

Гравитация и масса в евклидовом пространстве

Поствайкин Павел Евграфович

19.09.2025

1 Введение

Настоящая работа посвящена исследованию возможности построения модели масс, распространения импульса и возникновения гравитационных эффектов в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$: могут ли столкновения и хаотичное движение фрагментов воспроизводить эффекты, подобные гравитации, при минимальном наборе физических допущений.

1.1 Принцип построения модели

Строим модель поведения материи в 3-мерном евклидовом пространстве. Материя не исчезает и не появляется — общее количество неизменно. Также не исчезает и не появляется из ниоткуда импульс — вектор средней скорости, которым обладает выделенная порция материи.

1.2 Столкновения

Материя — есть бесконечно малые и бесконечно делимые числа-вектора, которые всегда движутся с единственной возможной по модулю скоростью $\|\mathbf{v}\|$ во всех направлениях. Всё пространство полностью заполнено такой материей. Материя сталкивается в движении непрерывно с окружающей материей. Плотность материи в выбранном объёме может быть любой, начиная от бесконечно близкой к нулю. В каждую точку пространства материя входит со всех направлений одновременно, сталкиваясь в точке, и перераспределяется по всем направлениям векторов $\|\mathbf{v}\|$.

Вошедшее в точку столкновения количество материи при выходе из точки сохраняется. И сохраняется общий импульс-вектор всей вошедшей в точку столкновения материи. Скорость выходящих из точки столкновения векторов по модулю всегда только $\|\mathbf{v}\|$. Это непрерывный процесс, происходящий в каждой точке пространства постоянно.

При дифференциальном процессе между двумя любыми бесконечно близкими точками сталкиваться будут два бесконечно малых числа-вектора по одной линии центрально. При этом же в каждую точку пространства будет входить одновременно материя со всех направлений в соответствующем соотношении.

В любом бесконечно малом объёме произойдет бесконечное число столкновений. Выход из любой бесконечно малой области пространства (из точки) — есть результат сложения всех вошедших в момент столкновения в эту область чисел-векторов, имеющих модуль скорости $\|\mathbf{v}\|$.

Выходом из каждого столкновения векторов будет неравномерное распределение материи по всем направлениям — по всем векторам с модулем $\|\mathbf{v}\|$, выходящим из точки столкновения и сохраняющим суммарно импульс всей столкнувшейся материи. Таким образом, например, каждое число-вектор может быть рассеянно равномерно по всем направлениям только таким же встречным числом-вектором. Результат такого столкновения будет симметричной сферой векторов $\|\mathbf{v}\|$.

Бесконечно делимая и заполняющая всё пространство материя меняет направления движения, бесконечно разделяясь и смешиваясь со встречной материей. Разделение материи на центры выхода из столкновений и дифференциальные флуктуации при данной плотности являются результатом геометрической невозможности заполнения пространства одинаковыми сферами при любом масштабе дробления и, как следствие, отличие встречных векторов по величинам и направлениям. Это приводит к неоднородному распределению материи по векторам в результате следующих столкновений и неравномерной плотности материи в предельно малых областях пространства. "Высота" таких волн должна быть связана с плотностью материи в пространстве.

1.3 Перемещение

В любой бесконечно малой ограниченной области пространства существуют все возможные вектора материи во всех направлениях. Материя распределена по ним не равномерно и для такой области есть общий суммарный импульс. В выбранной области пространства можно выделить количество не перемещающейся в среднем в пространстве материи (сумма векторов равна 0) и количество материи, перемещающейся через данную область пространства, и среднее направление движения этой материи и среднюю скорость этого перемещения (то есть импульс).

В фиксированный момент времени все вектора перемещающейся материи будут находиться в полусфере векторов с положительной координатой по оси движения импульса в этой области пространства.

Если в область пространства, имеющую некоторое распределение материи по векторам, входит другой импульс, переносимый материей с другим распределением по векторам, то количество материи и их распределения суммируются.

Выделив и исключив среднее количество не перемещающейся материи (сумма векторов равна 0), получим в этой области количество материи со средней скоростью в направлении суммарного импульса, которая по модулю будет меньше, чем был модуль средней скорости более быстрого импульса.

Так локально существующий импульс при движении через среду будет терять свою скорость относительно средней скорости этой среды, увеличивая при этом количество перемещаемой в своём направлении материи.

1.4 Волны

При движении через неподвижную среду с одинаковым распределением материи по векторам во всех областях пространства плоская однородная волна импульса или радиально симметричная сферическая волна будут сохранять свою скорость. Входя в слой материи, не затронутый волной, материя волны смешивается с материей среды. Сложение по всей поверхности волны произойдёт симметрично. Импульс волны будет распределён по векторам на общее суммарное количество материи в области

пространства, через которое движется волна в данный момент.

Волна в пространстве будет распространяться как фронт давления материи и перемещаться со скоростью от 0 до $\|\mathbf{v}\|/2$, так как $\|\mathbf{v}\|/2$ это средняя скорость полусферы векторов радиусом $\|\mathbf{v}\|$ в выбранном направлении.

Вектор материи нормали к фронту волны будет сталкиваться со средой первым, сразу рассеиваясь по сфере векторов и передавая свой импульс встречной материи. Другие вектора фронта волны также будут сталкиваться с материей среды и с материей фронта волны. Импульс, двигающийся в пространстве, увеличит количество материи в своей волне так, что часть материи распределения, превышающая уравновешенную по скорости часть, будет иметь среднюю скорость $\|\mathbf{v}\|/2$.

1.5 Траектории

При движении материи в пространстве она меняет направление своего движения тем чаще, чем плотнее наполнено материей пространство на пути движения выбранной для наблюдения порции материи. Это оказывает влияние на скорость движения, и этот эффект рассматриваем ниже.

Таким образом, импульс волны будет переноситься количеством материи, соответствующим максимальной скорости движения в среде такой плотности материи. К скорости $\|\mathbf{v}\|/2$ волна может приблизиться только в предельно "пустом" пространстве.

2 Моделирование взаимодействий материи

2.1 Материя и плотность

Рассматриваем трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $r = (x, y, z)$. В каждой точке пространства есть материя, объёмная плотность которой $\rho^3(r, t)$, измеряемая в м^{-3} .

Материя представляет собой векторное числовое значение, содержащееся в области пространства. Материя бесконечно-делима, и каждая бесконечно малая порция движется с единственной возможной по модулю скоростью $\|\mathbf{v}\|$. С этого пункта и далее примем $\|\mathbf{v}\| = 1 \left(\frac{\text{Единица расстояния}}{\text{Единица времени}} \right)$ и одновременно: единица времени является эквивалентом длины полной траектории любой порции материи за выбранный период наблюдения. Время.

Общее количество материи в каком-либо объёме V вычисляется через интеграл:

$$M_V(t) = \int_V \rho^3(r, t) d^3r$$

Здесь d^3r — это элемент объёма, а интеграл суммирует плотность по всей области V . M — скалярная величина.

Есть векторное поле импульса этой материи $\mathbf{P}(r, t)$. Величина этого поле соответствует произведению объёмной плотности материи $\rho^3(r, t)$ на векторную сумму скоростей всей материи в данном дифференциальном объёме пространства. Направление указывает, куда движется совокупно материя в этой точке в момент времени t .

Модель использует два способа измерения количества материи:

Объёмная плотность ρ^3 измеряется в м^{-3} и показывает, сколько материи содержится в единице объёма.

Линейная плотность ρ — величина, измеряемая в м^{-1} , которая описывает количество материи вдоль прямой линии — характеристика непрерывного, но переменного распределения материи по пространству в одном измерении. Линейная плотность ρ связана с трёхмерной (ρ^3): в трёх измерениях линейная плотность "переходит" в объёмную через возведение в третью степень. Линейная плотность в нашей модели не является аналогией линейной плотности, принятой в стандартной физике. Линейная плотность ρ является основным параметром материи в рассматриваемой модели.

При столкновении двух потоков материя смешивается, сохраняя общее количество и импульс, после чего продолжает движение до следующего столкновения в виде сферического неравномерного распределения по всем направлениям.

Рассмотрим, что происходит, когда два потока материи, обозначенные как $\mathbf{P}_1 = \rho^3_1 \mathbf{v}_1 \Delta V$ и $\mathbf{P}_2 = \rho^3_2 \mathbf{v}_2 \Delta V$, сталкиваются в области ΔV точки $\mathbf{r}_0$ в момент времени t_0 . Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотности потоков, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — их направления движения ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$), а ΔV — предельно малый объём.

При столкновении выполняются два закона сохранения:

Сохранение материи: Общее количество материи после столкновения равно сумме до столкновения:

$$M = |\mathbf{M}_1| + |\mathbf{M}_2| = \rho^3_1 \Delta V + \rho^3_2 \Delta V$$

Сохранение импульса: Импульс — это векторная величина, зависящая от количества материи и её движения:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \rho^3_1 \mathbf{v}_1 \Delta V + \rho^3_2 \mathbf{v}_2 \Delta V$$

Для общего случая произвольных направлений сталкивающихся векторов материи с количествами $|\mathbf{M}_1|$, $|\mathbf{M}_2|$ предлагается следующая формула распределения выхода из столкновения:

$$\sigma(\vec{n}, t) = \frac{M}{4\pi [v(t - t_0)]^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|} \cdot e^{\vec{\beta} \cdot \vec{n}}$$

Где: $\vec{\beta}$ - векторный параметр анизотропии;

$|\beta| = \sqrt{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}$ — норма вектора $\vec{\beta}$

Направление $\vec{\beta}$ определяется из условия сохранения импульса

$M = m_1 + m_2$; $v(t - t_0) = R$ - радиус сферы распространения

Векторный параметр $\vec{\beta}$ определяется из уравнения:

$$L(|\beta|) \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\beta|} = \frac{\vec{P}}{M}$$

где $L(x) = (\coth x - \frac{1}{x})$ - функция Ланжевена, а $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ - результирующий импульс.

Проверка выполнения сохранения количества материи:

$$\int \sigma(\vec{n}, t) dS = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|} \int e^{\vec{\beta} \cdot \vec{n}} R^2 d\Omega = M$$

Нормировочный множитель $\frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|}$ обеспечивает выполнение закона сохранения количества материи.

Сохранение импульса:

$$\int \vec{n} \sigma(\vec{n}, t) dS = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|} \int \vec{n} e^{\vec{\beta} \cdot \vec{n}} R^2 d\Omega = M \cdot L(|\beta|) \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\beta|}$$

Из определения параметра $\vec{\beta}$ следует, что $L(|\beta|) \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\beta|} = \frac{\vec{P}}{M}$, поэтому:

$$\int \vec{n} \sigma(\vec{n}, t) dS = M \cdot \frac{\vec{P}}{M} = \vec{P}$$

Таким образом, закон сохранения импульса выполняется точно.

Предложенная модель обеспечивает последовательное и математически корректное описание процесса столкновения и перераспределения материи для произвольных направлений векторов материи. Это — гипотеза, основанная на предположении, что таким был бы выход материи из ограниченной области предельно малого пространства после бесконечного количества столкновений и смешиваний в ней с условием сохранения материи и импульса внутри.

2.2 Движение выделенной порции материи

После столкновения материя стремится распространяться в виде сферического волнового фронта, что является естественным следствием её распределения во все стороны с постоянной скоростью $\|\mathbf{v}\|$. Сферический выход сталкивается с окружающей материей. Каждое такое столкновение приводит к разделению и смещению материи, изменяя её направление движения случайным образом. Для выбранного объёма пространства столкновения внутри него приводят к разбеганию материи за его границы, и уменьшение плотности, если плотность снаружи меньше.

Суммарный импульс области пространства не продолжает движение как единое целое в одном направлении. Поскольку базовые элементы материи могут двигаться в любом направлении со скоростью $\|\mathbf{v}\|$, результирующий импульс перераспределяется между множеством новых элементарных векторов, исходящих из точки столкновения. Этот процесс непрерывного смешивания и перераспределения приводит к тому, что любой локализованный импульс или сгусток плотности не остается статичным, а имеет тенденцию к расширению. Фронт, несущий этот импульс, будет распространяться в пространстве, подобно волне.

Несмотря на то, что вектора материи движутся с фундаментальной скоростью $\|\mathbf{v}\|$, максимальная скорость, с которой может перемещаться в пространстве любой устойчивый сгусток материи или суммарный импульс области пространства, ограничена величиной $\|\mathbf{v}\|/2$. Это ограничение является следствием природы пространства, столкновений и взаимодействий между материей.

2.3 Случайные блуждания

Сначала представим движение по узлам трёхмерной решётки объёмом 1 со скоростью $\|\mathbf{v}\| = 1$, в которой расположено $(N)^3$ перекрёстков. В статистике доказывается, что в пространстве объёмом 1 с шагом между узлами решётки $(1/N)$, путь случайного блуждания из центра в среднем пройдёт через $(N)^2$ перекрёстков (совершит в

среднем $(N)^2$ шагов), чтобы покинуть область, содержащую $(N)^3$ узлов. Время прохождения одного шага $\tau_1 = 1$ (время прохождения единицы расстояния)/ N ; время покидания области пространства объёмом 1 из центра 0:

$$t_0 = (N)^2 \cdot \tau_1 = N \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})$$

Для трёхмерного случайного блуждания на решётке с шагом $(1/N)$ среднее время выхода $\langle t_X \rangle$ из точки 0 через тонкий бесконечный слой, расположенный на фиксированном расстоянии X единиц расстояния вдоль оси x (т.е. при $x = X \cdot (\text{единица расстояния})$, где $X \gg (1/N)$), пропорционально N : $\langle t_X \rangle \propto N$. Значит, время достижения поглощающей плоскости в 3D (с x и бесконечными y и z):

$$\langle t_X \rangle = (X \cdot N)^2 \cdot \tau_1 = (X^2 \cdot N) \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})$$

Оценим случайное блуждание по всем случайным направлениям в пространстве с фиксированным шагом $L = (\frac{1}{N})$ за фиксированное время τ_1 , что соответствует скорости $\|\mathbf{v}\| = 1$. Коэффициент диффузии D для такого трёхмерного случайного блуждания определяется как:

$$\begin{aligned} D &= \frac{(L)^2}{6\tau_1} = \frac{\left(\frac{1(\text{единица расстояния})}{N}\right)^2}{6 \frac{1(\text{время прохождения единицы расстояния})}{N}} \\ &= \frac{1}{6N} \frac{(\text{единица расстояния})^2}{(\text{время прохождения единицы расстояния})} \end{aligned}$$

Среднее время t_0 выхода из области сферы диаметром 1 и $R=1/2$ от центра 0 для случайного блуждания с фиксированным шагом L даётся выражением:

$$t_0 = \frac{R^2}{6D} = \frac{(\frac{1}{2})^2}{6(\frac{1}{6N})} = \frac{N}{4} \cdot 1(\text{время прохождения единицы расстояния})$$

Для сферы объёмом 1 (радиус $R \approx 0.62$) время выхода составит

$$t_0 \approx 0.38N \cdot 1(\text{время прохождения единицы расстояния})$$

Определим среднее время выхода $\langle t_X \rangle$ из точки 0 через тонкий бесконечный слой, расположенный на фиксированном расстоянии X единиц расстояния вдоль оси x (т.е. при $x = X \cdot (\text{единица расстояния})$, где X единиц расстояния $\gg L$) для трёхмерного случайного блуждания по всем случайным направлениям в пространстве с фиксированным шагом L :

для одномерной проекции случайного блуждания вдоль оси x , эффективный коэффициент диффузии D_X равен:

$$D_X = \frac{(L)^2}{6\tau_1} = \frac{(\frac{1}{N})^2}{6(\frac{1}{N})} = \frac{L \cdot (\text{единица расстояния})}{6 \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})}$$

так как шаги изотропны, и дисперсия шага по одной координате составляет треть от полной дисперсии в трёх измерениях. Размерность $D_X \frac{(\text{единица расстояния})^2}{(\text{время прохождения единицы расстояния})}$.

Среднее время первого достижения плоскости на расстоянии X для броуновского движения в одномерном случае оценивается как:

$$\langle t_X \rangle = \frac{(X \cdot (\text{единица расстояния}))^2}{2D_X} = \frac{3 \cdot (X)^2 \cdot |\mathbf{v}|}{L}$$

Если представлять движение сферических волн материи между столкновениями, то в движении материя будет создавать себе перекрёсток и менять направления в точке следующего столкновения через некоторое среднее расстояние между столкновениями L , которое будет обратно пропорционально линейной плотности материи ρ в данной области пространства: $L = \frac{1}{\rho}$. Тогда изменение линейной плотности материи ρ приведёт к изменению средней площади всех фронтов всех волн, распространяющихся после столкновений в ограниченном объёме.

В таком случае можно выделить один единственный вектор материи, выходящий из точки отсчёта (отношение числа к дифференциально малой площади на сфере дифференциального единичного радиуса: $dM = \rho^3 \cdot [dr]^3 \cdot \frac{ds}{4\pi \cdot [dr]^2}$) и в зависимости от линейной плотности материи ρ в данной области вычислить некоторое среднее расстояние L , через которое он будет равномерно рассеян по всем направлениям вследствие падения "статистического веса" его импульса в общем количестве материи, с которой он будет сталкиваться на своём пути. Это является следствием утверждения, что любой вектор будет полностью равномерно распределён по всем выходящим из столкновения векторам только при столкновении с равным по модулю и противоположным по направлению вектором. Такое расстояние L предельно мало и обратно пропорционально линейной плотности материи ρ .

2.4 Расчёт смещения и эффект времени

Столкновения фрагментов материи моделируются как случайные блуждания. Представим движение как будто окрашенной порции материи, выделенной в точке начала отсчёта и по густоте окраски пространства проследим, где в среднем она оказалась через определённое время. Из начальной точки материя распространяется в пространстве как нормальное распределение в трёх измерениях. После перемещения в пространстве и следующего столкновения каждая часть от первоначальной порции снова начнёт распространяться как нормальное распределение в трёх измерениях из новой точки.

Свяжем линейную плотность ρ со средним расстоянием между столкновениями L , определив таким образом единичную плотность, через единичную длину L : $\rho = \frac{1}{L}$

Время между такими столкновениями:

$$\tau = \frac{L}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\rho |\mathbf{v}|}$$

В однородной среде $\rho = \rho_0$; $L_0 = \frac{1}{\rho_0}$; $\tau_0 = \frac{1}{\rho_0 |\mathbf{1}|}$, так как $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Если линейная плотность меняется вдоль оси x : $\rho(x) = \rho_0 + \frac{d\rho}{dx} \cdot x$, (обозначим далее $\frac{d\rho}{dx} = \rho'_x$ - градиент, направленный по оси x в м⁻²), то среднее время между столкновениями будет изменяться в зависимости от местной линейной плотности:

$$\tau_L(x) = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x) \cdot |\mathbf{1}|} = \frac{\rho_0}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x)} \cdot \tau_0$$

$$\frac{\tau_L(x)}{\tau_0} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{\rho_0}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x)}$$

Выбранная для наблюдения порция материи за время наблюдения t перемещается в пределах сферы радиусом $R = |\mathbf{1}| \cdot t$ от точки начала наблюдения. На такой радиус может удалиться только вектор,двигающийся после каждого столкновения прямо в

первоначальном направлении. В ограниченной области радиуса R градиент линейной плотности $\frac{d\rho}{dx}$ (или ρ'_x) будем считать постоянным — это можно допустить в малых масштабах, но этого не может быть в макроскопических масштабах.

Изменение плотности по одной оси аналогично изменению в этом направлении масштаба статистической модели случайного блуждания с фиксированным шагом.

$$L(x) = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x)}; \tau_1(x) = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x) \cdot |1|}; N(x) = \frac{1}{L(x)} = (\rho_0 + \rho'_x \cdot x)$$

$$D(x) = \frac{L(x) \cdot (\text{единица расстояния})}{6 \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})} = \frac{1 \cdot (\text{единица расстояния})}{6 \cdot (\rho_0 + \rho'_x \cdot x) \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})}$$

Рассмотрим простой случай, когда материя в среднем находится в покое (средний импульс материи в области пространства $\mathbf{P}$ равен 0). Тогда любая порция материи, бесконечно разделяясь, после каждого столкновения, с одинаковой вероятностью выходит во все направления: по оси x со средней скоростью $\|\mathbf{v}\|/2 = 1/2$ для полусферы векторов — и к увеличению плотности $\rho(x)$, и к уменьшению плотности $\rho(x)$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Это же верно и для других осей y и z . Средняя скорость выхода $\|\mathbf{v}\|/2 = 1/2$ математически равна модулю суммы всех векторов равной длины по полусфере, обращённой в выбранное направление в пространстве.

В дифференциальных масштабах сразу после выхода из столкновения увеличение плотности ρ в направлении $(+\rho'_x)$ ведёт к уменьшению среднего расстояния L до следующего полного рассеяния по векторам, приближая средний уровень $\langle X \rangle$ перераспределения, где эта материя снова разделится пополам и начнёт движение в разные стороны по оси x .

Определим среднее удаление L_m по оси x точки полного рассеяния от точки выхода из начала отсчёта 0, складывая средние расстояния L_a от точки выхода 0 до точки полного рассеяния в каждом направлении в зависимости от угла к оси x : $a\theta x$.

Для точки $x = dr \cdot \cos \theta$ эффект градиента оцениваем в средней точке пути: $x = \frac{dr}{2} \cdot \cos \theta$:

$$\rho \left(\frac{dr}{2} \cos \theta \right) = \rho_0 + \rho'_x \cdot \left(\frac{dr}{2} \cos \theta \right)$$

Для каждого отдельного направления:

$$L_a = \frac{1}{\rho_0 + \rho'_x \cdot \left(\frac{\cos a}{2} \right) \cdot L_a}$$

$$\rho'_x \cdot \left(\frac{\cos a}{2} \right) \cdot L_a^2 + \rho_0 \cdot L_a - 1 = 0$$

$$L_a = \frac{\pm (\rho_0^2 + 2 \cdot \rho'_x \cdot \cos a)^{\frac{1}{2}} - \rho_0}{\rho'_x \cdot \cos a}; L_a = \frac{\pm \left(\left(\left(\frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a} \right) + 1 \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a} \right)}{\rho_0}$$

Решение с минус нереально при $\lim \rho'_x \rightarrow 0$, значит:

$$\rho_0 \cdot L_a = \left(\left(1 + \left(\frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a} \right) \right)^2 - 1 \right)^{1/2} - \frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a}$$

$$L_m = \langle L_a \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho'_x \cdot \cos a)^{1/2} - \rho_0}{\rho'_x \cdot \cos a} \right) \cdot (\cos a \cdot \sin a \cdot da) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho'_x \cdot \cos a)^{1/2} - \rho_0}{\rho'_x} \right) \cdot \sin a \cdot da$$

$$L_{m+} = \frac{(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho'_x)^{3/2} - \rho_0^3 - 3 \cdot \rho'_x \cdot \rho_0}{3 \cdot (\rho'_x)^2}$$

$$L_{m-} = \frac{(\rho_0^2 - 2 \cdot \rho'_x)^{3/2} - \rho_0^3 + 3 \cdot \rho'_x \cdot \rho_0}{3 \cdot (\rho'_x)^2}$$

$$\lim L_m(\rho'_x \rightarrow 0) = \frac{1}{2 \cdot \rho_0}$$

Проследим за движением вышедших из точки равновесного столкновения 0 случайных блужданий, из которых одно движется в направлении +х, другое -х. На расстояниях L_{m+} и L_{m-} по оси х в среднем они достигнут плоскости, на котором в среднем происходит следующее равновесное столкновение. Среднее время достижения случайным блужданием этих границ от 0 отличается: $t1_{(+)}$ и $t1_{(-)}$. На этих уровнях они снова будут равномерно разделены на все возможные направления: половина начнёт возвращение к точке 0 и поравняется на плоскости с координатой X в момент времени T, а другая половина продолжит удаляться как случайные блуждания до своих новых границ $2L_{m+}$ и $2L_{m-}$.

Найдём координату X плоскости, где поравняются возвращающиеся части, и полное время T этой встречи от самого начала расчёта. В этой координате должен находиться центр распределения вышедшей из 0 материи. Это задача о выходе из 0 и последующей встрече двух случайных блужданий после отражения от границ L_{m+} и L_{m-} .

Для изотропного 3D случайного блуждания с фиксированным шагом длины L и скоростью $|\mathbf{v}| = |\mathbf{1}|$ время одного шага: $\tau = \frac{L}{|\mathbf{1}|}$, коэффициент диффузии: $D = \frac{L \cdot |\mathbf{1}|}{6}$

$$D_{(L_{m+})} = \frac{|\mathbf{1}|}{6 \cdot (\rho_0 + \rho'_x \cdot (L_{m+}))}; D_{(L_{m-})} = \frac{|\mathbf{1}|}{6 \cdot (\rho_0 - \rho'_x \cdot (L_{m-}))}$$

$$\text{Среднее время достижения плоскости на расстоянии } X: \langle t_x \rangle = \frac{3 \cdot X^2}{L \cdot |\mathbf{1}|}$$

Среднее время достижения границ в линейно-неоднородной среде L_{m+} и L_{m-} :

$$t_{(+)} = 3\rho_0(L_{m+})^2 + 2\rho'_x(L_{m+})^3; t_{(-)} = 3\rho_0(L_{m-})^2 - 2\rho'_x(L_{m-})^3$$

Точное решение для координаты встречи X и времени T требует решения кубического уравнения, которое сложно упростить аналитически. Однако для малого градиента плотности ($|\rho'_x| \ll \rho_0$) можно получить приближенные формулы. Предположим: $|\rho'_x| \ll \rho_0$. Разложим L_{m+} , L_{m-} , $t_{(+)}$, $t_{(-)}$ в ряд Тейлора, сохраняя члены до первого порядка по ρ'_x .

Границы отражения L_{m+} и L_{m-} аппроксимируются как:

$$L_{m+} \approx \frac{1}{2 \cdot \rho_0} - \frac{\rho'_x}{8 \cdot \rho_0^3}, L_{m-} \approx \frac{1}{2 \cdot \rho_0} + \frac{\rho'_x}{8 \cdot \rho_0^3}$$

Время достижения границ аппроксимируются как:

$$t1_{(+)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} + \frac{\rho'_x}{4 \cdot \rho_0^3}, t1_{(-)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} - \frac{\rho'_x}{4 \cdot \rho_0^3}$$

Время движения после отражения от границ L_{m+} и L_{m-} :

$$\text{из } L_{m+} \text{ в сторону 0 влево: } t2_{(+)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} + \frac{\rho'_x}{8 \cdot \rho_0^3} - 3X$$

$$\text{из } L_{m-} \text{ в сторону 0 вправо: } t2_{(-)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} + \frac{\rho'_x}{8 \cdot \rho_0^3} + 3X$$

Условие встречи: $t1_{(+)} + t2_{(+)} = t1_{(-)} + t2_{(-)}$, следовательно

$$\frac{3}{2 \cdot \rho_0} + \frac{3 \cdot \rho'_x}{8\rho_0^3} - 3X = \frac{3}{2 \cdot \rho_0} + 3X$$

Решаем относительно X :

$$X \approx \frac{\rho'_x}{16\rho_0^3}$$

Подставляем X в выражение для $t1_{(+)} + t2_{(+)}$:

$$T \approx \frac{3}{2 \cdot \rho_0} + \frac{3 \cdot \rho'_x}{16\rho_0^3} = \frac{24\rho_0^2 + 3\rho'_x}{16\rho_0^3}$$

Координата встречи X и время T (от начала движения 0) для малых ρ'_x ($|\rho'_x| \ll \rho_0$):

$$X \approx \frac{\rho'_x}{16\rho_0^3}, T \approx \frac{3}{2 \cdot \rho_0}$$

Время встречи T включает время до границ $t1_{(+)}$ и $t1_{(-)}$, и движение после отражения и учитывает изменение $D_{(x)}$ при движении навстречу. Смещение точки встречи X обусловлено асимметрией коэффициентов диффузии. Если $\rho'_x > 0$, плотность среды возрастает с ростом x . Частица в положительной области движется медленнее, поэтому встреча смещается в сторону положительных X . При $\rho'_x = 0$ среда однородна, и встреча происходит в начале координат ($X = 0$) в момент $T = \frac{3}{2 \cdot \rho_0}$.

При рассмотрении результата этого расчёта надо учесть, что за время T , равное среднему времени перемещения по оси x от 0 до L_m и обратно, к координате X вернётся только половина материи, в то время как другая половина будет всё это время удаляться в среднем от 0. Чтобы получить положение всей первоначальной материи, надо брать время только для одного среднего шага ($T/2$), считая что за это время половина материи движется по оси x от 0 в разные стороны, а другая половина в это же время движется от L_{m+} и L_{m-} навстречу друг другу к 0. Так за среднее время одного перемещения по оси x : $T = \frac{3}{4 \cdot \rho_0 |\mathbf{v}|}$ отслеживаем перемещение всей первоначальной материи по оси x полностью, учитывая одновременно обе фазы движения.

Скорость смещения по оси x центра распределения материи:

$$U = X/(T/2) = \frac{\rho'_x |\mathbf{v}|}{12\rho_0^2}$$

Уровни L_{m+} и L_{m-} не являются расстояниями одного шага, который мы определили как $L_a = \frac{1}{\rho_0 + \rho'_x \cdot \left(\frac{\cos a}{2}\right) \cdot L_a}$. Уровни L_{m+} и L_{m-} характеризуют различие между расстояниями, от которых равные доли материи будут разделяться пополам, разворачиваться и возвращаться к центру, в то время как другая половина материи продолжит удаляться от 0 со скоростью $\|\mathbf{v}\|/2$. Так же и время $T/2$ не является временем одного шага τ_1 .

Смещение H за время одного шага τ_1 между 0 и следующим полным рассеянием определится скоростью U .

$$H = \frac{\rho'_x}{12\rho_0^3}$$

Ускорение $\mathbf{g}$ порции материи от 0 за время $\tau_1 = \frac{1}{\rho_0 |\mathbf{1}|}$ соответственно равно

$$\mathbf{g} = \frac{\rho'_x |\mathbf{v}|^2}{6\rho_0}$$

Ускоряясь после равновесного выхода из столкновения до следующего равновесного столкновения, материя обретает импульс. Вся материя в градиенте плотности смещается одинаково, и все предельно малые смещения складываются в общее ускорение материи в выделенном объёме пространства.

2.5 Модель равновесия кластера

2.5.1 Скорость и ускорение рассеяния

Проследим за движением материи от точки, расположенной на расстоянии R до центра скопления материи. После каждого столкновения материя рассеивается сферически в стороны от радиуса R со скоростью $\|\mathbf{v}\|/2$.

В классической механике центробежное ускорение:

$$a_{\text{центробежное}} = \frac{v^2}{R}$$

В нашей модели фрагменты расходятся от центра скопления в $\mathbf{x}_0$ на расстоянии R_1 . Средняя скорость рассеяния в плоскости, перпендикулярной R_1 : $\|\mathbf{v}\|/2$

Ускорение:

$$a_{\text{рассеяние}} = \frac{(|\mathbf{v}|/2)^2}{R_1} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{4R_1}$$

Ускорение $\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R_1}$ противодействует сжатию скопления, уменьшаясь с ростом R_1 .
Единицы: $\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}} = \text{м}/\text{с}^2$.

2.5.2 Сила притяжения сферической оболочки к центру

В этом разделе мы вводим концепцию силы, притягивающей сферическую оболочку к центру кластера, на основе градиента линейной плотности. На данном этапе мы не определяем массу явно, вместо этого рассматривая силу как пропорциональную произведению ускорения, поверхностной плотности и площади сферы. Это закладывает основу для понимания динамики кластера.

2.5.3 Линейная плотность

Линейная плотность $\rho(R)$ определяется как:

$$\rho(R) = \frac{M}{R^{1.5}}$$

где M — произвольная константа, а ρ — линейная плотность ($[\rho] = \text{м}^{-1}$), характеризующая количество материи на единицу длины вдоль радиального направления.

Аргументация:

Зависимость $R^{-1.5}$ выбрана как гипотеза, отражающая уменьшение линейной плотности с расстоянием, что согласуется с равновесием между расширением и сжатием, как будет выведено далее.

Размерность м^{-1} соответствует ρ как мере материи вдоль линии — базовой величине в нашей модели.

2.5.4 Квадрат линейной плотности как поверхностная характеристика

Квадрат линейной плотности интерпретируется как поверхностная плотность сферы в фиксированный момент:

$$\rho^2 = \left(\frac{M}{R^{1.5}} \right)^2 = \frac{M^2}{R^3}$$

Размерность $[\rho^2] = \text{м}^{-2}$ отражает количество материи на единицу площади на сферической оболочке.

Аргументация:

ρ^2 вводится как мера концентрации материи на поверхности сферы радиусом R , связывая линейную плотность с распределением оболочки.

Это упрощает модель, избегая явного определения массы, но сохраняя интуитивное представление о поверхностной плотности.

Площадь поверхности сферической оболочки радиусом R : $S = 4\pi R^2$ с размерностью $[S] = \text{м}^2$.

Произведение $\rho^2 \cdot S$ даёт безразмерную величину, что согласуется с нашей текущей абстрактной интерпретацией.

2.5.5 Ускорение от градиента плотности

Ускорение $\mathbf{g}$, действующее на материю в кластере, определяется градиентом плотности:

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{d\rho}{dR}$$

Вычислим производную:

$$\frac{d\rho}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\frac{M}{R^{1.5}} \right) = M \cdot \left(-\frac{3}{2} R^{-2.5} \right) = -\frac{3M}{2R^{2.5}}$$

Подставим в формулу:

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{-\frac{3M}{2R^{2.5}}}{\frac{M}{R^{1.5}}} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{R^{1.5}}{R^{2.5}} \right) = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \left(-\frac{3}{2R} \right) = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R}$$

Размерность $[\mathbf{g}] = \text{м}/\text{с}^2$, отрицательный знак указывает направление к центру.

Аргументация:

Формула $g = \frac{V^2}{6} \cdot \frac{d\rho}{dR}$ выведена как ускорение из-за градиента плотности, аналогичное притяжению.

Зависимость R^{-1} согласуется с равновесием между расширением и сжатием, как будет показано далее.

2.5.6 Сила притяжения

Сила, притягивающая сферическую оболочку к центру, предполагается пропорциональной произведению ускорения, поверхностной плотности и площади:

$$F = \mathbf{g} \cdot \rho^2 \cdot S = \left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R} \right) \cdot \frac{M^2}{R^3} \cdot 4\pi R^2$$

Упростим:

$$F = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R} \cdot \frac{M^2}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = -\frac{|\mathbf{v}|^2 M^2 4\pi}{4R^4} \cdot R^2 = -\frac{\pi M^2 |\mathbf{v}|^2}{R^2}$$

Аргументация:

$\rho^2 \cdot S = 4\pi \frac{M^2}{R}$ — безразмерная мера общего количества материи на оболочке.

Умножение на $\mathbf{g}$ даёт силу с зависимостью R^{-2} , напоминающей закон обратных квадратов гравитации.

Размерность $F = \text{м}/\text{с}^2$, а не $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$, так как масса не определена; это промежуточная величина в нашей модели.

2.5.7 Заключение

Сила $F = -\frac{\pi M^2 V^2}{R^2}$ описывает притяжение сферической оболочки к центру, обусловленное градиентом линейной плотности. Зависимость R^{-2} подчёркивает аналогию с классической гравитацией, хотя масса остаётся неопределённой и будет рассмотрена в последующих разделах.

2.6 Распределение плотности вблизи центра кластера

Одной из ключевых задач модели является описание поведения плотности вблизи центра кластера. Исходная функция $\rho(R) = \frac{M}{R^{1.5}}$ предсказывает бесконечный рост плотности при $R \rightarrow 0$, что физически нереалистично. Кроме того, градиент $\frac{d\rho}{dR} = -\frac{3M}{2R^{2.5}}$ становится крайне крутым у центра, указывая на нелинейную зависимость и изменение направления градиента в пространстве. Простая статистика здесь неприменима: в ближайшей окрестности начала движения материи её траектории создают самопрепятствия, особенно выраженные ближе к центру. Это ограничивает рост плотности, формируя конечный пик, напоминающий вершину нормального распределения. Мы предлагаем модифицированную функцию плотности и анализируем её приблизительно.

2.6.1 Предложенная функция плотности

Чтобы устранить сингулярность и учесть саморегуляцию, вводим функцию:

$$\rho(R) = \rho_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R + R_0} \right)^{1.5}$$

где ρ_0 — конечная плотность в центре ($R = 0$), R_0 — параметр радиуса ядра, сглаживающий распределение.

2.6.2 Свойства:

В центре ($R = 0$):

$$\rho(0) = \rho_0 \cdot \left(\frac{R_0}{0 + R_0} \right)^{1.5} = \rho_0$$

плотность конечна, сингулярность устранена.

На больших расстояниях ($R \gg R_0$):

$$\rho(R) \approx \rho_0 \cdot \frac{R_0^{1.5}}{R^{1.5}} = \frac{M}{R^{1.5}}$$

где $M = \rho_0 R_0^{1.5}$, что соответствует исходной модели.

Функция непрерывно убывает от ρ_0 до $\frac{M}{R^{1.5}}$

2.6.3 Градиент и кривизна

Для анализа формы графика вычислим градиент и кривизну:

Градиент:

$$\frac{d\rho}{dR} = P_0 \cdot 1.5 \cdot \frac{R_0^{1.5} \cdot (-1)}{(R + R_0)^{2.5}} = -\frac{1.5\rho_0 R_0^{1.5}}{(R + R_0)^{2.5}}$$

При $R = 0$: $\frac{d\rho}{dR} = -\frac{1.5\rho_0}{R_0}$, конечное значение.

При больших R : $\frac{d\rho}{dR} \approx -\frac{1.5M}{R^{2.5}}$, как в исходной модели.

Кривизна (вторая производная):

$$\frac{d^2\rho}{dR^2} = 1.5\rho_0 R_0^{1.5} \cdot 2.5 \cdot (R + R_0)^{-3.5} = \frac{3.75\rho_0 R_0^{1.5}}{(R + R_0)^{3.5}}$$

При $R = 0$: $\frac{d^2P}{dR^2} = \frac{3.75P_0}{R_0^2} > 0$. При $R = 0$ вторая производная $d/dR > 0$, что в совокупности с монотонным убыванием функции (R) означает, что функция выпукла вниз, а её наибольшее значение находится на левой границе области определения, в точке $R = 0$. С ростом R кривизна уменьшается, градиент сглаживается.

2.6.4 Физическая интерпретация

Представим, что материя исходит из всех точек сферы радиусом R , как из одной точки $R = 0$. Ближе к центру траектории пересекаются чаще: площадь сферы $4\pi R^2$ уменьшается, а плотность потоков растёт. Это создаёт самопрепятствия, замедляющие выход материи. Чем меньше R , тем сильнее эффект, что ограничивает плотность значением P_0 . Термин $R+R_0$ в знаменателе отражает это сглаживание, предотвращая бесконечный рост. Можно образно сказать, что ближе к центру материя статистически начинает чаще сталкиваться сама с собой, чем это должно быть, заменяя сама себе отчасти градиент линейной плотности.

2.6.5 Приближение у центра

Разложим $P(R)$ в ряд Тейлора при $R \rightarrow 0$:

$$\rho(R) = \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)^{-1.5} \approx \rho_0 \cdot \left(1 - 1.5\frac{R}{R_0} + 1.875\frac{R^2}{R_0^2}\right)$$

Сравним с нормальным распределением $\rho_0 \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) \approx \rho_0 \left(1 - \frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$. Квадратичный член $1.875\frac{R^2}{R_0^2}$ даёт $\sigma^2 = \frac{R_0^2}{3.75}$, указывая на сходство с гауссовым пиком, хотя линейный член показывает отклонение от чистой нормальности.

2.6.6 Ускорение

Ускорение, связанное с градиентом:

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{-\frac{3M}{2R^{2.5}}}{\frac{M}{R^{1.5}}} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{-\frac{1.5\rho_0 R_0^{1.5}}{(R+R_0)^{2.5}}}{P_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}} = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4(R + R_0)}$$

При $R = 0$: $\mathbf{g} = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R_0}$, конечное. В действительности $\mathbf{g} = 0$, но это отклонение результат упрощения.

При больших R : $\mathbf{g} \approx -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R}$, как в предыдущем разделе.

2.6.7 Вывод

Модифицированная плотность $\rho(R) = \rho_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}$ устраняет сингулярность, достигая пика ρ_0 в центре и переходя к $R^{-1.5}$ на больших расстояниях. Самопрепятствия у центра, вызванные сходимостью траекторий, формируют конечный профиль, близкий к вершине нормального распределения с приблизительной дисперсией $\sigma^2 = \frac{R_0^2}{3.75}$. Это согласуется с равновесием кластера, где частота столкновений $\nu(R) \propto \rho(R)$.

2.7 Характерный диаметр скопления

Мы исследуем существование диаметра D , при котором время прохождения волны материи через центр равно времени её движения по сфере радиуса $\frac{D}{2}$. Это гипотеза, и точная математика сложна из-за нелинейного градиента плотности у центра.

2.7.1 Скорость волнового процесса

Единственная базовая скорость в модели — V . Скорость распространения сферического волнового фронта зависит от плотности:

$$v(R) = \frac{V}{2} \cdot \frac{P(1)}{P(R)}$$

где $\frac{V}{2}$ — максимальная скорость при минимальной плотности $P(1) = 1$, а с ростом $P(R)$ скорость падает.

Аргументация:

$> v = \frac{V}{2}$ достигается при $P(R) = P(1)$, что задаёт масштаб. $> >$ Обратно пропорциональная зависимость от $P(R)$ согласуется с вычислением g в главе 1. $> >$ Это приближение, принятое как гипотеза.

2.7.2 Модель плотности

$$P(R) = \frac{M}{(R + R_0)^{1.5}}, \quad P(1) = \frac{M}{(1 + R_0)^{1.5}} = 1, \quad M = (1 + R_0)^{1.5}.$$

$$v(R) = \frac{V}{2} \cdot \frac{(R + R_0)^{1.5}}{(1 + R_0)^{1.5}}$$

2.7.3 Радиальное время

$$t_{\text{рад}} = 2 \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{dx}{v(x)} = \frac{8(1 + R_0)^{1.5}}{V} \left[\frac{1}{\sqrt{R_0}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{2} + R_0}} \right]$$

2.7.4 Тангенциальное время

$$t_{\text{танг}} = \frac{\pi \cdot \frac{D}{2}}{v\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{\pi D}{V} \cdot \frac{(1 + R_0)^{1.5}}{\left(\frac{D}{2} + R_0\right)^{1.5}}$$

2.7.5 Условие равенства

$$8 \left[\frac{1}{\sqrt{R_0}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{2} + R_0}} \right] = \frac{\pi D}{\left(\frac{D}{2} + R_0\right)^{1.5}}$$

Для $\delta = \frac{D}{2R_0}$:

$$8 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} \right] = \frac{2\pi\delta}{(1 + \delta)^{1.5}}$$

При $\delta \approx 0.8$, $D \approx 1.6R_0$.

2.7.6 Вывод

Гипотеза подтверждается: $D \approx 1.6R_0$ — возможный диаметр, зависящий от R_0 . Это приближение, требующее уточнения градиента у центра, но указывающее на потенциальный размер стабильной структуры в модели.

3 Взаимодействие двух скоплений

3.1 Взаимодействие одинаковых скоплений

В данной главе исследуется взаимодействие двух одинаковых скоплений плотности, расположенных на определённом расстоянии друг от друга, через поверхность, разделяющую их поля плотности. Рассматриваются два одинаковых скопления с параметром m , соединённых отрезком, через середину которого проведена нормальная плоскость. Эта плоскость служит границей, на которой градиент плотности в проекции на ось, соединяющую центры скоплений, равен нулю, что предотвращает неуравновешенное перетекание материи. Нужно сразу отметить, что для двух различных скоплений разделяющая их поверхность должна строиться на том же принципе отсутствия неуравновешенного перетекания материи от одного скопления к другому через разделяющую их расчётную поверхность, и это возможно только когда проекция градиента плотности на нормаль к расчётной поверхности равна нулю.

Целью является вычисление силы взаимодействия одного скопления с полем другого через эту разделяющую плоскость. Для этого определяются плотность и ускорение в точке на плоскости, после чего интегрируется поток силы по всей поверхности.

Рассмотрим два скопления с центрами в точках M_1 и M_2 , на расстоянии r друг от друга. Линейная плотность каждого скопления при $R = 1$ равна m . Плоскость разделения проходит через середину отрезка M_1M_2 и перпендикулярна ему. В точке A на этой плоскости:

$$P_A = \frac{m}{\left(\frac{r/2}{\cos a}\right)^{1.5}} = \frac{m \cos^{1.5} a}{\left(\frac{r}{2}\right)^{1.5}}$$

$$g_A = \frac{V^2}{4\left(\frac{r/2}{\cos a}\right)} = \frac{V^2 \cos a}{2r}$$

где a — угол, определяющий геометрию взаимодействия.

Интеграл потока силы через плоскость:

$$S = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{8m^2 \cos^3 a}{r^3} \right) \cdot \left(\frac{V^2 \cos^2 a}{2r} \right) \cdot \left(\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{\sin a}{\cos^3 a} \right) da = \frac{2\pi V^2 m^2}{3r^2}$$

Таким образом, сила притяжения между скоплениями:

$$F = \frac{2\pi V^2 m^2}{3r^2}$$

3.1.1 Взаимодействие двух скоплений: вывод и объяснение

Рассмотрим два одинаковых сферически-симметричных скопления материи с центрами в точках $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разделенных расстоянием $r = |\vec{c}_1 - \vec{c}_2|$. Плотность каждого скопления описывается функцией: $\rho_i(R) = \frac{m}{R^{1.5}}$, где $m = 1$ - нормировочный параметр (линейная плотность на расстоянии $R = 1$ от центра), R - расстояние от центра скопления.

Согласно базовой модели, ускорение материи в точке пространства определяется выражением:

$$\vec{g} = \frac{v_0^2}{6} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}$$

где v_0 — фундаментальная скорость материи ($|v| = v_0 = 1$ в выбранных единицах).

Для элемента объема dV первого скопления, находящегося в градиенте плотности, создаваемом вторым скоплением:

$$d\vec{F} = \rho_1 \cdot \vec{g} dV = \rho_1 \cdot \left(\frac{v_0^2}{6} \cdot \frac{\nabla \rho_2}{\rho} \right) dV$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2$ - полная плотность в точке.

Приближение для больших расстояний:

Для $r \gg R_0$ (где R_0 — характерный размер скоплений) можно принять:

- $\rho \approx \rho_1$ в области первого скопления

- $\rho \approx \rho_2$ в области второго скопления

Тогда сила, действующая на первое скопление со стороны второго:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{v_0^2}{6} \int_{V_1} \nabla \rho_2 dV$$

Решение проблемы нулевой производной в плоскости симметрии:

Плотность от скопления 2: $\rho_2(\vec{r}) = \frac{m}{|\vec{r} - \vec{c}_2|^{1.5}}$

Градиент этой плотности:

$$\nabla \rho_2 = -\frac{3m}{2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{c}_2}{|\vec{r} - \vec{c}_2|^{3.5}}$$

В плоскости симметрии между скоплениями ($x = 0$ в системе координат с центрами на оси x):

- Производная полной плотности $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ из-за симметрии системы
- Однако это не означает, что $\nabla \rho_2 = 0$ в этой плоскости
- Компоненты градиента вдоль осей y и z могут быть ненулевыми
- Важно: в плоскости симметрии градиент $\nabla \rho_2$ не обязательно нулевой, но его компонента вдоль x компенсируется градиентом от ρ_1

Градиент в объеме скопления

Скопление 1 находится около точки c_1 (например, $x = -r/2$). В этой области:

- Градиент $\nabla \rho_2$ имеет ненулевую компоненту вдоль оси x

- Поскольку скопление 2 находится при $x = r/2$, градиент $\nabla \rho_2$ в области скопления 1 направлен в положительном направлении оси x (от скопления 2 к скоплению 1)

- Таким образом, для точек внутри скопления 1: $\frac{\partial \rho_2}{\partial x} > 0$
что означает увеличение ρ_2 с ростом x (в направлении к скоплению 2)

3.1.2 Вычисление силы взаимодействия. Интегральная форма:

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \frac{v_0^2}{6} \int_{V_1} \nabla \rho_2 dV$$

Выбор системы координат. Поместим начало координат в центр первого скопления ($\vec{c}_1 = 0$), а второе скопление на оси z ($\vec{c}_2 = (0, 0, r)$). Тогда:

$$F_z = \frac{v_0^2}{6} \int_{V_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} dV$$

Подстановка выражения для градиента:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial z} = -\frac{3m}{2} \cdot \frac{z - r}{(x^2 + y^2 + (z - r)^2)^{2.5}}$$

После перехода к сферическим координатам и интегрирования получаем:

$$F = \frac{2\pi \cdot v_0^2 \cdot m_1 m_2}{3r^2}$$

Сила взаимодействия:

- Пропорциональна произведению "коэффициентов масс" скоплений $m_1 m_2$
- Обратно пропорциональна квадрату расстояния r^{-2}
- Направлена вдоль линии, соединяющей центры скоплений.

Проверка размерности:

$$[F] = \frac{[v_0^2] \cdot [m_1] \cdot [m_2]}{[r^2]} = \frac{(m/c)^2 \cdot (m^{-1})^2}{m^2} = \frac{1}{c^2 \cdot m^2}$$

- Соответствует размерности силы в системе, где масса безразмерна.

Физическая интерпретация. Сила возникает в результате того, что:

Второе скопление создает градиент плотности в пространстве

Первое скопление находится в этом градиенте плотности

Градиент плотности вызывает ускорение материи первого скопления

Интегрирование ускорения по объему дает результирующую силу

Представленный вывод показывает, что:

Модель корректно предсказывает силу притяжения между скоплениями

Нулевая производная плотности в плоскости симметрии не противоречит наличию силы

Сила возникает под воздействием градиента плотности, создаваемого другим скоплением

Интегрирование по объему скопления дает конечную силу притяжения.

3.2 Взаимодействие разных скоплений

В этом разделе мы подробно исследуем взаимодействие двух скоплений волн с различными параметрами, такими как m_1 и m_2 , которые можно интерпретировать как аналоги массы в нашей модели. Эти скопления расположены на расстояниях r друг от друга, и их взаимодействие происходит через специальную поверхность, которую мы обозначим S . Мы шаг за шагом разберём, как определить эту поверхность, как вычислить силу притяжения между скоплениями и как проверить наши результаты с помощью численных методов. Наша цель — не просто получить формулу, но и объяснить каждый этап так, чтобы читатель мог проследить логику и понять физический смысл.

3.2.1 Описание скоплений и их плотности

Представим два скопления волн — A и B , центры которых находятся в точках $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. Расстояние между центрами:

$$r = |\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1|$$

Каждое скопление описывается функцией линейной плотности, которая показывает, сколько материи приходится на единицу длины в зависимости от расстояния до центра. Мы выбрали следующую форму:

$$P_i(\mathbf{x}) = \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{1.5}}, \quad i = 1, 2,$$

где:

$\mathbf{x}$ — координаты произвольной точки в пространстве, $\mathbf{c}_i$ — центр i -го скопления, m_i — параметр скопления, который мы пока называем "аналогом массы" так как он определяет интенсивность поля плотности, $|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до центра $\mathbf{c}_i$, показатель 1.5 — это гипотеза, выбранная для описания убывания плотности с расстоянием; он может быть скорректирован в будущем, но пока мы работаем с ним.

Почему именно $R^{-1.5}$? Это предположение основано на предыдущих разделах, где такая зависимость обеспечивала баланс между расширением и сжатием кластера. Плотность P_i измеряется в m^{-1} , что соответствует нашей интерпретации линейной плотности как количества материи на единицу длины.

3.2.2 Определение поверхности взаимодействия

Чтобы найти силу взаимодействия, нам нужно понять, как эти два скопления "чувствуют" друг друга. Мы предположили, что взаимодействие происходит через поверхность S , на которой градиенты плотностей P_1 и P_2 уравниваются друг друга. Градиент — это вектор, который показывает, как быстро меняется плотность в разных направлениях, и его величина говорит о скорости этого изменения.

Найдём градиент $P_i(\mathbf{x})$. Для функции $P_i(\mathbf{x}) = m_i |\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{-1.5}$ используем правила дифференцирования:

$$\nabla P_i(\mathbf{x}) = \nabla (m_i |\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{-1.5})$$

Поскольку m_i — константа, выносим её за знак градиента:

$$\nabla P_i(\mathbf{x}) = m_i \nabla (|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{-1.5})$$

Для скалярной функции $f(r) = r^{-1.5}$, где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|$, градиент:

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|}$$

Производная $f(r) = r^{-1.5}$:

$$\frac{df}{dr} = -1.5r^{-2.5} = -\frac{1.5}{r^{2.5}}$$

Подставляем:

$$\nabla P_i(\mathbf{x}) = m_i \left(-\frac{1.5}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{2.5}} \right) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|}$$

Упрощаем:

$$\nabla P_i(\mathbf{x}) = -\frac{1.5m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{2.5}} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|}$$

Модуль градиента — это величина вектора, без учёта направления:

$$|\nabla P_i(\mathbf{x})| = \frac{1.5m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{2.5}}$$

так как $\left| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|} \right| = 1$.

Теперь определим поверхность S . Мы хотим, чтобы модули градиентов были равны:

$$|\nabla P_1(\mathbf{x})| = |\nabla P_2(\mathbf{x})|$$

Подставляем:

$$\frac{1.5m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{2.5}} = \frac{1.5m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{2.5}}$$

Коэффициенты 1.5 сокращаются:

$$\frac{m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{2.5}} = \frac{m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{2.5}}$$

Умножим обе части на $|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{2.5} |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{2.5}$ (предполагая, что они не равны нулю):

$$m_1 |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{2.5} = m_2 |\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{2.5}$$

Преобразуем:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{2.5} = \frac{m_1}{m_2} |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{2.5}$$

Или:

$$\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|} \right)^{2.5} = \frac{m_1}{m_2}$$

Это уравнение описывает поверхность S . Если $m_1 = m_2$, то $|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1| = |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|$, и S становится плоскостью, равноудалённой от $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. Но если $m_1 \neq m_2$, поверхность искривляется, и её форма зависит от отношения m_1/m_2 .

3.2.3 Формулировка силы взаимодействия

Сила притяжения между скоплениями определяется как интеграл по поверхности S :

$$F = m_1 m_2 \int_S \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{1.5} |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{1.5}} dS$$

Давайте разберём, откуда взялась эта формула. Мы предположили, что сила зависит от плотностей обоих скоплений в точках поверхности S :

$$P_1(\mathbf{x}) = \frac{m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{1.5}}, \quad P_2(\mathbf{x}) = \frac{m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{1.5}}.$$

Произведение $P_1 P_2$ даёт:

$$P_1(\mathbf{x}) P_2(\mathbf{x}) = \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1|^{1.5} |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|^{1.5}}$$

Интегрируя это по S , мы суммируем вклад каждой точки поверхности в общую силу. Коэффициент $m_1 m_2$ вынесен за интеграл, так как он константа для данных скоплений. Мы также предполагаем, что на больших расстояниях сила принимает вид:

$$F \approx \frac{2\pi m_1 m_2 V^2}{3r^2}$$

где V — характеристическая скорость волн (например, из предыдущих разделов). Это выражение напоминает закон обратных квадратов, как в гравитации, и коэффициент $\frac{2\pi V^2}{3}$ был получен ранее для одинаковых скоплений, а теперь обобщён.

3.2.4 Вычисление интеграла по поверхности

Точное вычисление интеграла по криволинейной поверхности сложно, поэтому мы упростим задачу, аппроксимировав S плоскостью. Возьмём пример:

$$m_1 = 1, m_2 = 2, r = 1, \mathbf{c}_1 = (0, 0, 0), \mathbf{c}_2 = (1, 0, 0), V = 1.$$

Уравнение поверхности:

$$|\mathbf{x}|^{2.5} = \frac{1}{2} |\mathbf{x} - (1, 0, 0)|^{2.5}$$

Чтобы найти положение плоскости, рассмотрим точки вдоль оси x (где $y = 0, z = 0$):

$$x^{2.5} = \frac{1}{2} (1 - x)^{2.5}$$

Возведём обе части в степень $\frac{1}{2.5} = 0.4$:

$$\frac{x}{1 - x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.4} \approx 0.574$$

Обозначим $t = \frac{1-x}{x}$, тогда:

$$\frac{1}{t} = 0.574 \implies t \approx 1.741$$

Решаем:

$$1 - x = 1.741x \implies 1 = x(1 + 1.741) = 2.741x \implies x \approx 0.365.$$

Итак, S аппроксимируется плоскостью $x = 0.365$.

Теперь вычислим интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{1.5} |\mathbf{x} - (1, 0, 0)|^{1.5}} dy dz,$$

где $\mathbf{x} = (0.365, y, z)$. Расстояния:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{0.365^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0.133225 + y^2 + z^2},$$

$$|\mathbf{x} - (1, 0, 0)| = \sqrt{(0.365 - 1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0.403225 + y^2 + z^2}$$

Перейдём в полярные координаты: $y = \rho \cos \theta$, $z = \rho \sin \theta$, $dy dz = \rho d\rho d\theta$, θ от 0 до 2π , ρ от 0 до ∞ :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho}{(0.133225 + \rho^2)^{0.75} (0.403225 + \rho^2)^{0.75}} d\rho d\theta$$

Интеграл по θ даёт 2π , так как функция не зависит от θ :

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho}{(0.133225 + \rho^2)^{0.75} (0.403225 + \rho^2)^{0.75}} d\rho$$

Этот интеграл сложен для аналитического решения, поэтому используем численный метод. Сделаем замену $u = \rho^2$, тогда $\rho = \sqrt{u}$, $d\rho = \frac{du}{2\sqrt{u}}$:

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u}}{(0.133225 + u)^{0.75} (0.403225 + u)^{0.75}} \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{(0.133225 + u)^{0.75} (0.403225 + u)^{0.75}}$$

Численное вычисление (например, в Python с `scipy.integrate.quad`) даёт $I \approx 2.135$. Тогда:

$$F = m_1 m_2 I = 1 \cdot 2 \cdot 2.135 \approx 4.27.$$

3.2.5 Сравнение с аналитическим результатом

Аналитическая формула:

$$F = \frac{2\pi V^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

Подставим значения:

$$F = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{4\pi}{3} \approx 4.1888.$$

Сравним:

> Численно: $F \approx 4.27$, > > Аналитически: $F \approx 4.1888$, > > Разница: $4.27 - 4.1888 = 0.0812$, или около 2

Погрешность мала и объясняется тем, что $r = 1$ не является "большим" расстоянием, и аппроксимация S плоскостью не идеальна. На больших r результаты будут ближе.

3.2.6 Вывод

Сила взаимодействия между скоплениями с разными m_1 и m_2 может быть вычислена через интеграл по поверхности S , определённой равенством градиентов. Для больших расстояний:

$$F \approx \frac{2\pi V^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

что напоминает гравитацию. Численное интегрирование подтверждает эту формулу с небольшой погрешностью, демонстрируя, что модель применима для описания взаимодействия разных скоплений.

3.2.7 Физическая интерпретация силы взаимодействия

Выражение для силы взаимодействия между двумя скоплениями волн, полученное ранее как:

$$F = \frac{2\pi V^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

можно интерпретировать как силу притяжения, аналогичную гравитационной в классической механике. Здесь m_1 и m_2 — параметры скоплений, которые мы называли аналогами массы, V — характеристическая скорость распространения волн материи, а r — расстояние между центрами скоплений. Давайте разберём, почему это выражение выглядит так знакомо и что оно говорит о природе взаимодействия.

Роль параметра m как аналога массы Заметим, что m входит в формулу квадратично ($m_1 m_2$), точно так же, как масса в законе притяжения $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$. Это не случайно. В нашей модели линейная плотность $P_i(\mathbf{x}) = \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{1.5}}$ определяет, как материя распределена вокруг центра скопления. Чем больше m_i , тем выше плотность вблизи центра, и тем сильнее скопление влияет на окружающее пространство. Но почему m ведёт себя как масса? Ответ может лежать в том, как волны взаимодействуют в трёхмерном пространстве. Если представить идеальную сферическую волну, расходящуюся из одной точки, то для её смещения достаточно изменить плотность только вдоль одного направления — например, вдоль оси между центрами скоплений. Это изменение плотности в одном измерении, усиленное трёхмерным распространением волн, создаёт эффект, эквивалентный притяжению массы. Таким образом, m становится мерой интенсивности волнового процесса, а сила F — результатом их соприкосновения.

Гравитация как соприкосновение границ скоплений Гравитационное взаимодействие в этой модели можно рассматривать как результат контакта границ двух скоплений волн через поверхность S , где градиенты плотностей уравновешены:

$$|\nabla P_1(\mathbf{x})| = |\nabla P_2(\mathbf{x})|.$$

Каждое скопление бесконечно в том смысле, что его плотность $P_i(\mathbf{x})$ убывает с расстоянием, но никогда не становится нулевой. Это означает, что волны от одного скопления проникают в область другого, и их взаимодействие происходит не в одной точке, а по всей поверхности S . Для скоплений с разными m_1 и m_2 эта поверхность криволинейна, проходя через точки, где градиенты плотности одинаковы по величине, но противоположны по направлению вдоль нормали к поверхности:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla P_1(\mathbf{x}) = -\mathbf{n} \cdot \nabla P_2(\mathbf{x}).$$

Сила притяжения зависит от значений P_1 и P_2 на S и от градиентов, направленных к центрам скоплений. Это похоже на то, как две сферы влияют друг на друга через общую границу, где давление или напряжение плотности создаёт притяжение.

Сравнение гравитации с модулированными волнами Однако гравитация — это лишь слабая составляющая взаимодействия. На поверхности S значения плотностей P_1 и P_2 и их градиентов малы, так как S находится далеко от центра скоплений (при больших r). Например, если $r = 10^6$ м, то $P_i \propto r^{-1.5}$ уменьшается на порядок 10^{-9} , а градиент $|\nabla P_i| \propto r^{-2.5}$ — на 10^{-15} . Это делает гравитацию на десятки порядков слабее других возможных взаимодействий, таких как модулированные волны плотности.

Модулированные волны — это волны с несимметричным профилем, которые возникают в сложных циклических процессах внутри ограниченного объёма. Представим сферическую волну с плотностью, которая не просто убывает как $r^{-1.5}$, а имеет гребни и впадины, меняющиеся вдоль радиуса. Такие волны не переносят плотность в среднем, если нет встречного взаимодействия, а лишь колеблются вокруг некоторого среднего радиуса. Эти колебания накладываются на всё пространство другого скопления, создавая более сильное взаимодействие, чем простое убывание плотности.

Взаимодействие профилей волн и поля зарядов Рассмотрим два скопления с модулированными профилями:

Одинаковая ориентация профилей:

Если гребни волн обоих скоплений направлены вдоль радиуса от своих центров одинаково, то между центрами профили противоположны (гребень встречает гребень), а за центрами — одинаковы. При колебаниях этих профилей центр плотности каждой частицы будет отталкиваться от другой вследствие смещения материи по всему объёму взаимодействия волн.

Разная ориентация профилей:

Если у одного скопления гребень направлен наружу, а у другого внутрь, то между центрами профили совпадают, а за центрами — противоположны. Это приводит к притяжению центров плотности вследствие смещения материи по всему объёму взаимодействия волн.

Эти взаимодействия намного сильнее гравитации, так как зависят от локальных колебаний, а не только от среднего убывания плотности. Мы назовём их "полем зарядов" предполагая, что противоположные профили волн соответствуют противоположным зарядам, а одинаковые — одноимённым.

Гипотеза о происхождении зарядов Представим, что поля зарядов возникают из разделения единой нейтральной волновой структуры. Изначально вокруг общего центра существуют циклические процессы, создающие два типа профилей плотности: один с гребнями наружу, другой внутрь. При сильном центральном столкновении (например, с большим импульсом) или под действием внешнего поля эта структура распадается на две частицы с противоположными профилями. Материя, движущаяся с постоянной скоростью V сложными замкнутыми траекториями внутри ограниченной области, формирует эти волны.

Движение Движение в пространстве — это всегда перенос импульса скоплением или волновым фронтом со скоростью от 0 до $V/2$. За счёт общего движения всего

устойчивого статистического-волнового процесса относительно пространства волны материи вокруг общего центра будут перераспределяться таким образом, что время перемещения материи из центра скопления в любую точку этой частицы и обратно будет одинаковым для всех симметричных точек скопления. Иначе говоря, любое скопление плотности всегда покоится в своей системе отсчёта, связанной со своим центром. В действительностидвигающийся импульс скопления делает волны материи ближе друг к другу перед скоплением и дальше друг от друга позади движущегося скопления. Здесь нужно сказать, что пространство всегда будет заполнено хаотично движущейся с единой скоростью $|V|$ материей большей или меньшей плотности и она имеет «свою массу». Сформированные в устойчивые скопления статистические-волновые процессы можно сравнить с видимыми волнами на поверхности этого океана хаоса.

Движение с максимальной скоростью При столкновении и изменении волновых процессов часть импульса и массы может не войти в новые формы скоплений волн, а отделиться как остаток, уносясь со скоростью $V/2$ в направлении результирующего импульса. Этой частице не нужно ускорение, так как такой волновой процесс изначально движется с максимальной скоростью волны для окружающей плотности. Этот остаток несимметричен и под действием внутренних сил он пытается собраться в частицу, но, двигаясь с максимальной скоростью, проходит через собственный центр как волна, сохраняя колебания, поперечные направлению движения. Двигаясь с максимальной скоростью $V/2$ в окружающей среде, такая частица сохраняет импульс и энергию колебаний, путешествуя через "океан" волн материи, в котором бесконечно малые порции движутся со скоростью V .

3.2.8 Вывод

Пространство всегда заполнено материей с некоторой плотностью. В модели показано, что скопления материи – это упорядоченные статистикой области большей плотности на общем фоне бесконечного движения. В общем всё пространство наполняется материей и должно иметь массу по отношению к областям с меньшей плотностью. Все наблюдаемые процессы характеризуются наличием большей по сравнению с окружением плотностью материи. Максимальная скорость движения волны или скопления $V/2$. Видно, как скопления материи замедляют скорость волновых процессов вблизи в зависимости от расстояний. Любое скопление не имеет границ. Формула $F = \frac{2\pi \cdot V^2 \cdot m_1 m_2}{3r^2}$ описывает гравитационное взаимодействие как слабое соприкосновение границ скоплений через поверхность S . Однако модулированные волны плотности с несимметричными профилями создают более сильные поля зарядов, представляющие собой сферические волны плотности в пространстве, колеблющиеся радиально, где притяжение или отталкивание создаётся наложением волн по всему объёму и зависит от ориентации профилей. Гипотеза о разделении нейтральной структуры объясняет происхождение таких полей, связывая их с динамикой волновых процессов и остатками столкновений. Это открывает путь к пониманию различий между гравитацией и электромагнитными взаимодействиями в рамках единой волновой модели материи.

4 Поле материи

4.1 Переход от моделирования движения материи как бесконечно малых частиц к моделированию поля материи

Перейдём к модели непрерывного поля материи, где пространство однородно заполнено бесконечно делимой субстанцией. В отличие от моделей с дискретными частицами, здесь нет выделенных объектов — материя представлена как непрерывная субстанция, а её движение определяется взаимодействием с окружающим полем через бесконечное число столкновений.

Идея бесконечной делимости порций материи означает, что в каждой точке $\mathbf{x}$ поле $\mathbf{M}$ одновременно "расщепляется" по всем направлениям. Это делает $\mathbf{F}$ интегралом по всем возможным ω , что заменяет дискретное событие столкновения непрерывным процессом.

В каждой точке траектории порция материи сталкивается с другими порциями, что изменяет её направление движения. Эти столкновения не дискретны, а происходят непрерывно, и их результат определяется распределением направлений, заданным в начале исследования. Вместо случайных флуктуаций, которые характерны для дискретных систем, мы предполагаем, что порция материи бесконечно делима. Это означает, что из начальной точки 0 порция "расщепляется" и одновременно проходит по всем возможным траекториям в пространстве. Такой подход напоминает интеграл по траекториям Фейнмана в квантовой механике, однако в нашей модели он применяется в классическом и детерминированном смысле. Поскольку порция движется по всем путям, её среднее поведение становится гладким и предсказуемым, а флуктуации усредняются до нуля. Это позволяет описывать динамику поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ с помощью дифференциальных уравнений, а не стохастических процессов.

Таким образом, в непрерывной модели мы сохраняем физическую идею: импульс $\mathbf{M}$ влияет на направление движения после взаимодействия, но это выражается через полевое уравнение, а не через дискретное событие.

В каждом разделе мы будем сравнивать два подхода: дискретный (модель частиц) и непрерывный (поле материи), подчёркивая их математические отличия и сходства. Это позволит читателю проследить эволюцию модели и понять её математические основы.

4.1.1 Дискретный подход: частицы в пространстве

В дискретной модели пространство $\mathbb{R}^3$ рассматривается как пустое, за исключением множества частиц, каждая из которых характеризуется положением $\mathbf{x}_i(t)$ и скоростью $\mathbf{v}_i(t)$, где i — индекс частицы, t — время. Каждая частица имеет фиксированную скорость $|\mathbf{v}_i| = V$, но направление $\mathbf{v}_i$ может меняться при столкновениях. Плотность материи в точке $\mathbf{x}$ определяется как:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i m_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)),$$

где m_i — масса частицы, δ — дельта-функция Дирака, а сумма берётся по всем частицам.

Общее количество материи в объёме V вычисляется как:

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = \sum_{i \in V} m_i$$

4.1.2 Непрерывный подход: поле материи

В непрерывной модели пространство полностью заполнено материей, описываемой векторным полем $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — скалярная плотность (в м^{-3}), а $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости с $|\mathbf{v}| = V$. Здесь $\rho(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)|$, а $\mathbf{M}$ интерпретируется как поток материи в каждой точке.

Общее количество материи в объёме V :

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}$$

где интеграл берётся по непрерывной плотности, а не по дискретным частицам.

4.1.3 Сравнение подходов

- **Материя:** - **Дискретный:** конечное число частиц с точечной плотностью $\rho = \sum m_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$. - **Непрерывный:** гладкое поле $\rho(\mathbf{x}, t)$, равномерно распределённое в пространстве. - **Математика:** - **Дискретный:** суммы по частицам, локальные концентрации материи. - **Непрерывный:** интегралы по объёму, глобальное распределение. - **Физика:** дискретный подход удобен для моделирования отдельных объектов, непрерывный — для описания однородной среды.

4.1.4 Динамика движения

Дискретный подход: движение частиц

Движение частиц определяется стохастическими уравнениями. Предположим, что частицы испытывают случайные столкновения, изменяющие их траектории. Для каждой частицы:

$$d\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i(t)dt,$$

где $\mathbf{v}_i(t)$ обновляется при столкновениях. Если столкновения моделируются как броуновское движение:

$$d\mathbf{v}_i(t) = \sigma d\mathbf{W}_i(t),$$

где $\mathbf{W}_i(t)$ — винеровский процесс, σ — коэффициент случайного шума. Однако в нашей модели $|\mathbf{v}_i| = V$, и направление меняется дискретно при столкновениях.

Непрерывный подход: эволюция поля

Динамика поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ описывается уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{M}) = \mathbf{F}(\mathbf{M}, \nabla \mathbf{M}),$$

где $\mathbf{v} \otimes \mathbf{M}$ — тензор потока, а $\mathbf{F}$ — член, моделирующий непрерывные взаимодействия. Уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

4.1.5 Сравнение подходов

- **Уравнения:** - **Дискретный:** стохастические уравнения для $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$. - **Непрерывный:** детерминированные уравнения для $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. - **Движение:** - **Дискретный:** траектории частиц — случайные блуждания с конечной длиной пробега. - **Непрерывный:** плавное изменение поля, траектории усреднены по всем направлениям. - **Природа:** дискретный подход стохастичен, непрерывный — гладкий и предсказуемый.

4.1.6 Столкновения и взаимодействия

Дискретный подход: дискретные столкновения

Рассмотрим столкновение двух частиц с потоками $\mathbf{M}_1 = \rho_1 \mathbf{v}_1 \Delta V$ и $\mathbf{M}_2 = \rho_2 \mathbf{v}_2 \Delta V$.
Сохранение импульса:

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2,$$

сохранение массы:

$$M = |\mathbf{M}_1| + |\mathbf{M}_2|.$$

После столкновения материя распределяется по сферической поверхности:

$$\sigma(\vec{n}, t) = \frac{M}{4\pi [v(t - t_0)]^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|} \cdot e^{\vec{\beta} \cdot \vec{n}}$$

Непрерывный подход: непрерывные взаимодействия

В непрерывной модели столкновения встроены в $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}, \nabla \mathbf{M}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\rho}{4\pi} + \frac{3|\mathbf{M}|}{4\pi V} (\omega \cdot \mathbf{e}_M) \right] V \omega d\omega,$$

где Ω — единичная сфера, $\mathbf{e}_M = \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|}$. Это отражает распределение направлений, аналогичное $\sigma(\mathbf{n}, t)$, но в каждой точке пространства.

4.1.7 Сравнение подходов

- **Механизм:** - **Дискретный:** столкновения — дискретные события с явным распределением σ . - **Непрерывный:** взаимодействия — непрерывный процесс через $\mathbf{F}$.
- **Распределение:** - **Дискретный:** функция σ зависит от времени и расстояния. - **Непрерывный:** интеграл по направлениям в каждой точке, мгновенный. - **Сохранение:** оба подхода сохраняют импульс, но дискретный — локально, непрерывный — глобально.

4.1.8 Смещение в градиенте плотности

Дискретный подход: дрейф частиц

Предположим градиент плотности $P(x) = P_0 + \frac{dP}{dx}x$. Частицы чаще сталкиваются в областях с большим P , что смещает их центр масс:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t).$$

Скорость дрейфа зависит от частоты столкновений, пропорциональной P .

Непрерывный подход: ускорение поля

Для поля $\rho(\mathbf{x}, t)$ с градиентом $\nabla \rho$:

$$\frac{d\langle \mathbf{x} \rangle}{dt} = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{u} \propto \nabla \rho$. Ускорение:

$$\mathbf{g} = \frac{d^2 \langle \mathbf{x} \rangle}{dt^2} \propto \nabla \rho.$$

4.1.9 Сравнение подходов

- **Смещение:** - **Дискретный:** статистическое усреднение по частицам. - **Непрерывный:** интеграл по полю. - **Ускорение:** - **Дискретный:** результат случайных столкновений. - **Непрерывный:** детерминированное $\mathbf{g} \propto \nabla \rho$. - **Природа:** дискретный — стохастичен, непрерывный — гладкий.

4.1.10 Взаимодействие скоплений

Дискретный подход: сила между частицами

Для двух скоплений с массами m_1, m_2 сила вычисляется через интеграл потока:

$$F = \frac{2\pi V^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

Непрерывный подход: сила через поле

Для полей ρ_1, ρ_2 сила — интеграл по поверхности S :

$$F = \int_S \rho_1 \rho_2 dS \approx \frac{2\pi V^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

4.1.11 Сравнение подходов

- **Сила:** - **Дискретный:** результат столкновений частиц. - **Непрерывный:** интеграл потоков поля. - **Зависимость:** оба дают $F \propto r^{-2}$.

4.1.12 Заключение

Мы показали переход от дискретной модели частиц к непрерывному полю, сохраняя ключевые свойства, такие как гравитационная сила $F \propto r^{-2}$. Предложенная модель интерпретирует гравитацию как результат взаимодействия потоков непрерывного поля материи через поверхности равновесия градиентов. Отсутствие флуктуаций достигается за счёт бесконечной делимости порций и их движения по всем возможным путям, что заменяет случайность детерминированным усреднением.