

Об обосновании метода разделения переменных

В.А. Юрко

Аннотация. Дается сравнение недавно полученных результатов, посвященных обоснованию метода разделения переменных, с известными классическими результатами.

Ключевые слова. метод разделения переменных, операторы Штурма-Лиувилля.

В последнее время появилась серия статей А.П. Хромова (см. в п.2 (01)-(11) и другие), посвященных обоснованию метода разделения переменных для уравнения колебаний струны. Цель этой краткой заметки - сравнить результаты из (01)-(11) с общеизвестными фактами из университетского курса "Уравнения математической физики" (УМФ). Заметка состоит из двух частей. В первой части приводятся сведения из курса УМФ (теоремы 1 и 2). Во второй части проводятся сравнение теорем 1 и 2 с результатами статей (01)-(11) и показано, что эти результаты слабее теорем 1 и 2, причем доказательства в (01)-(11) искусственно сложные и громоздкие, а доказательства теорем 1 и 2 тривиальны. Для определенности ограничимся случаем краевых условий Дирихле.

1. Сведения из курса УМФ. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (3)$$

где $Q := \{(x, t) : x \in [0, \pi], t \geq 0\}$, q, φ, ψ, f - комплекснозначные функции. Обозначим $Q_T := \{(x, t) : x \in [0, \pi], t \in [0, T]\}$.

Определение 1. Функция $u(x, t)$ называется *классическим решением* (КР) задачи (1)-(3), если $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в Q и удовлетворяет (1)-(3).

Функция $u(x, t)$ называется *почти классическим решением* (ПКР) задачи (1)-(3), если $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема в Q , функции $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по $x \in [0, \pi]$ и по $t \in [0, T]$ при любом $T > 0$, функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду и удовлетворяет условиям (2)-(3).

При изучении КР будем требовать выполнения следующего условия А1.

Условие А1. $q(x) \in C[0, \pi]$, $\psi(x) \in C^1[0, \pi]$, $\varphi(x) \in C^2[0, \pi]$, $f(x, t)$ непрерывна в Q и непрерывно дифференцируема по t , $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0$, $\varphi''(0) + f(0, 0) = \varphi''(\pi) + f(\pi, 0) = 0$.

При изучении ПКР будем требовать выполнения следующего условия А2.

Условие А2. $q(x) \in L(0, \pi)$, функции $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$ абсолютно непрерывны на $[0, \pi]$, $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любом $T > 0$, $f(x, t)$ абсолютно непрерывна по t для почти всех x , и $f_t(x, t) \in L(Q_T)$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0$.

Пусть выполнено условие А1 (А2). Продолжим функции $q(x), \varphi(x), \psi(x), f(x, t)$ при $x \in \mathbf{R}$ так, чтобы выполнялось следующее условие А3.

Условие А3. Функция $q(x)$ - четная, функции $\varphi(x), \psi(x), f(x, t)$ - нечетные и функции $q(x), \varphi(x), \psi(x), f(x, t)$ - 2π -периодические при $x \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

и соответствующее интегральное уравнение Вольтерра

$$u(x, t) = h(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(s) u(s, \tau) ds, \quad (4)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(s, \tau) ds.$$

Решение уравнения (4) существует, единственно и может быть построено методом последовательных приближений. Пусть $u(x, t)$ - решение уравнения (4). Тривиально проверяется, что $u(-x, t) = -u(x, t)$, $u(x+2\pi, t) = u(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, и $u(x, t)$ является КР (ПКР) задачи (1)-(3). Обратно, если $u(x, t)$ - КР (ПКР) задачи (1)-(3), то $u(x, t)$ - решение уравнения (4) (после соответствующего продолжения). Таким образом, справедлива следующая очевидная теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие A1 (A2). Тогда существует единственное КР (ПКР) $u(x, t)$ задачи (1)-(3), причем $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения (4) (после продолжения по условию A3).

Замечание 1. Пусть $q(x), \varphi(x), \psi(x) \in L(0, \pi)$, $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любом $T > 0$. Решение $u(x, t)$ уравнения (4) (после продолжения по условию A3) называется обобщенным решением (ОР) задачи (1)-(3). Очевидно, что ОР существует единственно и может быть получено как предел КР (ПКР). В самом деле, выберем функции φ_k, ψ_k, f_k ($k \geq 1$) так, чтобы для них выполнялось условие A2 и $\|\varphi_k - \varphi\|_{L(0, \pi)} \rightarrow 0$, $\|\psi_k - \psi\|_{L(0, \pi)} \rightarrow 0$, $\|f_k - f\|_{L(Q_T)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть $u_k(x, t)$ - решение уравнения (4) с φ_k, ψ_k, f_k вместо φ, ψ, f . Тогда $\|u_k - u\|_{L(Q_T)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Будем теперь искать решение задачи (1)-(3) методом разделения переменных. Рассмотрим сначала спектральную задачу L :

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

где $q(x) \in L(0, \pi)$ - комплекснозначная функция. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ задачи L имеют вид $\lambda_n = \rho_n^2$, $\rho_n = n + O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$. Собственные и присоединенные функции $\{Y_n(x)\}_{n \geq 1}$ нормируем так, чтобы $Y_n(x) = \sin nx + \delta_n^{(\nu)}(x)$, $|\delta_n^{(\nu)}(x)| \leq Cn^{\nu-1}$. Функции $\{Y_n(x)\}_{n \geq 1}$ образуют базис Рисса в $L_2(0, \pi)$. Обозначим $\{Z_n(x)\}_{n \geq 1}$ - биортogonalный базис Рисса. Отметим, что все собственные значения, начиная с некоторого ($n > n_0$), являются простыми, причем $\overline{Z_n(x)} = Y_n(x)/\alpha_n$, $n > n_0$, где $\alpha_n = \int_0^\pi Y_n^2(x) dx = \pi/2 + O(n^{-1})$. Так как конечное число членов ряда не влияет на его сходимость, то не нарушая общности, ограничимся случаем, когда все собственные значения являются простыми (общий случай требует незначительных изменений).

Решая задачу (1)-(3) методом разделения переменных, получим решение в виде формального ряда:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \rho_n t + B_n \frac{\sin \rho_n t}{\rho_n} + v_n(t) \right) Y_n(x), \\ A_n &= \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi \varphi(x) Y_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi \psi(x) Y_n(x) dx, \\ v_n(t) &= \int_0^t F_n(\tau) \frac{\sin \rho_n(t-\tau)}{\rho_n} d\tau, \quad F_n(t) = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi f(x, t) Y_n(x) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$A_n = \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \int_0^\pi (-\varphi''(x) + q(x)\varphi(x)) Y_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \int_0^\pi (\psi'(x) Y_n'(x) + q(x)\psi(x) Y_n(x)) dx,$$

$$v_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \left(F_n(t) - F_n(0) \cos \rho_n t - \int_0^t F'_n(\tau) \cos \rho_n(t - \tau) d\tau \right).$$

Из курса УМФ известна следующая очевидная теорема

Теорема 2. Пусть выполнено условие A1 (A2). Тогда формальный ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$, а его сумма $\tilde{u}(x, t)$ является единственным КР (ПКР) задачи (1)-(3).

Доказательство. По теореме 1 существует КР (ПКР) $u(x, t)$ задачи (1)-(3). По теореме о разложении (см, например, [1, с.19]) имеем

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \quad u_n(t) = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} u(x, t) Y_n(x) dx, \quad (5)$$

причем ряд (5) сходится равномерно по $x \in [0, \pi]$ при каждом t . Вычисляем

$$\begin{aligned} u_n''(t) &= \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} u_{tt}(x, t) Y_n(x) dx = -\frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} (-u_{xx}(x, t) + q(x)u(x, t) - f(x, t)) Y_n(x) dx \\ &= -\frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} u(x, t) (-Y_n''(x) + q(x)Y_n(x)) dx + F_n(t) = -\lambda_n u_n(t) + F_n(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u_n(t)$ является решением следующей задачи Коши

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = F_n(t), \quad u_n(0) = A_n, \quad u_n'(0) = B_n, \quad (6)$$

следовательно, $u_n(t) = A_n \cos \rho_n t + B_n \frac{\sin \rho_n t}{\rho_n} + v_n(t)$, т.е. $u(x, t) \equiv \tilde{u}(x, t)$.

Замечание 2. Теорема 2 остается верной и при произвольном поведении спектра, причем ее доказательство остается тем же с небольшим изменением в (6) и в формальном ряде Фурье, т.е. случай произвольного спектра не вносит новых трудностей в исследование. В самом деле, пусть m_n - кратность собственного значения λ_n ($\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m_n-1}$). Обозначим $S := \{n \geq 2 : \lambda_{n-1} \neq \lambda_n\} \cup \{1\}$, $e_n = 0$ при $n \in S$ и $e_n = 1$ при $n \notin S$. Отметим, что $m_n = 1$ при $n > n_0$. Формальный ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \\ u_n(t) &= A_n \cos \rho_n t + B_n \frac{\sin \rho_n t}{\rho_n} + v_n(t) + \int_0^t e_n u_{n-1}(\tau) \frac{\sin \rho_n(t - \tau)}{\rho_n} d\tau, \\ A_n &= \int_0^{\pi} \varphi(x) \overline{Z_n(x)} dx, \quad B_n = \int_0^{\pi} \psi(x) \overline{Z_n(x)} dx, \\ v_n(t) &= \int_0^t F_n(\tau) \frac{\sin \rho_n(t - \tau)}{\rho_n} d\tau, \quad F_n(t) = \int_0^{\pi} f(x, t) \overline{Z_n(x)} dx. \end{aligned}$$

При этом

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = F_n(t) + e_n u_{n-1}(t), \quad u_n(0) = A_n, \quad u_n'(0) = B_n.$$

Замечание 3. Пусть $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$, $\psi(x) \in L(0, \pi)$, $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любых $T > 0$. Тогда формальный ряд Фурье сходится в $L_2(0, \pi)$ при любых t , причем $\tilde{u}(x, t) \equiv u(x, t)$, где $u(x, t)$ - решение уравнения (4) (после продолжения по условию A3), т.е. $\tilde{u}(x, t)$ - ОР задачи (1)-(3). ОР можно получить как предел КР (ПКР) (см. замечание 1).

Замечание 4. Известно, что для КР теорему 2 можно доказать и без использования интегрального уравнения (4). Проиллюстрируем это для частного случая, когда $\psi = f = 0$ (общий случай рассматривается аналогично). Имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} A_n Y_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x), \quad \varphi_0(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin nx, \quad \varphi_1(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \delta_n(x).$$

Очевидно, что $\varphi_1(x) \in C^2[0, \pi]$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = \varphi_1''(0) = \varphi_1''(\pi) = 0$, следовательно, $\varphi_0(x) \in C^2[0, \pi]$, $\varphi_0(0) = \varphi_0(\pi) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(\pi) = 0$. В нашем случае $\tilde{u}(x, t) = \sum_{n \geq 1} A_n \cos \rho_n t Y_n(x)$. Очевидно, что $\tilde{u}(x, t)$ - ПКР задачи (1)-(3). Имеем

$$\tilde{u}(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) = \sum_{n \geq 1} A_n \cos nt \sin nx = (\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t))/2,$$

$$u_1(x, t) = \sum_{n \geq 1} A_n (\delta_n(x) \cos \rho_n t + (\cos \rho_n - \cos nt) \sin nx).$$

Функции $u_0(x, t), u_1(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в Q , следовательно, $\tilde{u}(x, t)$ - дважды непрерывно дифференцируемы в Q и является КР задачи (1)-(3).

Замечание 5. Отметим, что все приведенные результаты из курса УМФ обычно излагаются для вещественных q, φ, ψ, f . Однако, как видно из вышеизложенного, результаты и рассуждения остаются верными и для комплекснозначных q, φ, ψ, f , т.е. комплексный случай не вносит новых трудностей в исследование.

2. Сравнение с работами (01)-(11). Для определенности ограничимся случаем краевых условий Дирихле, т.е. рассмотрением задачи (1)-(3). Проведем сравнение результатов работ (01)-(11) с теоремами 1 и 2. Отметим, что в отличие от теорем 1 и 2, доказательства теорем в (01)-(11) весьма сложные и громоздкие.

(01) Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.55, вып.2 (2015), 229-241.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\psi = f = 0$, $q(x) \in C[0, \pi]$, $\varphi(x) \in C^2[0, \pi]$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является КР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(02) Корнев В.В., Хромов А.П. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика, т.16, вып.4 (2016), 403-413.

Рассматривается задача (1)-(3) при условии A1. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является КР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(03) Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.56, вып.2 (2016), 239-251.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\psi = f = 0$, $q(x) \in C[0, \pi]$, $\varphi(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является ПКР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(04) Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.56, вып.10 (2016), 1795-1809.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\psi = f = 0$, $q(x) \in L(0, \pi)$, функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ являются абсолютно непрерывными на $[0, \pi]$ и $\varphi''(x) - q(x)\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является ПКР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(05) Корнев В.В., Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.57, вып.10 (2017), 1692-1707.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\psi = 0$, $q(x) \in L(0, \pi)$, функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ являются абсолютно непрерывными на $[0, \pi]$ и $\varphi''(x) - q(x)\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, функции f, f_t непрерывны и $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является ПКР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(06) Корнев В.В., Хромов А.П. Математика. Механика, вып.20, Саратов, изд-во Саратовского ун-та, 2018, 36-39.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $q = \varphi = \psi = 0$, $f, f_t \in L(Q_T)$.

Доказано, что существует ПКР, которое дается формулой Даламбера. Это результат слабее, чем теорема 2.

(07) Курдюмов В.П., Хромов А.П., Халова В.А. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика, т.18, вып.2 (2018), 157-171.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\varphi = f = 0$, $q(x) \in C[0, \pi]$, функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, \pi]$ и $\psi'(x) \in L_2(0, \pi)$, $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является ПКР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(08) Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.58, вып.9 (2018), 1583-1595.

Рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\varphi = f = 0$, $q(x) \in L(0, \pi)$, функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, \pi]$ и $\psi'(x) \in L_2(0, \pi)$, $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Доказано, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма является ПКР. Это результат слабее, чем теорема 2.

(09) Хромов А.П. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика, т.19, вып.3 (2019), 280-288.

(10) Хромов А.П. Дифференциальные уравнения, т.55, вып.5 (2019), 717-731.

(11) Корнев В.В., Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.59, вып.2 (2019), 275-289.

В (09)-(10) рассматривается задача (1)-(3) в частном случае, когда $\psi = f = 0$, $q(x) \in L(0, \pi)$, функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ являются абсолютно непрерывными на $[0, \pi]$ и $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Доказано, что существует ПКР задачи (1)-(3). Это результат слабее, чем теорема 2. В (11) получены результаты аналогичные результатам из (09)-(10).

Есть также аналогичные работы такого же качества, в которых рассматриваются другие краевые условия, например,

1) Корнев В.В., Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.55, вып.4 (2015), 621-630.

2) Корнев В.В., Хромов А.П. Журнал вычисл. математики и математической физики, т.55, вып.7 (2015), 1156-1167.

3) Хромов А.П. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика, т.15, вып.1 (2015), 56-66.

4) Курдюмов В.П., Хромов А.П., Гуревич А.П. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика, т.16, вып.1 (2016), 13-29.

5) Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Дифференциальные уравнения, т.53, вып.4 (2017), 505-515.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

Юрко Вячеслав Анатольевич

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

им. Н.Г. Чернышевского

410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: yurkova@info.sgu.ru

On justification of the method of separation of variables

V.A. Yurko

Abstract. We give a comparison of recent results, devoted to justification of the method of separation of variables, with well-known classical results.

Keywords. method of separation of variables, Sturm-Liouville operators.

REFERENCES

- 1 Yurko V.A., Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems. Moscow, Fizmatlit, 2007. (Russian).

V.A. Yurko

Chernyshevskii Saratov National Research State University

83 Astrahanskaya st., 410012 Saratov, Russia

E-mail: yurkova@info.sgu.ru