

# УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ 1-ГО И 2-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН СЛОЁВ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ФОН КАРМАНА

Селюгин С.В.

e-mail: *selyugin@rambler.ru*

Рассмотрена задача максимизации жесткости (минимизации податливости) тонких композитных пластин за счёт выбора наилучшей локальной ориентации волокон слоёв. Пластины – линейно-упруги, находятся в условиях изгиба и растяжения-сдвига (при положительных главных мембранных усилиях), подчиняются гипотезе Кирхгоффа и описываются приближением фон Кармана. На основе использования ранее рассмотренных автором вариационных принципов получены необходимые условия локальной оптимальности 1-го и 2-го порядка углов укладки волокон слоёв композитных пластин, подвергающихся растяжению-сдвигу и значительному изгибу. Указаны возможные частные решения этих условий оптимальности.

**Ключевые слова:** композитная пластина, геометрическая нелинейность, приближение фон Кармана, растяжение и изгиб, углы укладки волокон слоёв, максимизация жесткости, условия оптимальности первого и второго порядка.

## 1. Введение

Как известно, конструкции из композиционных материалов широко используются в различных областях техники (авиация, судостроение, строительные конструкции, морские конструкции и т.д.). В таких новейших самолетах, как B787 и A350, из композиционных материалов изготавливается около 50% силовых конструкций. При этом следует отметить, что конструкции, например, композитных крыльев являются значительно более гибкими, чем конструкции алюминиевых крыльев. Это означает, что в процессе проектирования необходимо учитывать так называемую геометрическую нелинейность, то есть, использовать, в качестве первого приближения, модель деформирования фон Кармана.

Нижние панели композитных крыльев находятся в условиях растяжения-сдвига и изгиба. Настоящая работа посвящена необходимым условиям локальной оптимальности углов ориентации волокон слоёв пластин и панелей, находящихся в таких условиях и деформируемых в приближении фон Кармана.

Работа состоит из Введения и пяти Разделов.

В Разделе 2 приведены основные предположения.

В Разделе 3 обсуждается механика деформирования композитных пластин фон Кармана.

В Разделе 4 рассматриваются условия оптимальности 1-го порядка.

Раздел 5 посвящен выводу условий оптимальности 2-го порядка.

В Разделе 6 представлено заключение работы.

## 2. Предположения

В работе приняты следующие предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной  $h$ , составленная из  $2K$  симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечетное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала, толщина которого достаточна для восприятия перерезывающей силы.

Пластина нагружена изгибом распределенной нагрузкой  $q(x,y)$ , растяжением и сдвигом (главные значения мембранных усилий при этом предполагаются положительными), и деформируется в соответствии с приближением фон Кармана.

Толщина всей пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат  $XYZ$ , срединную плоскость  $\Gamma$  пластины, ограниченную гладким контуром  $C$  (состоящим из частей  $C_1$  и  $C_2$ ), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На  $C_1$  заданы силы, действующие в плоскости, а на  $C_2$  – перемещения по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Волокна слоев композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Приняты гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали к поверхности  $\Gamma$ , означающие равенство нулю  $xz$ ,  $yz$ ,  $zz$  компонент тензора деформаций Грина.

Приняты краевые условия защемления по контуру  $C_2$ .

Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

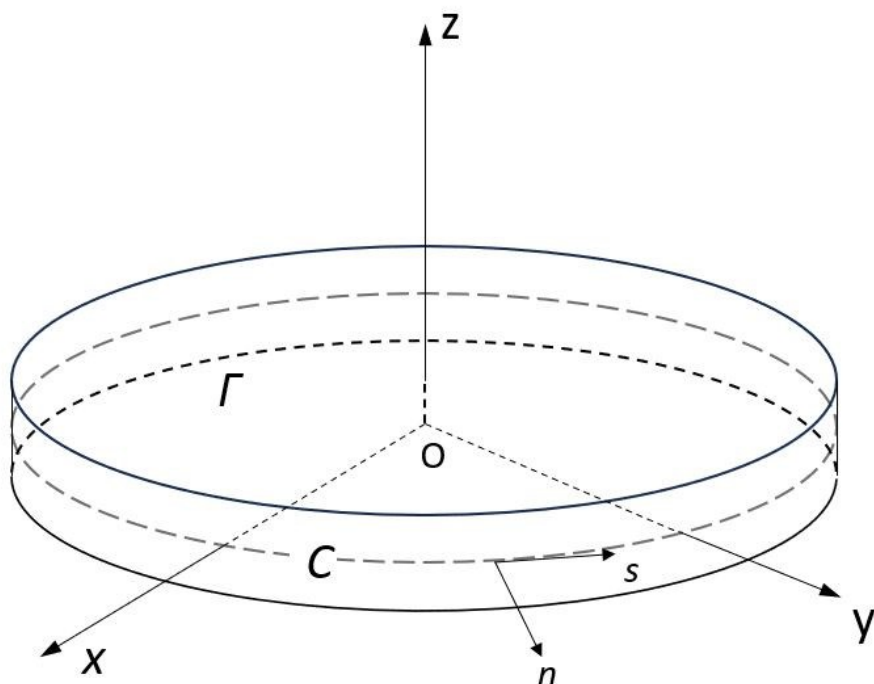


Рис. 1. Тонкая пластина.

### 3. Механика деформирования пластины

Компоненты тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{ij}$  точек внутри пластины как функции  $x$ - $y$ - $z$  перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в срединной плоскости записываются в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - zw_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - zw_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy} \end{cases} \quad (1)$$

Вводятся векторы-столбцы

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Также нам потребуются векторы-столбцы погонных сил  $\vec{N}$  и погонных моментов  $\vec{M}$ :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{pmatrix} \quad (3)$$

которые выражаются через деформации, кривизны и матрицы жесткости композитной пластины  $A$  и  $D$  (см. Gibson 1994):

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon}_0, \quad \vec{M} = D\vec{k} \quad (4)$$

Как известно (Васильев 1988, Reddy 2004), кинематика деформирования рассматриваемой консервативно нагруженной пластины описывается кинематическим вариационным принципом. В соответствии с этим принципом разность  $U$  функционалов общей потенциальной энергии деформации пластины  $\Pi$  и потенциала внешних сил  $W$  стационарна по  $x, y, z$  перемещениям  $u, v, w$  точек пластины. Имеем

$$\delta U = \delta \Pi - \delta W = 0$$

( $\delta$  – символ вариации), где общая потенциальная энергия деформации пластины

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] \quad (5)$$

а потенциал внешних сил

$$W = \iint qwd\Gamma + \int dC_1 [N_{xv}u + N_{yv}v] \quad (6)$$

где интегрирование ведется по всей недеформированной срединной поверхности  $\Gamma$  пластины,  $A$  и  $D$  – соответственно матрицы мембранной и изгибной жесткости пластины, а  $N_{xv}, N_{yv}$  – заданные нагрузки - потоки сил в плоскости пластины, действующие соответственно в направлении  $x, y$  на части  $C_1$  внешнего контура  $C$ .

Функционал общей потенциальной энергии  $U$  пластины запишется в виде:

$$U = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] - \iint q w d\Gamma - \int dC_1 [N_{xv} u + N_{yv} v] \quad (7)$$

Как известно, первая вариация функционала (7) по переменным  $u$ ,  $v$ ,  $w$  приводит к уравнениям равновесия по соответствующим степеням свободы.

Соответствующие кинематический и дополнительный вариационные принципы описаны в (Селюгин 2024а, b, 2025).

#### 4. Условия оптимальности 1-го порядка

Условия оптимальности 1-го порядка углов укладки волокон слоёв для композитной пластины фон Кармана при закритическом деформировании приведены в (Селюгин 2024а). Анализ их вывода (базирующегося на кинематическом вариационном принципе для общей потенциальной энергии пластины) приводит к заключению, что эти условия справедливы и для рассматриваемой задачи оптимизации укладки растянуто-изогнутой композитной пластины фон Кармана при умеренных, но не малых прогибах.

Общая потенциальная энергия пластины  $U$  (7) рассматривается как мера её жёсткости. Эта жёсткость и является величиной, которая должна быть максимизирована за счёт выбора наилучшей укладки. Угол ориентации волокон слоёв может при этом меняться как от точки к точке (такие укладки называются в англоязычной литературе Variable Angle Tow/VAT/Steered Fibre lay-up), так и оставаться постоянным для слоя по всей пластине (в последнем случае мы говорим о прямолинейной укладке слоёв).

Необходимые условия локальной оптимальности первого порядка для максимизации жёсткости пластины при умеренных прогибах записываются в общем виде как:

$$\frac{1}{2} \vec{\varepsilon}_0^T \frac{dA}{d\theta_i} \vec{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \vec{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \vec{k} = 0, i=1, \dots, K \quad (8)$$

Далее, вычислим первый член в (8), соответствующий 2D-деформациям в срединной плоскости, в осях главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . Второй член в (8), соответствующий изгибу и кручению пластины, вычислим в осях главных кривизн  $k_1, k_2$ , где  $k_1 \geq k_2$ . Делая необходимые преобразования (8) и помня, что абсолютная величина якобиана перехода от осей главных мембранных деформаций к осям главных кривизн равна 1.0 (этот переход является поворотом), получаем для  $i=1, \dots, K$ :

$$\frac{1}{2} \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} \frac{dA_{11}^{pr.str.}}{d\theta_i} & \frac{dA_{12}^{pr.str.}}{d\theta_i} \\ \frac{dA_{12}^{pr.str.}}{d\theta_i} & \frac{dA_{22}^{pr.str.}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (k_1, k_2) \begin{bmatrix} \frac{dD_{11}^{pr.cur.}}{d\theta_i} & \frac{dD_{12}^{pr.cur.}}{d\theta_i} \\ \frac{dD_{12}^{pr.cur.}}{d\theta_i} & \frac{dD_{22}^{pr.cur.}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (9)$$

где *pr.str.*, *pr.cur.* означают величины в осях главных деформаций в срединной плоскости и в осях главных кривизн пластины.

Анализируя (9), учтём, что  $\varphi$  - это угол между глобальной осью  $x$  и осью  $\varepsilon_1$ , а  $\psi$  - это угол между глобальной осью  $x$  и осью  $k_1$ . После ряда преобразований, окончательно, деля на  $-(z_i - z_{i-1})4U_3$ , получаем:

$$\sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] + \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^2 + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) = 0 \quad (10)$$

Как мы видим, зависимость от материала входит через параметр  $\frac{U_2}{4U_3}$ . Точная зависимость от положения слоя по  $z$  входит через последний множитель второго члена. Связь между слоями осуществляется через линии главных мембранных деформаций, линии главных кривизн, значения главных мембранных деформаций и главных кривизн.

Анализируя (10), можно сказать, что внешние и внутренние слои играют разные роли в этих соотношениях. В частности, из первого члена в (10) следует, что внутренние слои наиболее чувствительны к главным мембранным деформациям и их главным направлениям. А внешние слои, вследствие

второго члена с множителем порядка  $z^2$ , наиболее чувствительны к главным кривизнам пластины и их направлениям.

Примером решений соотношений (10) являются  $\theta_i - \varphi$  и  $\theta_i - \psi$  равные либо  $0^\circ$ , либо  $90^\circ$ . Еще одним примером являются углы ориентации волокон слоя  $\theta_i$  между ориентациями наибольшей главной мембранной деформации  $\varphi$  и наибольшей кривизны  $\psi$ .

Суммируя условия оптимальности для всех  $i$ , получаем следующее объединённое условие оптимальности:

$$-N_{xy}^{pr.str.}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - M_{xy}^{pr.cur.}(k_1 - k_2) = 0 \quad (11)$$

Первый член в (11), если его рассмотреть отдельно как равный нулю, означает, что тензор мембранных деформаций соосен с тензором потоков напряжений (или, для  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , поток сдвиговых напряжений в осях главных деформаций равен нулю). Второй член в (6.74), если его рассмотреть отдельно как равный нулю, означает, что тензор кривизн соосен с тензором моментов (или, для  $k_1 \neq k_2$ , крутящий момент в главных осях кривизны равен нулю).

Очевидно, что в случае слоёв с прямолинейными волокнами условиями оптимальности для ориентации слоёв будут интегралы по всей площади пластины,  $i=1, \dots, K$ :

$$\begin{aligned} \iint d\Gamma \left\{ \sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] \right. \\ \left. + \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3}(k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3}(z_i^2 \right. \\ \left. + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогом объединяющего условия (11) будет

$$-\int_{\Gamma} d\Gamma [N_{xy}^{pr.str.}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + M_{xy}^{pr.cur.}(k_1 - k_2)] = 0 \quad (13)$$

Условия оптимальности (10) укладки слоёв переменного по пластине угла ориентации волокон слоёв могут быть получены (см. Селюгин 2024а) и на

основе статического вариационного принципа для дополнительной энергии (рассматривая общую дополнительную энергию пластины как меру её минимизируемой податливости). При этом используется известное равенство для дифференцирования обращённой квадратной симметричной матрицы (скажем,  $G$ ) как функции аргумента  $g$  (Корн и Корн, 2003):

$$\frac{d}{dg} G^{-1} = -G^{-1} \frac{dG}{dg} G^{-1} \quad (14)$$

## 5. Условия оптимальности 2-го порядка

Получим условия оптимальности 2-го порядка в рассматриваемой задаче оптимизации жёсткости (податливости) пластины за счёт выбора углов ориентации волокон слоёв.

Вариационный функционал для общей дополнительной энергии пластины  $U_c$  запишется в виде (Селюгин 2024а):

$$U_c = - \int_{\Gamma} \left[ \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} + \frac{1}{2} N_{xz}^2 \frac{N_{yy}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} + \frac{1}{2} N_{yz}^2 \frac{N_{xx}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} - \frac{N_{xz}N_{yz}N_{xy}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} \right] d\Gamma \quad (15)$$

где  $N_{xz}, N_{yz}$  – проинтегрированные по толщине пластины компоненты  $xz$  и  $yz$  1-го тензора напряжений Пиола. Функционал  $U_c$  должен быть дополнен уравнениями равновесия по  $x, y, z$  с соответствующими множителями Лагранжа  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ . Указанные уравнения запишутся в виде (см. Селюгин 2024b):

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\ M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда функционал  $U_c$  запишется:

$$U_c = - \int_{\Gamma} \left[ \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} + \frac{1}{2} N_{xz}^2 \frac{N_{yy}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} + \frac{1}{2} N_{yz}^2 \frac{N_{xx}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} - \frac{N_{xz}N_{yz}N_{xy}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\alpha_x (N_{xx,x} + N_{xy,y}) + \alpha_y (N_{xy,x} + N_{yy,y}) + \alpha_z (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} + q)] d\Gamma \quad (17)$$

Первая вариация этого дополненного функционала по углам укладки волокон слоёв  $\theta_i, i = 1, \dots, K$  даётся (с добавлением общего знака минус) соотношениями (8) и может быть записана в виде:

$$\delta_{\theta} U_c = \delta_{N-varied, \theta-fix} U_c + \delta_{\theta-varied, N-fix} U_c \quad (18)$$

где в первом слагаемом варьируются погонные силы и моменты в пластине, а углы укладки волокон – неизменны. Во втором слагаемом в (18) – наоборот, то есть варьируются углы укладки волокон, а погонные силы и моменты в пластине – неизменны. Фактически в (18) записана слева полная вариация по углам укладки.

Как указано в работе (Селюгин 2025), функционал (17) в состоянии равновесия достигает максимума по силам и моментам (при положительных главных значениях мембранных усилий).

Первое слагаемое справа в (18) равно нулю вследствие дополнительного статического вариационного принципа (Селюгин 2024b). Второе слагаемое приводит, как отмечено в конце предыдущего раздела, к тем же условиям 1-го порядка (10) для локальной оптимальности.

Для минимизации податливости пластины (обозначим ее  $\Phi$  и приравняем  $-U_c$  из (15)) по углам укладки волокон слоёв нужно максимизировать функционал (15) по этим углам. При этом учтём, что, вследствие статического вариационного принципа, справедливы соотношения

$$A^{-1} \vec{N} = \vec{\varepsilon}_0, \quad D^{-1} \vec{M} = \vec{k} \quad (19)$$

где в правых частях стоят не зависящие от погонных сил и моментов (а также от углов укладки волокон слоёв при их варьировании) величины. Поэтому

условия оптимальности (для минимизации общей податливости) углов укладки волокон слоёв 1-го порядка записываются в виде

$$\frac{1}{2} \vec{N}^T \frac{dA^{-1}}{d\theta_i} \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{M}^T \frac{dA^{-1}}{d\theta_i} \vec{M} = -\frac{1}{2} \vec{\varepsilon}_0^T \frac{dA^{-1}}{d\theta_i} \vec{\varepsilon}_0 - \frac{1}{2} \vec{k}^T \frac{dD^{-1}}{d\theta_i} \vec{k}, i=1, \dots, K \quad (20)$$

Запишем вторую полную вариацию  $\Phi$  по углам укладки волокон слоёв, с учётом сделанного выше замечания к соотношению (19):

$$\begin{aligned} \delta_{\theta}^2 \Phi &= \delta_{\theta} \left( \delta_{N-\text{varied}} U_c + \delta_{\theta-\text{varied}} U_c \right) = \delta \left( \delta_{N-\text{varied}} U_c + \delta_{\theta-\text{varied}} U_c \right) = \\ &= \delta_{N-\text{varied}}^2 \Phi + \delta_{N-\text{varied}} \left( \delta_{\theta-\text{varied}} \Phi \right) + \delta_{\theta-\text{varied}}^2 \Phi \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии со статическим вариационным принципом (Селюгин 2024b, 2025) при положительных главных мембранных усилиях

$$\delta_{N-\text{varied}}^2 \Phi = \int_{\Gamma} [\delta \vec{N}^T A^{-1} \delta \vec{N}] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\delta \vec{M}^T D^{-1} \delta \vec{M}] d\Gamma \geq 0 \quad (22)$$

Рассмотрим далее второй член в (21). Имеем:

$$\begin{aligned} \delta_{N-\text{varied}} \left( \delta_{\theta-\text{varied}} \Phi \right) &= \delta_{N-\text{varied}} \left( \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K \left[ \frac{1}{2} \vec{N}^T \frac{dA^{-1}}{d\theta_i} \vec{N} d\theta_i + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{2} \vec{M}^T \frac{dD^{-1}}{d\theta_i} \vec{M} d\theta_i \right] d\Gamma \right) = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K \left[ \vec{N}^T \frac{dA^{-1}}{d\theta_i} \delta \vec{N} d\theta_i + \vec{M}^T \frac{dD^{-1}}{d\theta_i} \delta \vec{M} d\theta_i \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

что приводит, с учётом (19), к

$$\delta_{N-\text{varied}} \left( \delta_{\theta-\text{varied}} \Phi \right) = - \int_{\Gamma} \left[ \delta \vec{N}^T A^{-1} \delta \vec{N} + \delta \vec{M}^T \frac{dD^{-1}}{d\theta_i} \delta \vec{M} \right] d\Gamma \quad (24)$$

Фактически в (24) под интегралом, с точностью до знака, стоит вторая вариация потенциальной энергии деформации (22).

Таким образом, необходимым условием второго порядка минимизации податливости пластины будет условие

$$\delta_{N-\text{varied}}^2 \Phi \geq 0 \quad (25)$$

При этом следует учитывать (14) и (19), причём в последнем соотношении правая часть не зависит от  $\theta_i, i=1, \dots, K$ .

Проведем следующие преобразования.

$$\begin{aligned} \delta_{\theta-\text{varied}}^2 \Phi = \delta_{\theta-\text{varied}} \left( \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K \left[ \vec{N}^T \frac{dA^{-1}}{d\theta_i} \vec{N} + \vec{M}^T \frac{dD^{-1}}{d\theta_i} \vec{M} \right] d\theta_i d\Gamma \right) = \\ - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^K \left[ \vec{N}^T A^{-1} \frac{d^2 A}{d\theta_i d\theta_j} A^{-1} \vec{N} + \vec{M}^T D^{-1} \frac{d^2 D}{d\theta_i d\theta_j} D^{-1} \vec{M} \right] d\theta_i d\theta_j d\Gamma \end{aligned} \quad (26)$$

где учтено, что  $\vec{N}^T A^{-1}$ ,  $A^{-1} \vec{N}$ ,  $\vec{M}^T D^{-1}$ ,  $D^{-1} \vec{M}$  – не зависят от  $\theta_i$ ,  $i=1, \dots, K$ , см. (19).

Таким образом, выражение (26) будет неотрицательным, если мы покажем неотрицательность членов, содержащих вторые производные соответствующих матриц, то есть надо показать, что

$$\int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^K \left\{ \vec{\varepsilon}_0^T \left( -\frac{d^2 A}{d\theta_i d\theta_j} \right) \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T \left( -\frac{d^2 D}{d\theta_i d\theta_j} \right) \vec{k} \right\} d\theta_i d\theta_j d\Gamma \geq 0 \quad (27)$$

Матрицы, стоящие в (27) в круглых скобках, очевидно, диагональны (см. их определение в Gibson 1994). Следовательно, вместо (27) можно записать

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K \left\{ \vec{\varepsilon}_0^T \left( -\frac{d^2 A}{d\theta_i^2} \right) \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T \left( -\frac{d^2 D}{d\theta_i^2} \right) \vec{k} \right\} (d\theta_i)^2 d\Gamma \geq 0 \quad (28)$$

В итоге, получаем из (10), (14), (25), (28):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \cos 2(\theta_i - \varphi) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 4(\theta_i - \varphi) \right] + \left[ \cos 2(\theta_i - \right. \\ \left. \psi) \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 4(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^2 + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) \geq 0, \\ i=1, \dots, K \end{aligned} \quad (29)$$

Соотношения (29) и являются необходимыми условиями 2-го порядка локальной оптимальности углов укладки волокон слоёв композитной пластины.

Исследуем, при каких значениях углов укладки волокон слоёв соотношения (29) – выполнены. Очевидное частное решение – совпадение главных направлений наибольших мембранных деформаций и кривизн. Также решениями (предполагая неотрицательными сомножители к тригонометрическим функциям, зависящие от главных деформаций и главных кривизн), при которых все косинусы в (29) – неотрицательны, будут  $\theta_i - \varphi$  и  $\theta_i - \psi$ , находящиеся в пределах  $\left[ -\frac{\pi}{8}, +\frac{\pi}{8} \right]$ . Заметим, что взаимное

расположение линий наибольшей главной мембранной деформации и наибольшей главной кривизны для указанных частных решений не может различаться более чем на  $45^\circ$ , что может исключать из рассмотрения некоторые решения условий оптимальности 1-го порядка.

Возможны также и другие, не столь очевидные, вследствие нелинейности условий (29), решения.

В общем случае, видно, что вблизи срединной поверхности в условиях (29) доминирует первая квадратная скобка, во внешних слоях – второе слагаемое этих условий (с множителем порядка  $z^2$ ), а в промежуточных слоях – активно участвуют оба слагаемых. Следовательно, в соответствии с условиями оптимальности 1-го и 2-го порядка, приведенными в данной работе, вблизи срединной поверхности волокна слоёв направлены вдоль направления наибольшей главной деформации, а во внешних слоях – вдоль направления наибольшей главной кривизны поверхности. При этом в промежуточных слоях направления волокон – между направлениями  $u$  срединной и  $u$  внешней поверхности.

## 6. Заключение

На основе использования вариационных принципов получены необходимые условия локальной оптимальности 1-го и 2-го порядков углов укладки волокон слоёв композитных пластин фон Кармана, подвергающихся значительному изгибу и растяжению-сдвигу. Указаны возможные частные решения этих условий оптимальности.

## Литература

Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.

Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.

Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматлит, 1961.

Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. СПб. : Лань, 2003.

Селюгин С. В. (а) Анализ и проектирование пластин и панелей из композиционных материалов. М.: МАИ, 155 с.

Селюгин С. В. (в) Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин, Известия РАН, Механика Твердого Тела, 2024, N3, 148-163.

Селюгин С. В. 2025. О двойственных вариационных принципах для композитных пластин фон Кармана. PREPRINTS.RU.  
<https://doi.org/10.24108/preprints-3113661>

Gibson R. Principles of composite material mechanics. McGraw-Hill, 1994.

Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis, 2nd Edition. CRC Presss, N-Y, 2004.