

Некоторые вопросы теории сложности вычислений с точки зрения элементарной теории моделей

В представленном исследовании рассматривается одна из известных проблем теории сложности вычислений: каково соотношение классов сложности $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co-}\mathcal{NP}$? Для ответа на этот вопрос было переосмысленно и соответствующим образом переформулировано известное фундаментальное понятие - модельная полнота исследуемой теории, раздела математики "Теория моделей". Целью переформулировки этого фундаментального понятия являлось, описать соотношение классов сложности $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co-}\mathcal{NP}$, с теоретико - модельной точки зрения. Известный факт: иерархия свойств в любой модели модельно полной теории обрывается на первом уровне. Эта ключевая идея была положена в основу для плодотворного исследования соотношения классов сложности $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co-}\mathcal{NP}$. Известный факт: существует такой оракул $\mathbf{A}$ при котором класс сложности $\mathcal{NP}(\mathbf{A})$ отличается от класса сложности $\mathbf{co-}\mathcal{NP}(\mathbf{A})$. Разработав соответствующим образом оракульные вычисления и формализовав их, в классе примитивно рекурсивных алгоритмов, а затем, используя теоретико - модельное соотношение между указанными классами, удалось связать соотношение классов сложности вычислений $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co-}\mathcal{NP}$ с соотношением классов сложности $\mathcal{NP}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{co-}\mathcal{NP}(\mathbf{A})$, что затем позволило установить, что класс сложности $\mathcal{NP}$ не является булевой алгеброй. При формализации оракульных вычислений в классе примитивно рекурсивных алгоритмов были доказаны ряд интересных теорем, одна из которых есть аналог теоремы о неподвижной точке, которая использовалась в ключевой теореме позволившей установить, что класс сложности $\mathcal{NP}$ не является булевой алгеброй. Прочтя представленное исследование, можно понять почему эффект релятивизации препятствует получению высоких нижних оценок или отделению одного класса сложности от другого класса сложности вычислений методами "Дискретной математики"¹

Представленное исследование является оригинальным, а многие важные понятия, которые используются в этом исследовании, во всех известных мне исследованиях, не встречались

Part I

Исчисление равенств для вычисления замкнутых термов

Пусть алфавиты $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_6$ таковы, что: $\mathcal{L}_1 = \{S, I, \mathbf{Z}, \delta, \mathbf{Length}, \div, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \}$, $\mathcal{L}_2 = \{\Lambda, x\}$,

$\mathcal{L}_3 = \{R, J\}$, $\mathcal{L}_4 = \{=, |, ,\}$, $\mathcal{L}_5 = \{[,], (,)\}$, $\mathcal{L}_6 = \{\mathbf{U}\}$, $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{i=5} \mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_6$. В алфавите $\mathcal{L}(\mathbf{U})$

будет формализовано вычисление замкнутых термов для класса оракульных примитивно рекурсивных словарных функций [1] [6 с. 204].

Для полноты приведём несколько достаточно традиционных определений.

Определение функтора и его местности:

- 1) Слова вида: $\mathbf{Z}, \delta, \mathbf{Length}, S|S, S||S, \dots, S \underbrace{|, \dots, |}_{t \text{ раз}} S$ - одноместные функторы. Одноместный функтор $S \underbrace{|, \dots, |}_{k \text{ раз}} S$ будем обозначать как $\mathbf{S}_k$.
- 2) Слова вида: $I \underbrace{|, \dots, |}_{m \text{ раз}}, \underbrace{|, \dots, |}_{n \text{ раз}}$ - n - местный функтор, который будем обозначать традиционно $\mathbf{I}_m^n$, при $1 \leq m \leq n$.

3) Слово $\mathbf{U}$ - одноместный функтор. В дальнейшем функтор $\mathbf{U}$ будем называть также неопределяемым функциональным символом или оракульным символом.

- 4) Слова вида: $\div, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ - двухместные функторы.

¹ Под методами Дискретной математики, я понимаю те доказательства, которые можно выразить в стандартной модели арифметики, например доказательство Consis нельзя выразить в стандартной модели арифметики, хотя это предложение истинно в этой модели. Не все утверждения, которые подвергаются релятивизации, можно доказать методами Дискретной математики. И это продемонстрировано в данном исследовании.

5) Если Φ - k - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - n - местные функторы, то слово $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ - n - функтор. Этот функтор будем называть функтором суперпозиции.

Введём следующее важное понятие:

а) Λ - аргументное слово, которое называется пустым словом;

б) если α - аргументное, то слово $\mathbf{S}_k(\alpha)$ - аргументное слово, которое будем обозначать как αa_k .

Аргументное слово α называется k - алфавитным, если это слово не содержит функторов $\mathbf{S}_l$, при $l > k$.

Множество B аргументных слов называется k - алфавитным, если каждое слово $\alpha \in B$ является k - алфавитным. Пусть $k > 1$. Число всех k - алфавитных слов, длина которых $l > 0$, равно k^l . Число всех k - алфавитных слов, длина которых не больше l , равно $\frac{k^{l+1} - 1}{k - 1}$.

Аргументные слова, не содержащие функтор $\mathbf{S}_k$, при $k > 1$, называются натуральными числами.

6) Если α - аргументное слово, $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ - 2 -х местные функторы, тогда слово $[R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m]$ - 1 - местный функтор.

7) Если Φ - $k \geq 1$ - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ - $k+2$ - местные функторы, тогда слово $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ - $k+1$ - местный функтор. Функторы пунктов 6 и 7 будем называть рекурсивными функторами, а функторы $\Phi, \Phi_1, \dots, \Psi_m$ называются составляющими функторами, число m называется степенью разветвлённости рассматриваемого рекурсивного функтора.

Функторы пунктов 1-4 будут называться исходными функторами.

Слова вида $x \underbrace{, \dots, }_{l \text{ раз}} x$ - переменные. Обозначим эти слова традиционно в виде x_l .

Понятие термина.

1) Всякое аргументное слово и всякая переменная - терм.

2) Если $t_1, \dots, t_k$ - термы, Ψ - k - местный функтор, тогда слово $\Psi(t_1, \dots, t_k)$ - терм.

Для любого подмножества $\mathbb{A}$ аргументных слов, введём следующие равенства (определяющие равенства), в качестве аксиом определяемой формализации для вычисления оракульных замкнутых термов:

1) $\mathbf{T} = \mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ - произвольный терм,

2) $\mathbf{Z}(x_1) = \Lambda$,

3) $\mathbf{I}_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$,

4) $\delta(\Lambda) = \Lambda$,

5) $\delta(x_1 a_k) = x_1$,

6) $\mathbf{Length}(\Lambda) = \Lambda$,

7) $\mathbf{Length}(x_1 a_k) = \mathbf{Length}(x_1) a_1$,

- 8) $x_1 \dot{-} \Lambda = x_1$,
- 9) $x_1 \dot{-} x_2 a_k = \delta(x_1 \dot{-} x_2)$,
- 10) $\mathbf{Concat}(x_1, \Lambda) = x_1$,
- 11) $\mathbf{Concat}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2) a_k$,
- 12) $\mathbf{D}(x_1, \Lambda) = \Lambda$,
- 13) $\mathbf{D}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{D}(x_1, x_2))$,
- 14) $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}) = \Phi(\Psi_1(\bar{x}), \dots, \Psi_k(\bar{x}))$,
- 15) $[R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m](\Lambda) = \alpha$,
- 16) $[R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m](x a_k) = \Phi_k(x, [R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m](x))$, при $k \leq m$,
- 17) $[R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m](x a_k) = [R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m](x)$, при $k > m$,
- 18) $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\bar{x}, \Lambda) = \Phi(\bar{x})$,
- 19) $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\bar{x}, y a_k) = \Psi_k(\bar{x}, y, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\bar{x}, y))$, при $k \leq m$,
- 20) $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\bar{x}, y a_k) = [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\bar{x}, y)$, при $k > m$.

Пусть $\mathbb{A}$ - некоторое множество аргументных слов. Аксиомы интерпретации неопределяемого функционального символа $\mathbf{U}$

- a) $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, если $\alpha \in \mathbb{A}$,
- b) $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$, если $\alpha \notin \mathbb{A}$.

Равенства a) и b) называются аксиомами интерпретации, которые соответствуют множеству $\mathbb{A}$, множество аргументных слов $\mathbb{A}$ называется интерпретационным множеством.

Правила вывода Исчисление равенств для замкнутых термов

$$\mathbf{Sb} : \frac{\mathbf{T}_1 = \mathbf{Q}_1, \mathbf{T}_2 = \mathbf{Q}_2}{[\mathbf{T}_2]_{\mathbf{T}_1}^x = [\mathbf{Q}_2]_{\mathbf{Q}_1}^x}, \mathbf{Cut}_1 : \frac{\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3}{\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3}, \mathbf{Cut}_2 : \frac{\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3}.$$

В правиле **Sb** переменная x - собственная переменная этого правила.

Замечание. Для вычисления значений замкнутых термов, достаточно наряду с правилом **Sb** использовать только правило **Cut₁**.

Для доказательства равенств замкнутых термов добавляется правило **Cut₂**. Можно обойтись без правила **Cut₂**, заменив правило **Sb** на правило $\frac{\mathbf{T}_1 = \mathbf{Q}_1, \mathbf{T}_2 = \mathbf{Q}_2}{[\mathbf{T}_2]_{\mathbf{Q}_1}^x = [\mathbf{Q}_2]_{\mathbf{T}_1}^x}$.

Определение вывода. Последовательность равенств $\mathbf{T}_1 = \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{T}_n = \mathbf{Q}_n$ является выводом (доказательством равенства $\mathbf{T}_n = \mathbf{Q}_n$), если для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, равенство $\mathbf{T}_i = \mathbf{Q}_i$ является либо аксиомой, либо

аксиомой интерпретации $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbb{A}$, $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$, которые соответствуют множеству $\mathbb{A}$, либо получено из предыдущих равенств по одному из правил вывода.

Если вывод $\mathbf{P}$ таков, что он содержит интерпретационные аксиомы $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbb{A}$ или $\mathbf{U}(\beta) = a_1$, тогда будем говорить, что слова α, β были использованы в этом выводе, причём слово α использовано положительно, слово β использовано отрицательно. С выводом $\mathbf{P}$, при интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, свяжем пару множеств: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}}$ - множество всех положительно опрошенных слов в выводе $\mathbf{P}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}}$ - множество всех отрицательно опрошенных слов в выводе $\mathbf{P}$.

Последовательность равенств $t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n$ - квазивывод, если каждое равенство в этой последовательности есть либо выводимое равенство, либо получено из предыдущих равенств по одному из правил вывода.

Замечание. Идея приведённого исчисления равенств для вычисления замкнутых оракульных термов была заимствована в работах [1-6].

Длина доказательства $\mathbf{P}$ - число равенств в доказательстве $\mathbf{P}$. Это число обозначается как $l_{\mathbf{P}}$.

Полная длина доказательства $\mathbf{P}$ - длина слова, полученного соединением всех равенств, входящих в доказательство $\mathbf{P}$, разделённых символом запятой. Это число обозначается $Fl_{\mathbf{P}}$.

Обозначим полученное исчисление замкнутых термов как **CalcEq**, **CalcEq_U** в алфавите $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ соответственно.

Обозначение $\vdash t = r$ - равенство $t = r$ выводимо в исчислении **CalcEq_U**, при любой интерпретации функтора $\mathbf{U}$.

Обозначение $\mathbb{A} \vdash t = r$ - равенство $t = r$ выводимо в исчислении **CalcEq_U**, с аксиомами интерпретации соответствующими множеству $\mathbb{A}$.

Функтор Φ , терм t называются $n > 0$ алфавитным, если представленные слова не содержат функторов S_l , при $l > n$. Все исходные функторы являются n алфавитными для каждого n .

Для каждого $n \geq 1$ и любого аргументного слова α можно построить n - местный функтор, обозначаемый как **Const _{α} ^{n}** , что верно $\vdash \mathbf{Const}_{\alpha}^n(x_1, \dots, x_n) = \alpha$.

Теорема 1.1. Можно составить такой алгоритм, следуя которому для каждого терма t можно построить такой функтор Φ_t , что $\vdash \Phi_t(\bar{y}) = t$, где $\bar{y}$ - список переменных, содержащий переменные терма t . Доказательство и полную формулировку этой теоремы см. в [2 стр. 62].

Теорема 1.2. Для любого замкнутого n алфавитного терма t , для заданной интерпретации $\mathbb{A}$ функтора $\mathbf{U}$, существует единственное такое аргументное слово α того же алфавита, что $\mathbb{A} \vdash t = \alpha$. Доказательство проводится индукцией по построению функтора, затем индукцией по построению терма t .

Доказательство $\mathbf{P}$ равенства вида $t = \alpha$, где t - замкнутый терм, α - некоторое аргументное слово, будем называть вычислением терма t .

Замечание. Для любого терма $t(\bar{x})$, для любой последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, существует такое натуральное число k , что для любого интерпретационного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, можно построить такое вычисление терма $t(\bar{x})$ на $\bar{\alpha}$, в котором будет использовано не больше k аргументных слов.

Теорема 1.3. Пусть дан n - местный функтор $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - некоторая последовательность аргументных слов. Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}$ - вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, с результатом вычисления β_i , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, $1 \leq i \leq k$. Пусть $\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\beta}}$ - вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\beta_1, \dots, \beta_k$, с результатом вычисления γ , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, тогда можно построить вычисление $\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$ функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, для которого верно:

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\beta}}}, (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\beta}}}.$$

Доказательство. Составим следующую последовательность равенств: $\mathbf{P}_{\Psi_1}, \dots, \mathbf{P}_{\Psi_k}$,

$$[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](x_1, \dots, x_n) = \Phi(\Psi_1(\bar{x}), \dots, \Psi_k(\bar{x})), \dots,$$

$$[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})), \Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n), \dots,$$

$\Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})) = \Phi(\beta_1, \dots, \beta_k)$, $\mathbf{P}_{\Phi}$, $\Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})) = \gamma$, $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \gamma$ - вычисление функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, с указанным множеством положительно и отрицательно опрошенных слов.

Теорема 1.4. Пусть дан $n + 1$ ($n \geq 1$) - местный функтор $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$ - некоторая последовательность аргументных слов.

Пусть $\mathbf{P}_{\Phi}$ - вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}$ - вычисление функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$, с результатом вычисления γ , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_i}$ - вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma$, с результатом вычисления η , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, тогда можно построить вычисление

$\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}$ функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, для которого верно:

$$1. (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \Lambda}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \Lambda}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}}$$

$$2. (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}}$$

Доказательство. Пункт (1) - очевиден. Пункт (2). Составим следующую последовательность равенств:

$$\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta},$$

$$[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](x_1, \dots, x_n, z a_i) = \Psi(x_1, \dots, x_n, z, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](x_1, \dots, x_n, z)), \dots,$$

$$[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i) = \Psi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)),$$

$$\Psi_i(x_1, \dots, x_n, z, u) = \Psi_i(x_1, \dots, x_n, z, u), \dots,$$

$$\Psi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)) = \Psi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma),$$

$$\mathbf{P}_{\Psi_i},$$

$$\Psi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)) = \eta,$$

$[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i) = \eta$ - вычисление функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, с указанным множеством положительно и отрицательно опрошенных слов.

Теорема 1.5. Пусть дан функтор $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$ - некоторая последовательность аргументных слов.

Пусть $\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta}$ - вычисление функтора $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на аргументном слове β , с результатом вычисления γ , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_i}$ - вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов β, γ , с результатом вычисления η , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, тогда можно построить вычисление

$\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta a_i}$ функтора $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на аргументном слове βa_i , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, для которого верно:

$$1. (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \Lambda}} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \Lambda}} = \emptyset$$

$$2. (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \beta, \gamma}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta}},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \beta, \gamma}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta}}$$

Доказательство. Пункт (1) - очевиден. Пункт (2). Составим следующую последовательность равенств:

$$\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k], \beta},$$

$$[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](z a_i) = \Psi_i(z, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](z))$$

$$[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](\beta a_i) = \Psi_i(\beta, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](\beta)),$$

$$\Psi_i(z, u) = \Psi_i(z, u), \dots,$$

$$\Psi_i(\beta, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](\beta)) = \Psi_i(\beta, \gamma),$$

$$\mathbf{P}_{\Psi_i; \beta, \gamma},$$

$$\Psi_i(\beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\beta)) = \eta,$$

$[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](\beta a_i) = \eta$ - вычисление функтора $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов βa_i , в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, с указанным множеством положительно и отрицательно опрошенных слов.

Учитывая, что $\mathbf{Length}(\Lambda) = \Lambda$, $\mathbf{Length}(\alpha a_i) = \mathbf{S}_1(\alpha)$. $|\Lambda| = \Lambda$, $|\alpha a_i| = |\alpha| + 1 = S(|\alpha|)$, $|x|$ - функция длины слова x , то выражение вида $\mathbf{Length}(t)$, будем обозначать в виде $|t|$. Очевидно, что аргументное слово α является натуральным числом, тогда и только тогда, когда $\vdash |\alpha| = \alpha$, $\mathbf{Length}(\alpha)$ - натуральное число.

Терм, содержащий только функторы вида: **Concat**, **D**, а также натуральные числа, называется словарным многочленом. Словарные многочлены будут обозначаться как $\mathbf{P}(\bar{x})$.

$$\text{Из свойств: } |\mathbf{Concat}(x, y)| = |\mathbf{Concat}(|x|, y)| = |\mathbf{Concat}(x, |y|)| = \mathbf{Concat}(|x|, |y|) = |x| + |y|,$$

$$|\mathbf{D}(x, y)| = \mathbf{D}(|x|, y) = |\mathbf{D}(x, |y|)| = \mathbf{D}(|x|, |y|) = |x| \cdot |y|, \text{ получим } |\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)| = \mathbf{P}(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

$\forall \alpha \beta \gamma [\mathbf{Concat}(|\alpha|, |\beta|) = \gamma \vee \mathbf{D}(|\alpha|, \beta) = \gamma]$, тогда γ - натуральное число.

Для любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{x})$, можно построить многочлен с натуральными коэффициентами $P^*(\bar{x})$, что верно равенство $P^*(|\bar{x}|) = |\mathbf{P}(\bar{x})|$.

Составим $3 \leq n$ - местный функтор вида $[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^n [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^n \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{n-1}^n \mathbf{I}_n^n] \dots]]$. Для этого функтора в исчислении **CalcEq** выводимо равенство

$$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^n [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^n \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{n-1}^n \mathbf{I}_n^n] \dots]](x_1 \dots x_n) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}(x_2, \dots \mathbf{Concat}(x_{n-1}, x_n) \dots)).$$

Пусть $\mathbf{Concat}^n \Leftarrow [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^n [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^n \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{n-1}^n \mathbf{I}_n^n] \dots]]$, при $n \geq 3$, тогда $\vdash \mathbf{Concat}^n(x_1, \dots x_n) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}(x_2, \dots \mathbf{Concat}(x_{n-1}, x_n) \dots))$. При $n = 2$, $\mathbf{Concat}^2 \Leftarrow \mathbf{Concat}$, при $n = 1$, $\mathbf{Concat}^1 \Leftarrow \mathbf{I}_1^1$ и выводимы равенства: $\vdash \mathbf{Concat}^2(x_1, x_2) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2)$, $\vdash \mathbf{Concat}^1(x_1) = \mathbf{I}_1^1(x_1) = x_1$.

$$\vdash \mathbf{Concat}^{n+1}(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}^n(x_2, \dots x_{n+1})).$$

Определение. Пусть $\mathcal{D}$ - некоторое множество n - алфавитных функторов. Для каждого множества $\mathbb{A}$ аргументных слов, определим понятие стандартной словарной модели, которую обозначим как $\mathbf{WordM}_{n, \mathbb{A}, \mathcal{D}}$.

Носителем этой модели являются все n - алфавитные аргументные слова. Для каждого $k \geq 1$ - местного функтора $\Phi \in \mathcal{D}$ определим операцию, обозначаемую f_Φ и определяемую как $\forall \bar{\alpha} \forall \beta [f_\Phi(\bar{\alpha}) = \beta \iff \mathbb{A} \vdash \Phi(\bar{\alpha}) = \beta]$.

Если множество n - алфавитных функторов $\mathcal{D}$ совпадает с множеством всех n - алфавитных примитивно рекурсивных функторов, стандартную модель будем обозначать как $\mathbf{WordM}_{n,\mathbb{A}}$, $\mathbf{WordM}_n$, в алфавите $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, $\mathcal{L}$ соответственно или еще проще $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}}$, $\mathbf{WordM}$.

Замечание. Отметим, что множество всех операций модели $\mathbf{WordM}_n$ совпадает с классом словарных функций $Pr(\Sigma)$, где Σ - алфавит, состоящий из n различных символов [1, p.220, Definition 3].

Рассмотрим следующие определяющие равенства:

$$\mathbf{Exp}(x, \Lambda) = a_1,$$

$$\mathbf{Exp}(x, ya_i) = \mathbf{D}(x, \mathbf{Exp}(x, y)).$$

Очевидно, что $|\mathbf{Exp}(x, y)| = \mathbf{Exp}(|x|, y) = \mathbf{Exp}(|x|, |y|)$. Можно построить такой 2-х местный функтор, для которого будут верны эти определяющие соотношения.

Для каждого натурального числа $k > 1$ выпишем следующие определяющие равенства:

$$\exp_{\mathbf{k}}(\Lambda) = a_1,$$

$$\exp_{\mathbf{k}}(\alpha a_i) = \mathbf{D}(\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k-\text{раз}}, \exp_{\mathbf{k}}(\alpha)).$$

Имеется примитивно рекурсивный словарный функтор, удовлетворяющий этим определяющим равенствам. Обозначим его как $\exp_{\mathbf{k}}$. Для функтора $\exp_{\mathbf{k}}$ верно $\mathbf{WordM} \models \forall x[|\exp_{\mathbf{k}}(x)| = k^{|x|}]$, $\forall \alpha \beta[\exp_{\mathbf{k}}(\alpha) = \beta]$, тогда β - натуральной число.

При $k > 1$ $\exp_{\mathbf{k}}(\alpha)$ - число k - алфавитных слов длина которых равна длине слова α , $\frac{\exp_{\mathbf{k}}(\alpha a_1) - 1}{\mathbf{k} - 1}$ - число k - алфавитных слов предшествующих в лексикографическом упорядочивании слову $|\alpha a_1|$.

Замечание. Для каждого натурального числа k верно $\mathbf{WordM} \models \forall x[|\exp_{\mathbf{k}}(x)| = \mathbf{Exp}(k, x)]$

Теорема 1.6. Имеется алгоритм, выполняя который, по произвольной формуле $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ исчисления высказываний, в котором элементарные высказывания являются высказывания вида $r = q$, где r, q - термы алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, можно можно построить n - местный функтор $\Phi_{\mathcal{A}}$, такой, что

$$\forall \bar{\alpha}[\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{A}(\bar{\alpha}) \Leftrightarrow \mathbb{A} \vdash \Phi_{\mathcal{A}}(\bar{\alpha}) = \Lambda] \quad (\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x[\mathcal{A}(x) \equiv \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \Lambda])[4].$$

Part II

Простое вычисление функтора

С каждым n - местным функтором Φ и последовательностью аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, в дальнейшем обозначаемую как $\bar{\alpha}$, свяжем простое(каноническое) вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, обозначаемое как $\mathbf{P}_{\Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$. Это простое вычисление построим индукцией по построению функтора Φ , а внутри этой индукции, для рекурсивного функтора индукцией по

построению аргументного слова. С каждым простым вычислением укажем множества $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ и $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ и длину вычисления $l_{\mathbf{P}, \Phi}(\bar{\alpha})$ - число равенств в выводе $\mathbf{P}_{\Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$.

Для исходных функторов: $\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \mathbf{I}_m^n, \delta, \mathbf{Length}, \div, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$:

Для функтора $\mathbf{S}_k$:

$$1. \mathbf{S}_k(x) = \mathbf{S}_k(x),$$

$$2. \mathbf{S}_k(\alpha) = \mathbf{S}_k(\alpha).$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \mathbf{S}_k; \alpha} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \mathbf{S}_k; \alpha} = \emptyset.$$

$$\text{Длина вычисления } l_{\mathbf{P}, \mathbf{S}_k}(\alpha) = 2.$$

Для функтора $\mathbf{Z}$:

$$1. \mathbf{Z}(x_1) = \Lambda,$$

$$2. \mathbf{Z}(\alpha) = \Lambda.$$

$$\text{Длина вычисления } l_{\mathbf{P}, \mathbf{Z}}(\alpha) = 2.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \mathbf{Z}; \alpha} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \mathbf{Z}; \alpha} = \emptyset.$$

Для функтора $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda, \text{ если } \alpha \in \mathbb{A}, \text{ иначе,}$$

$$\mathbf{U}(\alpha) = a_1.$$

$$\text{Длина вычисления } l_{\mathbf{P}, \mathbf{U}}(\alpha) = 1.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \mathbf{U}; \alpha} = \{\alpha\}, (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \mathbf{U}; \alpha} = \emptyset, \text{ если } \alpha \in \mathbb{A},$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \mathbf{U}; \alpha} = \emptyset, (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \mathbf{U}; \alpha} = \{\alpha\}, \text{ если } \alpha \notin \mathbb{A}$$

Для функтора $\mathbf{I}_m^n$:

$$1. \mathbf{I}_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m,$$

$$2. \mathbf{I}_m^n(\alpha_1, x_2, \dots, x_n) = x_m, \dots,$$

$$n+1. \mathbf{I}_m^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_m.$$

$$\text{Длина вычисления } l_{\mathbf{P}, \mathbf{I}_m^n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n+1.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \mathbf{I}_m^n; \alpha_1, \dots, \alpha_n} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \mathbf{I}_m^n; \alpha_1, \dots, \alpha_n} = \emptyset.$$

Для функтора δ :

$$1. \delta(\Lambda) = \Lambda,$$

$$2. \delta(x_1 a_i) = x_1,$$

$$3. \delta(\alpha a_i) = \alpha.$$

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P},\delta}(\Lambda) = 1,$$

$$l_{\mathbf{P},\delta}(\alpha) = 2, \text{ при } \alpha \neq \Lambda,$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\delta} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\delta} = \emptyset.$$

Для функтора **Length**:

$$1. |\Lambda| = \Lambda,$$

$$1. |x_1 a_k| = |x_1| a_1,$$

$$2. |\alpha a_k| = |\alpha| a_1,$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{Length};\alpha}$ - простое вычисление функтора **Length** на аргументном слове α , далее выписываем

это простое вычисление $\mathbf{P}_{\mathbf{Length};\alpha}$, в конце этого вывода стоит равенство $|\alpha| = \gamma$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Length},\alpha},$$

$$3. \mathbf{S}_1(x_1) = \mathbf{S}_1(x_1),$$

$$4. \mathbf{S}_1(|\alpha|) = \mathbf{S}_1(\gamma),$$

$$5. |\alpha a_k| = \gamma a_1.$$

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\Lambda) = 1,$$

$$l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\alpha a_k) = l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\alpha) + 5.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{Length}} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{Length}} = \emptyset.$$

Для функтора $\dot{\vdash}$:

$$1. x_1 \dot{\vdash} \Lambda = x_1,$$

$$2. \alpha \dot{\vdash} \Lambda = \alpha,$$

$$1. x_1 \dot{\vdash} x_2 a_k = \delta(x_1 \dot{\vdash} x_2),$$

$$2. \alpha \dot{\vdash} x_2 a_k = \delta(\alpha \dot{\vdash} x_2),$$

$$3. \alpha \dot{\vdash} \beta a_k = \delta(\alpha \dot{\vdash} \beta),$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\dot{\vdash};\alpha,\beta}$ - простое вычисление функтора $\dot{\vdash}$ на аргументных словах α, β , далее выписываем это

простое вычисление $\mathbf{P}_{\dot{\vdash};\alpha,\beta}$, в конце этого вывода стоит равенство $\alpha \dot{\vdash} \beta = \gamma$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\dot{\vdash};\alpha,\beta},$$

$$4. \delta(z) = \delta(z),$$

$$5. \delta(\alpha \dot{-} \beta) = \delta(\gamma).$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\delta;\gamma}$ - простое вычисление функтора δ на аргументном слове γ , в конце этого вывода стоит равенство вида $\delta(\gamma) = \eta$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\delta,\gamma},$$

$$6. \delta(\alpha \dot{-} \beta) = \eta,$$

$$7. \alpha \dot{-} \beta a_k = \eta,$$

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(\alpha, \Lambda) = 2,$$

$$l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(\alpha, \beta a_k) = l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(\alpha, \beta) + l_{\mathbf{P}_{\delta}}(\alpha \dot{-} \beta) + 7.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \dot{-}} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \dot{-}} = \emptyset.$$

Для функтора **Concat**:

$$1. \mathbf{Concat}(x_1, \Lambda) = x_1,$$

$$2. \mathbf{Concat}(\alpha, \Lambda) = \alpha,$$

$$1. \mathbf{Concat}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2) a_k,$$

$$2. \mathbf{Concat}(\alpha, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, x_2) a_k,$$

$$3. \mathbf{Concat}(\alpha, \beta a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, \beta) a_k,$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{Concat};\alpha,\beta}$ - простое вычисление функтора **Concat** на аргументных словах α и β , в конце этого вывода стоит равенство вида $\mathbf{Concat}(\alpha, \beta) = \gamma$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Concat};\alpha,\beta},$$

$$4. \mathbf{S}_k(x_1) = \mathbf{S}_k(x_1),$$

$$5. \mathbf{S}_k(\mathbf{Concat}(\alpha, \beta)) = \mathbf{S}_k(\gamma),$$

$$6. \mathbf{Concat}(\alpha, \beta a_k) = \mathbf{S}_k(\gamma).$$

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \Lambda) = 2,$$

$$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \beta a_k) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \beta) + 6.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \mathbf{Concat}} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \mathbf{Concat}} = \emptyset.$$

Для функтора **D**:

$$1. \mathbf{D}(x_1, \Lambda) = \Lambda,$$

$$2. \mathbf{D}(\alpha, \Lambda) = \Lambda,$$

$$1. \mathbf{D}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{D}(x_1, x_2)),$$

$$2. \mathbf{D}(\alpha, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, x_2)),$$

$$3. \mathbf{D}(\alpha, \beta a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, \beta)),$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{D};\alpha,\beta}$ - простое вычисление функтора $\mathbf{D}$ на аргументном слове α и слове β , в конце этого вывода стоит равенство вида $\mathbf{D}(\alpha, \beta) = \gamma$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\mathbf{D},\alpha,\beta},$$

$$4. \mathbf{Concat}(x_1, x_2) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2),$$

$$5. \mathbf{Concat}(\alpha, x_2) = \mathbf{Concat}(\alpha, x_2),$$

$$6. \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, \beta)) = \mathbf{Concat}(\alpha, \gamma),$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{Concat};\alpha,\gamma}$ - простое вычисление функтора $\mathbf{Concat}$ на аргументном слове α , γ , в конце этого вывода стоит равенство вида $\mathbf{Concat}(\alpha, \gamma) = \eta$, продолжаем].

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Concat},\alpha,\gamma},$$

$$7. \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, \beta)) = \eta,$$

$$8. \mathbf{D}(\alpha, \beta a_k) = \eta.$$

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{D}}}(\alpha, \Lambda) = 2,$$

$$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{D}}}(\alpha, \beta a_k) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{D}}}(\alpha, \beta) + l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, \beta)) + 8.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{D}} = \emptyset,$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{D}} = \emptyset.$$

Для функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$:

Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_1;\bar{\alpha}}$ - простой вывод функтора Ψ_1 на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}, \dots$, $\mathbf{P}_{\Psi_k;\bar{\alpha}}$ - простой вывод функтора Ψ_k на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$.

Составим последовательность равенств:

$$\mathbf{P}_{\Psi_1;\bar{\alpha}}, \dots, \mathbf{P}_{\Psi_k;\bar{\alpha}},$$

[В конце каждого вывода $\mathbf{P}_{\Psi_i}$ находится равенство вида $\Psi_i(\bar{\alpha}) = \gamma_i$, продолжаем]

$$s + 1. \Phi(x_1, \dots, x_k) = \Phi(x_1, \dots, x_k),$$

$$s + 2. \Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), x_2, \dots, x_k) = \Phi(\gamma_1, x_2, \dots, x_k), \dots,$$

$$s + \mathbf{k} + 1. \Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})) = \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_k),$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\Phi;\bar{\gamma}}$ - простой вывод функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\gamma}$, в конце этого вывода находится равенство $\Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \eta$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\Phi;\bar{\gamma}},$$

$$s + \mathbf{k} + r + 2. \Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_1(\bar{\alpha})) = \eta,$$

$$s + \mathbf{k} + r + 3. [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](x_1, \dots, x_n) = \Phi(\Psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Psi_k(x_1, \dots, x_n)),$$

$$s + \mathbf{k} + r + 4. [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, x_n) = \Phi(\Psi_1(\alpha_1, \dots, x_n), \dots, \Psi_k(\alpha_1, \dots, x_n)), \dots,$$

$$s + \mathbf{k} + r + \mathbf{n} + 3. [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Phi(\Psi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)),$$

$$s + \mathbf{k} + r + \mathbf{n} + 4. [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \eta - \text{полученная последовательность равенств - простое}$$

вычисление функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}) = l_{\mathbf{P}_{\Psi_1}}(\bar{\alpha}) + \dots + l_{\mathbf{P}_{\Psi_k}}(\bar{\alpha}) + l_{\mathbf{P}_{\Phi}}(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})) + \mathbf{n} + \mathbf{k} + 4.$$

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}; \alpha_1, \dots, \alpha_n} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi}; \gamma_1, \dots, \gamma_k},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi}; \gamma_1, \dots, \gamma_k} \text{ (см. теорему 1.3.)}$$

Для $n \geq 2$ - местного функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$:

Составим последовательность равенств:

$$1. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](x_1, \dots, x_n, \Lambda) = \Phi(x_1, \dots, x_n),$$

$$2. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, x_n, \Lambda) = \Phi(\alpha_1, \dots, x_n), \dots,$$

$$\mathbf{n} + 1. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \Lambda) = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\Phi; \bar{\alpha}}$ - простой вывод функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, в конце этого вывода находится равенство $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \gamma$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\Phi; \bar{\alpha}},$$

$$\mathbf{n} + r + 2. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \Lambda) = \gamma,$$

[Пусть $\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}}$ - простой вывод функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, в конце этого вывода находится равенство $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = \beta$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}},$$

[Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_k; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta}$ - простой вывод функтора Ψ_k на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta$, в конце этого вывода находится равенство $[\Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \beta) = \theta$, продолжаем]

$$\mathbf{P}_{\Psi_k; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta},$$

$$s + t + 1. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](x_1, \dots, x_n, x_{n+1}a_k) = \Psi_k(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](x_1, \dots, x_n, x_{n+1})),$$

$$s+t+2. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, x_n, x_{n+1}a_k) = \Psi_k(\alpha_1, \dots, x_n, x_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, x_n, x_{n+1})), \dots,$$

$$\mathbf{n}+s+t+2. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}a_k) = \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})),$$

$$\mathbf{n} + s + t + 3. \Psi_k(x_1, \dots, x_{n+2}) = \Psi_k(x_1, \dots, x_{n+2}),$$

$$\mathbf{n} + s + t + 4. \Psi_k(\alpha_1, \dots, x_{n+2}) = \Psi_k(\alpha_1, \dots, x_{n+2}), \dots,$$

$$2\mathbf{n} + s + t + 4. \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, x_{n+2}) = \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, x_{n+2}),$$

$$2\mathbf{n} + s + t + 5. \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})) = \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta),$$

$$2\mathbf{n} + s + t + 6. \Psi_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})) = \theta,$$

$$2\mathbf{n} + s + t + 7. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m](\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}a_k) = \theta - \text{эта последовательность равенств является}$$

простым выводом функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$$l_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \Lambda) = l_{\mathbf{P}_\Phi}(\bar{\alpha}) + \mathbf{n} + 2,$$

$$l_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \alpha_{n+1}a_k) = l_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \alpha_{n+1}) + l_{\mathbf{P}_{\Psi_k}}(\bar{\alpha}, \alpha_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \alpha_{n+1})) + 2\mathbf{n} + 7$$

$$1. (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \Lambda}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \Lambda}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

$$2. (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}} \text{ (см. теорему 1.4.)}$$

Случай, когда функтор рекурсии имеет вид $[R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m]$, разбирается аналогично.

Для него определяющие равенства длины простого вычисления таковы:

$$l_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\Lambda) = 1,$$

$$l_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\alpha a_k) = l_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\alpha) + l_{\mathbf{P}_{\Psi_k}}(\alpha, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](\alpha)) + 7 \text{ (см. теорему 1.5),}$$

Свойства простого вычисления функторов:

1. Последнее равенство простого вычисления n -местного функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, является равенство вида $\Phi(\bar{\alpha}) = \beta$, где β - аргументное слово, которое называется результатом простого вычисления n -местного функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$.

2. Простое вычисление n -местного функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$ состоит только из тех функторов, которые являются подфункторами функтора Φ . При этом используются только правила вывода **Sb** или **Sub**₁.

3. Все опрашиваемые слова, при простом вычислении функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, состоят из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Ψ_1 на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$ и т.д. из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Ψ_m на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, где γ_i - результат вычисления функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$.

4. Все опрашиваемые слова, при простом вычислении функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ на последовательности

аргументных слов $\bar{\alpha}, \beta a_k$, состоят из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, из опрашиваемых слов функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ при простом вычислении на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}, \beta$ (предыдущий шаг), из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Ψ_k на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$ где γ - результат вычисления функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ на последовательности слов $\bar{\alpha}, \beta$.

5. Любой n -местный функтор Φ можно интерпретировать как некоторый алгоритм, выполняя который, можно вычислить значение этого функтора на заданной последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Простое вычисление этого функтора на заданной последовательности аргументных слов является реализацией этого алгоритма.

Part III

Функтор ограниченной рекурсии, RPr функторы

Пусть Φ - произвольный n - местный функтор. Составим функтор $[J\Phi\mathbf{I}_1^{n+1}, \dots, \mathbf{I}_n^{n+1}]$ - введение $n+1$ фиктивной переменной, этот функтор обозначим как $[J\Phi_{n+1}]$.

Равенство вида $x \dot{-} y = \Lambda$ будем обозначать как $x \leq y$. Учитывая свойство $x \dot{-} y = \Lambda \iff |x| \dot{-} |y| = \Lambda$, формулу вида $x \leq y$, будем записывать также в виде $|x| \leq |y|$.

$$x \dot{-} y = \begin{cases} \Lambda, & \text{если } |x| \leq |y|; \\ z, & \text{иначе} \end{cases}$$
 , где z - такое слово, которое является началом слова x и длина которого равна $|x| - |y|$.

Для любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{y})$, учитывая, что $|\mathbf{P}(\bar{y})| = \mathbf{P}(|\bar{y}|)$, верно:

$$|x| \leq |\mathbf{P}(\bar{y})| \iff |x| \leq \mathbf{P}(|\bar{y}|).$$

Обозначим двухместный функтор $J[\dot{-}\mathbf{I}_1^2 J[\dot{-}\mathbf{I}_1^2 \mathbf{I}_2^2]]$ как **min**. Для этого функтора алфавита $\mathcal{L}$, в исчислении **CalcEq** выводимо равенство $\mathbf{min}(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_1 \dot{-} x_2)$.

Свойства: $\vdash \mathbf{min}(x_1, x_2) = \mathbf{min}(x_1, |x_2|), \vdash |\mathbf{min}(x_1, x_2)| = \mathbf{min}(|x_1|, |x_2|)$

$$\mathbf{min}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq |y|; \\ z, & \text{иначе} \end{cases}$$
 , где z - такое слово, которое является началом слова x и длина которого равна $|y|$.

$$\forall \alpha \beta \mathbf{WordM} \models |\mathbf{min}(\alpha, \beta)| \leq |\beta|.$$

Пусть $\mathbf{P}$ - n - местный многочленный функтор, Φ - n - местный функтор, Ψ - $n+1$ - местный функтор,. Составим функторы: $[J\mathbf{min}\Phi, \mathbf{P}]$, $[J\mathbf{min}\Psi[J\mathbf{P}_{n+1}]]$ - функторы ограничения, соответственно без введения фиктивной переменной и с ведением фиктивной переменной. Эти функторы обозначим как **Bound**($\Phi, \mathbf{P}$),

Bound($\Psi, \mathbf{P}$).

Пусть Φ - n - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - $n+2$ - местные функторы, $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1$ - соответственно $n, n+1$ - местные многочленные функторы. Составим функтор $[R\mathbf{Bound}(\Phi, \mathbf{P}), \mathbf{Bound}(\Psi_1, \mathbf{P}_1), \dots, \mathbf{Bound}(\Psi_k, \mathbf{P}_1)]$ - функтор ограниченной рекурсии.

Для каждого функтора ограниченной рекурсии $\Gamma \equiv [R\mathbf{Bound}(\Phi, \mathbf{P}), \mathbf{Bound}(\Psi_1, \mathbf{P}_1), \dots, \mathbf{Bound}(\Psi_k, \mathbf{P}_1)]$ выводимы равенства:

$$\vdash \Gamma(x_1, \dots, x_n, \Lambda) = \mathbf{min}(\Phi(x_1, \dots, x_n), \mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)),$$

$$\vdash \Gamma(x_1, \dots, x_n, \mathbf{S}_k(x_{n+1})) = \mathbf{min}(\Psi_k(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \Gamma(x_1, \dots, x_{n+1})), \mathbf{P}_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})),$$

$$\text{для любого множества аргументных слов } \mathbb{A} \text{ верно: } \forall \bar{\alpha}, \forall \beta \neq \Lambda \quad \mathbb{A} \vdash |\Gamma(\bar{\alpha}, \Lambda)| \leq |\mathbf{P}(\bar{\alpha})|,$$

$$\mathbb{A} \vdash |\Gamma(\bar{\alpha}, \beta)| \leq |\mathbf{P}_1(\bar{\alpha}, \beta)|.$$

Индуктивно определим множество функторов, обозначаемое как **PPr**(**U**):

- 1) Слово вида **U** - полиномиальная программа;
- 2) Слова вида **Z, δ , Length, $\mathbf{S}_k, \mathbf{I}_n^m, \div, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$** - полиномиальные программы;
- 3) Если Φ - k - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - n - местные функторы и являются полиномиальными программами, то функтор $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ - полиномиальная программа, т.е. принадлежит множеству **PPr**(**U**);
- 4) Если Φ - n - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - $n+2$ - местные функторы и являются полиномиальными программами, $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1$ - соответственно $n, n+1$ - местные многочленные функторы, то функтор $[R\mathbf{Bound}(\Phi, \mathbf{P}), \mathbf{Bound}(\Psi_1, \mathbf{P}_1), \dots, \mathbf{Bound}(\Psi_k, \mathbf{P}_1)]$ - полиномиальная программа.

Множество функторов определённых согласно пунктам 2-4, будем также называть полиномиальными программами, но в алфавите $\mathcal{L}$. Это множество функторов будем обозначать как **PPr**.

Замечание. Множество всех операций стандартной словарной модели **WordM** $_{n, \mathbf{PPr}}$ совпадает с классом функции $E_2(\Sigma)[1, \text{p.220. Definition 7}]$, где Σ - алфавит, состоящий из $n \geq 2$ различных символов.

Если из контекста будет понятно или будет не важно в каком алфавите $\mathcal{L}$ или $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, рассматривается множество **PPr** или **PPr**(**U**), тогда будем просто обозначать **PPr**.

Теорема 3.1. Пусть Φ - n - местная полиномиальная программа, т.е. $\Phi \in \mathbf{PPr}$, тогда существует (можно построить), такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\bar{x})$ той же местности, что для любого набора аргументных слов $\bar{\alpha}$ верно:

$$a) \forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models |\Phi(\bar{\alpha})| < |\mathbf{P}(\bar{\alpha})|.$$

$$b) \forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models l_{\mathbf{P}_{\Phi}}(\bar{\alpha}) < |\mathbf{P}(\bar{\alpha})|;$$

$$c) \forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models Fl_{\mathbf{P}_{\Phi}}(\bar{\alpha}) < |\mathbf{P}(\bar{\alpha})|.$$

Доказательство. Смотрите определение простого вычисления функтора Φ - стр. 8-14.

Пусть $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ - n - местный функтор, тогда существует такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\bar{x})$, что для произвольного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, любых аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, длина всех опрашиваемых слов в простом вычислении функтора Φ на $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и число опрошенных слов ограничены $|\mathbf{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|$.

Замечание. Пусть $\mathbf{MT}$ - оракульная машина Тьюринга с входным алфавитом $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ($k \geq 2$), и оракульным множеством $\mathbb{B}$, время работы которой ограничено некоторым многочленом $P(x_1, \dots, x_n)$ с натуральными коэффициентами. Пусть $f_{\mathbf{MT}}(x_1, \dots, x_n)$ - словарная функция, которая, порождена рассматриваемой оракульной $\mathbf{MT}$. Тогда можно построить такой функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ той же местности множеством входных слов которого является множество аргументных слов $\{\mathbf{S}_1(\Lambda), \dots, \mathbf{S}_k(\Lambda)\}$, что верно $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta \in \mathbb{B} \vdash \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \beta \iff f_{\mathbf{MT}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \beta$ [1 р. 224. Theorem 6]²[6, Теорема 1 стр 228]³.

Замечание. Пусть $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ - n - местный функтор, множеством входных слов которого, является множество аргументных слов $\{\mathbf{S}_1(\Lambda), \dots, \mathbf{S}_k(\Lambda)\}$ ($k \geq 2$). Пусть $\mathbb{B}$ - интерпретация оракульного символа $\mathbf{U}$. Тогда можно построить оракульную машину Тьюринга $\mathbf{MT}$ - с входным алфавитом $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ и оракульным множеством $\mathbb{B}$, время работы которой ограничено некотором многочленом $P(x_1, \dots, x_n)$ с натуральными коэффициентами, что для словарной функции $f_{\mathbf{MT}}(x_1, \dots, x_n)$, которая порождена рассматриваемой оракульной $\mathbf{MT}$ верно $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta \in \mathbb{B} \vdash \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \beta \iff f_{\mathbf{MT}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \beta$ [1 р. 224. Theorem 7][6, Теорема 1 стр. 230].

Пусть $\mathbb{A}$ - интерпретация оракульного символа $\mathbf{U}$. Индуктивно определим множество функторов, обозначаемое как $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$:

- 1) Слово вида $\mathbf{U} - \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программа;
- 2) Слова вида $\mathbf{Z}, \delta, \mathbf{Length}, \mathbf{S}_k, \mathbf{I}_n^m, \div, \mathbf{Concat}, \mathbf{D} - \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программы;
- 3) Если $\Phi - k$ - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k - n$ - местные функторы и являются $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программами, то функтор $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k] - \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программа,
- 4) Если $\Phi - n$ - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k - n+2$ - местные функторы и являются $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программами, $\mathbf{P} - n+1$ - словарный многочлен, тогда, если верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x}, y \{ |[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, y)| \leq |\mathbf{P}(\bar{x}, y)| \}$, тогда функтор $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k] - \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ - программа.

Замечание. Если $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$, тогда можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\bar{x})$, что верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} \{ |\Phi(\bar{x})| \leq |\mathbf{P}(\bar{x})| \}$.

²Эта теорема легко переносится в случае когда рассматриваемая машина Тьюринга, является оракульной

³Все указанные на страницах 212-215 словарные функции являются $\mathbf{PPr}$ функциями, алфавита $\mathcal{L}$, рассматриваемая теорема легко переносится на оракульную машину Тьюринга

Замечание. Для любого функтора $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, для любого оракула $\mathbb{A}$, верно $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$.

Замечание. Пусть $\mathbb{A}$ - интерпретация оракульного символа $\mathbf{U}$. Для любого функтора $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$, можно построить такой функтор $\Psi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, что верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x}[\Phi(\bar{x}) = \Psi(\bar{x})]$.

Доказательство. Доказательство ведётся индукцией по построению функтора Φ , а внутри этой индукции, индукцией по построению аргументного слова.

Замечание. Отметим, что для отношения $\mathbf{exp}_{\mathbf{k}}(x) = y$ можно составить функтор $\mathbf{EXP}_{\mathbf{k}}$, принадлежащий $\mathbf{PPr}$, такой, что $\mathbf{WordM} \models \forall xy[\mathbf{exp}_{\mathbf{k}}(x) = y \Leftrightarrow \mathbf{EXP}_{\mathbf{k}}(x, y) = \Lambda]$.

Part IV

Функциональные слова и их свойства

Составим следующий словарный терм $\mathbf{Concat}(|\alpha|, \mathbf{Concat}(a_2, \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{Concat}(\beta, \mathbf{Concat}(a_2, a_2))))$.

Пусть 1 - обозначение аргументного слова $S_1(\Lambda)$, 2 - обозначение аргументного слова $S_2(\Lambda)$, тогда словарный терм $\mathbf{Concat}(|\alpha|, \mathbf{Concat}(a_2, \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{Concat}(\beta, \mathbf{Concat}(a_2, a_2))))$ для наглядности будем обозначать в виде $\underbrace{1, \dots, 1}_{|\alpha| \text{ раз}} 2\alpha\beta 22$.

Пусть $\mathbf{c}$ - такой функтор, для которого в исчислении $\mathbf{CalcEq}$ выводимо равенство

$$\mathbf{c}(x, y) = \underbrace{1, \dots, 1}_{|x| \text{ раз}} 2xy 22 = |x| 2xy 22.$$

Пусть дана произвольная последовательность пар аргументных слов $(\alpha_1, \gamma_1) \dots, (\alpha_n, \gamma_n)$ (не обязательно различных пар). Эту последовательность будем называть функциональной, если выполняются условия:

1. $\forall i[\gamma_i = \Lambda \vee \gamma_i = a_1]$,
2. $\forall i, j[\alpha_i = \alpha_j \rightarrow \gamma_i = \gamma_j]$.

Введём понятие, которое в дальнейшем будет иметь важное значение.

Определение. 1. Λ - функциональное слово.

2. Если последовательность пар $(\alpha_1, \gamma_1) \dots, (\alpha_n, \gamma_n)$ является функциональной, то слово вида

$\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\alpha_1, \gamma_1), \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\alpha_2, \gamma_2), \dots, \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\alpha_k, \gamma_k), \Lambda)), \dots,)$ - функциональное слово,

при $1 \leq k \leq n$.

Наглядно функциональное слово можно записать в виде $|\alpha_1| 2\alpha_1\gamma_1 22, \dots, |\alpha_k| 2\alpha_k\gamma_k 22$.

Слова последовательности $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ будем называть областью определения рассматриваемого функционального слова, а слова последовательности $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ соответствующими значениями.

Замечание. Любое функциональное слово θ будем интерпретировать как слово согласно его определения и как функцию с тем же именем. Область определения и множество значений функции θ - область

определения и множество значений функционального слова θ , причём $\theta(\alpha) = \Lambda$, тогда и только тогда, когда слово $\mathbf{c}(\alpha, \Lambda)$ - подслово слова θ и $\theta(\alpha) = a_1$, тогда и только тогда, когда слово $\mathbf{c}(\alpha, a_1)$ - подслово слова θ .

Область определения функционального слова θ будем обозначать как $\text{dom}(\theta)$.

Пусть θ - некоторое функциональное слово. Для этого функционального слова построим множество аргументных слов, определяемое как $\mathbb{A}_\theta = \{\alpha : \alpha \in \text{dom}(\theta) \text{ и } \theta(\alpha) = \Lambda\}$.

Для любого терма $t(\bar{x})$, для любой последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, для любого множества аргументных слов $\mathbb{A}$, можно построить такое функциональное слово $\theta_{\bar{\alpha}, \mathbb{A}, t}$, согласованное с множеством $\mathbb{A}$, что для любого аргументного слова β верно $\mathbb{A} \vdash t(\bar{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \mathbb{A}_{\theta_{\bar{\alpha}, \mathbb{A}, t}} \vdash t(\bar{\alpha}) = \beta$. Для этого достаточно построить вычисление замкнутого терма $t(\bar{\alpha})$ на множестве $\mathbb{A}$, собрать все опрошенные слова в этом вычислении и составить по полученным опрошенным словам, соответствующее функциональное слово. Разумеется, так составленное функциональное слово зависит от построенного вычисления терма $t(\bar{\alpha})$, но при этом будет выполнено свойство: для любого функционального слова $\theta \supseteq \theta_{\bar{\alpha}, \mathbb{A}, t}$, верно $\mathbb{A} \vdash t(\bar{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \mathbb{A}_\theta \vdash t(\bar{\alpha}) = \beta$. Это свойство верно для любого бескванторного предложения Φ (предложение, составленной с помощью логических связок из равенств замкнутых термов): $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Phi \Leftrightarrow \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}_\theta} \models \Phi$.

Пусть $\mathbf{Fw}$ - такой функтор алфавита $\mathcal{L}$, для которого верно:

1. $\forall \alpha [\vdash \mathbf{Fw}(\alpha) = \Lambda \vee \vdash \mathbf{Fw}(\alpha) = a_1]$;
2. $\vdash \mathbf{Fw}(\alpha) = \Lambda \Leftrightarrow \alpha$ - функциональное слово.
3. Функтор $\mathbf{Fw}$ - $\mathbf{PPr}$ функтор.

Введём бинарное отношение $x \in \text{dom}(\theta)$:

$$x \in \text{dom}(\theta) \iff \mathbf{WordM} \models \mathbf{Fw}(\theta) \wedge (|x|2x22 \text{ или } |x|2x122 \text{ есть подслово слова } \theta).$$

Отношение $x \in \text{dom}(\theta)$ принадлежит $\mathbf{PPr}$ алфавита $\mathcal{L}$.

Введём бинарное отношение $\theta \subseteq \theta_1$:

$$\theta \subseteq \theta_1 \iff \mathbf{WordM} \models \mathbf{Fw}(\theta) \wedge \mathbf{Fw}(\theta_1) \wedge \forall x \in \text{dom}(\theta) [\theta(x) = \theta_1(x)].$$

Отношение $\theta \subseteq \theta_1$ принадлежит $\mathbf{PPr}$ алфавита $\mathcal{L}$.

Введём бинарное отношение $\approx$:

$$\mathbf{WordM} \models \theta \approx \theta_1 \iff \mathbf{Fw}(\theta) \wedge \mathbf{Fw}(\theta_1) \wedge \text{dom}(\theta) = \text{dom}(\theta_1) \wedge \forall x \in \text{dom}(\theta) \theta(x) = \theta_1(x).$$

Отношение $x \approx y$ принадлежит $\mathbf{PPr}$ алфавита $\mathcal{L}$.

Замечание. Если $\theta \approx \theta_1$, тогда $\mathbf{Concat}(\theta, \theta_1) \approx \mathbf{Concat}(\theta_1, \theta)$, $\mathbf{Concat}(\theta, \theta_1) \approx \theta$.

Пусть $\mathbf{G}$ - есть такой двух местный функтор, алфавита $\mathcal{L}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Если θ - функциональное слово, $\alpha \in \text{dom}(\theta)$ и $\theta(\alpha) = \gamma$, тогда $\vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = \gamma$.

2. Если θ - функциональное слово, $\alpha \notin \text{dom}(\theta)$, тогда $\vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_1$.
3. Если θ - не является функциональным словом, тогда $\forall \alpha \vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_1$.
4. Функтор $\mathbf{G}$ - $\mathbf{PPr}$ функтор.

Функтор $\mathbf{G}$ обладает свойствами:

1. Для любых функциональных слов θ, θ_1 , таких, что $\theta \subseteq \theta_1$, верно $\forall \alpha \in \text{dom}(\theta) \vdash [\mathbf{G}(\theta, \alpha) = \mathbf{G}(\theta_1, \alpha)]$.
2. Отношение вида $x \subset \mathbf{U} \Leftrightarrow [\mathbf{Fw}(x) = \Lambda] \& \forall z \in \text{dom}(x) [(\mathbf{G}(x, z) = \Lambda \rightarrow \mathbf{U}(z) = \Lambda) \& (\mathbf{G}(x, z) = a_1 \rightarrow \mathbf{U}(z) = a_1)]$ принадлежит $\mathbf{PPr}$ т.е. существует такой одноместный $\mathbf{PPr}$ функтор φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, что

для любого интерпретационного множества аргументных слов $\mathbb{A}$ верно

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x [x \subset \mathbf{U} \Leftrightarrow \varphi(x) = \Lambda].$$

Функциональное слово θ согласуется с множеством $\mathbb{A}$ ($\theta \subset \mathbb{A}$), если $\forall x \in \text{dom}(\theta) [\theta(x) = \Lambda \iff x \in \mathbb{A}]$,

$$(\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \theta \subset \mathbf{U}).$$

Замечание. Для любых функциональных слов θ_1, θ_2 , которые согласованы с множеством $\mathbb{A}$, существует функциональное слово θ , согласованное с множеством $\mathbb{A}$ и $\theta_1 \subseteq \theta, \theta_2 \subseteq \theta$, например $\theta_1 \cup \theta_2 (\mathbf{Concat}(\theta_1, \theta_2))$.

Определение. Пусть дан функтор Φ , последовательность аргументных слов $\bar{\alpha}$ и интерпретационное множество $\mathbb{A}$. Пусть $\mathbf{P}$ - простое вычисление функтора Φ , на последовательности $\bar{\alpha}$, в интерпретации $\mathbb{A}$. Тогда, используя простое вычисление $\mathbf{P}$, составим функциональное слово:

1. Выпишем все слова из множества $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}, \bar{\alpha}}$. Пусть это будут слова $\beta_1, \dots, \beta_k$, расположим их, например в лексикографическом порядке.
2. Выпишем все слова из множества $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}, \bar{\alpha}}$. Пусть это будут слова $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, расположим их, также в лексикографическом порядке.
3. Составим функциональное слово

$\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\beta_1, \Lambda), \dots, \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\beta_k, \Lambda), \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\gamma_1, a_1), \dots, \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\gamma_{s-1}, a_1), \mathbf{c}(\gamma_s, a_1))), \dots)$. Так составленное функциональное слово назовём функциональным словом составленным согласно простого вычисления $\mathbf{P}$ функтора Φ на последовательности $\bar{\alpha}$, в интерпретации $\mathbb{A}$. Обозначим такое функциональное слово как $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$.

Определение. Термы вида $|x|2x\mathbf{U}(x)22|z|2z\mathbf{U}(z)22, \dots, |v|2v\mathbf{U}(v)22$ будем называть функциональными термами алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Множество так построенных функциональных термов будем обозначать как $\mathbf{Fterm}_{\mathbf{U}}$, а конкретный функциональный терм этого множества, как $f_{\mathbf{term}}(x, z, \dots, v)$.

Определение. Термы вида $|x|2x\mathbf{G}(\mathbf{y}, x)22|z|2z\mathbf{G}(\mathbf{y}, z)22, \dots, |v|2v\mathbf{G}(\mathbf{y}, v)22$ будем называть функциональными термами алфавита $\mathcal{L}$. Множество так построенных функциональных термов будем обозначать

как $\mathbf{Fterm}$, а конкретный функциональный терм этого множества, как $f_{\mathbf{term}}^*(\mathbf{y}, x, z, \dots, v)$.

- Свойства.** 1. $f_{\mathbf{term}}^*(f_{\mathbf{term}}(x, z, \dots, v), x, z, \dots, v) = f_{\mathbf{term}}(x, z, \dots, v)$ - как слова.
 2. $f_{\mathbf{term}}^*(f_{\mathbf{term}}^*(x, z, \dots, v), x, z, \dots, v) = f_{\mathbf{term}}^*(x, z, \dots, v)$ - как слова.
 3. Для любого функционального слова θ верно $\forall x, z, \dots, v \in \text{dom}(\theta) f_{\mathbf{term}}^*(\theta, x, z, \dots, v) \subseteq \theta$.

Определение функтора для построения функционального слова

Для каждого n - местного функтора Φ , определим связанную с этим функтором, функтор построения функционального слова.

Определение проведём индукцией по построению функтора Φ .

1. Для исходных функторов: $\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \delta, \mathbf{Length}, \dashv, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \mathbf{I}_k^n, \mathbf{U}$:

$$\Theta_{\mathbf{S}_k} = \mathbf{Z}, \Theta_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}, \Theta_{\delta} = \mathbf{Z}, \Theta_{\mathbf{Length}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\dashv} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\mathbf{Concat}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\mathbf{D}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\mathbf{I}_k^n} = [J\mathbf{ZI}_k^n], \Theta_{\mathbf{U}} = [J\mathbf{cI}_1^1\mathbf{U}].$$

Для этих функторов в исчислении **CalcEq** выводимы равенства: $\Theta_{\mathbf{S}_k}(x_1) = \Lambda, \Theta_{\mathbf{Z}}(x_1) = \Lambda, \Theta_{\delta} = \Lambda, \Theta_{\mathbf{Length}}(x_1) = \Lambda, \Theta_{\dashv}(x_1, x_2) = \Lambda, \Theta_{\mathbf{Concat}}(x_1, x_2) = \Lambda, \Theta_{\mathbf{D}}(x_1, x_2) = \Lambda, \Theta_{\mathbf{I}_k^n}(x_1, \dots, x_n) = \Lambda, \vdash \Theta_{\mathbf{U}}(x_1) = \mathbf{c}(x_1, \mathbf{U}(x_1))$ - в исчислении **CalcEq_U** и верно $\forall \alpha \forall \mathbb{A} \mathbb{A} \vdash \mathbf{G}(\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha), \alpha) = \mathbf{U}(\alpha)$.

2. Пусть Φ - k - местный функтор ($k \geq 2$), $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - n - местные функторы, составим функтор суперпозиции $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$. Для функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ построим функтор $\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$.

Пусть для функтора Φ построен функтор Θ_{Φ} , для функтора Ψ_1 построен функтор Θ_{Ψ_1} , и т.д. для функтора Ψ_k построен функтор Θ_{Ψ_k} , тогда

$\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]} \equiv [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k], \Theta_{\Psi_1} \dots \Theta_{\Psi_k}]$ при $k \geq 2$. Полученный функтор является n - местным и для него верны следующие доказуемые равенства

$$\begin{aligned} & \vdash [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k], \Theta_{\Psi_1} \dots \Theta_{\Psi_k}](x_1, \dots, x_n) = \\ & \mathbf{Concat}^{k+1}([J\Theta_{\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k](x_1, \dots, x_n), \Theta_{\Psi_1}(x_1, \dots, x_n) \dots \Theta_{\Psi_k}(x_1, \dots, x_n)) \\ & \vdash \mathbf{Concat}^{k+1}([J\Theta_{\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k](x_1, \dots, x_n), \Theta_{\Psi_1}(x_1, \dots, x_n) \dots \Theta_{\Psi_k}(x_1, \dots, x_n)) = \\ & \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{\Phi}(\Psi_1(x_1, \dots, x_n) \dots \Psi_k(x_1, \dots, x_n)), \Theta_{\Psi_1}(x_1, \dots, x_n) \dots \Theta_{\Psi_k}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Итак, имеем } \vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x_1, \dots, x_n) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k], \Theta_{\Psi_1} \dots \Theta_{\Psi_k}](x_1, \dots, x_n) = \\ & \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{\Phi}(\Psi_1(x_1, \dots, x_n) \dots \Psi_k(x_1, \dots, x_n)), \Theta_{\Psi_1}(x_1, \dots, x_n) \dots \Theta_{\Psi_k}(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

$$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{\Phi}(\Psi_1(x_1, \dots, x_n) \dots \Psi_k(x_1, \dots, x_n)), \Theta_{\Psi_1}(x_1, \dots, x_n) \dots \Theta_{\Psi_k}(x_1, \dots, x_n)),$$

$$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\Phi}\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}), (\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\bar{x}), \dots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\bar{x}), \Theta_{\Psi_k}(\bar{x}))), \dots).$$

Пусть Φ - k - местный функтор ($k = 1$), тогда $\Theta_{[J\Phi\Psi_1]} \equiv [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Phi}\Psi_1]\Theta_{\Psi_1}]$, тогда

$$\Theta_{[J\Phi\Psi_1]}(x_1, \dots, x_n) \equiv [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Phi}\Psi_1]\Theta_{\Psi_1}](x_1, \dots, x_n) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Phi}(\Psi_1(x_1, \dots, x_n)), \Theta_{\Psi_1}(x_1, \dots, x_n))$$

3. Для функтора вида $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ и функтора вида $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$. Пусть для функтора Φ построен функтор Θ_Φ , для функтора Ψ_1 построен функтор Θ_{Ψ_1} , и т.д. для функтора Ψ_k построен функтор Θ_{Ψ_k} , тогда для функтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$ в исчислении **CalcEq_U** имеет место (определяющее равенство) (см. теорему 1.1)⁴ :

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\Lambda) = \Lambda.$$

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x_1 a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x_1, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](x_1)), \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x_1)), \text{ при } i \leq k.$$

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x_1 a_i) = \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x_1), \text{ при } i > k$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_\Phi(\bar{x}).$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, x_{n+1} a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, x_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, x_{n+1})), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, x_{n+1})), \text{ при } i \leq k.$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, x_{n+1} a_i) = \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, x_{n+1}), \text{ при } i > k.$$

Замечание. Пусть Φ - произвольный функтор, который принадлежит **PPr**, тогда функтор Θ_Φ принадлежит **PPr**. См. следствие определения простого вычисления с.13-14 и теорему 3.1 стр.16.

Замечание. Пусть Φ - функтор алфавита $\mathcal{L}$, тогда в исчислении **CalEq** верно $\vdash \Theta_\Phi(\bar{x}) = \Lambda$.

Теорема 4.1. Пусть Φ - произвольный n - местный функтор. Для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$, любой последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}, \beta$, верно:

$$\text{Если } \mathbb{A} \vdash \Theta_\Phi(\bar{\alpha}) = \beta, \text{ тогда слово } \beta - \text{функциональное слово и } \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \subseteq \beta \subset \mathbb{A}.$$

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по построению функтора.

База индукции. Для исходных функторов **S_k, Z, δ , Length, $\dashv$, Concat, D, I_kⁿ** доказательство получается непосредственно. Для функтора **U**, получим: $\mathbb{A} \vdash \Theta_U(\alpha) = \beta$, тогда только тогда, когда $(\beta = |\alpha|2\alpha22\&\alpha \in \mathbb{A}) \vee (\beta = |\alpha|2\alpha a_122\&\alpha \notin \mathbb{A})$, тогда $\beta = \theta_{\mathbf{SimpleFw}, U, \alpha, \mathbb{A}}$ и $\beta \subset \mathbb{A}$.

Индукционное предположение 1. Пусть теорема верна для функтора Φ , функторов $\Psi_1, \dots, \Psi_k$. Докажем, что теорема верна для функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$.

По индукционному предположению имеем: если $\mathbb{A} \vdash \Theta_{\Psi_1}(\bar{\alpha}) = \gamma_1, \dots, \mathbb{A} \vdash \Theta_{\Psi_k}(\bar{\alpha}) = \gamma_k$, тогда γ_i - функциональные слова и $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_1, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \subseteq \gamma_1 \subset \mathbb{A}, \dots, \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_k, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \subseteq \gamma_k \subset \mathbb{A}$.

Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$, составлено согласно множествам $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i}, \bar{\alpha}}, (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i}, \bar{\alpha}}$. Тогда $\bigcup_{i=1}^k \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\bar{\alpha}), \dots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\bar{\alpha}), \Theta_{\Psi_k}(\bar{\alpha})), \dots)$.

Имеем $\mathbb{A} \vdash \Psi_i(\bar{\alpha}) = \beta_i$. Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_\Phi(\beta_1, \dots, \beta_k) = \eta$, тогда по индукционному предположению, η - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \beta_1, \dots, \beta_k, \mathbb{A}} \subseteq \eta \subset \mathbb{A}$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\beta}, \mathbb{A}}$ составлено согласно множествам $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi, \bar{\beta}}, (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi, \bar{\beta}}$, тогда

⁴см. Приложение

$\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \beta_1, \dots, \beta_k, \mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_\Phi(\beta_1, \dots, \beta_k), \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\bar{\alpha}), \dots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\bar{\alpha}), \Theta_{\Psi_k}(\bar{\alpha})), \dots))$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$ составлено согласно множествам $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\beta}}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\beta}}}$, тогда, согласно определяющему равенству для $\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$, получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \subseteq \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}) \subset \mathbb{A}$.

Индукционное предположение 2. Пусть теорема верна для функтора Φ , функторов $\Psi_1, \dots, \Psi_k$.

Докажем, что теорема верна для функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$.

Согласно определяющим равенствам для функтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$, имеем:

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_\Phi(\bar{x}).$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, za_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)).$$

База индукции.

По индукционному предположению имеем:

$\mathbb{A} \vdash \Theta_\Phi(\bar{\alpha}) = \beta$ - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$ построено по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\alpha}}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\alpha}}}$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \Lambda, \mathbb{A}}$ построено также по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\alpha}}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\alpha}}}$, учитывая определяющее равенство $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \Lambda) = \Theta_\Phi(\bar{\alpha})$, получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \Lambda, \mathbb{A}} \subseteq \beta$ и $\beta \subset \mathbb{A}$.

Индукционный переход. Возьмём последовательность аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$.

По индукционному переходу имеем:

Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta) = \gamma$, тогда γ - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta, \mathbb{A}} \subseteq \gamma \subset \mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta) = \eta$.

Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \beta, \eta) = \xi_i$, тогда ξ_i - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \beta, \eta, \mathbb{A}} \subseteq \xi_i \subset \mathbb{A}$.

Согласно определения функционального слова $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta, \mathbb{A}}$ оно построено по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta}}$, тогда

$$\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta, \mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta)).$$

Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta a_i, \mathbb{A}}$ строится по множествам:

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}, \beta, \eta}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta}},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}, \beta, \eta}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta}}, \text{ тогда}$$

$$\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta a_i, \mathbb{A}} = \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \beta, \eta, \mathbb{A}} \cup \theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta, \mathbb{A}}, \text{ тогда}$$

$\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta a_i, \mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta))$. Учитывая определяющее равенство $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta))$,

получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}, \beta a_i, \mathbb{A}} \subseteq \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta a_i) \subset \mathbb{A}$. Остальные аксиомы рекурсии(15,16,17,20) рассматриваются аналогично.

Теорема 4.2 Пусть Φ - произвольный n - местный функтор алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$, любой последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, верно:

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}) \approx \Theta_{\Theta_{\Phi}}(\bar{\alpha})^5.$$

Доказательство проводится индукцией по построению функтора Φ , носит чисто синтаксический характер. На содержательном уровне это отношение является очевидным. Неформально, Θ_{Φ} - неподвижная точка оператора Θ .

Замечание. Пусть Φ - произвольный n - местный функтор алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} [\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{x}, \mathbb{A}} \approx \Theta_{\Phi}(\bar{x})]$.

Part V

Преобразование выражений алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, в выражения алфавита $\mathcal{L}$

Индукцией по построению функтора, построим преобразование, обозначаемое как $*$, функтора алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ в функтор алфавита $\mathcal{L}$.

Для исходных функторов:

1. $(\mathbf{S}_k)^* = [J\mathbf{S}_k\mathbf{I}_2^2]$,
2. $(\mathbf{Z})^* = [J\mathbf{Z}\mathbf{I}_2^2]$, 3. $(\delta)^* = [J\delta\mathbf{I}_2^2]$,
4. $(\mathbf{U})^* = \mathbf{G}$,
5. $(\mathbf{Length})^* = [J\mathbf{Length}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,
6. $(\div)^* = [J\div\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,
7. $(\mathbf{Concat})^* = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,
8. $(\mathbf{D})^* = [J\mathbf{D}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,
9. $(\mathbf{I}_k^n)^* = [J\mathbf{I}_k^n\mathbf{I}_2^{n+1}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+1}]$,
1. $([J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^* = [J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*]$,
2. $([R\alpha\Phi_1, \dots, \Phi_m])^* = [R\mathbf{Const}_{\alpha}^1(\Phi_1)^*, \dots, (\Phi_m)^*]$,
3. $([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_m])^* = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_m)^*]$.

Замечание. Если функтор Φ - функтор алфавита $\mathcal{L}$, тогда первый аргумент функтора $(\Phi)^*$ - фиктивная переменная: $\vdash \Phi(\bar{x}) = (\Phi)^*(\mathbf{y}, \bar{x})$.

Теорема 5.1. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ $\forall \mathbb{A}$, $\forall \bar{\alpha}$ $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$ верно $\mathbb{A} \vdash [\Phi(\bar{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha})]$ ($\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models [\Phi(\bar{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha})]$).

⁵см. Приложение

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по построению функтора, внутри этой индукции для рекурсивного функтора, доказательство проводится индукцией по построению слова.

База индукции. Исходные функторы

Для исходных функторов: $\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \delta, \mathbf{Length}, \dashv, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \mathbf{I}_k^n$ можно убедиться непосредственно, написав указанный функтор ϕ и функтор $(\phi)^*$.

Докажем теорему для функтора $\mathbf{U}$. Согласно определения $(\mathbf{U})^* = \mathbf{G}$, необходимо показать $\forall \mathbb{A} \ \forall \alpha \ \forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathbf{U}, \alpha, \mathbb{A}} \ \mathbb{A} \vdash [\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)]$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$ - аксиома и является простым вычислением функтора $\mathbf{U}$ на слове α . В качестве функционального слова возьмём слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathbf{U}, \alpha, \mathbb{A}} = \mathbf{c}(\alpha, \Lambda) = |\alpha|2\alpha 22$, тогда согласно определения функтора $\mathbf{G}$, получим $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathbf{U}, \alpha, \mathbb{A}} \vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = \Lambda$. Пусть $\mathbf{P}_{\theta, \alpha}$ - (например) простой вывод функтора $\mathbf{G}$ на последовательности слов θ, α , тогда последовательность равенств $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda, \mathbf{P}_{\theta, \alpha}, \mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)$ - вывод равенства $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)$, при интерпретации функционального символа $\mathbf{U}$ множеством $\mathbb{A}$.

Аналогично: пусть $\alpha \notin \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$ - аксиома и является простым вычислением функтора $\mathbf{U}$ на слове α . В качестве функционального слова возьмём слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathbf{U}, \alpha, \mathbb{A}} = \mathbf{c}(\alpha, a_1) = |\alpha|2\alpha a_1 22(|\alpha|2\alpha 122)$, тогда согласно определения функтора $\mathbf{G}$, получим $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathbf{U}, \alpha, \mathbb{A}} \vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_1 (\vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = 1)$. Пусть $\mathbf{P}_{\theta, \alpha}$ - простой вывод функтора $\mathbf{G}$ на последовательности слов θ, α , тогда последовательность равенств $\mathbf{U}(\alpha) = a_1, \mathbf{P}_{\theta, \alpha}, \mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)$ - вывод равенства $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)$, при интерпретации функционального символа $\mathbf{U}$ множеством $\mathbb{A}$.

a). Индукционное предположение. Пусть теорема верна для функторов: $\Phi, \Psi_1, \dots, \Psi_k$, докажем теорему для функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$. Обозначим $\mathfrak{f} \Leftarrow [J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$.

Имеем (a): для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, для функтора Ψ_1 , верно $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_1, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \ \mathbb{A} \vdash \Psi_1(\bar{\alpha}) = (\Psi_1)^*(\theta, \bar{\alpha})$, ..., для функтора Ψ_k , верно $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_k, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \ \mathbb{A} \vdash \Psi_k(\bar{\alpha}) = (\Psi_k)^*(\theta, \bar{\alpha})$;

для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\beta_1, \dots, \beta_k$, для функтора Φ , верно $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\beta}, \mathbb{A}} \ \mathbb{A} \vdash \Phi(\bar{\beta}) = (\Phi)^*(\theta, \bar{\beta})$.

Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$, согласно его определения, составлено по множествам:

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\gamma}}}, \quad (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \bar{\alpha}}} = \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \bar{\alpha}}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi, \bar{\gamma}}}, \text{ тогда}$$

$$\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \text{ и } \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \bar{\alpha}, \mathbb{A}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\beta}, \mathbb{A}}. \text{ Пусть } \theta_{\mathfrak{f}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}.$$

Следующая последовательность равенств:

$$1. (\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \bar{\alpha}) = \gamma_1, \dots, (\Psi_k)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \bar{\alpha}) = \gamma_k - \text{вычисляем,}$$

2. $(\Phi)^*(\theta_f, \gamma_1, \dots, \gamma_k) = \eta$ - вычисляем,

3. $[J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta_f, (\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha}))$ - почти аксиома,

4. $(\Phi)^*(\mathbf{y}, x_1, \dots, x_k) = (\Phi)^*(\mathbf{y}, x_1, \dots, x_k)$ - аксиома,

5. $(\Phi)^*(\theta_f, (\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha})) = (\Phi)^*(\theta_f, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ - из 1,4,

6. $(\Phi)^*(\theta_f, (\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha})) = \eta$ - из 2,5,

7. $[J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}) = \eta$ - из 3,6,

[Равенства 1-7 доказываются в исчислении **CalcEq**]

8. $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}) = \Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha}))$ - почти аксиома,

9. $\Psi_1(\bar{\alpha}) = (\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha}) = (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha})$ - индукционное предположение,

10. $\Phi(x_1, \dots, x_k) = \Phi(x_1, \dots, x_k)$ - аксиома,

11. $\Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})) = \Phi((\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha}))$ - из 9,10,

12. $\Phi((\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha})) = \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ - из 1,10,

13. $\Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = (\Phi)^*(\theta_f, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ - индукционное предположение, (полагаем в **(a)** $\beta_i = \gamma_i$)

14. $\Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \eta$ - из 2,13,

15. $\Phi((\Psi_1)^*(\theta_f, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\theta_f, \bar{\alpha})) = \eta$ - из 12,14,

16. $\Phi(\Psi_1(\bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\bar{\alpha})) = \eta$ - 11,15,

17. $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}) = \eta$ - из 8,16,

18. $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}) = [J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha})$ - из 7,17

19. $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}) = ([J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\theta_f, \bar{\alpha})$ - из 18 - квазивывод при интерпретационном множестве

$\mathbb{A}$, т.е. в исчислении **CalcEq_A**.

b). Индукционное предположение. Пусть теорема верна для функторов: $\Phi, \Psi_1, \dots, \Psi_k$, докажем теорему для функтора $f \Leftarrow [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$.

По индукционному предположению имеем:

для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, для функтора Φ , верно $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$, и $\mathbb{A} \vdash \Phi(\bar{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha})$;

для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma$, для функтора Ψ_1 , верно $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_1, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \vdash \Psi_1(\bar{\alpha}) = (\Psi_1)^*(\theta, \bar{\alpha}, \beta, \gamma)$, ..., для функтора Ψ_k , верно $\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_k, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \vdash \Psi_k(\bar{\alpha}) = (\Psi_k)^*(\theta, \bar{\alpha}, \beta, \gamma)$.

Далее доказательство будет проводится индукцией по построению аргументного слова.

База индукции. Докажем, что для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, верно $\forall \theta_f \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \mathbb{A}}$ $\mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \Lambda) = ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\theta_f, \Lambda)$.

Согласно определения преобразования "*" имеем: $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]^* = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*]$, следовательно, необходимо доказать $\forall \theta_f \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \Lambda} \mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \Lambda) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \Lambda)$.

Следующая последовательность равенств:

$$1. [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\mathbf{y}, \bar{x}, \Lambda) = (\Phi)^*(\mathbf{y}, \bar{x}) - \text{аксиома},$$

$$2. [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \Lambda) = (\Phi)^*(\theta_f, \bar{\alpha}) - \text{из 1};$$

[Равенства 1,2 доказываются в исчислении **CalcEq**]

[Учитывая, что $\theta_f \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \Lambda} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Phi, \bar{\alpha}, \Lambda}$, получим]

$$3. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \Lambda) = \Phi(\bar{\alpha}) - \text{почти аксиома},$$

$$4. \Phi(\bar{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta_f, \bar{\alpha}) - \text{индукционное предположение},$$

$$5. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \Lambda) = (\Phi)^*(\theta_f, \bar{\alpha}) - \text{из 3,4},$$

$$6. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \Lambda) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \Lambda) - \text{из 2,5}$$

$$7. [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \Lambda) = ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \Lambda) \text{ из 6 - квазивывод при интерпретационном множестве } \mathbb{A}.$$

Индукционный переход. По индукционному предположению имеем: для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, для любой последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$, верно

$$\forall \theta_f \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta} \mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta);$$

б) Для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma$, верно:

$$\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \mathbb{A}}, \mathbb{A} \vdash \Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = (\Psi_i)^*(\theta, \bar{\alpha}, \beta, \gamma).$$

Требуется доказать, что для функтора f , для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$, верно

$$\forall \theta_f \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta a_i} \mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta a_i) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta a_i).$$

Составим функциональное слово согласно множествам:

$$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma}} \cup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}},$$

$$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma}} \cup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}}, \text{ где } \mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k], \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i}$$

- простое вычисление функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ на на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta a_i$,

$\mathbf{P}_{\Psi_i}$ - простое вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \gamma$, получим

$\theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta a_i}$, тогда $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta a_i} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \mathbb{A}}$, $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta a_i} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta}$. Возьмём

$$\theta_f \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, f, \bar{\alpha}, \beta a_i}$$

Следующая последовательность равенств:

$$1. [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta) = \gamma - \text{вычисляем},$$

$$2. (\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, \gamma) = \eta_i - \text{вычисляем},$$

3. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta a_i) = (\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta))$ - почти аксиома,
4. $(\Psi_i)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = (\Psi_i)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u)$ - аксиома,
5. $(\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta)) = (\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 1,4,
6. $(\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta)) = \eta_i$ - из 2,5,
7. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta a_i) = \eta_i$ - из 3,6,

[Равенства 1-7 доказываются в исчислении **CalcEq**]

8. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta a_i) = \Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta))$ - почти аксиома,
9. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta)$ - индукционное предположение,
10. $\Psi_i(\bar{x}, u, v) = \Psi_i(\bar{x}, u, v)$ - аксиома,
11. $\Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)) = \Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta))$ - из 9,10,
12. $\Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta)) = \Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 1,10,
13. $\Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = (\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, \gamma)$ - индукционное предположение,
14. $\Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)) = \Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 11,12,
15. $\Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)) = (\Psi_i)^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 13,14,
16. $\Psi_i(\bar{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta)) = \eta_i$ - из 2,15,
17. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta a_i) = \eta_i$ - из 8,16,
18. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta a_i) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_f, \bar{\alpha}, \beta a_i)$ - из 7,17
19. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \beta a_i) = ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\theta_f, \bar{\alpha}, \beta a_i)$ - из 18 - квазивывод при интерпретационном

множестве $\mathbb{A}$, т.е. в исчислении **CalcEq_A**.

Остальные аксиомы рекурсии(15,16,17,20) рассматриваются аналогично.

Следствие 5.2. 1. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U}) \forall \mathbb{A}, \forall \bar{\alpha}$ верно

$$\mathbb{A} \vdash [\Phi(\bar{\alpha}) = \Phi^*(\Theta_\Phi(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})] \text{ (WordM}_{\mathbb{A}} \models [\Phi(\bar{\alpha}) = \Phi^*(\Theta_\Phi(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})]).$$

2. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U}) \forall \mathbb{A}, \forall \bar{\alpha} \forall \theta \supseteq \Theta_\Phi(\bar{\alpha})$, верно $\mathbb{A} \vdash [\Phi(\bar{\alpha}) = \Phi^*(\theta, \bar{\alpha})]$
(WordM_A $\models [\Phi(\bar{\alpha}) = \Phi^*(\theta, \bar{\alpha})]$),

3. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U}) \forall \mathbb{A}, \forall \bar{\alpha}, \beta \forall \theta \supseteq \Theta_\Phi(\bar{\alpha})$, верно
 $\mathbb{A} \vdash \Phi(\bar{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \Phi^*(\theta, \bar{\alpha}) = \beta$ (**WordM_A $\models \Phi(\bar{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \text{WordM} \models \Phi^*(\theta, \bar{\alpha}) = \beta$**).

4. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U}) \forall \bar{\alpha}$ верно

WordM_A $\models (\Theta_\Phi)^*(\Theta_\Phi(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = \Theta_\Phi(\bar{\alpha})$ - как равенство слов(наименьшая неподвижная точка:

$\forall \theta \supseteq \Theta_\Phi(\bar{\alpha}) [(\Theta_\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha}) \subseteq \theta] \{ \forall \theta \supseteq \Theta_\Phi(\bar{\alpha}) [\Theta_\Phi(\bar{\alpha}) = (\Theta_\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha})] \}$, причём, если $\Theta_\Phi(\bar{\alpha}) \neq \Lambda$, тогда

$dom(\Theta_\Phi(\bar{\alpha})) = dom((\Theta_\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha}))$ для любого любого функционального слова θ . **См. теорему 4.2.**

Замечание. Пусть Φ - произвольный n - местный функтор алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Простое вычисление

функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$ можно разложить на два вычисления: простое вычисление функтора Θ_Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$ и затем простое вычисление функтора $(\Phi)^*$ алфавита $\mathcal{L}$ на последовательности аргументных слов $\Theta_\Phi(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}$. Причём область определения функционального слова $\Theta_\Phi(\bar{\alpha})$ состоит из тех и только тех аргументных слов, которые были использованы в простом вычислении функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$ и при любом расширении функционального слова $\Theta_\Phi(\bar{\alpha}) \subseteq \theta$, необязательно согласованного с оракульным множеством $\mathbb{A}$, результат простого вычисления функтора $(\Phi)^*$ на последовательности $\Theta_\Phi(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}$ совпадёт с результатом простого вычисления этого же функтора $(\Phi)^*$ на последовательности $\theta, \bar{\alpha}$ (аналог "Принципа использования" ("Use Principle") оракульных вычислений, например на машинах **Тьюринга**) и как ранее отмечалось $(\Theta_\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha}) \subseteq \theta$ - "Use Principle" сыграет в дальнейшем важную роль при перенесении (распространении) этого фундаментального понятия, связанное с вычислениями в стандартной модели, на нестандартные модели.

Если в простом вычислении функтора Φ на последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$ каждую интерпретационную аксиому вида $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, заменить на равенство вида $\mathbf{G}(|\alpha|2\alpha22, \alpha) = \Lambda$ (заменить на равенство вида $\mathbf{G}(\theta, \alpha) = \Lambda$, где $|\alpha|2\alpha22 \subset \theta$), аксиому вида $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$, заменить на равенство вида $\mathbf{G}(|\alpha|2\alpha a_122, \alpha) = a_1$ (заменить на равенство вида $\mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_1$, где $|\alpha|2\alpha a_122 \subset \theta$), то полученная последовательность равенств будет квазивыводом, который не будет содержать интерпретационных аксиом, причём этот квазивывод можно легко преобразовать в вывод заменив указанные равенства на их, например, простые выводы.

Теорема 5.3. Для произвольного n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, для произвольных аргументных слов $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$, если $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\beta, \bar{\alpha}) = \gamma$, тогда γ - функциональное слово.

Доказательство проводится индукцией по построению функтора Φ .

Теорема 5.4. Для произвольного n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, для произвольного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{\alpha} \forall \beta [\Theta_\Phi(\bar{\alpha}) = \beta \implies (\Theta_\Phi)^*(\beta, \bar{\alpha}) = \beta \wedge \beta \subset \mathbb{A}]$.

Доказательство. Для произвольных аргументных слов $\bar{\alpha}, \beta$ имеем $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_\Phi(\bar{\alpha}) = \beta \iff (\Theta_\Phi)^*(\Theta_{\Theta_\Phi}(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = \beta$, учитывая теорему 4.2, получим $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\beta, \bar{\alpha}) = \beta \wedge \beta \subset \mathbb{A}$.

Теорема 5.5. Пусть для n - местного функтора Φ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, для аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, для функционального слова β верно

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \subseteq \beta \wedge \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subseteq \beta$.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по построению функтора Φ .

База индукции. Φ - исходный функтор, например $\mathbf{U}$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}} = [JcI_1^1U]$, тогда $(\Theta_{\mathbf{U}})^* = [Jc^*I_1^2[JI_1^1I_2^2]G]$,

тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) = \mathbf{c}^*(\beta, \alpha, \mathbf{G}(\beta, \alpha)) = |\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22.(\vdash \mathbf{c}^*(x, y, z) = \mathbf{c}(y, z), \text{ см Замечание стр.24}).$ Пусть $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) \subseteq \beta$ и $\beta \subset \mathbb{A}$, тогда $|\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22 \subseteq \beta$.

Разберём случаи:

a) $\mathbf{G}(\beta, \alpha) = \Lambda$, тогда $\beta(\alpha) = \Lambda$, тогда $\alpha \in \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) = |\alpha|2\alpha22$, учитывая, что $(\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) = |\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22 = |\alpha|2\alpha22 \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) \subseteq \beta$;

b) $\mathbf{G}(\beta, \alpha) = 1$, тогда $\beta(\alpha) = 1$, тогда $\alpha \notin \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = 1$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) = |\alpha|2\alpha122$, учитывая, что $(\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) = |\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22 = |\alpha|2\alpha122 \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) \subseteq \beta$.

Для остальных исходных функторов доказательство достаточно наглядное.

Индукционное предположение 1). Пусть теорема верна для k - местного функтора Φ , для n - местных функторов $\Psi_1, \dots, \Psi_k$. Докажем теорему для функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$. Имеем

$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\Phi}\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}), (\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\bar{x}), \dots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\bar{x}), \Theta_{\Psi_k}(\bar{x}))), \dots,)$,
тогда

$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}) = \mathbf{Concat}([J(\Theta_{\Phi})^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\mathbf{y}, \bar{x}), (\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_1})^*(\mathbf{y}, \bar{x}), \dots, \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_{k-1}})^*(\mathbf{y}, \bar{x}), (\Theta_{\Psi_k})^*(\mathbf{y}, \bar{x}))), \dots,)^6$, тогда

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\beta, \bar{\alpha}) = \mathbf{Concat}([J(\Theta_{\Phi})^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\beta, \bar{\alpha}), (\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_1})^*(\beta, \bar{\alpha}), \dots, \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_{k-1}})^*(\beta, \bar{\alpha}), (\Theta_{\Psi_k})^*(\beta, \bar{\alpha}))), \dots,)$.

Пусть $(\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\beta, \bar{\alpha}) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $[J(\Theta_{\Phi})^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\beta, \bar{\alpha}) = (\Theta_{\Phi})^*(\beta, (\Psi_1)^*(\beta, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\beta, \bar{\alpha})) \subseteq \beta$ и $(\Theta_{\Psi_1})^*(\beta, \bar{\alpha}) \subseteq \beta, \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(\beta, \bar{\alpha}) \subseteq \beta$.

По индукционному предположению получим $\Theta_{\Phi}((\Psi_1)^*(\beta, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\beta, \bar{\alpha})) \subseteq \beta$, а также $\Theta_{\Psi_1}(\bar{\alpha}) \subseteq \beta, \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{\alpha}) \subseteq \beta$, тогда $\Psi_1(\alpha) = (\Psi_1)^*(\beta, \bar{\alpha}), \dots, \Psi_k(\alpha) = (\Psi_k)^*(\beta, \bar{\alpha})$, тогда

$\Theta_{\Phi}((\Psi_1)^*(\beta, \bar{\alpha}), \dots, (\Psi_k)^*(\beta, \bar{\alpha})) = \Theta_{\Phi}(\Psi_1(\alpha), \dots, \Psi_k(\alpha))$, тогда $\Theta_{\Phi}(\Psi_1(\alpha), \dots, \Psi_k(\alpha)) \subseteq \beta$, тогда

$\mathbf{Concat}([J\Theta_{\Phi}\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}), (\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\bar{x}), \dots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\bar{x}), \Theta_{\Psi_k}(\bar{x}))), \dots,) \subseteq \beta$, тогда

$\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}) \subseteq \beta$.

Индукционное предположение 2). Пусть теорема верна для n - местного функтора Φ , для $n+2$ - местных функторов $\Psi_1, \dots, \Psi_k$. Докажем теорему для $n+1$ - местного функтора $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$.

Имеем: $\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Phi}(\bar{x})$.

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, x_{n+1}a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, x_{n+1}, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, x_{n+1})), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, x_{n+1}))$, то-
гда $\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \Lambda) = (\Theta_{\Phi})^*(\mathbf{y}, \bar{x})$, $\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, x_{n+1}a_i) =$

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, x_{n+1}, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, x_{n+1})), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, x_{n+1}))^7$, тогда

⁶ для уточнения, см. Приложение

⁷ см. Приложение

$$c) \text{ WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \Lambda) = (\Theta_{\Phi})^*(\beta, \bar{\alpha}),$$

$$d) \text{ WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma a_i) =$$

$$= \text{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)).$$

Случай (c). Пусть $(\Theta_{\Phi})^*(\beta, \bar{\alpha}) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$. По индукционному предположению получим

$$\text{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}) \subseteq \beta, \text{ тогда } \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) \subseteq \beta.$$

Случай (d). Пусть $(\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma a_i) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$, тогда

$$\text{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)) \subseteq \beta, \text{ тогда}$$

$$(\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma) \subseteq \beta, \text{ тогда по индукционному предположению, получим } \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma) \subseteq \beta,$$

тогда $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma) = \delta \iff (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma) = \delta$ и $\delta \subseteq \beta$. Далее учитывая

$$[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \gamma) = \eta \iff ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma), \bar{\alpha}, \gamma) = \eta \text{ и } \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma) \subseteq \beta,$$

получим $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \gamma) = \eta \iff ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, \bar{\alpha}, \gamma) = \eta$, тогда

$$\text{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)) =$$

$$= \text{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \gamma)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma)).$$

Имеем $(\Theta_{\Psi_i})^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma)) \subseteq \beta$, тогда $(\Theta_{\Psi_i})^*(\beta, \bar{\alpha}, \gamma, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \gamma)) \subseteq \beta$,

тогда по индукционному предположению, получим $\Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \gamma, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \gamma)) \subseteq \beta$, тогда

$$\text{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \gamma, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{\alpha}, \gamma)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma)) \subseteq \beta, \text{ тогда } \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \gamma a_i) \subseteq \beta \text{ и } \beta \subset \mathbb{A}.$$

Остальные аксиомы рекурсии(15,16,17,20) рассматриваются аналогично, тогда

$$\forall \bar{x} \forall y \{ \mathbf{Fw}(y) \Rightarrow [(\Theta_{\Phi})^*(y, \bar{x}) \subseteq y \wedge y \subset \mathbf{U}] \Rightarrow \Theta_{\Phi}(\bar{x}) \subseteq y \} \in \mathbf{Th}(\mathbf{U}) \text{ (см. стр.36)}.$$

Следствие 5.6. Для произвольного n - местного функтора Φ , для произвольной последовательности аргументных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, для произвольного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, существует единственное функциональное слово β , такое, что верно

$$\text{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Phi}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta \iff \text{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\Phi})^*(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta \wedge \beta \subset \mathbf{U}, \text{ тогда}$$

$$\forall \bar{x} \exists! y [(\Theta_{\Phi})^*(y, \bar{x}) = y \wedge y \subset \mathbf{U}] \in \mathbf{Th}(\mathbf{U}), \forall \bar{x} \exists! y \{ [\Theta_{\Phi}(\bar{x}) = y \equiv [(\Theta_{\Phi})^*(y, \bar{x}) = y \wedge y \subset \mathbf{U}]] \in \mathbf{Th}(\mathbf{U}).$$

Следствие 5.7. Пусть для n - местного функтора Φ , для последовательности аргументных слов $\bar{\alpha}$, для функционального слова β верно $\text{WordM} \models (\Theta_{\Phi})^*(\beta, \bar{\alpha}) = \beta$, тогда можно построить такое интерпретационное множество $\mathbb{B}$ оракульного символа $\mathbf{U}$, что верно $\text{WordM}_{\mathbb{B}} \models [(\Theta_{\Phi})^*(\beta, \bar{\alpha}) = \beta \wedge \beta \subset \mathbf{U} \wedge \Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}) = \beta]$.

Ограниченные формулы. Универсальное функциональное слово

Определим понятие ограниченной формулы Ψ и сопровождающее это понятие, множества, обозначаемые как Bwr_{Ψ}, Vwr_{Ψ} .

- 1) Всякая бескванторная формула $\mathcal{A}$ является ограниченной формулой, $Bwr_{\mathcal{A}} = \emptyset, Vwr_{\mathcal{A}} = \emptyset$;

2) Пусть $\mathcal{A}(z, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_k)$ - ограниченная формула, $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)$ - словарный многочлен, $z \notin Vwr_{\mathcal{A}}$, тогда формула $\mathcal{B} \Rightarrow \exists z[|z| \leq |\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)| \& \mathcal{A}(z, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_k)]$ или $\mathcal{B} \Rightarrow \forall z[|z| \leq |\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)| \supset \mathcal{A}(z, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_k)]$ - ограниченная формула, $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n) \in Bwr_{\mathcal{A}}$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset Vwr_{\mathcal{A}}$, переменные $y_1, \dots, y_k$ - называются параметрами рассматриваемой ограниченной формулы, этот список отделяется точкой с запятой и может быть пустым. Такую формулу будем обозначать в виде $\exists_z^{|\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)|} \mathcal{A}(z, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_k)$ или $\forall_z^{|\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)|} \mathcal{A}(z, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_k)$.

Словарный многочлен принадлежащий множеству Bwr_{Ψ} называется ограничивающим словарным многочленом.

Ограниченная формула $\mathcal{A}$ называется $\exists(\forall)$ ограниченной формулой с параметрами или без них, если она имеет вид $\exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{x})|}, \dots, \exists_{z_k}^{|\mathbf{P}_k(\bar{x})|} \mathcal{B}(z_1, \dots, z_k, \bar{x}; y_1, \dots, y_k)$ ($\forall_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{x})|}, \dots, \forall_{z_k}^{|\mathbf{P}_k(\bar{x})|} \mathcal{B}(z_1, \dots, z_k, \bar{x}; y_1, \dots, y_k)$), где $\mathcal{B}(z_1, \dots, z_k, \bar{x}; y_1, \dots, y_k)$ - бескванторная формула.

Замечание. $\forall \Phi \forall \bar{\alpha} \forall \mathbf{P}(\bar{x}) : \mathbf{1. Word}_{\mathbb{A}} \models \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} \Phi(\bar{\alpha}, u) = \Lambda \Leftrightarrow \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} (\Phi)^*(\Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, u), \bar{\alpha}, u) = \Lambda,$

2. Word_A $\models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} \Phi(\bar{\alpha}, u) = \Lambda \Leftrightarrow \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} (\Phi)^*(\Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, u), \bar{\alpha}, u) = \Lambda,$

$\forall \beta :$

3. Word_A $\models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} \Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, u) \subseteq \beta \Rightarrow \{\exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} \Phi(\bar{\alpha}, u) = \Lambda \Leftrightarrow \forall \theta[\beta \subseteq \theta \Rightarrow \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} (\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha}, u) = \Lambda]\},$

4. Word_A $\models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} \Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, u) \subseteq \beta \Rightarrow \{\forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} \Phi(\bar{\alpha}, u) = \Lambda \Leftrightarrow \forall \theta[\beta \subseteq \theta \Rightarrow \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha})|} (\Phi)^*(\theta, \bar{\alpha}, u) = \Lambda]\}.$

Рассмотрим следующую словарную функцию: $\text{Order}(\alpha)$ - такое слово β , что число слов предшествующих слову β в лексикографическом упорядочивании, равно $|\alpha|$. В [6 с. 217] доказано, что эта словарная функция является словарной примитивно рекурсивной функцией, тогда для словарной функции Order существует такой одноместный функтор **Order** алфавита $\mathcal{L}$, что верно:

$$\forall \alpha, \beta [\text{Order}(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \vdash \mathbf{Order}(\alpha) = \beta].$$

Выпишем определяющие равенства для функтора **Order**:

1). $\mathbf{Order}(\Lambda) = \Lambda;$

2). $\mathbf{Order}(\mathbf{S}_i(\alpha)) = \mathbf{R}(\mathbf{Order}(\alpha)),$ где

a). $\mathbf{R}(\Lambda) = a_1;$

b). $\mathbf{R}(\mathbf{S}_i(\alpha)) = \mathbf{S}_{i+1}(\alpha),$ где $1 \leq i < p;$

c). $\mathbf{R}(\mathbf{S}_p(\alpha)) = \mathbf{S}_1(\mathbf{R}(\alpha)).$

Замечание. Для каждого множества p - алфавитных слов, будет свой p - алфавитный функтор **Order_p**. Из контекста будет понятно какой p - алфавитный функтор имеется ввиду. Функтор **Order** обладает свойством:

1. $\mathbf{WordM} \models \forall \alpha \beta [|\alpha| = |\beta| \supset \mathbf{Order}(\alpha) = \mathbf{Order}(\beta)];$

2. при $k \geq 2 \wedge p \geq 2$ верно $\mathbf{WordM} \models |\mathbf{Order}_p(k)| < k$;
3. Для каждого $p \geq 2$ верно $\mathbf{WordM} \models \mathbf{Order}_p\left(\frac{p^{n+1}-1}{p-1}\right) = \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1-\text{раз}}$;
4. Для каждого $p \geq 2$ верно $\mathbf{WordM} \models \forall x[|x| \geq 2 \Rightarrow \mathbf{Order}_p(p^{|x|}) = \underbrace{(p-1), \dots, (p-1)}_{|x|-1-\text{раз}} p]$;
5. Согласно определяющим равенствам, которые приведены в [6 с. 217], следует, что этот функтор

принадлежит $\mathbf{PPr}$, т.е. $\mathbf{Order} \in \mathbf{PPr}$.

$$\text{Из (3) получим } \mathbf{WordM} \models \mathbf{Order}_p\left(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{x})|+1}-1}{p-1}\right) = \underbrace{1, \dots, 1}_{|\mathbf{P}(\bar{x})|+1-\text{раз}}.$$

Если для аргументных слов α, β верно $\mathbf{WordM} \models \mathbf{Order}(\alpha) = \beta$, то аргументное слово $|\alpha|$ - натуральное число, будем называть гёделевым номером аргументного слова β и обозначать $\ulcorner \beta \urcorner = |\alpha|$.

Очевидно, что для любого аргументного слова β существуют такое натуральное число α , что верно $\ulcorner \beta \urcorner = \alpha(\mathbf{WordM} \models \mathbf{Order}(\alpha) = \beta)$, тогда $\mathbf{WordM} \models \underbrace{\ulcorner (p-1), \dots, (p-1) \urcorner}_{|x|-1-\text{раз}} p = p^{|x|}$, при $|x| \geq 2$.

С каждым $n \geq 1$ - местным функтором Φ свяжем такой функтор, обозначаемый как $\Theta_{\Phi, \mathbf{V}}$, удовлетворяющий следующим определяющим равенствам:

$$\Theta_{\Phi, \mathbf{V}}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Phi}(\bar{x}, \Lambda);$$

$$\Theta_{\Phi, \mathbf{V}}(\bar{x}, \mathbf{S}_k(x_n)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Phi, \mathbf{V}}(\bar{x}, x_n), \Theta_{\Phi}(\bar{x}, \mathbf{Order}(\mathbf{S}_k(x_n)))).$$

Верно: 1. Если $\Phi \in \mathbf{PPr} \Rightarrow \Theta_{\Phi, \mathbf{V}} \in \mathbf{PPr}$;

$$2. \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \alpha, \beta, \bar{x}[|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \Theta_{\Phi, \mathbf{V}}(\bar{x}, \alpha) = \Theta_{\Phi, \mathbf{V}}(\bar{x}, \beta)];$$

$$3. \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} \forall y^{|z|} [\Theta_{\Phi}(\bar{x}, y) \subseteq \Theta_{\Phi, \mathbf{V}}(\bar{x}, \frac{p^{|z|+1}-1}{p-1})].$$

Определим универсальное функциональное слово, обозначаемое как $\Theta_{\mathbb{U}}$.

Определяющие равенства:

$$\Theta_{\mathbb{U}}(\Lambda) = \Lambda,$$

$$\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha), \mathbf{c}(\mathbf{Order}(\alpha), \mathbf{U}(\mathbf{Order}(\alpha)))). \text{ Согласно определения, функтор } \Theta_{\mathbb{U}} \text{ принадле-}$$

жит $\mathbf{PPr}$ алфавита $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, учитывая $\mathbf{Concat}(u, \mathbf{c}(v, w)) \Leftarrow u|v|2vw22$, получим более наглядную запись вида $\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha a_i) = \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha)|\mathbf{Order}(\alpha)|\mathbf{Order}(\alpha)\mathbf{U}(\mathbf{Order}(\alpha))22$.

Имеем:

$$(\Theta_{\mathbb{U}})^*(\mathbf{y}, \Lambda) = \Lambda,$$

$$(\Theta_{\mathbb{U}})^*(\mathbf{y}, \alpha a_i) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\mathbb{U}})^*(\mathbf{y}, \alpha), \mathbf{c}(\mathbf{Order}(\alpha), \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{Order}(\alpha)))),$$

$$\forall \alpha \beta \forall \theta \supseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models [\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) = \beta \Longleftrightarrow (\Theta_{\mathbb{U}})^*(\theta, \alpha) = \beta], \text{ в частности}$$

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x \forall y [\Theta_{\mathbb{U}}(x) = y \Longleftrightarrow (\Theta_{\mathbb{U}})^*(\Theta_{\mathbb{U}}(x), x) = y].$$

Замечание. Для каждого p определяется своё p - алфавитное универсальное функциональное слово $\Theta_{\mathbb{U}}$.

Утверждение 5.7. Пусть β - такое функциональное слово, что для некоторого слова α верно

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\mathbb{U}})^*(\beta, \alpha) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) \subseteq \beta$. Имеем

$\forall \bar{x} \forall y \{ \mathbf{Fw}(y) \Rightarrow [(\Theta_{\mathbb{U}})^*(y, \bar{x}) \subseteq y \wedge y \subset \mathbb{U}] \Rightarrow \Theta_{\mathbb{U}}(\bar{x}) \subseteq y \} \in \mathbf{Th}(\mathbb{U})$.

Верно:

1. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \alpha, \beta [|\alpha| = |\beta| \iff \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) = \Theta_{\mathbb{U}}(\beta)]$;

2. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \alpha, \beta [|\alpha| \leq |\beta| \iff \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\beta)]$.

3. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x \{ |x| \leq |y| \Rightarrow [\Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|y|+1} - 1}{p - 1})](x) = \Lambda \iff x \in \mathbb{A} \}$, где $\mathbb{A}$ - множество $p \geq 2$ -

алфавитных аргументных слов;

4. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \alpha [\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) = \Theta_{\Theta_{\mathbb{U}}}(\alpha)]$, при использовании правила Гудстейна, можно доказать, что $\vdash \Theta_{\mathbb{U}}(x) = \Theta_{\Theta_{\mathbb{U}}}(x)$.

Пусть задан $n + m$ - местный ($n \geq 1, m \geq 1$) p - алфавитный функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$, интерпретационное p - алфавитное множество аргументных слов $\mathbb{A}$. Для этого функтора существует такой словарный многочлен $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$, что для $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_m$, в простом вычислении функтора Φ на $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, все опрошенные слова имеют длину, не превосходящую $|\mathbf{P}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})|$, тогда $\Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})|+1} - 1}{p - 1})$.

Далее, пусть $|\gamma_1| \leq |\mathbf{P}_1(\bar{\alpha})|, \dots, |\gamma_m| \leq |\mathbf{P}_m(\bar{\alpha})|$, тогда в простом вычислении функтора Φ на $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$, все опрошенные слова имеют длину, не превосходящую $|\mathbf{P}(\bar{\alpha}, \mathbf{P}_1(\bar{\alpha}), \dots, \mathbf{P}_m(\bar{\alpha}))|$, тогда получим $\Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha}, \mathbf{P}_1(\bar{\alpha}), \dots, \mathbf{P}_m(\bar{\alpha}))|+1} - 1}{p - 1})$.

Далее, рассмотрим формулу вида $\exists_z^{|\mathbf{P}_1(\bar{\alpha})|} [\Phi(\bar{\alpha}, z) = \Lambda]$, тогда для любого слова γ , такого, что $|\gamma| \leq |\mathbf{P}_1(\bar{\alpha})|$, верно $\Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}, \gamma) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha}, \mathbf{P}_1(\bar{\alpha}))|+1} - 1}{p - 1})$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{ \exists_z^{|\mathbf{P}_1(\bar{\alpha})|} \Phi(\bar{\alpha}, z) = \Lambda \Leftrightarrow \exists_z^{|\mathbf{P}_1(\bar{\alpha})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{\alpha}, \mathbf{P}_1(\bar{\alpha}))|+1} - 1}{p - 1}), \bar{\alpha}, z) = \Lambda \}$.

Аналогично рассуждая, получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{ \exists_{z_2}^{|\mathbf{P}_2(\bar{\beta})|} \exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{\beta})|} \Phi(\bar{\beta}, z_1, z_2) = \Lambda \Leftrightarrow \exists_{z_2}^{|\mathbf{P}_2(\bar{\beta})|} \exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{\beta})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{\beta}, \mathbf{P}_1(\bar{\beta}), \mathbf{P}_2(\bar{\beta}))|+1} - 1}{p - 1}), \bar{\beta}, z_1, z_2) = \Lambda \}$.

Утверждение Пусть $n + m$ - местный ($n \geq 1, m \geq 1$). p - алфавитный функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$, интерпретационное p - алфавитное множество аргументных слов $\mathbb{A}$ и словарные многочлены $\mathbf{P}_1(\bar{x}), \dots, \mathbf{P}_m(\bar{x})$, тогда можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\bar{x})$, что

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{ \exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{x})|} \dots \exists_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z_1, \dots, z_m) = \Lambda \Leftrightarrow \exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{x})|}, \dots, \exists_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\bar{x})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{x})|+1} - 1}{p - 1}), \bar{x}, z_1, \dots, z_m) = \Lambda \}$.

Аналогично.

Утверждение Пусть $n + m$ - местный ($n \geq 1, m \geq 1$), p - алфавитный функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$, интерпрета-

ционное p - алфавитное множество аргументных слов $\mathbb{A}$ и словарные многочлены $\mathbf{P}_1(\bar{x}), \dots, \mathbf{P}_m(\bar{x})$, тогда можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\bar{x})$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{ \forall_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{x})|} \dots \forall_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z_1, \dots, z_m) = \Lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\bar{x})|}, \dots, \forall_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\bar{x})|} (\Phi) * (\Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\bar{x})|+1} - 1}{p - 1}), \bar{x}, z_1, \dots, z_m) = \Lambda \}. \end{aligned}$$

Part VI

Сложностные классы и элементарная теория моделей

Множество $\mathbf{B}$ n -ок аргументных слов, при заданной интерпретации оракульного символа $\mathbf{U}$ множеством аргументных слов $\mathbb{A}$, называется полиномиальным, если существует(можно построить) такую бескванторную формулу $\mathcal{B}$, которая построена из функторов, принадлежащих $\mathbf{PPr}$, что верно $\forall \bar{\alpha} [\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{B}(\bar{\alpha}) \iff \bar{\alpha} \in \mathbf{B}]$.

Класс всех полиномиальных множеств относительно множества $\mathbb{A}$ - аргументных слов будем обозначать $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$. Этот класс словарных множеств замкнут относительно булевых операций: пересечения, объединения, дополнения и навешивания ограниченного квантора существования и всеобщности($\exists, \forall$) по под-словам.

Множество $\mathbf{B}$ n -ок аргументных слов, называется множеством типа $\sum$, относительно некоторого множества аргументных слов $\mathbb{A}$, если для некоторой $\exists$ ограниченной формулы $\mathcal{B}(\bar{x})$, бескванторная формула которой, построена из функторов принадлежит $\mathbf{PPr}$, верно $\forall \bar{\alpha} \{ \bar{\alpha} \in \mathbf{B} \iff \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{B}(\bar{\alpha}) \}$.

Класс всех словарных множеств типа $\sum$ будем обозначать посредством $\mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$. Этот класс словарных множеств замкнуты относительно операций: пересечения, объединения и навешивания ограниченного квантора существования по длинам слов.

Пусть $\mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U}) = \{C : \bar{C} \in \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})\}$. Множество, принадлежащие классу $\mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$ будем называть множеством типа $\prod[7]$.

Пусть дана формула вида $\exists_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z)$, где функтор Φ - $\mathbf{PPr}$ - функтор. С помощью функтора **Order** можно построить такой примитивно-рекурсивный функтор Ψ , что верно

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} [\exists_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z) \equiv \Psi(\bar{x}) = \Lambda]. \text{ Аналогично имеем } \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} [\forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z) \equiv \Psi(\bar{x}) = \Lambda].$$

Известные соотношения между введенными классами:

- a). Существует такой оракул $\mathbb{A}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$;
- b). Существует такой оракул $\mathbb{B}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{B}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{B}}(\mathbf{U})$;
- c). Существует такой оракул $\mathbb{C}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U})$;
- d). Существует такой оракул $\mathbb{D}$, что $\mathcal{NP}_{\mathbb{D}}(\mathbf{U}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{D}}(\mathbf{U})$;

- е). Существует такой оракул $\mathbb{E}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{E}}(\mathbf{U}) \cap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{E}}(\mathbf{U})$;
- ф). Существует такой оракул $\mathbb{F}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}) \cap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U})$;
- г). Существует такой оракул $\mathbb{G}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U}) \cap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U})$;
- h). Существует такой оракул $\mathbb{H}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U}) \cap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U})$;
- и). Существует такой оракул $\mathbb{I}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U}) \cap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U})$.

Каждое указанное соотношение в нерелятивизованном варианте - проблема.

Основные понятия и рассматриваемые теоремы в этом разделе, заимствованы из [8-13] и преобразованы соответствующим образом.

Пусть $\mathcal{F}(\mathbf{U})$ - некоторое множество функторов, содержащее исходные функторы.

Язык первого порядка, определяемый заданным множеством функторов, и обозначаемый как $\mathcal{L}_{\mathcal{F}(\mathbf{U})}$, состоит из функциональных символов f_{Φ} , для каждого функтора $\Phi \in \mathcal{F}(\mathbf{U})$, местность которого равна местности функтора Φ , константного символа Λ , основного предикатного символа $\leq$.

Замечание. Как правило функциональный символ f_{Φ} будем обозначать как Φ и интерпретировать его как функцию. Язык $\mathcal{L}_{\mathcal{F}(\mathbf{U})}$ называется k - алфавитным, если множество функторов $\mathcal{F}(\mathbf{U})$ - k - алфавитное.

Если множество функторов $\mathcal{F}(\mathbf{U})$ состоит из всего множества словарных примитивно рекурсивных функторов, то язык $\mathcal{L}_{\mathcal{F}(\mathbf{U})}$ будет обозначаться как $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ ($\mathcal{L}$).

Для каждого фиксированного множества $\mathbf{p} \geq 2$ - алфавитных аргументных слов определим следующие теории:

$$\mathbf{Th} = \{\mathcal{A} : \mathbf{WordM} \models \mathcal{A} - \text{предложение языка } \mathcal{L}\} + \forall xy(x \leq y \equiv |x| \dot{-} |y| = \Lambda).$$

Теория $\mathbf{Th}$ - полная теория в языке $\mathcal{L}$.

Теорию в языке $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, обозначаемую как $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$:

$$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) = \{\mathcal{A} : \text{Для любого множества } \mathbf{p} \geq 2 - \text{алфавитных аргументных слов } \mathbb{A} \ \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} - \text{предложение языка } \mathcal{L}(\mathbf{U})\} + \forall xy(x \leq y \equiv |x| \dot{-} |y| = \Lambda).$$

$$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) = \{\mathcal{A} : \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{A}, \mathcal{A} - \text{предложение языка } \mathcal{L}_{\mathbb{A}}\} + \forall xy(x \leq y \equiv |x| \dot{-} |y| = \Lambda)$$

Теория $\mathbf{Th}(\mathbb{A})$ - полная теория в языке $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$.

Имеет место: $\mathbf{Th} \subset \mathbf{Th}(\mathbf{U}) \subset \mathbf{Th}(\mathbb{A})$.

Утверждение 6.1. Пусть $\mathfrak{A}' \models \mathbf{Th}$. Пусть $\mathbf{u} : A' \rightarrow \{\Lambda, 1\}$, тогда модель $\mathfrak{A}'$ языка $\mathcal{L}$ можно обогатить до такой модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, что $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbf{U})$, $\forall b \in A' \ \mathbf{u}(b) = \mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(b)$ и для любой формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ языка $\mathcal{L}$, $\forall \bar{a} \in A'$, если $\mathfrak{A}' \models \mathcal{A}(\bar{a})$, тогда $\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{a})$.

Доказательство. Проинтерпретируем оракульную функцию $\mathbf{U}$: для каждого элемента $a \in A'$ положим $\mathbf{U}(a) = \Lambda$, если $\mathbf{u}(a) = \Lambda$ и $\mathbf{U}(a) = 1$, если $\mathbf{u}(a) = 1$ ($1 \rightleftharpoons a_1$). Составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'})$ (см.[9, стр.

130]), далее составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'}) + \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \{\mathbf{U}(a) = b : a \in A'\}$. Эта теория непротиворечива, пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'}) + \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \{\mathbf{U}(a) = b : a \in A'\}$, тогда для любой формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ языка $\mathcal{L}$, для $\forall \bar{a} \in A'$, если $\mathfrak{A}' \models \mathcal{A}(\bar{a})$, тогда $\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{a})$.

Введём следующее важное понятие.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ - модель языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ и $\bar{a} \in A$. Полиномиальной срезкой, определяемой набором элементов $\bar{a} \in A$, называется такая модель (алгебраическая система), обозначаемая как $\mathfrak{A}_{\bar{a}}$, носителем которой является множество $A_{\bar{a}} = \{b : \text{для некоторого словарного многочлена } \mathbf{P}(\bar{x}) \ \mathfrak{A} \models |b| \leq |\mathbf{P}(\bar{a})|\}$, а сигнатура состоит из всех тех функций f_{Φ} , для которых функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$.

Имеет место: 1. $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{A}$ [9 с.36].

2. $\forall \bar{a} \ [\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{A}(\bar{a}) \iff \mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{a})]$, где $\mathcal{A}(\bar{x})$ - ограниченная формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$.

Посредством $\Delta_{\mathfrak{A}}$ - будем обозначать диаграмму модели $\mathfrak{A}$ [9. с. 86], в частности $\Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{a}}}$ - диаграмма полиномиальной срезки $\mathfrak{A}_{\bar{a}}$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{A}'$ - обеднение модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ до языка $\mathcal{L}$. имеет место $\Delta_{\mathfrak{A}'} \subseteq \Delta_{\mathfrak{A}}$, в частности $\Delta_{\mathfrak{A}'_{\bar{a}}} \subseteq \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{a}}}$, учитывая следствие 5.2, стр. 27, по диаграмме $\Delta_{\mathfrak{A}'}$, можно восстановить диаграмму $\Delta_{\mathfrak{A}}$, при этом необходимо знать график оракула $\mathbf{U}$, в модели $\mathfrak{A}$. Диаграмма $\Delta_{\mathfrak{A}'}$ содержит только следы оракульных вычислений, полная информация об оракульных вычислениях содержится в диаграмме $\Delta_{\mathfrak{A}}$, например, если $\mathfrak{A} \models \Theta_{\Phi}(\bar{b}) = c$, тогда $\mathfrak{A}' \models (\Theta_{\Phi})^*(c.\bar{b}) = c$, если $[\Theta_{\Phi}(\bar{b}) = c] \in \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{a}}}$, тогда $[(\Theta_{\Phi})^*(c.\bar{b}) = c] \in \Delta_{\mathfrak{A}'_{\bar{a}}}$.

Утверждение 6.2. Для произвольного $n + 1 (n \geq 1)$ - местного функтора Φ , для произвольной модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, такой, что $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, для произвольного набора $\bar{a} \in \mathfrak{A}$, для произвольного словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{x})$, существует наименьший по длине функциональный элемент $\mathbf{b}$, такой, что $\forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{a})|} \Theta_{\Phi}(\bar{a}, u) \subseteq \mathbf{b}$.

Примечание. Такой функциональный элемент не единственный, но для любых таких функциональных элементов $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ верно $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \wedge \text{dom}(\mathbf{b}) = \text{dom}(\mathbf{c}) \wedge \forall x [x \in \text{dom}(\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{b}(x) = \mathbf{c}(x)]$.

Утверждение 6.3. Для произвольного $n + 1$ - местного функтора Φ , для произвольной модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, такой, что $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, для произвольного набора $\bar{a} \in \mathfrak{A}$, для произвольного словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{x})$, $\forall \bar{b} \in A_{\bar{a}}$, для произвольного функционального элемента $\mathbf{c}$, такого, что $\forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \Theta_{\Phi}(\bar{b}, u) \subseteq \mathbf{c}$, верно:

1. $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, u) = \Lambda \iff \mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} (\Phi)^*(\mathbf{c}, \bar{b}, u) = \Lambda$.
2. $\mathfrak{A} \models \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, u) = \Lambda \iff \mathfrak{A} \models \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} (\Phi)^*(\mathbf{c}, \bar{b}, u) = \Lambda$.

Утверждение 6.4. Любое расширение полиномиальной срезки $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, порождает следующие соотношения, для любого функтора $\Phi \in \mathbf{PPr}$ и любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{x})$:

1. $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}_{\bar{a}}$;

2. $\forall \bar{b} \in A_{\bar{a}}$ верно $\Theta_{\Phi}(\bar{b})_{\mathfrak{A}} = \Theta_{\Phi}(\bar{b})_{\mathfrak{M}}$;

3. $\forall \bar{b}, c \in A_{\bar{a}}$, если $\mathfrak{A} \models (\Phi)^*(\Theta_{\Phi}(\bar{b}), \bar{b}) = c$, тогда $\forall f \in M$, такого что $\Theta_{\Phi}(\bar{b}) \subseteq f$, верно

$\mathfrak{M} \models (\Phi)^*(f, \bar{b}) = c$ - "Принцип использования" ("**Use Principle**") при расширении моделей;

4. Пусть $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$. Пусть $c_{\mathfrak{A}}$ - наименьший по длине функциональный элемент, такой, что

$$\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \Theta_{\Phi}(\bar{b}, u) \subseteq c_{\mathfrak{A}}.$$

Пусть $d_{\mathfrak{M}}$ - наименьший по длине функциональный элемент, такой, что $\mathfrak{M} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \Theta_{\Phi}(\bar{b}, u) \subseteq d_{\mathfrak{M}}$.

Тогда:

a). $dom(c_{\mathfrak{A}}) \subset A_{\bar{a}} \wedge dom(d_{\mathfrak{M}}) \subset M_{\bar{a}} \wedge c_{\mathfrak{A}} \subseteq d_{\mathfrak{M}}$;

b). Если $|e| \leq |\mathbf{P}(\bar{b})|$ и $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{b}, e) = h$, тогда $\mathfrak{A} \models (\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}, e) = h$ и $\mathfrak{M} \models (\Phi)^*(d_{\mathfrak{M}}, \bar{b}, e) = h$;

c). Если $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} (\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}, u) = \Lambda$, тогда для каждого $|f| \leq |\mathbf{P}(\bar{b})|$ получим $\mathfrak{A} \models (\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}, f) = \Lambda$,

тогда $\mathfrak{M} \models (\Phi)^*(d_{\mathfrak{M}}, \bar{b}, f) = \Lambda$, тогда $\mathfrak{M} \models \forall u (|u| \leq |\mathbf{P}(\bar{b})| \wedge u \in A_{\bar{a}} \supset (\Phi)^*(d_{\mathfrak{M}}, \bar{b}, u) = \Lambda)$. Имеет место также, если $\mathfrak{M} \models \forall u (|u| \leq |\mathbf{P}(\bar{b})| \wedge u \in A_{\bar{a}} \supset (\Phi)^*(d_{\mathfrak{M}}, \bar{b}, u) = \Lambda)$, тогда $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} (\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}, u) = \Lambda$.

"Принцип использования" ("**Use Principle**") при расширении моделей.

Теорема 6.5. Пусть $\mathbb{A}$ - произвольный оракул. $\mathcal{NP}(\mathbb{A}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}(\mathbb{A})$, тогда и только тогда, когда для любой ограниченной $\exists$ формулы $\mathcal{A}(x)$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, существует ограниченная $\forall$ формула $\mathcal{B}(x)$ той же сигнатуры, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \vdash \forall x [\mathcal{A}(x) \equiv \mathcal{B}(x)]$.

Теорема 6.6. Пусть $\mathbb{A}$ - произвольный оракул, $\mathcal{A}(\bar{x})$ - ограниченная $\forall$ формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Следующие условия равносильны:

1. Для любой модели $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, для любых $\bar{a} \in A$, для любых $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$, любой модели $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$,

такой, что $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}$, если $\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{b})$, тогда $\mathfrak{M} \models \mathcal{A}(\bar{b})$.

2. Для формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ существует такая ограниченная $\exists$ формула $\mathcal{B}(\bar{x})$ языка языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$,

что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$.

Доказательство. Докажем, что из (1) следует (2). Идея доказательства заимствована в [8 с. 156], [9 с.133-134]. Если формула $\mathcal{A}(\bar{x})$ такова, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} \mathcal{A}(\bar{x})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall (\bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})])$, где $\mathcal{B}(\bar{x})$ - ограниченная $\exists$ формула, такая, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} \mathcal{B}(\bar{x})$.

Пусть формула $\mathcal{A}(\bar{x})$ такова, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \not\models \forall \bar{x} \mathcal{A}(\bar{x})$.

Составим множество предложений $\Gamma(\bar{c}) = \{\Theta(\bar{c}) : \mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \mathcal{A}(\bar{x}) \supset \Theta(\bar{x})\}$, где $\Theta(\bar{x})$ - ограниченная $\forall$ формула. Из (1) получим, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Gamma(\bar{c})$ - совместно. Докажем $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Gamma(\bar{c}) \models \neg \mathcal{A}(\bar{c})$.

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Gamma(\bar{c})$, $\bar{c} \in A$. Составим $\Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}}$ - диаграмма модели $\mathfrak{A}_{\bar{c}}$.

Множество предложений $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}} + \neg \mathcal{A}(\bar{c})$ - совместно или таковым не является. Если

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}} + \neg \mathcal{A}(\bar{c})$ - несовместно, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}} \models \mathcal{A}(\bar{c})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{c}, \bar{d}) \models \mathcal{A}(\bar{c})$, где $\Lambda_i(\bar{c}, \bar{d}) \in \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}}$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \neg \mathcal{A}(\bar{c}) \models \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{c}, \bar{d})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \mathcal{A}(\bar{c}) \supset \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{c}, \bar{d})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} \forall \bar{y} [\neg \mathcal{A}(\bar{x}) \supset \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{x}, \bar{y})]$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} [\neg \mathcal{A}(\bar{x}) \supset \forall \bar{y} \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{x}, \bar{y})] (2)$.

Для $\bar{d}$, существует такой словарный многочлен $\tilde{\mathbf{P}}(\bar{x})$, что $|\bar{d}| \leq |\tilde{\mathbf{P}}(\bar{c})|$. Из (2) получим

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} [\neg \mathcal{A}(\bar{x}) \supset \forall_{\bar{y}}^{|\tilde{\mathbf{P}}(\bar{x})|} \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{x}, \bar{y})]$, тогда $\forall_{\bar{y}}^{|\tilde{\mathbf{P}}(\bar{c})|} \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{c}, \bar{y}) \in \mathbf{\Gamma}(\bar{c})$, тогда $\mathfrak{A} \models \neg \bigwedge_{i \leq k} \Lambda_i(\bar{c}, \bar{d})$ - противоречие, следовательно множество предложений $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}} + \neg \mathcal{A}(\bar{c})$ - совместно.

Пусть $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{c}}} + \neg \mathcal{A}(\bar{c})$, тогда получим $\mathfrak{A}_{\bar{c}} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models \neg \mathcal{A}(\bar{c})$, тогда $\mathfrak{A} \models \neg \mathcal{A}(\bar{c})$, следовательно $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \mathbf{\Gamma}(\bar{c}) \models \neg \mathcal{A}(\bar{c})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \bigwedge_{j \leq m} \Omega_j(\bar{c}) \supset \neg \mathcal{A}(\bar{c})$, где $\Omega_j(\bar{c}) \in \mathbf{\Gamma}(\bar{c})$, тогда

$$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \bigwedge_{j \leq m} \Omega_j(\bar{x}) \supset \neg \mathcal{A}(\bar{x}).$$

Имеем $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \mathcal{A}(\bar{x}) \supset \bigwedge_{j \leq m} \Omega_j(\bar{x})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \bigwedge_{j \leq m} \Omega_j(\bar{x})$, тогда

$$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \bigwedge_{j \leq m} \Omega_j(\bar{x}) \equiv \mathcal{A}(\bar{x}).$$

Докажем, что из (2) следует (1). Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$, $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, такая, что $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{b})$.

Имеем: для формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ существует такая ограниченная $\exists$ формула $\mathcal{B}(\bar{x})$ языка языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$,

что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$, учитывая, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, получим $\mathfrak{A} \models \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$, тогда

$\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{b}) \equiv \mathcal{B}(\bar{b})$, учитывая $\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{b})$, получим $\mathfrak{A} \models \mathcal{B}(\bar{b})$, тогда $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{B}(\bar{b})$, учитывая, что $\mathcal{B}(\bar{x})$ - ограниченная $\exists$ формула, $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\bar{b} \in M_{\bar{a}}$, получим $\mathfrak{M} \models \mathcal{B}(\bar{b})$. Из $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ и

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$ получим $\mathfrak{M} \models \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$, тогда $\mathfrak{M} \models \mathcal{A}(\bar{b}) \equiv \mathcal{B}(\bar{b})$, тогда $\mathfrak{M} \models \mathcal{A}(\bar{b})$.

Замечание. Аналогично теореме 6.6, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ для теории $\mathbf{Th}$ в языке $\mathcal{L}$.

Замечание. Аналогично теореме 6.6, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ в языке $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ для теории $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$.

Теорема 6.7. Для любого оракула $\mathbb{A}$, любой ограниченной $\forall$ формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$, следующие условия равносильны:

1). Для любой модели $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, любых элементов $\bar{a} \in A$, любых элементов $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$, если $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{A}(\bar{b})$, тогда для любой модели $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ такой, что $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\bar{a}}$, верно $\mathfrak{B} \models \mathcal{A}(\bar{b})$.

2). Для любой модели $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, любых элементов $\bar{a} \in A$, любых элементов $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$, если $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{A}(\bar{b})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\bar{a}}} \vdash \mathcal{A}(\bar{b})$.

3). Для формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ существует ограниченная $\exists$ формула $\mathcal{B}(\bar{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \vdash \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$ (равносильно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} [\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$).

Доказательство. Доказательство (1) $\Leftrightarrow$ (2) - простое. Докажем, что из (3) следует (1).

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$ и $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{A}(\bar{b})$. Пусть $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, такая что $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\bar{a}}$. Для некоторой $\exists$ формулы $\mathcal{B}(\bar{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ имеем $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \vdash \forall \bar{x}[\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$, тогда $\mathfrak{B} \models \mathcal{A}(\bar{b}) \equiv \mathcal{B}(\bar{b})$. Предположим, что $\mathfrak{B} \models \neg \mathcal{A}(\bar{b})$, тогда $\mathfrak{B} \models \neg \mathcal{B}(\bar{b})$, учитывая $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\bar{a}}$ и то, что $\neg \mathcal{B}(\bar{x})$ - $\forall$ формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$, получим $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \neg \mathcal{B}(\bar{b})$, тогда $\mathfrak{A} \models \neg \mathcal{B}(\bar{b})$, учитывая, что $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ и $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \vdash \forall \bar{x}[\mathcal{A}(\bar{x}) \equiv \mathcal{B}(\bar{x})]$, получим $\mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\bar{b}) \equiv \mathcal{B}(\bar{b})$. Формула $\mathcal{A}(\bar{b}) \equiv \mathcal{B}(\bar{b})$ - ограниченная, тогда $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{A}(\bar{b}) \equiv \mathcal{B}(\bar{b})$, учитывая $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{A}(\bar{b})$, получим $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \mathcal{B}(\bar{b})$, получили противоречие, тогда $\mathfrak{B} \models \mathcal{A}(\bar{b})$.

Из теоремы 6.6, следует, что из (1) следует (3).

Замечание. Аналогично теореме 6.7, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ для теории $\mathbf{Th}$ в языке $\mathcal{L}$.

Замечание. Аналогично теореме 6.7, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\mathcal{A}(\bar{x})$ в языке $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ для теории $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$.

Замечание. Используя утверждение 6.3 и теорему 6.7, можно достаточно просто доказать теорему 4.5[12 p.469].

Теорема 6.8 Пусть для теории $\mathbf{Th}$ выполняется второй пункт теоремы 6.7 в языке $\mathcal{L}$, для любой ограниченной $\forall$ формулы сигнатуры $\mathbf{PPr}$.

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbf{U})$, $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$.

Пусть для формулы $\forall_y^{|P(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, y) = \Lambda$ верно $\mathfrak{A} \models \forall_y^{|P(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, y) = \Lambda$, где Φ - функтор сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}} \vdash \forall_y^{|P(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, y) = \Lambda$.

Формула $\forall \bar{x}[\forall_z^{|P(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z) = \Lambda \equiv \forall_u^{|P(\bar{x})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(\exp_{\mathbf{P}}(|\tilde{P}(\bar{x})|)), \bar{x}, u) = \Lambda]$, принадлежит теории $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$,

где $\tilde{P}(\bar{x})$ - подходящий словарный многочлен, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x}[\forall_z^{|P(\bar{x})|} \Phi(\bar{x}, z) = \Lambda \equiv \forall_u^{|P(\bar{x})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(\exp_{\mathbf{P}}(|\tilde{P}(\bar{x})|)), \bar{x}, u) = \Lambda]$, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash [\forall_z^{|P(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, z) = \Lambda \equiv \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(\exp_{\mathbf{P}}(|\tilde{P}(\bar{b})|)), \bar{b}, u) = \Lambda]$ (1) Вычислим: $|\tilde{P}(\bar{b})| = d_1$,

$\exp_{\mathbf{P}}(d_1) = d_2$, $\Theta_{\mathbf{U}}(d_2) = d_3$, тогда $\mathfrak{A}' \models \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(d_3, \bar{b}, u) = \Lambda$, где $\mathfrak{A}'$ - обеднение модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$

до модели языка $\mathcal{L}$, тогда $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}', d_2} \vdash \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(d_3, \bar{b}, u) = \Lambda$, учитывая равенство

$\Theta_{\mathbf{U}}(d_2) = d_3$, получим $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}', d_2} + \{\Theta_{\mathbf{U}}(d_2) = d_3\} \vdash \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(d_2), \bar{b}, u) = \Lambda$, учитывая

$(\Theta_{\mathbf{U}}(d_2) = d_3) \in \Delta_{\mathfrak{A}, d_2}$, получим $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}, d_2} \vdash \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(d_2), \bar{b}, u) = \Lambda$. Учитывая

$\mathbf{Th} \vdash \forall x \forall y[\exp_{\mathbf{P}}(x) = y \equiv \mathbf{EXP}_{\mathbf{P}}(x, y) = \Lambda]$ и $\mathbf{Th} \vdash \forall z \forall v \forall x[\mathcal{A}(\bar{z}, v) \wedge \mathbf{EXP}_{\mathbf{P}}(x, v) = \Lambda \supset \mathcal{A}(\bar{z}, \exp_{\mathbf{P}}(x))]$,

получим $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}, d_2} \vdash \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(\exp_{\mathbf{P}}(d_1)), \bar{b}, u) = \Lambda$, учитывая $|\tilde{P}(\bar{b})| = d_1$, получим

$\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}, d_2} \vdash \forall_u^{|P(\bar{b})|} (\Phi)^*(\Theta_{\mathbf{U}}(\exp_{\mathbf{P}}(|\tilde{P}(\bar{b})|)), \bar{b}, u) = \Lambda$, учитывая (1), получим

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}, d_2} \vdash \forall_y^{|P(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, y) = \Lambda$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}} \vdash \forall_y^{|P(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, y) = \Lambda$.

Замечание. Эту теорему можно распространить на любую ограниченную $\forall$ формулу сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$.

Теорема 6.9. Если для теории $\mathbf{Th}$ для любой ограниченной $\forall$ -формулы языка $\mathcal{L}$ выполняется первый пункт теоремы 6.7, тогда для любого оракула $\mathbb{A}$, для любой ограниченной $\forall$ -формулы языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, для теории $\mathbf{Th}(\mathbb{A})$ также выполняется первый пункт этой теоремы.

Доказательство. Пусть Φ - произвольный $n+1$ -местный функтор, сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$.

Пусть $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)$ - произвольный словарный многочлен. Докажем теорему для формулы вида

$$\forall_z^{|\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)|} \Phi(x_1, \dots, x_n, z) = \Lambda.$$

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in A_{\bar{a}}$, $\mathfrak{A} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi(\bar{b}, z) = \Lambda]$, докажем, что $\forall \mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, такой, что $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{A}_{\bar{a}}$, верно $\mathfrak{M} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi(\bar{b}, z) = \Lambda]$.

Пусть $\mathfrak{A}'$ - обединение модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ до модели языка $\mathcal{L}$.

Составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}')^8$ (см.[9, стр. 130]), далее составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}') + \Delta_{\mathfrak{M}'_{\bar{a}}}$, где $\mathfrak{M}'_{\bar{a}}$ - обединение модели $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ до языка $\mathcal{L}$. Эта теория противоречива или таковой не является. Предположим, что теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}') + \Delta_{\mathfrak{M}'_{\bar{a}}}$ - противоречива, тогда $\mathbf{Th} \vdash \bigwedge A_i(\bar{e}, \bar{f}) \supset \neg \bigwedge B_j(\bar{e}, \bar{h})$, где $\bar{e} \in A_{\bar{a}}$, $A_i(\bar{e}, \bar{f}) \in \mathbf{Th}(\mathfrak{A}')$, $B_j(\bar{e}, \bar{h}) \in \Delta_{\mathfrak{M}'_{\bar{a}}}$, тогда $\mathbf{Th} \vdash \bigwedge A_i(\bar{e}, \bar{f}) \supset \neg \bigwedge B_j(\bar{e}, \bar{x})$, тогда $\mathbf{Th} \vdash \bigwedge A_i(\bar{e}, \bar{f}) \supset \forall \bar{x} \neg \bigwedge B_j(\bar{e}, \bar{x})$, тогда $\mathfrak{A}' \models \forall \bar{x} \neg \bigwedge B_j(\bar{e}, \bar{x})$. Для $\bar{h}$ можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{Q}(\bar{x})$, что $\mathfrak{A}' \models |\bar{h}| \leq |\mathbf{Q}(\bar{a})|$, тогда $\mathfrak{A}' \models \forall_{\bar{x}}^{|\mathbf{Q}(\bar{a})|} \neg \bigwedge B_j(\bar{e}, \bar{x})$, тогда, согласно пункта 1 теоремы 6.7 для языка $\mathcal{L}$, учитывая $\mathfrak{A}'_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}'_{\bar{a}}$, получим $\mathfrak{M}'_{\bar{a}} \models \forall_{\bar{x}}^{|\mathbf{Q}(\bar{a})|} \neg \bigwedge B_j(\bar{e}, \bar{x})$ - противоречие, следовательно теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}') + \Delta_{\mathfrak{M}'_{\bar{a}}}$ - непротиворечива. Отметим, что в моделях $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{M}'$ имеются следы оракульных вычислений оракула $\mathbf{U}_{\mathfrak{A}}$ и оракула $\mathbf{U}_{\mathfrak{M}}$

Построим интерпретацию оракульного символа $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}(a) = \begin{cases} \mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(a), & \text{если } a \in A; \\ \mathbf{U}_{\mathfrak{M}}(a), & \text{если } a \in M_{\bar{a}} \end{cases}$$

Обозначим полученную интерпретацию как $\mathbb{B}$. Согласно теореме 6.1. получим

$$\mathfrak{N}_1 \models \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \mathbf{Th}(\mathfrak{A}') + \Delta_{\mathfrak{M}'_{\bar{a}}}.$$

Имеем:

$$1. \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{N}_1', \mathfrak{M}'_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{N}_1'.$$

2. Для интерпретации $\mathbb{A}_{\mathfrak{A}}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{A}$ и для интерпретации $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{N}_1$ верно $\mathbb{A}_{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ ($\forall b \in A \mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(b) = \mathbf{U}_{\mathfrak{N}_1}(b)$).

3. Для интерпретации $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}_{\bar{a}}}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ и для интерпретации $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{N}_1$ верно $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}_{\bar{a}}} \subseteq \mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ ($\forall b \in M_{\bar{a}} \mathbf{U}_{\mathfrak{M}_{\bar{a}}}(b) = \mathbf{U}_{\mathfrak{N}_1}(b)$).

4. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}$ верно $\forall \bar{b} \in A \forall c \in A \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{b}) = c \iff \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (1), тогда верно $\forall \bar{b} \in A \forall c \in A \forall d \in A \mathfrak{A} \models (\Theta_{\Phi})^*(c, \bar{b}) = d \iff \mathfrak{N}_1 \models \Theta_{\Phi}^*(c, \bar{b}) = d$.

⁸Можно взять теорию $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}'}$

5. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ верно $\forall \bar{b} \in A \forall c \in A \mathfrak{A} \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c \iff \mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (2,4), теорема 4.2, теорема 5.1 и теорема 5.5:

$\mathfrak{A} \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \models (\Theta_\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}) = c_{\mathfrak{A}} \wedge c_{\mathfrak{A}} \subset \mathbb{A}_{\mathfrak{A}}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models (\Theta_\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}) = c_{\mathfrak{A}} \wedge c_{\mathfrak{A}} \subset \mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = d_{\mathfrak{N}_1} \subset c_{\mathfrak{A}}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models (\Theta_\Phi)^*(c_{\mathfrak{A}}, \bar{b}) = \Theta_\Phi(\bar{b}) = d_{\mathfrak{N}_1}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = d_{\mathfrak{N}_1} = c_{\mathfrak{A}}$

6. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ верно $\forall \bar{b} \in A \forall c \in A \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{b}) = c \iff \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{a}) = b$, при этом используется (4,5) и теорема 5.1. Таким образом получим $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}_1$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \Delta_{\mathfrak{A}}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}}$, учитывая теорему 6.8, получим $\mathfrak{N}_1 \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi(\bar{b}, z) = \Lambda]$.

7. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ верно

$\forall \bar{b} \in M_{\bar{a}} \forall c \in M_{\bar{a}} \mathfrak{M}_{\bar{a}} \models \Phi(\bar{b}) = c \iff \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (1), тогда верно

$\forall \bar{b} \in M_{\bar{a}} \forall c \in M_{\bar{a}} \forall d \in M_{\bar{a}} \mathfrak{M}_{\bar{a}} \models (\Theta_\Phi)^*(c, \bar{b}) = d \iff \mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi^*(c, \bar{b}) = d$

8. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ верно

$\forall \bar{b} \in M_{\bar{a}} \forall c \in M_{\bar{a}} \mathfrak{M}_{\bar{a}} \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c \iff \mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (3,7), теорема 4.2, теорема 5.1 и теорема 5.5.

9. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ верно

$\forall \bar{b} \in M_{\bar{a}} \forall c \in M_{\bar{a}} \mathfrak{M}_{\bar{a}} \models \Phi(\bar{b}) = c \iff \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (7,8) и теорема 5.1. Таким образом получим $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{N}_1$, учитывая (6), получим $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \models \forall_y^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \Phi(\bar{b}, y) = \Lambda$, тогда $\mathfrak{M} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi(\bar{b}, z) = \Lambda]$.

Продолжаем. Пусть $\mathcal{A}(z, x_1, \dots, x_n)$ - произвольная бескванторная формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$. Для этой формулы можно построить такой $n + 1$ - местный функтор $\Phi_{\mathcal{A}}$ (теорема 1.6), что

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x}, \forall z [\mathcal{A}(z, \bar{x}) \equiv \Phi_{\mathcal{A}}(z, \bar{x}) = \Lambda]$, тогда для любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{x})$ верно

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x} [\exists_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} \mathcal{A}(z, \bar{x}) \equiv \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} [\Phi_{\mathcal{A}}(u, \bar{x}) = \Lambda]]$, а также

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x} [\forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} \mathcal{A}(z, \bar{x}) \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{x})|} [\Phi_{\mathcal{A}}(u, \bar{x}) = \Lambda]]$, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \mathcal{A}(z, \bar{b}) \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi_{\mathcal{A}}(u, \bar{b}) = \Lambda]$.

Пусть $\mathfrak{A} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \mathcal{A}(z, \bar{b})$, тогда $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi_{\mathcal{A}}(u, \bar{b}) = \Lambda]$, тогда $\mathfrak{M} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} [\Phi_{\mathcal{A}}(u, \bar{b}) = \Lambda]$, тогда

$\mathfrak{M} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{b})|} \mathcal{A}(z, \bar{b}) = \Lambda$.

Для формулы, которая имеет два и более ограниченных кванторов $\forall$, доказательство проводится аналогично. **Конец доказательства теоремы.**

Теорема 6.10. Существует такая интерпретация $\mathbb{A}$ функтора $\mathbf{U}$, что $\mathcal{NP}(\mathbb{A}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}(\mathbb{A})$, тогда для теории $\mathbf{Th}(\mathbb{A})$ не выполняется третий пункт теоремы 6.7.

Доказательство. Рассмотрим формулу вида $\exists_y^{|x|} [|x| = |y| \& \mathbf{U}(y) = \Lambda]$. Для этой формулы можно построить такую n - алфавитную интерпретацию $\mathbb{A}$ функтора $\mathbf{U}$, что при $n \geq 2$, для любой ограниченной

$\forall$ формулы $\mathcal{A}(x, \bar{z})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}$, верно $\mathbf{WordM}_A \not\models \forall x \forall \bar{z} [\exists_y^{|x|} [|x| = |y| \& \mathbf{U}(y) = \Lambda] \equiv \mathcal{A}(x, \bar{z})]$.

Конструкция построения оракула A имеется в [13, р. 437].

Замечание. Для исчисления $\mathbf{CalcEq_U}$ построить оракул A , весьма просто.

Следствие. $\mathcal{NP} \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}$.

Доказательство. Используем теоремы 6.5 - 6.10.

P.S. Я располагаю доказательством следующего соотношения классов сложности

$\mathcal{P} \subset (\mathcal{NP} \cap \mathbf{co} - \mathcal{NP})?$, подход решения к которому, даже не обозначен в разделе "Дискретная математика".

Литература

1. F. W. v. Henke, K. Indermark, G. Rose, K. Weihrauch. On Primitive Recursive Wordfunctions. Computing, vol 15, 1975, p. 217-234.
2. Шанин Н.А. Вступительная статья. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р.Л. Гудстейна - В кн.: Р.Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. Издательство М. "Наука 1970. с. 7-75.
3. Р.Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. М., 1970. с. 436.
4. Карри Х.Б. Формализация рекурсивной арифметики - В кн.: Р.Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. Издательство М. "Наука" стр. 437-469.
5. A. Cobham The intrinsic computational difficulty of functions. Proc. of the 1964 International Congress for Logic, Methology, and the Philosophy of Sciens, North Holand Publishing Co., Amsterdam, p. 24-30.
6. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1986. с. 368.
7. L, J. Stockmeyer. The polinomial-time hierarchy. Theoretical Computer Science vol 3 1977, p.1-22.
8. Ершов Ю.Л. Палютин Е.А. Математическая логика. М., ФИЗМАТЛИТ, 2011.с. 356.
9. Г. Кейслер, Чэн. Ч.Ч. Теория моделей, Москва, Изд-во МИР, 1977, с. 614.
10. Справочная книга по математической логике, ч. 1. Теория моделей, Москва "Наука 1982, с. 391.
11. J. Donald Monk. Mathematical Logic. Springer - Verlag, New York, 1976.
12. Book R.V., Long T.J., Selman A.L. Quantitative relativization of complexity classes. SIAM J. Comput. vol 13 No 3 August 1984, p. 461-487.
13. Baker T, Gill J. Solovay R. Relativization of the $\mathcal{P} = ? \mathcal{NP}$ Question. SIAM J. Comput. vol 4 December 1971, p. 431-442.

Приложение

Составим $k \geq 3$ местный функтор вида $[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k \mathbf{I}_k^k] \dots]]$. Для этого функтора в исчислении **CalcEq** выводимо равенство

$$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k \mathbf{I}_k^k] \dots]](x_1 \dots x_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}(x_2, \dots \mathbf{Concat}(x_{k-1}, x_k) \dots)).$$

Пусть $\mathbf{Concat}^k \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k \mathbf{I}_k^k] \dots]]$, при $k \geq 3$, тогда $\vdash \mathbf{Concat}^k(x_1, \dots x_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}(x_2, \dots \mathbf{Concat}(x_{k-1}, x_k) \dots))$. При $k = 2$, получим $\mathbf{Concat}^2 \rightleftharpoons \mathbf{Concat}$, $\vdash \mathbf{Concat}^2(x_1, x_2) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2)$ при $k = 1$ $\mathbf{Concat}^1 \rightleftharpoons \mathbf{I}_1^1$, $\vdash \mathbf{Concat}^1(x) = x$.

Имеем $([J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k \mathbf{I}_k^k])^* = [J(\mathbf{Concat})^* \mathbf{I}_1^{k+1}(\mathbf{I}_{k-1}^k)^*(\mathbf{I}_k^k)^*] = [J[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3 \mathbf{I}_3^3] \mathbf{I}_1^{k+1}(\mathbf{I}_{k-1}^k)^*(\mathbf{I}_k^k)^*] = [J\mathbf{Concat}(\mathbf{I}_{k-1}^k)^*(\mathbf{I}_k^k)^*] = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_k^{k+1} \mathbf{I}_{k+1}^{k+1}]$, тогда $(\mathbf{Concat}^k)^* = ([J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k \mathbf{I}_k^k] \dots]])^* = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^{k+1}[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_3^{k+1} \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_k^{k+1} \mathbf{I}_{k+1}^{k+1}] \dots]]$, тогда

$$\vdash (\mathbf{Concat}^k)^*(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \mathbf{Concat}^k(x_2, \dots, x_{k+1})$$

Имеем $(\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^* = (J[\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}])^*$, тогда

$$(J[\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}])^* = [J(\mathbf{Concat}^{k+1})^* \mathbf{I}_1^{n+1}([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(\Theta_{\Psi_1})^*, \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*].$$

Далее $([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^* = [J(\Theta_\Phi)^* \mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots (\Psi_k)^*]$, тогда

$$\vdash ([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = [J(\Theta_\Phi)^* \mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots (\Psi_k)^*](x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \text{ тогда}$$

$$\vdash [J(\Theta_\Phi)^* \mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots (\Psi_k)^*](x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

тогда $\vdash ([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$, то-

гда $\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\mathbf{Concat}^{k+1})^*(x_1, ([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$

, $(\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$, тогда

$$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}^{k+1}([(J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})),$$

$(\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$, тогда

$$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}^{k+1}((\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})),$$

$(\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$, тогда

$$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}((\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})),$$

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_{k-1}})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})), \dots,)$.

Даны Φ - $n \geq 1$ - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - $(n+2)$ - местные функторы. Составим функтор

$[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ - $(n+1)$ - местный. По этому функтору построим функтор $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$.

Пусть $\bar{x} \rightleftharpoons x_1, \dots, x_n$, $\lambda \rightleftharpoons [J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]$.

Имеем $\vdash \lambda(\bar{x}, z, u) = [J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}](\bar{x}, z, u) = [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, z)$.

Пусть $\tilde{\Psi}_i \Leftarrow [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]$, $\tilde{\Psi}_i$ - $(n+2)$ - местный фунтор.

Имеем: $\vdash \tilde{\Psi}_i(\bar{x}, z, u) \Leftarrow [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}](\bar{x}, z, u) =$

$\mathbf{Concat}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda](\bar{x}, z, u), \mathbf{I}_{n+2}^{n+2}(\bar{x}, z, u)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z, u)), u) =$

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, z)), u).$

Итак, $\vdash \tilde{\Psi}_i(\bar{x}, z, u) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, z)), u)$

Пусть $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]} \Leftarrow [R\Theta_{\Phi}\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]$.

Определяющие равенства:

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = [R\Theta_{\Phi}\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Phi}(\bar{x})$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_k(z)) = [R\Theta_{\Phi}\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](\bar{x}, \mathbf{S}_k(z)) = \tilde{\Psi}_i(\bar{x}, z, [R\Theta_{\Phi}\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](\bar{x}, z)) =$

$\tilde{\Psi}_i(\bar{x}, z, \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)).$

Итак, имеем следующие определяющие равенства для фунтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$:

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Phi}(\bar{x}),$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(y)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)),$ где $i \leq k,$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(y)) = \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, y),$ где $i > k.$

Далее $(\lambda)^* \Leftarrow ([J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}])^*.$

$([J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}])^* = [J([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*, \dots, (\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*)]$

Имеем: $\vdash (\lambda)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = [J([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*, \dots, (\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*)](\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) =$

$([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*(\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), (\mathbf{I}_1^{n+2})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), \dots, (\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u))) = ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)$

Итак, $\vdash (\lambda)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z).$

$(\tilde{\Psi}_i)^* \Leftarrow ([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}])^* = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*] =$

$[J[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*].$

$([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^* = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*, \dots, (\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\lambda)^*],$

$\vdash ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*, \dots, (\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\lambda)^*](\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) =$

$(\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), (\mathbf{I}_1^{n+2})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), \dots, (\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), (\lambda)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u)) =$

$(\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, (\lambda)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u)) = (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)).$

Итак, $\vdash ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)).$

$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*](\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) =$

$[J[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*](\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) =$

$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3](\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), (\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u)) =$

$\mathbf{Concat}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u), (\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)), u).$

Итак, $\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, u) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)), u).$

$$(\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^* \Leftarrow ([R\Theta_\Phi \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^* = [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*]$$

$$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \Lambda) = ([R\Theta_\Phi \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \Lambda) = [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](\mathbf{y}, \bar{x}, \Lambda) = (\Theta_\Phi)^*(\mathbf{y}, \bar{x})$$

$$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = ([R\Theta_\Phi \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](\mathbf{y}, \bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) =$$

$$(\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](\mathbf{y}, \bar{x}, z)) = (\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Theta_\Phi \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)) =$$

$$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)), ([R\Theta_\Phi \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)) =$$

$$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)).$$

$$\text{Итак, } \vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)).$$

Таким образом получим:

$$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \Lambda) = (\Theta_\Phi)^*(\mathbf{y}, \bar{x}),$$

$$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z, ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)), (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z)),$$

при $i \leq k$.

$$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = (\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(\mathbf{y}, \bar{x}, z), \text{ при } i > k.$$

Пусть $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - 2- местные функторы, α - некоторое p - алфавитное слово. Составим функтор $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$

Построим функтор $\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$.

$$\text{Пусть } \gamma \Leftarrow [J[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^2].$$

$$\text{Имеем } \vdash \gamma(x, z) = [J[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^2](x, z) = [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](x).$$

$$\text{Пусть } \tilde{\Psi}_i \Leftarrow [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2].$$

$$\text{Имеем: } \vdash \tilde{\Psi}_i(x, z) \Leftarrow [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2](x, z) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma](x, z), \mathbf{I}_2^2(x, z)) =$$

$$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x, \gamma(x, z)), z) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](x)), z).$$

$$\text{Итак, } \vdash \tilde{\Psi}_i(x, z) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](x)), z).$$

$$\text{Пусть } \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]} \Leftarrow [R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k], \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\Lambda) = [R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](\Lambda) = \Lambda,$$

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\mathbf{S}_i(x)) = [R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](\mathbf{S}_i(x)) = \tilde{\Psi}_i(x, [R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](x)) = \tilde{\Psi}_i(x, \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x)) =$$

$$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](x)), \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x)).$$

Итак, имеем следующие определяющие равенства для функтора $\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$:

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\Lambda) = \Lambda$$

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\mathbf{S}_i(x)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x, [R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k](x)), \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x)), \text{ где } i \leq k.$$

$$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\mathbf{S}_i(x)) = \Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(x), \text{ где } i > k.$$

Выпишем определяющие соотношения для функтора $(\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^* \Leftarrow ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^*$:

$$([R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^* = ([R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*],$$

$$\vdash ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k])^*(x, y) = [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](x, y),$$

$$\vdash R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*(x, \Lambda) = \mathbf{Const}_\Lambda^1(x) = \Lambda$$

$$\vdash [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*(x, \mathbf{S}_i(y)) = (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*(x, y)]), \text{ тогда}$$

$$\vdash [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*(x, \mathbf{S}_i(y)) = (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]^*(x, y)),$$

$$\vdash ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]^*(x, \mathbf{S}_i(y)) = (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]^*(x, y)),$$

$$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(x, \mathbf{S}_i(y)) = (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]}^*)^*(x, y)),$$

$$\text{Далее } (\gamma)^* \Leftarrow ([J[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^2])^*,$$

$$([J[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^2])^* = [J([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*\mathbf{I}_1^3(\mathbf{I}_1^2)^*)]$$

$$(\mathbf{I}_1^2)^* = [J\mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$$

$$\vdash (\mathbf{I}_1^2)^*(x, y, z) = [J\mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3](x, y, z) = \mathbf{I}_1^2(\mathbf{I}_2^3(x, y, z), \mathbf{I}_3^3(x, y, z)) = y$$

$$\vdash ([J[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^2])^*(x, y, z) = [J([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*\mathbf{I}_1^3(\mathbf{I}_1^2)^*)](x, y, z)$$

$$\vdash [J([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*\mathbf{I}_1^3(\mathbf{I}_1^2)^*)](x, y, z) = ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*(\mathbf{I}_1^3(x, y, z), (\mathbf{I}_1^2)^*(x, y, z)))$$

$$\vdash ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*(\mathbf{I}_1^3(x, y, z), (\mathbf{I}_1^2)^*(x, y, z))) = ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*(x, y))$$

$$\vdash (\gamma)^*(x, y, z) = ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*(x, y)).$$

$$(\tilde{\Psi}_i)^* \Leftarrow ([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2])^*,$$

$$([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2])^* = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^3([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(\mathbf{I}_2^2)^*],$$

$$(\mathbf{Concat})^* = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3],$$

$$([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^* = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}_1^3(\mathbf{I}_1^2)^*(\gamma)^*],$$

$$(\mathbf{I}_1^2)^* = [J\mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$$

$$(\mathbf{I}_2^2)^* = [J\mathbf{I}_2^2\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$$

Имеем:

$$\vdash (\mathbf{I}_1^2)^*(x, y, z) = [J\mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3](x, y, z) = y,$$

$$\vdash (\mathbf{I}_2^2)^*(x, y, z) = [J\mathbf{I}_2^2\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3](x, y, z) = z$$

$$\vdash (\mathbf{Concat})^*(x, y, z) = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3](x, y, z) = \mathbf{Concat}(y, z),$$

$$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, z) = ([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2])^*(x, y, z) = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^3([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(\mathbf{I}_2^2)^*](x, y, z) =,$$

$$\vdash ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(x, y, z) = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}_1^3(\mathbf{I}_1^2)^*(\gamma)^*](x, y, z) = (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{I}_1^3(x, y, z), (\mathbf{I}_1^2)^*(x, y, z), (\gamma)^*(x, y, z)),$$

$$\vdash (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{I}_1^3(x, y, z), (\mathbf{I}_1^2)^*(x, y, z), (\gamma)^*(x, y, z)) = (\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, (\gamma)^*(x, y, z))$$

$$\vdash [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^3([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(\mathbf{I}_2^2)^*](x, y, z) = (\mathbf{Concat})^*(\mathbf{I}_1^3(x, y, z), ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(x, y, z), (\mathbf{I}_2^2)^*(x, y, z))$$

$$\vdash (\mathbf{Concat})^*(\mathbf{I}_1^3(x, y, z), ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(x, y, z), (\mathbf{I}_2^2)^*(x, y, z)) = \mathbf{Concat}((([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(x, y, z), z)$$

$$\vdash \mathbf{Concat}((([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma])^*(x, y, z), z) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, (\gamma)^*(x, y, z)), z)$$

$$\vdash \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, (\gamma)^*(x, y, z)), z) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]^*(x, y))), z).$$

Таким образом получим

$$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, z) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(x, y)), z), \text{ тогда}$$

$$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(x, y, [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](x, y)) =$$

$$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(x, y)), [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](x, y)), \text{ тогда}$$

$$\vdash [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](x, \mathbf{S}_i(y)) =$$

$$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(x, y)), [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*, \dots, (\tilde{\Psi}_k)^*](x, y)).$$

Таким образом получим

$$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x, \Lambda) = \Lambda$$

$$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x, \mathbf{S}_i(y)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x, y, ([R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(x, y)), (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x, y)),$$

при $i \leq k$.

$$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x, \mathbf{S}_i(y)) = (\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]})^*(x, y), \text{ при } i > k.$$

Для любого функтора Φ для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$ докажем

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{\alpha} \Theta_\Phi(\bar{\alpha}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\bar{\alpha}).$$

Выпишем значение оператора Θ :

для исходных функторов:

$$\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \delta, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \mathbf{I}_k^n, \mathbf{U}:$$

$$\Theta_{\mathbf{S}_k} = \mathbf{Z}, \Theta_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}, \Theta_{\delta} = \mathbf{Z}, \Theta_{\mathbf{Length}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\dot{-}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\mathbf{Concat}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\mathbf{D}} = [J\mathbf{ZI}_2^2], \Theta_{\mathbf{I}_k^n} = [J\mathbf{ZI}_k^n],$$

$$\Theta_{\mathbf{U}} = [J\mathbf{cI}_1^1\mathbf{U}].$$

для функтора $[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$

$$\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]} \Rightarrow [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k], \Theta_{\Psi_1} \dots \Theta_{\Psi_k}].$$

для функтора $[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]$

$$\Theta_{[R\alpha\Psi_1, \dots, \Psi_k]} \Leftarrow [R\Lambda\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k],$$

для функтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}$

$$\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]} \Leftarrow [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k].$$

Для любого функтора Ψ алфавита $\mathcal{L}$ верно $\forall \bar{\alpha} \vdash \Theta_\Psi(\bar{\alpha}) = \Lambda$. При использовании правила Гудстейна

верно $\vdash \Theta_\Psi(\bar{x}) = \Lambda$.

Докажем $\vdash \Theta_{\mathbf{U}}(x) = \Theta_{\Theta_{\mathbf{U}}}(x)$:

$$\Theta_{\mathbf{U}} = [J\mathbf{cI}_1^1\mathbf{U}], \Theta_{\Theta_{\mathbf{U}}} = \Theta_{[J\mathbf{cI}_1^1\mathbf{U}]} = [J\mathbf{Concat}^3[J\Theta_{\mathbf{cI}_1^1}\mathbf{U}]\Theta_{\mathbf{I}_1^1}\Theta_{\mathbf{U}}], \text{ учитывая } [J\Theta_{\mathbf{cI}_1^1}\mathbf{U}] = [J\mathbf{ZI}_1^1], \Theta_{\mathbf{I}_1^1} = [J\mathbf{ZI}_1^1], \text{ получим } \Theta_{\Theta_{\mathbf{U}}} = \Theta_{\mathbf{U}}, \text{ тогда } \vdash \Theta_{\mathbf{U}}(x) = \Theta_{\Theta_{\mathbf{U}}}(x).$$

Индукционное предположение:

a. Пусть для функтора Φ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} [\Theta_\Phi(\bar{x}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\bar{x})]$.

b. Пусть для функторов $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ верно $\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall y_1, \dots, \forall y_n [\Theta_{\Psi_i}(y_1, \dots, y_n) \approx \Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(y_1, \dots, y_n)]$

Докажем $\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall y_1, \dots, \forall y_n \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(y_1, \dots, y_n) \approx \Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(y_1, \dots, y_n)$.

Имеем $\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]} = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}]$, тогда

$$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{y}) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}](\bar{y}) =$$

$$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\bar{y}), \dots, \Psi_k(\bar{y})), \Theta_{\Psi_1}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{y}))(\mathbf{A}).$$

Вычислим $\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}$:

$$\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]} = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Theta_\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1} \dots \Theta_{\Psi_k}], \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}(\bar{y}) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Theta_\Phi}\Psi_1 \dots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1} \dots \Theta_{\Psi_k}](\bar{y}) =$$

$$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{\Theta_\Phi}(\Psi_1(\bar{y}), \dots, \Psi_k(\bar{y})), \Theta_{\Psi_1}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{y})).$$

Учитывая индукционное предположение $\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{x} [\Theta_\Phi(\bar{x}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\bar{x})]$, получим

$$\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{y} [\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}(\bar{y}) \approx \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\bar{y}), \dots, \Psi_k(\bar{y})), \Theta_{\Psi_1}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{y}))].$$

Учитывая индукционное предположение $\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall y_1, \dots, \forall y_n [\Theta_{\Psi_i}(y_1, \dots, y_n) \approx \Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(y_1, \dots, y_n)]$,

$$\text{получим } \mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{y} [\mathbf{Concat}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\bar{y})) \approx \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\bar{y}), \dots, \Psi_k(\bar{y})), \Theta_{\Psi_1}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{y}))],$$

$$\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{y} [\mathbf{Concat}^3(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_2}}(\bar{y})) \approx \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\bar{y}), \dots, \Psi_k(\bar{y})), \Theta_{\Psi_1}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{y}))], \dots,$$

$$\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{y} [\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_2}}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}(\bar{y})) \approx$$

$$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\bar{y}), \dots, \Psi_k(\bar{y})), \Theta_{\Psi_1}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Psi_k}(\bar{y}))], \text{ учитывая } (\mathbf{A}), \text{ получим}$$

$$\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{y} [\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1 \dots \Psi_k]}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_2}}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}(\bar{y})) \approx \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{y})(\mathbf{B})]$$

Вычислим $\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}$:

$$\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}} = \Theta_{[J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}]}$$

$$\Theta_{[J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}]} =$$

$$[J\mathbf{Concat}^{k+2}[J\Theta_{\mathbf{Concat}^{k+1}}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}]\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}\Theta_{\Theta_{\Psi_1}} \dots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}], \text{ учитывая}$$

$$\Theta_{\mathbf{Concat}^{k+1}}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k} = [J\mathbf{ZI}_1^n], \text{ получим}$$

$$\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}} = [J\mathbf{Concat}^{k+1}\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}\Theta_{\Theta_{\Psi_1}} \dots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}], \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{y}) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}\Theta_{\Theta_{\Psi_1}} \dots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}](\bar{y}) =$$

$$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\bar{y}), \dots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}(\bar{y})), \text{ учитывая } (\mathbf{B}) \text{ получим}$$

$$\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall \bar{y} [\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{y}) \approx \Theta_{[J\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{y})]$$

$$\text{Вычислим } \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}} \stackrel{\Leftarrow}{=} \Theta_{[R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]}.$$

$$\text{Имеем } \tilde{\Psi}_i \stackrel{\Leftarrow}{=} [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}].$$

$$\text{Вычислим } \Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]}:$$

$$\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]} = [J\mathbf{Concat}^{n+3}[J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_{\mathbf{I}_1^{n+2}}, \dots, \Theta_{\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}}\Theta_\lambda], \text{ учитывая } \Theta_{\mathbf{I}_i^{n+2}} = [J\mathbf{ZI}_1^{n+1}]$$

получим $\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]} = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda]$.

Вычислим $\Theta_{\tilde{\Psi}_i}$.

$$\Theta_{\tilde{\Psi}_i} \Leftarrow \Theta_{[J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]} =$$

$[J\mathbf{Concat}^3[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_{\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}}]}$, учитывая

$$[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2} = [J\mathbf{ZI}_1^{n+2}] \text{ и } \Theta_{\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}} = [J\mathbf{ZI}_1^{n+2}] \text{ получим}$$

$$[J\mathbf{Concat}^3[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_{\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}}]} = \Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]}, \text{ тогда}$$

$$\Theta_{\tilde{\Psi}_i} = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda].$$

Имеем:

$$\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]} = [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1, \dots, \Psi_k]$$

$$\Theta_{[R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]} = [R\Theta_\Phi\tilde{\tilde{\Psi}}_1, \dots, \tilde{\tilde{\Psi}}_k].$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k](\bar{x}, \Lambda) = \Theta_\Phi(\bar{x})$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \tilde{\Psi}_1(\bar{x}, z, \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z))$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}](\bar{x}, \mathbf{S}_i(z))$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z))$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \Lambda) = [R\Theta_{\Theta_\Phi}\tilde{\tilde{\Psi}}_1, \dots, \tilde{\tilde{\Psi}}_k](\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Theta_\Phi}(\bar{x})$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \tilde{\tilde{\Psi}}_i(\bar{x}, z, \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z))$$

Имеем $\tilde{\tilde{\Psi}}_i \Leftarrow [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\tilde{\Psi}_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]$, тогда

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\tilde{\Psi}_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}](\bar{x}, z, \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)), \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\tilde{\Psi}_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda](\bar{x}, z, \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)), \mathbf{I}_{n+2}^{n+2}(\bar{x}, z, \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)))$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)).$$

Имеем $\Theta_{\tilde{\Psi}_i} = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda]$, тогда

$$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\bar{x}, z, u) = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda](\bar{x}, z, u)$$

$$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\bar{x}, z, u) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda](\bar{x}, z, u), \Theta_\lambda(\bar{x}, z, u))$$

$$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\bar{x}, z, u) = \mathbf{Concat}(J\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_\lambda(\bar{x}, z, u))$$

Имеем $\Theta_\lambda = \Theta_{[J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}} = [J\mathbf{Concat}^{n+2}[J\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]\Theta_{\mathbf{I}_1^{n+2}}, \dots, \Theta_{\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}}]$,

тогда $\Theta_\lambda = [J\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]$, тогда

$$\vdash \Theta_\lambda(\bar{x}, z, u) = [J\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}](\bar{x}, z, u), \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_\lambda(\bar{x}, z, u) = \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z), \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\bar{x}, z, u) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)), \text{ тогда}$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)).$$

Подведём итоги:

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Phi}(\bar{x})$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \Lambda) = \Theta_{\Theta_{\Phi}}(\bar{x})$$

$$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z))$$

$$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, \mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{x}, z, \lambda(\bar{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z)), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)).$$

Предположим, что верно:

$$\forall \bar{\alpha} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Phi}(\bar{\alpha}) \approx \Theta_{\Theta_{\Phi}}(\bar{\alpha})$$

$$\forall \bar{\alpha} \forall \beta \forall \gamma \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \beta, \gamma) \approx \Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{\alpha}, \beta, \gamma)$$

$$\forall \bar{\alpha} \forall \beta \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta) \approx \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \beta), \text{ тогда получим}$$

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \mathbf{S}_i(\beta)) =$$

$$\mathbf{Concat}(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{\alpha}, \beta, \lambda(\bar{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_i, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta)), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \beta)) =$$

$$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{\alpha}, \beta, \lambda(\bar{\alpha}, \beta)), \mathbf{Concat}(\Theta_{[R\Phi\Psi_i, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \beta))), \text{ используя индукционное пред-}$$

$$\text{положение } \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{[R\Phi\Psi_i, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta) \approx \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \beta), \text{ получим}$$

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathbf{Concat}(\Theta_{[R\Phi\Psi_i, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \beta)) \approx \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta), \text{ тогда}$$

$$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\bar{\alpha}, \beta, \lambda(\bar{\alpha}, \beta)), \mathbf{Concat}(\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta), \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \beta))) \approx$$

$$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\bar{\alpha}, \beta, \lambda(\bar{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \beta)), \text{ тогда } \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{\alpha}, \mathbf{S}_i(\beta)) \approx \Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{\alpha}, \mathbf{S}_i(\beta)),$$

$$\text{тогда } \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} \forall z [\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}(\bar{x}, z) \approx \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]}}(\bar{x}, z)].$$

Используя индукцию по построению функторов и индукцию по построению аргументного слова, получим: для любого функтора Φ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \bar{x} [\Theta_{\Phi}(\bar{x}) \approx \Theta_{\Theta_{\Phi}}(\bar{x})]$.