

К проблеме определения масштабных преобразований координат, позволяющих находить точные решения в теории струй и пучков заряженных частиц .

А.С.Борисов, Injection Alloys Group, 2025

Описано применение специального интегро-дифференциального группового подхода для поиска точных решений в некоторых задачах с масштабной инвариантностью, возникающих в теории струй и пучков заряженных частиц. Показано, что данный метод позволяет понять, почему в турбулентных воздушных струях, содержащих аэрозольные частицы, в некоторых частных случаях законы спада скорости и концентрации аэрозоля на оси совпадают, а также почему, в этих случаях эти законы оказываются не зависящими от геометрии потока.

1.Введение. Теория струйных течений постоянно развивается [1-5]. Среди всех струйных течений наиболее интересны те, которые допускают точные математические решения уравнений их описывающих. К таким случаям можно отнести струи, уравнения которых допускают группу преобразований растяжением или, выражаясь более строго, решения допускают масштабную инвариантность координат. Коротко масштабную инвариантность можно охарактеризовать следующим образом: если известны какие-либо значения физических величин в некотором сечении струи, то данные величины будут иметь эти же значения и в других сечениях вдоль оси струи, для точек, в которых отношение поперечной координаты к продольной постоянно. Иными словами если двигаться к началу координат вдоль оси струи (т.е. последовательно уменьшать координату z преобразованием $z'=z/\lambda$, где $\lambda>1$), то на линии, для которой отношение поперечной координаты к продольной постоянно, значения физических величин меняться не будут.

Применяя указанное выше преобразование координат по z множество раз, приходим к точке $z=0$, в которой значения физических величин уже не определяются уравнениями, а должны быть заданы из дополнительных соображений. Это- граничные условия (ГУ). Данные значения, как правило, задаются априори и для каждого набора граничных условий получается свое, соответствующее им решение. Центральным вопросом является в таких случаях вопрос, сколько граничных условий можно задать и являются ли они непротиворечивыми друг для друга.

С другой стороны принцип анимации, т.е. «оживления» на экране последовательности неподвижных картин позволяет этой же группой преобразований описывать еще и не стационарные процессы, развивающиеся из одной точки (т.е. эволюционным образом). «Развертка» таких процессов вдоль оси $z=v*t$ (т.е. переход из подвижной системы координат, движущейся со скоростью потока v , в неподвижную), делают математическое описание таких процессов полностью аналогичным стационарным струйным течениям.

Применяя методы теории групп в задачах, которые были указаны выше, получаются ситуации, когда система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), но в ней не удается определить групповые параметры преобразований. Групповыми параметрами, называем значения, которые определяют законы изменения масштабов физических величин вдоль оси или границ струи. Чтобы их определять, в [6] предложено интегрировать ОДУ (т.е. редуцировать ее некоторым способом) к дополнительной системе алгебраических уравнений (в некоторых случаях законов сохранения) для определения групповых параметров. Чтобы отличать данный подход от традиционного метода решения на основе теории групп, удобно называть его интегро-дифференциальным

групповым методом. При таком способе на границах интегрирования или на границах струи приходится вводить нужное число граничных условий на физические величины: компоненты скоростей, концентрация и т.д. Это дополнительно увеличивает размерность алгебраической системы уравнений. Центральный вопрос, который при этом возникает это вопрос о том, сколько непротиворечивых условий на физические величины можно ввести, чтобы системы была однозначно разрешимой и, следовательно, течение однозначно определено. Этот вопрос перекликается с тем, что уже был задан выше.

2. Классификация. Чтобы ответить на вопрос, предыдущего раздела необходимо определить, сколько уравнений можно получить, если использовать указанный во введении интегро-дифференциальный подход. Разберем это подробнее.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных, включающую уравнения гидродинамики, где в общем случае есть уравнение неразрывности, уравнения движения (с производными 2-го порядка), а также возможно другие уравнения, аналогично имеющие производные не более второго порядка от физических величин. Пусть l - число пространственно-временных переменных x_1, x_2, x_3, t в задаче (очевидно, что l меньше или равно 4), а M - число физических величин, которые описывает рассматриваемая система дифференциальных уравнений в частных производных $u_1, \dots, u_M$. Тогда полное число переменных, которое можно подвергнуть групповым преобразованиям масштабирования:

$$x_1' = \lambda^{\alpha_1} x_1; x_2' = \lambda^{\alpha_2} x_2; x_3' = \lambda^{\alpha_3} x_3; t' = \lambda^{\alpha_4} t; u' = \lambda^{\alpha_5} u; \dots, \quad (1)$$

есть очевидно $n=l+M$. Если систему координат расположить так, что ось $z=x_3$ будет направлена вдоль оси струи, то за инвариантную независимую переменную преобразований (1) может быть выбрана функция вида:

$\eta = \phi_1(x_1')/\phi_2(x_3') = \phi_1(\lambda^{\alpha_1} x_1)/\phi_2(\lambda^{\alpha_3} x_3) = \lambda^{\alpha_1 - \alpha_3} \phi_1(x_1)/\phi_2(x_3) = \phi_1(x_1)/\phi_2(x_3)$. Иными словами, функции ϕ_1 и ϕ_2 в общем случае должны удовлетворять функциональным соотношениям:

$$\phi_1(\lambda^{\alpha_1} x_1) = \lambda^{\alpha_1 - \alpha_3} \phi_1(x_1) \text{ и } \phi_2(\lambda^{\alpha_3} x_3) = \lambda^{\alpha_3 - \alpha_1} \phi_2(x_3) \quad (2)$$

$$\alpha_1/\alpha_3 = \gamma/\beta.$$

Подстановка инвариантной переменной η в систему уравнений в частных производных при наличии в последней масштабной инвариантности относительно приведенной переменной η , приведет к тому, что система сведется к M обыкновенным дифференциальным соотношениям для M функций физических величин относительно автомодельной переменной η . Такое преобразование становится возможным только при условии, что между n величинами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеется x (x меньше или равно n) алгебраических соотношений, которые сохраняют вид исходной системы уравнений в частных производных инвариантной относительно выбранных преобразований (1) при подстановке их в систему. При этом разность

$$\Delta = n - x - 1 \quad (3)$$

покажет сколько еще алгебраических уравнений на групповые индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ нужно задать, чтобы определить их и, следовательно, задать групповые преобразования (1)-(2) однозначно. В (3) минус единицей учтено одно арифметическое выражение, уже имеющееся в (2), когда функции $\phi_1(x_1)$ и $\phi_2(x_3)$ известны и линейны относительно аргументов. В общем случае произвольных

функций ϕ_1 и ϕ_2 преобразования (1)-(2) многозначны и составляют, по меньшей мере, однопараметрическую группу.

Таким образом, единственность решения исходной системы уравнений потребует при формализации группового подхода, знания, по меньшей мере, двух чисел (индексов) n и x . Однако, этим отнюдь не ограничиваются все необходимые сведения. В частности, если ввести в рассмотрение число p , которое показывает, сколько имеется дифференциальных уравнений первого порядка в исходной системе уравнений в частных производных, то оставшиеся $M-p$ уравнений будут уравнениями второго порядка и, следовательно, число

$$k=1 \cdot p + 2 \cdot (M-p) = 2 \cdot M - p \quad (4)$$

покажет, сколько неопределенных констант возникнет при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений для автомодельных функций, описывающих физические величины относительно переменной η .

Числа (или индексы) l, M, x, p подробно характеризуют исходную математическую проблему или другими словами исходную систему уравнений в частных производных при ее решении методом теории групп. Производные от этих чисел- индексы n, k, Δ характеризуют масштабные преобразования, которые допускает данная система уравнений в частных производных. Причем наличие исходной однозначности преобразований (1)-(2) определяется индексом Δ (однозначность здесь понимается в узком смысле, т.е. при условии, что $\phi_1(x_1)$ и $\phi_2(x_2)$ линейны относительно своих аргументов, а однопараметрическая группа допустимых решений функциональных уравнений (2) сужена до одного элемента). Если он больше нуля, то для однозначности исходной задачи нужно привлекать какие-то дополнительные соображения, если равен нулю, то имеются единственные масштабные преобразования (1)-(2) координат, сохраняющие вид системы уравнений инвариантным. В случае $\Delta > 0$, т.е. когда не все групповые индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ определены, имеется дополнительная возможность увеличить число алгебраических уравнений их характеризующих. Эта возможность состоит в интегрировании полученной системы ОДУ по автомодельной η в пределах от η , соответствующей оси струи, до η , соответствующей ее границе. Операция интегрирования (иногда это определение законов сохранения системы), во-первых, дает еще M дополнительных алгебраических соотношений для групповых индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Во-вторых, потребует введения дополнительных граничных условий (ГУ) на физические величины, на оси струи и на ее границе. Если после ее проведения ввести еще одно число, которое характеризует дальнейшую возможность однозначного определения групповых индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$q = \Delta - M = n - x - 1 - M = M + l - x - 1 - M = l - x - 1, \quad (5)$$

то при $q=0$, преобразования определены однозначно, при $q < 0$ преобразования переопределены, что приведет к тому, что часть алгебраических соотношений для групповых индексов окажется связанной $|q|$ – дополнительными соотношениями. При $q > 0$ по-прежнему будут нужны дополнительные соотношения, чтобы однозначно определить групповые индексы.

Как следует из изложенного выше, в таком подходе, даже если групповые индексы будут определены однозначно, т.е. $\Delta=0$ или $q=0$, для η соответствующей оси струи и ее границам, придется дополнительно задать в общем случае значения M функций и M их первых производных, т.е. всего $Q=2 \cdot M + 2 \cdot M = 4 \cdot M$ граничных условий. При этом число

$$t=k-M=2\cdot M-p-M=M-p$$

(6)

определяет число ГУ, которые надо поставить на производные искомым функций на одной из границ струи.

Для удобства визуализации вводимых соотношений можно предложить следующую таблицу, которая в рассматриваемом случае получается трехступенчатой. Первый уровень это базовые числа, характеризующие исходную систему уравнений: l, M, x, p . Вторая ступень, это производные от базовых, числа, характеризующие масштабные преобразования n, k, Δ, q . Третья ступень это числа, характеризующие необходимые ГУ: Q и t .

Предлагаемая таблица для любой струйной задачи, имеющей масштабную инвариантность координат, будет выглядеть следующим образом:

Система уравнений				Преобразования				ГУ	
l	M	p	x	$n=l+M$	$k=2\cdot M-p$	$\Delta=n-x-1$	$q=l-x-1$	$Q=4\cdot M$	$t=M-p$

При этом условно можно принять следующую классификацию задач. Если $\Delta=0$, то задача полностью определена системой уравнений и ее масштабные преобразования (1)-(2) однозначны. Все групповые индексы могут быть определены. В этом случае разнообразие ее решений заключается только в выборе разных граничных условий. Такую задачу можно отнести к нулевому уровню определенности.

Если $\Delta>0$ и $q=0$, то использование интегро-дифференциального группового подхода и интегрирование ее системы ОДУ приведет к однозначному выбору групповых параметров и преобразования (1)-(2) полностью определяются. Такие задачи можно условно отнести к первому уровню.

Если $\Delta<0$ или $\Delta>0$ и $q<0$, то либо исходная система, либо использование законов сохранения приведет к пере определенности системы алгебраических уравнений на групповые индексы. В этом случае между ними имеются дополнительные $|\Delta|$ или $|q|$ соотношений и, следовательно, для некоторых случаев такая задача вообще может не иметь решений. Такие задачи можно условно отнести ко второму уровню.

Если $\Delta>0$ и $q>0$, то как исходная система, так и использование интегро-дифференциального группового подхода приводит к принципиальной не определенности исходной системы алгебраических уравнений на групповые индексы. В этом случае необходимо ввести еще q дополнительных соотношений и, следовательно, и без них задача вообще не имеет решений. Такие задачи можно условно отнести к последнему, третьему уровню.

3. Известные примеры стационарных струйных течений.

3.1 Случай струи Слезкина-Ландау. Из литературы известна задача [1-3] о расчете вязкого ламинарного течения затопленной струи несжимаемой жидкости в сферических координатах (как указано в [3], в реальности это акустическое течение, а не струя). Опубликовано также решение ее соответствующих уравнений в частном случае струи цилиндрической геометрии в поле тяжести [7]. Метод, который применялся в [7] для решения данной задачи полностью соответствует описанному выше.

Таблица, характеризующая данную проблему, имеет вид:

l	M	p	x						
2	3	1	4	$n=l+M$	$k=2*M-p$	$\Delta=n-x-1$	$q=l-x-1$		
				5	5	0	-3	$Q=4*M$	$t=M-p$
								12	2

Как это следует из представленной таблицы, указанная задача может быть отнесена к нулевому уровню (самому высшему по степени определенности, так как $\Delta=0$). Иными словами, группа автомодельных преобразований в ней, с самого начала определена однозначно.

С другой стороны в данной задаче $q=-3$. Иными словами при решении системы ОДУ для автомодельных функций, т.е. при ее интегрировании, между ее $k=5$ константами возникнет переопределенность. Необходимо будет удовлетворить $|q|=3$ дополнительным соотношениям между константами для получения решения задачи. Как видно из хода решения, приведенного в [7], см также [3], это и происходит. Решения получены только для случаев, когда константы связаны 3 соотношениями, которые взаимно непротиворечивы: $(C_4-C_5)/C_3=-/+2*C_1$; $C_2=0$; $C_2=C_1+/- (C_4-C_5)/(2*C_3)$, где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 выписаны в обозначениях работы [7] и отличаются от [3].

При этом принятие всех констант нулевыми, удовлетворяет приведенным выше требованиям и приводит к решению известному как случай Л.Д.Ландау (заметим, что Н.А.Слезкин в МГУ опубликовал обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого получается данное решение, чуть раньше, на что обращено внимание в обзоре [3] и здесь, следуя рекомендациям [3], это вынесено в название подзаголовка). В случае, когда одна из констант C_1 отлична от нуля и 3 константы связаны как это было указано выше, решение существует, причем оно более общее, так как включает случай $C_1=0$ (случай Слезкина -Ландау) как частный. Это решение было найдено в статье Бромана -Руденко [3]. Как видно произвол в решениях связан в этой задаче с выбором только 3 констант интегрирования C_1, C_2, C_3 посредством выбора различных граничных условий (C_4, C_5 входят в уравнения в комбинации $(C_4-C_5)/C_3$, которую всегда можно принять за новую константу C_3 в силу ее произвольности).

Следует отметить, что если принять в данном случае, группу (1)-(2) однопараметрической, т.е. $\alpha_1/\alpha_3=\gamma/\beta$ и $\alpha_1 \neq 1$ в (2), то это не приведет к новым физическим решениям. В частности законы изменения физических величин вдоль оси z не могут быть иными, чем это получается для случая $\alpha_1=1$. Чтобы это увидеть, заметим, что группа преобразований, которая оставляет задачу Слезкина -Ландау неизменными в обозначениях (1) есть: $x_1'=\lambda^{\alpha_1}*x_1$; $x_2'=\lambda^{\alpha_2}*x_2$; $x_3'=\lambda^{\alpha_3}*x_3$; $t'=\lambda^{\alpha_4}*t$; $u'=\lambda^{\alpha_5}*u$;... где $\alpha_2=\alpha_4=0$ и $\alpha_1=\alpha_3$; $\alpha_5=\alpha_6=-\alpha_1$; $\alpha_7=2*\alpha_5=-2*\alpha_1$. Откуда для инвариантов при $\alpha_1 \neq 1$ получаем: $\eta=(x_1/x_3)^{1/\alpha_1}$ и $\psi=(u*x_3)^{1/\alpha_1}$;... . Вдоль оси $x_1=0$, $u^{1/\alpha_1}=\psi(0)/x_3^{1/\alpha_1}$. Откуда $u=\psi(0)^{\alpha_1}/x_3$, что с точностью до константы совпадает с законом изменения скорости на оси для случая $\alpha_1=1$. Аналогичные соотношения можно получить как для других компонент скорости, так и для давления. Таким

образом, рассмотрение случая $\alpha_1 \neq 1$ не приводит к новым физическим следствиям, а только к численной перенормировке инвариантов. Обычно данный вопрос не рассматривают, неявно принимая $\alpha_1 = 1$. Принятие $\alpha_1 \neq 1$ и получение новых решений, говорило бы о существовании не известных ранее режимов течений, описываемых данными уравнениями. Например, режима установления течения Слезкина -Ландау.

3.2 Случай Прандтля-Толмина (ПТ) течений турбулентных воздушных струй постоянной плотности, содержащих аэрозольные частицы.

Задачи, возникающие при течениях турбулентных воздушных струй постоянной плотности, в приближении Прандтля-Толмина подробно исследованы и изложены в монографиях [5]. Там же приведены автомодельные решения таких задач. Интегро-дифференциальный групповой подход для их решения использован ранее в [6].

Общая для такого типа задач таблица с точки зрения решения их групповым методом имеет следующий вид:

l	M	p	x						
2	3	1	2	$n=l+M$	$k=2 \cdot M-p$	$\Delta=n-x-1$	$q=l-x-1$		
				5	5	2	-1	$Q=4 \cdot M$	$t=M-p$
								12	2

Как это следует из таблицы, данную задачу следует отнести ко второму уровню ($\Delta > 0$ и $q < 0$). Таким образом, степень неопределенности групповых преобразований довольно высока ($\Delta = 2$), но законы сохранения из ОДУ должны решить проблему ($q = -1$). Однако при интегрировании возникнет одно уравнение ($|q| = 1$), которое внесет переопределенность в алгебраическую систему. Эта чрезмерная (или пере) определенность может служить основой для отсутствия решений.

К счастью это происходит не всегда. В [6] найдены решения системы ОДУ, которые согласуются с известными ранее решениями, приведенными и подтвержденные большим количеством экспериментов согласно [5]. При этом в решениях в интегро-дифференциальном групповом подходе действительно возникает по одному дополнительному соотношению на групповые параметры в каждом из рассмотренных в [6] случаев (см. первые уравнения в системах (2.5), (2.10) из [6 стр.102, 103]). Так как окончательные значения физических величин, полученные разными методами в [5] и в [6], согласуются, из этого факта следует, что эти дополнительные соотношения (2.5) и (2.10), возникающие [6] при интегро-дифференциальном групповом подходе, должны быть выполнены, хотя и не являются очевидными.

Интересно то, что интегро-дифференциальный групповой метод приводит к следующему соотношению между групповыми индексами в турбулентных воздушных струях, содержащих аэрозоль, в зависимости от геометрии задачи v ($v=0$ для плоской геометрии, 1 для цилиндрической) в обозначениях [6]:

$$\eta = y/x^{\alpha_2}; \quad \psi(\eta) = u/x^{\alpha_3}; \quad \varphi(\eta) = v/x^{\alpha_4}; \quad \zeta(\eta) = n/x^{\alpha_5}, \quad (7)$$

где подстановка в систему и интегрирование уравнений дает следующие соотношения для групповых индексов:

$$\alpha_5/\alpha_3 = (1 + (1/(1+v)) \cdot (d/D - b/B)) / (1 + b/(B \cdot (1+v))) \text{ и } \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \alpha_4. \quad (8)$$

Принято, что $b = \eta^v \cdot (\varphi \psi + / - C_u^2 \cdot (\varphi')^2) |^{\eta^2_{\eta 1}}$; $d = \eta^v \cdot (\psi \cdot \zeta + / - C_u \cdot C_n (\varphi' \zeta')) |^{\eta^2_{\eta 1}}$; (...) = $d/d\eta$;
 $F(\eta) |^{\eta^2_{\eta 1}} = F(\eta_2) - F(\eta_1)$; $f = \eta \cdot \psi |^{\eta^2_{\eta 1}}$; $A = \int d\eta \eta^v \varphi(\eta)$; $B = \int d\eta \eta^v \varphi^2(\eta)$; $D = \int d\eta \eta^v \varphi(\eta) \cdot \zeta(\eta)$; $v=0,1,2$.

В плоской струе ($v=0$), граничные условия симметричны: $\eta_2 = -\eta_1$; $\varphi(\eta_2) = \varphi(\eta_1)$; $\psi(\eta_2) = \psi(\eta_1)$;

$\varphi'(\eta_2) = -\varphi'(\eta_1)$; $\zeta'(\eta_2) = -\zeta'(\eta_1)$, что дает $b=0=d$ в силу симметрии, откуда

$$\alpha_5 = \alpha_3. \quad (9)$$

Таким образом, концентрация аэрозоля и скорость на оси струи падают по одному закону с ростом координаты вдоль оси. Фактически это результат условия $b=0=d$ или равенства скоростей и концентрации на внешних границах струи. В круглой струе ($v=1$) $\varphi(\eta_{rp}) = \varphi'(\eta_{rp}) = \psi(\eta_{rp}) = \zeta(\eta_{rp}) = \zeta'(\eta_{rp}) = 0$ и на оси струи $\eta=0$, что также дает $b=0=d$ и также приводит к формуле (9). Однако, как видно, природа возникновения условий $b=0=d$ в случаях $v=1$ и $v=0$ разная. В случае цилиндрической геометрии данное требование возникает из требования равенства нулю средних скоростей на границе струи, причем эти величины на оси автоматически обнуляются геометрией. В плоской же струе ($v=0$), условие $b=0=d$ возникает в силу равенства средних скоростей и концентрации на верхней и нижней границах струи. Последнее является гораздо более широким требованием, включая в себя как частный случай, нулевые граничные значения.

Таким образом, закон (9) есть следствие специфического выбора граничных условий. Следует обратить внимание, что в силу (9) зависимость α_5/α_3 от геометрии струи (т.е. от индекса v) при $b=0=d$ отсутствует и это еще одно из проявлений симметрии данной задачи.

Наличие такой симметрии, скорее случай, чем правило. В частности для плоской струи плоскость симметрии, которой лежит на плоскости раздела двух параллельных потоков спутного газа, текущих с разными скоростями (см. Рис.1),

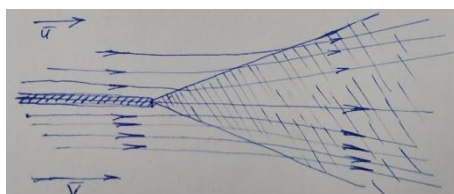


Рис.1.

с подачей аэрозоля, как вдоль плоскости раздела потоков, так и через внешние границы потоков с одинаковой концентрацией аэрозоля и в точке истечения и в потоках, соотношение (9) нарушается, так как симметрия граничных условий отсутствует и $\alpha_5/\alpha_3 \approx 1 + f \cdot \zeta_0/D$; $f = \eta \cdot \psi |^{\eta^2_{\eta 1}}$; $\zeta_0 > 0$. Т.е. концентрация аэрозоля будет изменяться вдоль оси струи быстрее, чем скорость потока.

3.3 Случай Прандтля-Толмина (ПТ) течений турбулентных воздушных струй постоянной плотности, содержащих заряженные аэрозольные частицы.

В [6] показано, что заряженный аэрозоль на активном участке струи (т.е. там, где массовая скорость потока превосходит все остальные) в приближении ПТ также сводится к автомодельной задаче.

Таблица индексов, которая ее характеризует в данном случае, выглядит следующим образом:

l	M	p	x						
2	3	1	3	$n=l+M$	$k=2\cdot M-p$	$\Delta=n-x-1$	$q=l-x-1$		
				5	5	1	-2	$Q=4\cdot M$	$t=M-p$
								12	2

Как видно наличие уравнения Пуассона не снимает неопределенность на индексы преобразований в данном случае в исходной задаче ($\Delta=1$). С другой стороны использование первых интегралов системы должно решить проблему ($q<0$ и $|q|=2$). Система при этом оказывается, дважды переопределена. Именно из-за этого в [6] индексы не удавалось определять непосредственно из (3.9) [см. 6 стр.107], причем в (3.9) получилось именно по 2 связанных уравнения на индексы ($|q|=2$), которые должны быть выполнены.

В этом случае отношение законов спада концентрации аэрозоля вдоль оси струи к скорости аэрозоля вдоль оси составляет:

$$\alpha_5/\alpha_3=1+(2/(1+v))/(1+b/(B\cdot(1+v))) \text{ и } \alpha_2=1, \alpha_3=\alpha_4; v=0,1 \quad (10)$$

$$d/D-b/B=1-k\cdot d_0/D\approx 1 \text{ и } (f-k\cdot f_0)/A=0,5\cdot(b/B-(1+v)), k\ll 1.$$

Как видно из-за дополнительного соотношения Пуассона по сравнению со случаем незаряженного аэрозоля в этом случае d не может быть одновременно равно b и равно нулю. В этом случае, если $b=0$, то $d/D\approx 1$ и $f\approx (A/2)\cdot(1+v)$. Или если $d/D=0$, то $b/B\approx 1$ и аналогично для f . Именно чрезмерная определенность системы преобразований приводит к дополнительным соотношениям между граничными условиями, т.е. между b/B и d/D , что делает невозможной в данной задаче симметрию типа (9).

4. Нестационарные течения. Импульсные пучки.

Интересно, что подход, который был изложен выше можно применять и к нестационарным задачам. Примером такой ситуации могут служить импульсные пучки заряженных частиц. Импульсный пучок формируется из непрерывного, если в коллимирующей исходной поток системе поставить блок, который с заданной периодичностью из непрерывного пучка будет «вырезать» (удалять) одинаковые сгустки. Иными словами специальная ионно-оптическая система может диафрагмой формировать стационарный, слабо расходящийся пучок ионов (или других заряженных частиц), а отдельный электронный блок убирать (удалять) из этого пучка фрагменты с заданной периодичностью (скважностью).

Заряды, которые будет формировать подобная система, представляют из себя сгустки, которые в системе координат связанной с пучком мгновенно сформированы и расширяются в вакуум. Подобная идеализация задачи позволила в [8] провести расчет динамики расширения такого сгустка в приближении сплошной среды. При этом, если скважность вырезания нуль, то сформировавшийся пучок может иметь форму расширяющегося вследствие кулоновских сил расталкивания плоского слоя (плоская форма диафрагмы или геометрический фактор $v=0$), при круглой форме диафрагмы цилиндра ($v=1$). При малой, отличной от нуля скважности и эллиптической геометрии диафрагмы, это может быть сильно вытянутый вдоль оси движения

пучка эллипсоид-крыло ($0 < v < 1$ см. Рис.2). При увеличении скважности и приближении отношения осей эллипса к единице ($1 < v < 2$), это может быть сгусток формы эллипсоида вращения, а при дополнительном увеличении скважности и полностью круглом отверстии диафрагмы ($v=2$), формы шара.

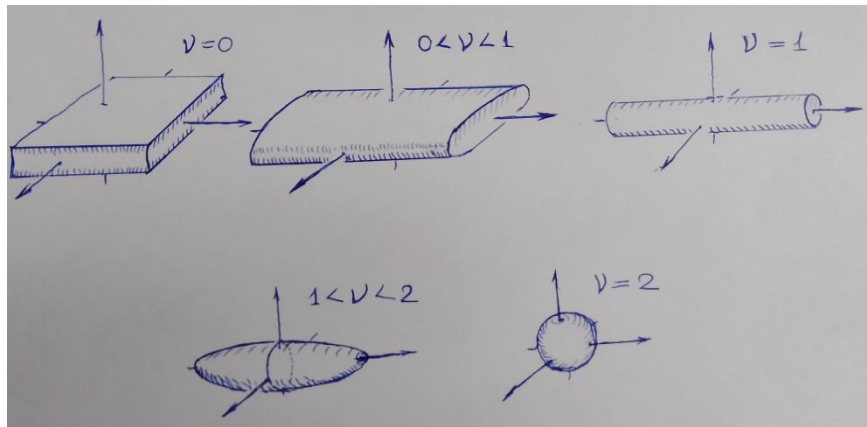


Рис.2.

Таким образом приближение непрерывной заряженной среды позволяет моделировать разлет сгустков зарядов с широким набором исходных геометрий и проследить зависимость времени разлета сгустков от выбранной геометрии, что важно при конструкторских разработках ионно-электронных оптических систем. Данная задача возникает [9] при конструировании ионных двигателей малой удельной тяги для длительных космических перелетов.

Система уравнений, которая в гидродинамическом приближении описывает разлет сгустков различных геометрий v введена в [8] и имеет следующий вид (для простоты дальнейшего принято, что пучки имеют азимутальную симметрию):

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \cdot r^v) + \frac{\partial}{\partial r} (v \cdot n \cdot r^v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad 0 \leq v \leq 2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^v \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r}) = 4\pi \cdot n \cdot r^v$$

Данная система (в реальности она является системой уравнений в частных производных первого порядка, т.к. нижнее уравнение системы 2-го порядка имеет очевидный интеграл) решена в [8] методом характеристик для начальных сгустков однородного распределения (т.е. ступенчатого профиля).

Интересно, что интегро-дифференциальный групповой подход также позволяет получить точное решение (11). Следует отметить что, так как подобный подход был применен выше для расчета течений стационарных струй, применимость данного подхода к нестационарному разлету сгустков, означает, что данный случай имеет полную аналогию со стационарным случаем истечения. Продемонстрируем это. Не стационарность данного случая имеет свойство локальности, то есть, она наблюдается в системе координат, связанной с потоком частиц (именно в этой «локальной» координатной системе записаны уравнения (11)). В лабораторной системе координат можно выделить ось движения потока с координатами z , вдоль которой положение движущихся сгустков и локальное время, которое отсчитывается в (11) от момента начала разлета сгустка t , связаны между собой соотношением $z = c \cdot t$, где c - скорость частиц пучка.

Таким образом, если картинкам расширяющегося в поперечном направлении сгустка сопоставить разные координаты оси z (формула $z=c \cdot t$ именно это и делает), то получающаяся картина будет выглядеть стационарной, причем, имеющей точкой начала формирования пучка точку $t=z=0$ (именно в ней, априори, надо задать начальные или граничные условия), в полной аналогии со стационарными струйными течениями. Отметим, что обратная операция к упомянутой выше операции приписывания серии неподвижных картин различным геометрическим точкам пространства давно используется в кинематографии для «оживления» (т.е. получения динамики и ухода от стационарности) следующих друг за другом неподвижных кадров последовательно проецируемых на плоскость экрана.

Составим характеристическую таблицу данной задачи. Она будет иметь следующий вид.

l	M	p	x						
2	3	2	3	$n=l+M$	$k=2 \cdot M-p$	$\Delta=n-x-1$	$q=l-x-1$		
				5	4	1	-2	$Q=4 \cdot M$	$t=M-p$
								12	1

Как видно исходная задача (11) не доопределена ($\Delta=1$). Использование законов сохранения должно решить проблему, но при этом, по меньшей мере, два уравнения окажутся связанными.

Решение (11) ищем в виде инвариантов или неизвестных функций от автомодельной переменной при преобразованиях координат вида (1), которые в данном случае выберем так:

$$r' = \lambda^{\omega} \cdot r; \quad t' = \lambda^{\alpha} \cdot t; \quad v' = \lambda^{\alpha} \cdot v; \quad n' = \lambda^{\beta} \cdot n; \quad \Phi' = \lambda^{\gamma} \cdot \Phi,$$

где в качестве автомодельных переменных принимаем (специально отметим негласный выбор далее $\omega=1$, который сузил класс допустимых решений (2) с однопараметрической группы до единственного элемента, и это соотношение учтено в седьмом столбце таблиц, равно как и в (2), слагаемым равным минус единице):

$$\eta = r^{\alpha}/t; \quad \psi(\eta) = v/r^{\alpha}; \quad \varphi(\eta) = \Phi/r^{\gamma}; \quad \zeta(\eta) = n/r^{\beta}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (11) и проведя преобразования, приходим к системе 3-х дифференциальных уравнений при 3-х алгебраических:

$$(v+\beta+1-2 \cdot \alpha) \cdot \zeta \cdot \psi + \alpha \cdot (\eta \zeta \psi)' - \eta^2 \cdot \zeta' = 0$$

$$(\gamma + v - 1) \cdot (\gamma \varphi + \alpha \eta \varphi') + \alpha \eta \cdot d/d\eta (\gamma \varphi + \alpha \eta \varphi') = \zeta$$

$$-\eta^2 \cdot \psi' + (\alpha \cdot \psi^2 + \alpha \eta \psi \psi') = q_0 \cdot (\gamma \varphi + \alpha \eta \varphi'), \quad (\dots)' = d/d\eta, \quad q_0 = (q/m) \cdot n_0. \quad (13)$$

$$\alpha + \alpha = 1$$

$$\gamma - \beta - 2 = 0$$

$$\gamma = 2\alpha$$

Так как алгебраическая часть уравнений (13) не разрешима (3 линейных уравнения для 4-х неизвестных, что и прогнозирует таблица с $\Delta=5-1-3=4-3=1$), требуется еще одно уравнение. Для однозначности вводим пока только один интегральный закон- закон сохранения заряда под характеристикой (границей потока):

$$Z_0 = (1/\alpha) \cdot t^{(1+\nu+\beta)/\alpha} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta \eta^{(1+\beta+\nu-\gamma)/\alpha} \zeta(\eta). \quad (14)$$

Требуем описания интегральных инвариантов (включая Z_0) только в автомодельных переменных (иными словами требуем отсутствия в интегральных инвариантах явной зависимости от времени), что немедленно дает дополнительное условие $1+\beta+\nu=0$ и сразу определяет групповые параметры через индекс размерности задачи:

$$\alpha = (1-\nu)/2$$

$$\alpha = (1+\nu)/2$$

$$\beta = -(1+\nu) \quad (15)$$

$$\gamma = (1-\nu).$$

Использование интегральных соотношений для определения групповых индексов, есть полный аналог шагов интегро-дифференциального группового метода, который использован при расчете стационарных течений струй в п.1-3 выше. Зная 4 индекса можно рассчитать 3 неизвестные функции в (13).

Воспользуемся тем, что в (13) $\nu+\beta+1=0$ и $\gamma+\nu-1=0$ согласно (15). Это позволяет привести в первом уравнении (13) подобные слагаемые для функции $\zeta \cdot \psi$, а также проинтегрировать один раз второе уравнение (13). Система (13) преобразуется к:

$$-\alpha \cdot (\zeta \cdot \psi) / \eta + \alpha \cdot (\zeta \cdot \psi)' = \eta \cdot \zeta'$$

$$\gamma \varphi + \alpha \eta \varphi' = \int \zeta / (\alpha \eta) + C_1$$

$$-\eta^2 \cdot \psi' + (\alpha \cdot \psi^2 + \alpha \eta \psi \psi') = q_0 \cdot (\gamma \varphi + \alpha \eta \varphi'), \quad (\dots)' = d/d\eta, \quad q_0 = (q/m) \cdot n_0 \quad (13a)$$

Относительно функций $\zeta \cdot \psi$ и φ первые два уравнения (13a) являются однородными дифференциальными уравнениями первого порядка, с правыми частями, зависящими только от функции ζ , ее производных или интегралов. Это позволяет еще раз проинтегрировать (13a) для функций $\zeta \cdot \psi$ и φ в общем виде. Получаются два нелинейных связанных соотношения в соответствии с табличным $|q|=2$:

$$\psi = (C_4 \cdot \eta + (\eta/\alpha) \cdot \zeta) / \zeta;$$

$$\varphi = (C_3/\eta^{\gamma/\alpha}) + 1/\alpha^2 \cdot (1/\eta^{\gamma/\alpha}) \cdot \int d\eta \eta^{(\gamma-\alpha)/\alpha} \int^{\eta} \zeta / \eta + C_1/\gamma,$$

при остаточном интегро-дифференциальном уравнении: (13b)

$$-\eta^2 \cdot \psi' + (\alpha \cdot \psi^2 + \alpha \eta \psi \psi') = (q_0/\alpha) \cdot (\int \zeta / \eta) + q_0 \cdot C_1$$

Выберем константы C_1, C_3, C_4 из граничных условий, чтобы не противоречиво удовлетворялись верхние 2 соотношения (13b). Требуем, чтобы концентрация $n(r) = r^\beta \cdot \zeta(\eta)$ на оси пучка (при $r \rightarrow 0$) оставалась бы конечной, постоянной величиной для любой геометрии ν , т.е. $n(0) \neq \infty$ и $n(0) = \text{Const}$. При малых r и, следовательно, малых η , функция $\zeta(\eta) \rightarrow \zeta_1 \cdot \eta^\xi, \xi > 0$. Это приводит к условию $n(r) = r^\beta \cdot \zeta(\eta) \rightarrow r^{\beta+\xi} \cdot \zeta_1 / t^\xi = \zeta_1 / t^\xi |_{r \rightarrow 0}$, и дает $\xi=2$, из-за требования выше и так как согласно (15) имеется связь $\beta+2 \cdot \alpha=0$. Подставим найденное соотношение в первое уравнение (13b), это приводит к $\psi = (C_4/\zeta_1) / \eta + (\eta/\alpha)$. Считаем, что скорость частиц на оси пучка при любой геометрии есть ноль. Откуда следует, $v(r \rightarrow 0) = r^\alpha \cdot \psi(\eta) |_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow 0$ только, если $C_4=0$, или $\psi = (\eta/\alpha)$.

Подставим это в нижнее соотношение (13b) приходим к условию $C_1=0$, откуда $\zeta_1=(2\alpha)/(\alpha \cdot q_0)=((1-\nu)/(1+\nu)) \cdot (2/q_0)$. Из граничных условий для электрического потенциала и отсутствия его особенности вблизи оси при $\eta \rightarrow 0$ для $\nu \leq 1$, следует, что во втором уравнении (13b) константа $C_3=0$, а подстановка в это выражение явного вида ζ определяет φ как $\varphi = \text{Const} \cdot \eta^2$, причем $\text{Const} = \varphi_1$, выражается через уже найденную ζ_1 соотношением $\varphi_1 = \zeta_1 \cdot (1+\nu)/8\alpha^2$.

Данное решение может быть получено чуть менее строго. Для этого интегрируем верхнее уравнение в (13), что дает уравнение:

$-2\alpha + 2\eta \cdot (\int \zeta / \int \zeta \psi) - 2 \cdot (\int dy \int^y \zeta) / \int \zeta \psi = -\alpha \cdot ((\eta \zeta \psi) - (\eta_0 \zeta_0 \psi_0) + (\eta^2 \zeta - \eta_0^2 \zeta_0)) / \int \zeta \psi$. Если учесть $\int \zeta \psi = \psi_1 \cdot (\eta \cdot \int \zeta - \int dy \int^y \zeta)$, то вводя $\psi = \psi_1 \cdot \eta$, $\psi_1 = \text{Const}$, приходим к интегральному соотношению:

$$2 \cdot (1 - \psi_1 \cdot \alpha) = (1 - \psi_1 \cdot \alpha) \cdot (\zeta \eta^2 - \zeta_0 \eta_0^2) / \int d\eta \eta \zeta,$$

которое выполняется всегда, если $\psi_1 = 1/\alpha$ или $\zeta = \text{Const} = \zeta_0$. (16)

Аналогично интегрируя по автомодельной переменной второе из уравнений (13) с учетом $\gamma + \nu - 1 = 0$ получаем: $(\gamma \varphi + \alpha \cdot \eta \varphi') + C_0 = \int \zeta / (\alpha \cdot \eta)$, C_0 -константа интегрирования. Его решение ищем в виде: $\varphi = \varphi_1 \cdot \eta^\xi$, $\zeta = \zeta_1 \cdot \eta^\xi$; φ_1, ζ_1 - константы. Подставив, получим $C_0=0$ и алгебраическое соотношение для ξ, ζ_1, φ_1 : $(\xi \cdot \alpha + \gamma) \cdot \varphi_1 = \zeta_1 / (\xi \cdot \alpha)$.

Таким образом, проинтегрированы и сведены к связанным алгебраическим уравнениям два первых соотношения (13) в соответствии с $|q|=2$. Рассмотрим третье, дифференциальное уравнение (13). С учетом $\psi_1 = 1/\alpha$, получаем отсюда: $(-\psi_1 + \alpha \cdot \psi_1^2 + \alpha \cdot \psi_1^2) \cdot \eta^2 = q_0 \cdot \varphi_1 \cdot ((\gamma + \alpha \cdot \xi)) \cdot \eta^\xi$ и, следовательно, $\xi=2$, что автоматически приводит к решению задачи (13) в виде:

$$\varphi = (1-\nu) \cdot (\eta^2/q_0)/(1+\nu)^2; \zeta = (1-\nu) \cdot (2\eta^2/q_0)/(1+\nu); \psi = (2\eta)/(1+\nu);$$

$$\eta = r^\alpha/t; \alpha = (1-\nu)/2; \alpha = (1+\nu)/2; \beta = -(1+\nu); \gamma = (1-\nu), 0 \leq \nu \leq 2. \quad (17)$$

Еще одно решение, которое следует из (16) $\zeta = \text{Const} = \zeta_0$ и, следовательно, $\varphi = \text{Const} = \varphi_0$. Тогда $(\psi_1 - 1) \cdot \psi_1 \cdot \eta^2 = q_0 \cdot \varphi_0 \cdot \gamma$. Или $\psi_1 = 1$ при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \zeta_0$. Данное решение соответствует случаю отсутствия зарядов в начальный момент и разлету сгустка с постоянной начальной скоростью.

Рассмотрим полученное решение (17) и решение методом характеристик, приведенное в [8] для расчета изменения границ пучка. К примеру, в [8] показано, что в частном случае $\nu=0$ для распределения зарядов при $t=0$ равно $n = n_0 \cdot \Theta(r_0 - r)$, границы сгустка расширяются по закону $y = 1 + 2\pi \cdot t^2$, $y = r/r_0$, t - в единицах безразмерного времени (формула (13) стр.10). Из (17) следует, что в групповом методе $r^{1/2} = \eta \cdot t$ где $\eta = \text{Const}$. Видно, что эти решения похожи, но не совпадают. Возникает вопрос, почему?

Для пояснения ответа рассмотрим решение [8], найденное методом характеристик, при очень больших t . В этом случае в дальней зоне, где о граничных условиях решение «забывает» можем написать, $t \gg 1$. Имеем в этой зоне $r \sim t^2$, что совпадает с автомодельным решением (17), где также $r \sim t^2$. Отметим, что полного равенства получить не возможно, т.к. (17) получено для нулевых начальных условий ($r=0$ при $t=0$), а формула, приведенная выше, нормирована условием, что при $t=0$, граница пучка имела единичное значение.

Аналогично в частном случае $\nu=1$ в [8 см. стр.10] предложено приближенное соотношение $t = \exp(k^2) \cdot (k^2/(0,25+k^2))/2\pi^{1/2}$, $k = (\ln y)^{1/2}$, $y = r/r_0$ для описания расширения безразмерных

границ пучка. В дальней зоне, где не только $y \gg 1$, но и $(\ln y) \gg 1$, получаем из этого соотношения $t \approx y$ или $r \sim t$, что совпадает с решением (17), для которого $r = \eta \cdot t$ где $\eta = \text{Const}$.

В случае сферической геометрии сгустка $v=2$ в [8] получено следующее уравнение для безразмерных границ пучка (см. [8] формула 7 стр.8) $(y \cdot (y-1))^{1/2} + \ln((y-1)^{1/2} + y^{1/2}) = (8\pi/3)^{1/2} \cdot t$, $y = r/r_0$, t безразмерно. Это уравнение было получено интегрированием закона сохранения энергии ([8] формула (6) стр.8), где в отличие от случаев $v=0,1$ перед потенциальной энергией был упущен знак минус. Такой выбор знака приводит к тому, что сумма потенциальной и кинетической энергий зарядов на границе не может быть нулем для конечных начальных размеров сгустка при нулевой начальной скорости движения частиц на границах сгустка. Иными словами начальные условия к уравнению движения границ были $v_0=0$ при $r=r_0$. В тоже время у частиц сгустка в момент его формирования из-за предыстории уже была отличная от нуля скорость, что дает более верное начальное условие $v=v_0 \neq 0$ при $r=r_0$. В этом случае дифференциальное уравнение для границы получается следующим $dy/dt = \text{Const} \cdot (1/y^{1/2})$, вместо $dy/dt = \text{Const} \cdot (1-y)^{1/2}$ при нулевом начальном условии, интегрирование, которого и привело к выписанной в начале абзаца формуле. Данная разность в выборе начальных условий приводит к тому, что в групповом методе $r^{3/2} = \eta \cdot t$ из (17), а в препринте [8] даже в дальней зоне $r \sim t$, т.е. скорость расширения границ сгустков в решении для $v=2$ завышалась. При выборе начальных условий в [8] $v=v_0 \neq 0$ при $r=r_0$ уравнение движения границ интегрируется элементарно, что дает $r^{3/2} \sim t$, совпадая с (17) в дальней зоне.

Для случаев $v > 1$ следует отметить также то, что в (17) инварианты ζ и ϕ получаются отрицательными, что формально приводит к отрицательной плотности зарядов $n = \zeta_1/t^2$, где $\zeta_1 = ((1-v)/(1+v)) \cdot (2/q_0)$. Такие решения (17) описывают движение частиц разноименных зарядов. Иными словами, если записать $\zeta_1 = ((v-1)/(1+v)) \cdot (2/(-q_0))$ в эквивалентном виде, но под q_0 понимать заряды с противоположенным знаком решения (17) сохраняют свою силу.

5. Заключение.

Интегро-дифференциальный групповой подход может быть применен для поиска точных решений в некоторых задачах с масштабной инвариантностью, возникающих в теории струй и пучков заряженных частиц.

Данный подход позволяет понять, каковы законы изменения физических величин вдоль оси и на границах течений и почему в турбулентных воздушных струях, содержащих аэрозольные частицы, в некоторых частных случаях законы спада скорости и концентрации аэрозоля на оси совпадают. Почему эти законы в рассмотренных частных случаях оказываются, не зависящими от геометрии потока, и почему подобная симметрия не может наблюдаться в струях с заряженным аэрозолем.

Автор благодарит О.Б.Шагова в дискуссии с которым, о возможности поиска новых решений в задаче Слезкина-Ландау, родилась идея данной работы.

Литература.

1. Слезкин Н.А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений вязкой жидкости. Ученые записки МГУ 1934г. вып.2.
2. Ландау Л.Д. ДАН СССР 43 299 (1944г.); Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Гидродинамика, т6, Наука, 1988, стр.118.
3. Броман Г.И., Руденко О.В. Затопленная струя Ландау точные решения, их смысл и приложения УФН, январь 2010г. т.180 №1.
4. Gaifullin A.M., Zhvick V.V. Laminar submerged jets of incompressible fluids at large Reynolds numbers. УФН, 66(11) 1142-1153 (2023г.)
5. Абрамович Г.И. Теория турбулентных струй Физматгиз 1960; Абрамович Г.И. Теория турбулентных струй Наука 1984г.
6. Борисов А.С., Голосной И.О. О распределении заряженного аэрозоля в воздушных турбулентных струях, Математическое Моделирование, т9, №7, 1997, стр100
7. Борисов А.С., Шагов О.Б. Об одном приложении струй кальция в расплаве железа. www.preprints.ru 2024г.
8. Борисов А.С., Ерошкин А.В., Шагов О.Б. К вопросу о распределении зарядов в нерелятивистских пучках заряженных частиц. Препринт ВЦММ РАН СССР, №30 1992г., Москва.
9. Штулингер Э., Ионные двигатели для космических полетов, Воениздат, 1966, стр.214-215.