorname{Re} c$, $v := \operatorname{Im} c$. Тогда $c = u + iv$, $|c| = \sqrt{u^2 + v^2}$ и

$$c' = u' + iv', \qquad |c|' = \frac{uu' + vv'}{|c|} \tag{37}$$

Необходимость. Если $\operatorname{Re} c'(t^*) = 0$, то из (37) и $\operatorname{Re} c'(t^*) = u'(t^*)$ следует, что $u'(t^*) = 0$. Так как по условию $c(t^*) > 0$, то $v(t^*) = 0$, поэтому из (37) получаем, что $|c|'(t^*) = 0$.

Достаточность. Если $|c|'(t^*) = 0$, то из (37) следует, что $(uu' + vv')(t^*) = 0$. Так как по условию $v(t^*) = 0$, то эта формула упрощается до $u(t^*)u'(t^*) = 0$. Поскольку $u(t^*) > 0$, то $u'(t^*) = 0$, что и требовалось. ■

Лемма 6. *Пусть* $h \in C_1$ *и* $f(z,t) := e^{-th(z)}$, *тогда*

$$\{f\}'_n = -(\{f\}_n\{h\}_0 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{38}$$

Доказательство. Ясно, что $\{f\}_k = \{f\}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Зафиксировав произвольный номер n и продифференцировав равенство $f(z,t) = e^{-th(z)}$ по t получаем

$$f'_t(z,t) = -h(z)f(z,t).$$

Заметив, что $(\{f\}_n)'_t = \{f'_t\}_n$ и выписав $\{f'_t\}_n$ получаем требуемое. ■

Из лемм 6 и 5 непосредственно вытекает равенство (32). Сформулируем это утверждение в явном виде:

Теорема 13. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $h \in C_1$, $f(z,t) = e^{-th(z)}$ *и* $|\{f\}_n(t)|$ *имеет локальный максимум в точке* $t = t^*$, *тогда*

$$\mathrm{Re}(\{f\}_n(t^*)\{h\}_0 + \ldots + \{f\}_0(t^*)\{h\}_n) = 0.$$

18 Дальнейшие следствия

Из теоремы 3 и теоремы 11 (предложение (34)) сразу вытекает

Следствие 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f *— экстремальная функция в проблеме Кшижа, причём* $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, *тогда найдутся* $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, *такие, что*

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{39}$$

В частности, если $f \in B^r$, *то* $p_k \in$, $k = 0, \ldots, n$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и H — многочлен, определённый формулой (33), то из равенств (17) и следствия 5 сразу вытекает, что

$$\{f\}_n = 2\{f\}_0(-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2p_n\bar{p}_0(-1)^n z_1 \cdot \ldots \cdot z_n, \tag{40}$$

где $z_1 \ldots z_n$ — корни многочлена H. Так как у экстремальной функции $\{f\}_n > 0$ и $\{f\}_0 > 0$, то соотношения (19) и (18) для корней $z_1 \ldots z_n$ многочлена H также имеют место.

Как уже упоминалось в пункте 7, гипотеза Кшижа доказана для всех номеров $n = 1, \ldots, 6$, стало быть, при этих n нам известна экстремальная функция $f = F$, где F задана формулой (21). Таким образом,

$$H(z) = \frac{2}{e}(1 + z^n), \qquad n = 1, \ldots, 6,$$

а корни H это всевозможные корни n-й степени из -1 как и в равенстве (19).

Переформулируем теорему 11 (или, что то же самое, теорему 13) для случая когда коэффициенты экстремальной функции действительные.

Теорема 14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда, если f имеет действительные коэффициенты, то для любой функции $g \in C^r$*

$$\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n \geqslant 0. \tag{41}$$

В частности, если $h = -\ln f$, то

$$\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n = 0, \tag{42}$$

Пусть многочлен H определён формулой (33)*, тогда*

$$H(e^{i\varphi_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{43}$$

где $m \leqslant n$, а $0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что h определена формулой (25).

Доказательство. Неравенство (41) сразу вытекает из неравенства (30).

Если f имеет действительные коэффициенты, то и h тоже, поэтому равенство (42) сразу следует из равенства (32).

Докажем равенства (43). Фиксируем k и возьмём

$$g(z) := \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-i\varphi_k} z}{1 - e^{-i\varphi_k} z} = 1 + 2\cos\varphi_k z + 2\cos 2\varphi_k z^2 + \ldots,$$

тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$, как при $\varepsilon \geqslant 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > -\alpha_k$). Из леммы 4, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f вытекает для $\varepsilon < 0$, что

$$\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k} \leqslant 0,$$

а для $\varepsilon > 0$

$$\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\varphi_k} + \ldots + \{f\}_0 2e^{ni\varphi_k} \geqslant 0,$$

что эквивалентно тому, что $H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

19 О единственности экстремальной функции

Как упоминалось выше, класс B инвариантен относительно вращений в плоскостях переменных z и w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — экстремальная в проблеме Кшижа с номером n, то мы можем считать без ограничения общности, что $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. При таких ограничениях на экстремальную функцию можно ставить вопрос о её единственности.

Теорема 15. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть f — экстремальная функция в проблеме Кшижа, удовлетворяющая условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0 > 0$. Тогда функция f существует, единственна и $f = F(z^n, 1)$, где функция F задана формулой* (21).

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и произвольную экстремальную функцию f. Согласно теореме 11, многочлен H, сгенерированный из коэффициентов функции f по формуле (33), принадлежит классу C^n и удовлетворяет всем условиям леммы 2. Следовательно,

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n,$$

откуда вытекает, что

$$\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0.$$

Пусть $\{f\}_0 = e^{-t}$, где $t > 0$. Тогда, так как по условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, то:

$$f(z) = e^{-t} + 2e^{-t} z^n + o(z^n).$$

Проверим, что функция $h \coloneqq -\ln f = t - 2z^n + o(z^n)$ принадлежит классу C. (Напомним, что миноры M_k определёны формулой (24).) Применяя критерий Каратеодори-Тёплица, получаем для $t > 0$:

- Миноры $M_k = 2^{k+1} t^{k+1} > 0$ при $k = 1, \ldots, n-1$;
- $M_n = 2^{n+1} t^{n-1}(t^2 - 1) \geqslant 0$ и $M_n = 0$ если и только если $t = 1$.

Таким образом, $\{f\}_0 = e^{-1}$ и $f(z) = Q_n(z) + o(z^n)$, где $Q_n(z) \coloneqq e^{-1} + 2e^{-1} z^n$.

Функция $F(z^n, 1)$, заданная формулой (21), принадлежит классу B, удовлетворяет всем указанным условиям и, согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 10), является единственным продолжением многочлена Q_n до функции класса B. Следовательно, $f(z) = F(z^n, 1)$. ∎

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 16. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, и $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$, тогда $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, f — единственная и $f = F(z^n, 1)$.*

Доказательство. Так как f — экстремальная, то из условй $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и неравенства (31) имеем $\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0 > 0$. Из условия $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$ и равенства (32) следует, что $\{f\}_n = -\{f\}_0 \operatorname{Re}\{h\}_n \leqslant 2\{f\}_0$. (Здесь мы использовали оценку $|\{h\}_n| \leqslant 2$, $h \in C_1$. См. [14] или следствие 2.) Стало быть, $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, откуда, согласно теореме 15 вытекает единственность f и то, что $f = F(z^n, 1)$. ∎

Заметим, что из (39) следует, что $\{f\}_n = \sum\limits_{j=0}^{n} |p_j|^2$, а $\{f\}_0 = p_n \bar{p}_0$. Если показать, что ещё и $|p_1| = \ldots = |p_{n-1}| = 0$, $|p_0| = |p_n| > 0$, то из теоремы 15 следует, что экстремальная функция единственная. В [15, стр. 735] показано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

В частности, имеет место следующее

Утверждение 11. *Если экстремальная функция единственная, то все её коэффициенты действительные.*

Доказательство. В самом деле, если у экстремальной функции f есть хотя бы один комплексный коэффициент, то $f^*(z) \coloneqq \overline{f(\bar{z})}$ тоже будет экстремальной и притом $f(z) \neq f^*(z)$. ∎

Теорема 17. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда, если f имеет действительные коэффициенты и $m = n$, где m задано формулой* (35), *то гипотеза Кшижа справедлива.*

Доказательство. Так как $m = n$, то из равенств (43) получаем, что $z_k = e^{i\varphi_k}$, для $k = 1, \dots, n$, а из равенств (40), что $\{f\}_n = 2\{f\}_0$. По теореме 15, если $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, то экстремальная функция единственна и, стало быть, это функция $F(z^n, 1)$, где F задана формулой (21). ∎

20 Свойства экстремальной функции, связанные с её значением в нуле

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Наличие выпуклой структуры на множестве всех функций g, подчиненных функции

$$M(z,t) \coloneqq \frac{e^{-t} + z}{1 + e^{-t}z} = e^{-t} + (1 - e^{-2t})z + \dots .$$

позволяет получить оценки $|\{g\}_n| \leqslant 1 - e^{-2t}$, причём равенство в этом неравенстве достигается только на вращениях $M(z,t)$ в плоскости переменной z.

Каждая функция f класса B_t подчинена мёбиусову отображению $M(z,t)$, стало быть

$$|\{f\}_n| < 1 - e^{-2t} = 1 - |\{f\}_0|^2. \tag{44}$$

Неравенство строгое, так как $M(z,t) \notin B$.

Отметим, что при $t \in [0,1]$ эта оценка даёт довольно-таки хорошее приближение для предполагаемой верхней границы $|\{f\}_n|$ (гипотеза состоит в том, что $|\{f\}_n| \leqslant 2te^{-t}$, $f \in B_t$, $t \in [0, 1]$, см. [12]). При $t = 1$ погрешность максимальна и равна $1 - e^{-2} - 2e^{-1} < 0.129$, погрешность монотонно убывает и стремится к нулю при стремлении t к нулю [13].

Оценка (44) позволяет вычислить значение t_0 такое, что

$$|\{f\}_n| < 1 - e^{-2t_0} = 2e^{-1}.$$

Вычисления дают $t_0 = -\ln\sqrt{1 - 2e^{-1}} \approx 0.665$. Следовательно, если $f \in B$ и $|\{f\}_0| \geqslant \sqrt{1 - 2e^{-1}} \approx 0.514$, то справедливы неравенства $|\{f\}_n| < 2/e$.

Из неравенства (31) и оценки (44) вытекает

Следствие 6. *Если f — экстремальная и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$2\{f\}_0 \leqslant \{f\}_n < 1 - \{f\}_0^2.$$

Разрешив неравенство $2\{f\}_0 < 1 - \{f\}_0^2$ из следствия 6 относительно $\{f\}_0$ получим:

Следствие 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, тогда $\{f\}_0 < \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ или $t > -\ln(\sqrt{2} - 1) \approx 0.881$, где $t \coloneqq -\ln\{f\}_0$.*

21 Линейная инвариантность

Следующий результат [16] является следствием того, что класс B является линейно инвариантным семейством функций.

Теорема 18. *Если $n \in \mathbb{N}$ и $f \in B$ — экстремальная функция, то*

$$(n+1)\{f\}_{n+1} = (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\omega(z) \coloneqq \frac{z+\eta}{1+\overline{\eta}z}$. Так как $f \in B$, то $f_\eta(z) \coloneqq f(\omega(z)) \in B$, при $\eta \in \Delta$. В окрестности точки $\eta = 0$ имеем $(\omega(z))^m = z^m + mz^{m-1}(\eta - \overline{\eta}z^2) + o(|\eta|)$. Следовательно $f_\eta(z) = f(\omega(z)) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\{f\}_m(z^m + mz^{m-1}(\eta - \overline{\eta}z^2)) + o(|\eta|)$ и

$$\begin{aligned}\{f_\eta\}_n = \{f\}_n + (n+1)\{f\}_{n+1}\eta - (n-1)\{f\}_{n-1}\overline{\eta} + o(|\eta|) = \\ = \{f\}_n + ((n+1)\{f\}_{n+1} - (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}})\eta + o(|\eta|),\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Re} u\overline{v} = \operatorname{Re}\overline{u}v$, для всех $u, v \in \mathbb{C}$. Так как f — экстремальная, то

$$\operatorname{Re}\Big(\eta\big((n+1)\{f\}_{n+1} - (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}}\big)\Big) + o(|\eta|) \leqslant 0. \tag{45}$$

Неравенство (45) справедливо при любом $\eta \in \Delta$, следовательно, мы можем выбрать число η настолько малым по модулю, что $o(|\eta|)$ перестанет оказывать влияние на знак левой части неравенства (45). Однако, если

$$(n+1)\{f\}_{n+1} \neq (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}},$$

то мы можем выбрать число η так, что знак левой части неравенства (45) станет положительным, а это противоречит (45), что и требовалось. ∎

При $n = 1$ для экстремальной функции получаем $\{f_\eta\}_1 = \{f\}_1 + 2\{f\}_2\eta + o(|\eta|)$, откуда следует, что $\{f\}_2 = 0$. Действительно $f(z) = F(z, 1) = e^{-1}(-2z + 2/3z^3 + \ldots)$.

Эрмерс в [16] указывает, что функция $F(z^n, 1)$ удовлетворяет теореме 18. Ясно также, что все $F(z^n, t)$, $t > 0$ удовлетворяют теореме 18. Существуют и другие функции, удовлетворяющие этому соотношению. Например [16], если n — нечётное число, то любая чётная функция класса B удовлетворяет теореме 18. Более того, если $f \in B$ удовлетворяет теореме 18, то и $cf \in B$ удовлетворяет теореме 18, при $c \in [0, 1]$.

22 Неравенства между коэффициентами

Из предложения (34) и теоремы 11 следует, что $h \in C_1^n$, где

$$h(z) \coloneqq \frac{H(z)}{\{f\}_n} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\{f\}_{n-k}}{\{f\}_n}z^k,$$

Применив к полиному h теорему 9 сразу получаем следующий результат

Теорема 19. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f экстремальна и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$\frac{|\{f\}_k|}{\{f\}_n} \leqslant \frac{r}{r+1} = \frac{\lfloor n/k \rfloor}{\lfloor n/k \rfloor + 1} < 1, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Этот результат можно уточнить для случая $k < n/2$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а функция f — экстремальная. Рассмотрим её внутреннюю вариацию

$$f_{t,\zeta}(z) := f(z) e^{-\varepsilon \frac{1+\zeta z^{n-k}}{1-\zeta z^{n-k}}}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \zeta \in \overline{\Delta}, \quad k < \frac{n}{2}.$$

Имеем $\{f_{t,\zeta}\}_n = \{f\}_n - (\{f\}_n + 2\{f\}_k \zeta)\varepsilon + o(t)$. Из того, что f экстремальная следует, что $\operatorname{Re}\{f_{\varepsilon,\zeta}\}_n \leqslant \{f\}_n$, $\varepsilon > 0$, $\zeta \in \overline{\Delta}$. Если взять достаточно малое значение ε, то становится очевидно, что $\operatorname{Re}(\{f\}_n + 2\{f\}_k \zeta) \geqslant 0$, $\zeta \in \overline{\Delta}$. То есть функция $h/\{f\}_n \in C_1^n$, где $h(\zeta) := \{f\}_n + 2\{f\}_k \zeta$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 20. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если функция f экстремальная, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$|\{f\}_k| \leqslant \frac{1}{2}\{f\}_n, \qquad k = 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Отметим, что впервые этот результаты появился в [17] в неявной форме. В [16] этот результат присутствует в явной форме.

23 Функции экстремального типа

Из следствия 7 вытекает, что экстремальную функцию нужно искать в классах B_t, $t > -\ln(\sqrt{2} - 1)$. Но $\ln(\sqrt{2} - 1) < 1$, а гипотеза Кшижа утверждает, что $t = 1$. Покажем, как свести поиски экстремальной функции к поискам не обязательно экстремальной функции в классах B_t, $t \geqslant 1$.

Теорема 21. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Гипотеза Кшижа для номера n верна если и только если в классах B_t, для $t \geqslant 1$ не существует функция f, такая, что $\{f\}_n = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный номер $n \in \mathbb{N}$.

Необходимость. Если гипотеза Кшижа для номера n верна, то очевидно, что функции с указанными свойствами не существует.

Достаточность. Предположим, что гипотеза Кшижа для номера n не верна. Тогда если f — экстремальная функция, то $\{f\}_n > 2e^{-1}$ в силу теоремы 15 о единственности экстремальной функции.

Заметим, что если $f \in B$, то $cf \in B$, $0 < c \leqslant 1$. Возможно два варианта:
1. если $\{f\}_0 > e^{-1}$, то согласно теореме 31 имеем $\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0 > 2e^{-1}$ откуда следует, что найдётся положительная константа $c < 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$, а следовательно и $c\{f\}_0 < e^{-1}$;
2. если $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n \geqslant 2e^{-1}$, то найдётся положительная константа $c < 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$ и $c\{f\}_0 < e^{-1}$. ∎

Таким образом, наличие в классе B функции f с $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n = 2e^{-1}$ эквивалентно тому, что гипотеза Кшижа не верна. При этом, например, из равенства (32) ясно, что $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.

Гипотеза Кшижа будет также не верна если в классе B_1 найдётся функция f, такая, что $\{f\}_n = 2\{f\}_0 = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$. Из теоремы 15 следует, что f не может быть экстремальной.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$. Заметим, что если f и g удовлетворяют неравенству (30), то при любом $t > 0$ функции tf, tg также удовлетворяют этому неравенству. Если f и h удовлетворяют равенству (32), то при любом $t > 0$ функции tf и th также удовлетворяют этому равенству. При этом, если f — экстремальная, то $cf \in B$, при $0 < c < 1$, но cf уже не будет экстремальной. Теоремы 11, 12 и 21 позволяют дать следующее определение.

Функция f называется функцией экстремального типа в проблеме Кшижа для номера n, если $0 < \{f\}_0 \leqslant 1/e$, $\{f\}_n \geqslant 2/e$, f имеет вид (26), то есть

$$f(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}\right), \quad \alpha_k > 0,\ k = 1, \ldots, m,\ 0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi,$$

$H \in C^n$, где полином H сгенерирован из коэффициентов функции f по формуле (33), то есть $H(z) := \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1} z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n$, и H удовлетворяет равенствам (35), то есть $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \ldots, m$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f — функция экстремальная в проблеме Кшижа, то $cf \in B$, $0 < c < 1$. При этом, хотя cf уже не является экстремальной, для неё тем не менее верны соотношения (30), (31), (32), (34), (35), (40), (19), (18), (20) и теоремы 18, 19 и 20.

Как мы знаем из теоремы 12, условие (30) эквивалентно условию (34), а условие (32) эквивалентно условию (35). Условие (34), то есть $H \in C^n$ входит в определение, поэтому условие (30) можно исключить. Условие (35) также входит в определение, поэтому условие (32) можно исключить.

Мы не знаем чему равно $\{f\}_n$ для экстремальной функции, но мы можем попытаться найти функцию, упомянутую в теореме 21. Нам нужно найти функцию из $\bigcup\limits_{t \geqslant 1} B_t$, отличную от $F(z,t)$ и такую, что $\{f\}_n = 2/e$. Остальные условия можно проверить перед тем, как проверять, что $f \in B$.

Перейдём к конструктивному построению функций экстремального типа при фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Один из возможных подходов к решению поставленной задачи заключается в том, чтобы при помощи следствия 5 построить многочлен H, заданный формулой (33). Проблема этого подхода состоит в том, что мы имеем $n+1$ параметр $p_0, \ldots, p_n$ на которые наложены условия (40) и (20). При больших n подобрать эти параметры так, чтобы найти функцию экстремального типа может быть очень сложно. Кроме того, мы не контролируем нули тригонометрического многочлена $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Рассмотрим ещё один подход.

1. При помощи утверждения 7 строим многочлен

$$\tilde{P}(z) = \tilde{p}_0 + \ldots + \tilde{p}_n z^n = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

по его корням $z_1, \ldots, z_n$, чтобы найти числа $\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_n$. Эти корни выбираем так, чтобы они удовлетворяли условиям (40), (19), (18). Введя обозначение

$$c \coloneqq |\tilde{p}_0|^2 + \ldots + |\tilde{p}_n|^2,$$

мы получим p_k с необходимым нам свойством $|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2/e$ по формуле

$$p_k \coloneqq \sqrt{\frac{2}{ce}}\tilde{p}_k, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

2. Используя теорему 3 строим многочлен H, заданный формулой (33):

$$H(z) \coloneqq h_0 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k z^k, \qquad h_0 = \frac{2}{e}. \quad h_n > 0.$$

Ясно, что неравенство (31) выполняется по построению.

3. Пусть f — функция, которую мы строим. По формуле (33)

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n,$$

откуда (как и в следствии 5)

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{46}$$

4. Используя формулу (46) с учётом теоремы 18, получаем отрезок ряда Тейлора для функции f:

$$f(z) = p_n\bar{p}_0 + (p_{n-1}\bar{p}_0 + p_n\bar{p}_1)z + \ldots + (p_1\bar{p}_0 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})z^{n-1} + \\ + \frac{2}{e}z^n + \frac{n-1}{n+1}\overline{(p_1\bar{p}_0 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})}z^{n+1} + o(z^{n+1}).$$

5. Условия (31), (34), (35), (40), (19), (18), а также условия теорем 18 и 19 выполнены по построению. Если f удовлетворяет условию (20) и теореме 20, то проверяем, что $f \in \bigcup_{t\geqslant 1} B_t$, то есть отрезок ряда Тейлора функции $h \coloneqq -\ln f$ удовлетворяет критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 10).

6. Строим продолжение полинома $\{f\}_0 + \{f\}_1 z + \ldots + \{f\}_{n+1}z^{n+1}$ до функции класса B. Если продолжение до функции класса B удалось построить, то по теореме 21 гипотеза Кшижа не верна.

Список литературы

[1] Fejér L. Über trigonometrische Polynome. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 53–82.

[2] Riesz F. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 83–87.

[3] Hussen A., Zeyani A. Fejer-Riesz Theorem and Its Generalization. // IJSRP. 2021. V. 11. I. 6.

[4] Rovnyak J. Fejér-Riesz theorem. Encyclopedia of Mathematics. Springer Verlag GmbH, EMS.

[5] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. Chelsea Pub. Co. N.Y. 1975.

[6] Александров И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Издательство Томского университета. Томск. 1976.

[7] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[8] *Levin V. I.* Lösing der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80-81.

[9] *Szapiel W.* A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[10] *Samaris N.* A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.

[11] *Ступин Д. Л.* Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций. // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. Вып. 2. С. 71–84.

[12] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120 EDN: FWRLMA

[13] Ступин Д. Л. Доказательство гипотезы Кшижа в некоторых подклассах. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2006. С. 49–50.

[14] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[15] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // Advances in Mathematics. 2015 V. 273. P. 716–745.

[16] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.

[17] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[18] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[19] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.

[20] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 277–297.

[21] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1969. 576 с.

[22] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. N. 5–6. P. 223–230.

[23] Ступин Д. Л. Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 79–92.

[24] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions // Compl. Var. 1992. V. 17. N. 3–4. P. 213–222.

[25] Ступин Д. Л. Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27. № 1. С. 81–96.

[26] Horowitz C. Coefficients of nonvanishing functions in H^∞ // Israel J. Math. 1978. V. 30. P. 285–291.

[27] Peretz R. Some properties of extremal functions for Krzyz problem // Compl. Var. 1991. V. 16. N. 1. P. 1–7.

[28] Krushkal S. L. Two Coefficient Conjectures for Nonvanishing Hardy Functions, I // J. Math. Sci. 2022. V. 268. P. 199–221.

[29] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions. Dep. Univ. Nijmegen. 1992.

[30] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions // Indag. Math. New Ser. 1993. V. 4. N. 4. P. 471–478.

[31] Kiepiela K., Pietrzyk M., Szynal J. Meixner polynomials and nonvanishing holomorphic functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. V. 133. N. 1–2. P. 423–428.

[32] Ganczar A., Michalska M., Szynal J. The conjecture parallel to the Krzyz conjecture // Demonstratio Math. Warsaw Technical University Institute of Mathematics. 2003. V. 36. N. 1. P. 65–75.

[33] Peretz R. The Krzyz Problem and Polynomials with Zeros on the Unit Circle // Compl. Var. 2002. V. 47. N. 3. P. 271–276.

[34] Peretz R. The Krzyz Conjecture Theory and Methods. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2021. 620 p.

[35] Agler J., McCarthy J. E. The Krzyz Conjecture and an Entropy Conjecture // J. d'Analyse Mathematique. 2021. V. 144. P. 207–226.

[36] Ступин Д. Л., Шеретов В. Г., Доказательство локальной гипотезы Кшижа. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. Тверь. 2005. № 6(12). С. 122–125.

[37] Carathéodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen // Mathematische Annalen. 1907. V. 64. P. 95–115.

[38] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[39] Töplitz O. Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 191–192.