Гравитационная основа квантовой теории

Васильев Н.С.*

В данной работе предпринята попытка обосновать базовые постулаты квантовой механики с точки зрения гравитационного взаимодействия. Предложена интерпретация известных законов квантовой теории на основе уравнения движения в гравитационном поле, уравнений Эйнштейна и др.

Идея о взаимосвязи теории гравитационного поля и квантовой теории известна (см., например, обзор [1]) и сегодня достаточно активно развивается. Речь идет, прежде всего, о статистическом потенциале, предложенным Давидом Бомом [2]. На основе потенциала Бома рассматривается переход от квантовой механики к гравитационному взаимодействию [1, 3].

В данной работе предлагается альтернативный переход от уравнения движения в гравитационном поле к квантовомеханическим операторам и от уравнений Эйнштейна к уравнению Шредингера.

Рассмотрим пространство Римана, для которого задан метрический тензор (g_{ik}) и аффинная связность (Γ^i_{km} – коэффициенты связности или символы Кристоффеля). Кручение равно нулю ($\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$) [4-5]. Известно, что движение частицы в гравитационном поле определяется принципом наименьшего действия [4].

1 Операторы квантовой теории

Дифференциал 4-импульса частицы в криволинейных координатах можно представить в следующем виде [4]

$$dp^i + \Gamma^i_{kl} p^k dx^l = 0, \tag{1.1}$$

Рассматривая ковариантную дивергенцию выражения (1.1), получим

$$dp^l + \Gamma^l_{kl} p^k dx^l = 0, \tag{1.2}$$

где $\Gamma^l_{kl} = \frac{1}{2} g^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k}$ и g – определитель метрического тензора [4].

В этом случае выражение (1.2) примет вид

$$dp^l = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} p^k dx^l \tag{1.3}$$

Умножив правую и левую часть выражения (1.3) на p_k и учитывая, что $p_k p^k = m^2 c^2$ [4] ($p_k dp^k = -p^k dp_k$), имеем

$$p_k dp^l = -\frac{m^2 c^2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} dx^l \tag{1.4}$$

Переходя далее к 4-объему ($d\Omega' = \sqrt{-g} d\Omega$, $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$), получим

$$mc \frac{dx^l}{ds} dp_k = \frac{mc}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} \frac{mc}{\sqrt{-g}} \frac{dx^l}{dx^0} d\Omega' \tag{1.5}$$

где $p^i = mcu^i$, $u^l = dx^l/ds$ – 4-скорость и $m = m_a \delta$ – масса, которая равна нулю везде кроме той точки, где находится точечная масса, например, одночастичной системы (δ - дельта-функция, нормированная по объему к единице) [4].

Преобразуем выражение (1.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{ds} &= \frac{mc}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} \frac{d\Omega}{dx^0} = \\ &= \frac{mc}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

В левой части полученного уравнения (1.6) производная $\frac{dp_k}{ds} = mc \frac{du_k}{ds}$, где в свою очередь $\frac{du_k}{ds}$ является 4-ускорением [4].

Далее воспользуемся соотношениями, которые устанавливают связь между метрикой реального пространства и метрикой четырехмерного пространства-времени [4]:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}},$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ – трехмерный метрический тензор, связанный с геометрическими свойствами пространства. Определители выражаются соотношением $\sqrt{-g} = \sqrt{g_{00}\gamma}$ [4]. Если $g_{0\alpha} = 0$ (синхронизация часов), то $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$. В этом случае компонент метрического тензора g_{00} и γ рассмотрим как временной и пространственный соответственно, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial x^\alpha},$$

где x^α – пространственные координаты и координата $x^0 = ct$.

Указанное разделение на пространственную и временную компоненту метрического тензора возможно только в определенных системах отсчета [4]. Используя

*nikolasvs@mail.ru

их, можно на основе интеграла вдоль пространственной кривой ввести понятие о расстоянии между телами, несмотря на то, что в общей теории относительности определение расстояния между телами не имеет смысла [4]. Здесь переход к специальным системам отсчета требуется для отделения временной компоненты метрического тензора от пространственной (например, при выводе уравнения Шредингера, см. пункт 2) в остальных случаях (при рассмотрении волнового уравнения, уравнения Дирака и др., см. пункт 2) такой необходимости нет.

Согласно изложенным условиям и на основании (1.6), учитывая, что $p_k = (E/c, -\mathbf{p})$, получим следующее выражение ($\bar{p}_k = u_k$):

$$\frac{d\bar{p}_\alpha}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}dx^1dx^2dx^3 \qquad (1.7)$$

Сокращение массы в (1.7) можно обосновать тем, что уравнения движения частицы в гравитационном поле не должны содержать массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы. Это требование, как известно, является основным свойством гравитационного поля [4].

Необходимо отметить, что метрический тензор в римановом пространстве задается достаточно произвольно за исключением нескольких основных условий ($det|g_{ik}| \neq 0$, $g_{ik} = g_{ki}$ и др.) [5]. Однако в теории относительности мнимые координаты обычно используются лишь как форма записи [4-6]. Несмотря на это гильбертово пространство, представляющее, как известно, обобщение евклидова пространства на бесконечномерный случай, можно задать аналогично касательному аффинному пространству. Таким образом локализовав гильбертово пространство в криволинейной системе координат, его можно "переносить" от точки к точке с помощью символов Кристоффеля. Обоснованность этого допущения заключается в известной формулировке риманова пространства, согласно которой в каждое касательное к нему пространство внесена евклидова метрика [5]. Последняя в свою очередь может быть расширена до гильбертова пространства. Предложенный подход позволяет распространить известные постулаты квантовой теории на метрический тензор и предположить, что $\sqrt{-g}$ может играть роль волны де Бройля (ψ). Проведя (пусть и несколько искусственно) статистическую интерпретацию определителя $\sqrt{-g}$, необходимо перейти к операторной трактовке движения частицы в гравитационном поле. Поэтому согласно (1.7) определим некоторый оператор вида

$$-\int \psi^* i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}dx^1dx^2dx^3 \qquad (1.8)$$

(интегралы взяты по всей области изменения x^1, x^2, x^3, для временной координаты условия аналогичные).

Обобщая выражение (1.8) на 4-мерный случай, отметим, что в криволинейных координатах четырехмерный оператор ($\hat{\partial}_n = -i\partial_n$) переходит в свою ковариантную форму ($\hbar = 1$), которая имеет следующий вид $\hat{D}_n = -i(\partial_n + \Gamma^k_{nk})$. Это можно показать на основе импульсного представления скалярных функций поля $\psi(x_n)$. Известно [9], что импульсная амплитуда $\psi(k_n)$ удовлетворяет уравнению вида (массовый член равен нулю)

$$\gamma^n k_n \psi(k_n) = 0 \qquad (1.9)$$

Выражение (1.9) следует из уравнения Дирака (γ^n – соответствующие матрицы) с учетом, что ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию [4, 9]. С помощью четырехмерного интеграла Фурье амплитуду $\psi(k_n)$ можно представить, как

$$\psi(k_n) = \int \psi(x_n)e^{-ik_nx^n}\sqrt{-g}d\Omega, \qquad (1.10)$$

где $\sqrt{-g}d\Omega$ – 4-объем в криволинейных координатах (нормировочный множитель фурье-преобразования не указан). Подставляя выражение (1.10) в (1.9), получим

$$\begin{aligned}\gamma^n k_n\psi(k_n) &= \gamma^n k_n \int \psi(x_n)e^{-ik_nx^n}\sqrt{-g}d\Omega = \\ &= \gamma^n \int \psi(x_n)k_n e^{-ik_nx^n}\sqrt{-g}d\Omega\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Произведение $k_ne^{-ik_nx^n}$ можно заменить на $i\partial_n(e^{-ik_nx^n})$, тогда

$$\gamma^n k_n\psi(k_n) = \gamma^n \int \sqrt{-g}\psi(x_n)i\partial_n(e^{-ik_nx^n})d\Omega \qquad (1.12)$$

Проводя интегрирование по частям полученного выражения (1.12) и предполагая, что скалярные функции поля $\psi(x_n)$ и их производные обращаются в нуль на границах интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}\gamma^n k_n\psi(k_n) &= \gamma^n \int e^{-ik_nx^n}(\hat{\partial}_n\sqrt{-g}\psi(x_n))d\Omega = \\ &= \gamma^n \int e^{-ik_nx^n}(-i\psi(x_n)\partial_n\sqrt{-g} - i\sqrt{-g}\partial_n\psi(x_n))d\Omega = \\ &= \gamma^n \int e^{-ik_nx^n}\sqrt{-g}(-i\partial_n - i\Gamma^k_{nk})\psi(x_n)d\Omega = \\ &= \int e^{-ik_nx^n}(\hat{D}_n\psi(x_n))\sqrt{-g}d\Omega\end{aligned}$$

Видно, что для $\hat{D}_n$ выполняется известное перестановочное соотношение (F^n – 4-вектор), а именно

$$F^n\hat{D}_n - \hat{D}_nF^n = iD_nF^n \qquad (1.13)$$

Взаимосвязь определителя метрического тензора ($\sqrt{-g}$) с волновой функцией (ψ) можно упрочить с помощью ковариантной дивергенции (D_n), операторная форма которой была получена выше. Для этого рассмотрим следующее уравнение:

$$D_n\Gamma^{kn}_k = \partial_n\Gamma^{kn}_k + \Gamma^l_{nl}\Gamma^{kn}_k = 0 \qquad (1.14)$$

Подставим в выражение (1.14) коэффициенты связности в виде $\Gamma^n_{kn} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g}$:

$$D_n\Gamma^{kn}_k = \partial_n\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^n\sqrt{-g}\right) + \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\sqrt{-g}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^n\sqrt{-g}\right) = 0 \quad (1.15)$$

Раскрывая производную в первом слагаемом (1.15), получим

$$D_n\Gamma^{kn}_k = -\frac{1}{\sqrt{-g}\sqrt{-g}}(\partial_n\sqrt{-g})\partial^n\sqrt{-g} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\partial^n\sqrt{-g} + \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\sqrt{-g}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^n\sqrt{-g}\right) = 0$$

Сокращая первое и последнее слагаемое, имеем

$$D_n\Gamma^{kn}_k = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_n\partial^n\sqrt{-g} = 0 \quad (1.16)$$

Считаем, что в полученном выражении (1.16) множитель $1/\sqrt{-g}$ не равен нулю, тогда необходимо рассмотреть волновое уравнение $\partial_n\partial^n\sqrt{-g} = 0$, в соответствии с которым $\sqrt{-g} = e^{-ik_nx^n} \rightarrow \psi$.

Известно, что в теории относительности временная координата равнозначна пространственным (принцип относительности). В квантовой теории изменение во времени рассматривается на основе коммутирующих операторов (скобка Пуассона и т. д.), фейнмановской формулировки (пропагатор), уравнения Шредингера (см. пункт 2) и др. [7-9]. Необходимо упомянуть также принцип причинности, который формулируется на основе неоднородного уравнения Клейна-Гордона-Фока (функция Грина) [8-9]. Исходя из этого, выражение (1.6 - 1.7) рассмотрим следующим образом:

$$d\bar{p}_k = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}\frac{ds}{dx^0}d\Omega \quad (1.17)$$

Учитывая, что $p_k = (E/c, -\mathbf{p})$ и условия для (1.7), вместо выражения (1.17) получим

$$d\bar{E} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}dx^1dx^2dx^3d\tau \\ d\bar{p}_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}dx^1dx^2dx^3d\tau \quad (1.18)$$

где $d\tau = \frac{ds}{c}$ – собственное время частицы ($c = 1$) [4].

Относительно собственного времени необходимо отметить, что в системах отсчета, в которых все компоненты $g_{0\alpha}$ равны нулю, возможна однозначная синхронизация часов во всем пространстве [4]. Известно, что в любом гравитационном поле всегда можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы обратить три величины $g_{0\alpha}$ тождественно в нуль [4].

Переходя к интегралам в выражениях (1.18) и учитывая условия к (1.8), имеем

$$\bar{E} = \int\int\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}d\tau dV \\ \bar{p}_\alpha = -\int\int\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}dVd\tau \quad (1.19)$$

где $dV = dx^1dx^2dx^3$.
В соответствии с условиями к (1.7) преобразуем выражение (1.19)

$$\bar{E} = \int\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma}dV\int\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}d\tau \\ \bar{p}_\alpha = -\int\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{g_{00}}d\tau\int\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^\alpha}dV \quad (1.20)$$

Известно, что волновая функция должна удовлетворять условию нормировки [7]:

$$\int|\psi(x,y,z,\tau)|^2dV = 1$$

Это связано с тем, что в теории вероятностей принято вероятность достоверного события считать равной единице. Кроме того известно, что в квантовой теории вероятность достоверного события формулируется следующим образом: если произвести интегрирование по всему объему, то получим вероятность того, что в момент времени τ частица находится где-нибудь внутри этого объема [7]. Согласно указанной формулировке и на основании выражения (1.6, 1.17 - 1.20) необходимо ввести дополнительное условие нормировки:

$$\int|\psi(x,y,z,\tau)|^2d\tau = 1,$$

Применяя для интегралов (1.20) указанные условия нормировки, получим

$$\bar{E} = \int\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}d\tau \\ \bar{p}_\alpha = -\int\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^\alpha}dV \quad (1.21)$$

Согласно (1.8) и (1.16) имеем

$$\bar{E} = \int\psi^* i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}d\tau \\ \bar{p}_\alpha = -\int\psi^* i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}dV \quad (1.22)$$

Известно, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен и промежутки собственного времени (τ) для данной точки пространства (истинное время) при бесконечно близких событиях связаны с координатой (x^0) следующим образом [4]:

$$\tau = -\frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0$$

Условие синхронизации часов в различных точках пространства заключается в равенстве нулю компонент $g_{0\alpha}$ метрического тензоза [4]. Если, кроме того, $g_{00} = 1$, то временная координата $(x^0 = ct)$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства (синхронная система отсчета) [4]. Известно, что в такой системе отсчета уравнения Эйнштейна можно представить в виде следующего неравенства [4]:

$$\frac{\partial \chi^\alpha_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{3}(\chi^\alpha_\alpha)^2 \leqslant 0, \qquad (1.23)$$

где $\chi^\alpha_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{\gamma}$ (здесь, как и в уравнении 1.9 - 1.16, считаем $c = 1$).

Вывод неравенства (1.23) подробно изложен в [4]. В случае, когда выражение (1.23) равно нулю, $\sqrt{\gamma} = t^3$ и $\chi^\alpha_\alpha = 3/t$ (рис. 1).

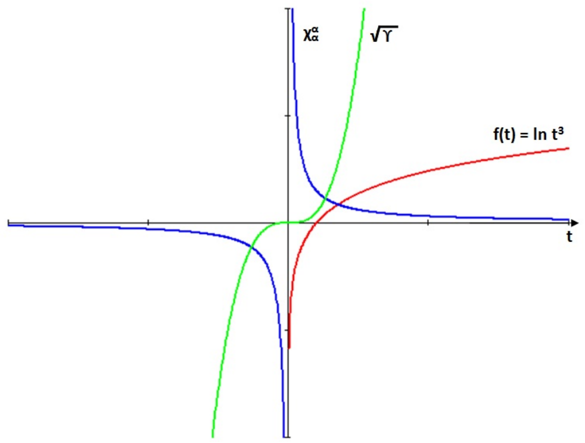

Рис. 1: Компонент метрического тензора ($\sqrt{\gamma}$), коэффициенты связности (χ^α_α) и функция $f(t)$ в синхронной системе отсчета.

Далее возьмем интеграл по t от свернутого тензора χ^α_α (1.23). В результате получим функцию вида $f(t) = \int \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t}dt = \ln\sqrt{\gamma} = \ln t^3$ (рис.1). Она действительна только в положительной временной полуплоскости. Если теперь отойти от синхронной системы отсчета и рассмотреть уравнение (1.14), то получим функцию $f(x_n) = \int \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^n}dx^n = \ln\sqrt{-g} = \ln x_n$ с аналогичным ограничением. Указанное ограничение можно не учитывать, если определитель $\sqrt{-g}$ выразить в комплексном виде ($\sqrt{-g} = e^{-ik_n x^n/\hbar} = \psi$), а функцию $f(x_n)$ представить как $f(x_n) = i\hbar\int \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^n}dx^n$.

В соотвествии с этим при переходе от выражения (1.21) к комплексному представлению (1.22) значения $\bar{p}_\alpha$ действительны (вещественны) во всей области изменения (x^1, x^2, x^3). Отдельно необходимо рассмотреть значения $\bar{E}$ (1.21) при двух бесконечно близких событиях, происходящих в одной и той же точке пространства ($d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$ [4]), тогда

$$\bar{E} = \int \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}d\tau = \int \frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}dt = \sqrt{g_{00}} \qquad (1.24)$$

Следовательно, согласно выражению (1.24) при переходе к представлению (1.22) значения $\bar{E}$ становятся комплексными. Если теперь потребовать, чтобы значения $\bar{E}$ и значения функции $f(x_n)$ были действительными одновременно, то необходимо учитывать положительное направление временной координаты $(x_0 = ct)$. Требование действительных значений функции $f(x_n)$ можно обосновать тем, что согласно выражению (1.2 - 1.4) $f(x_n) = -p_k p^k/(m^2c^2)$. Требование, чтобы значения $\bar{E}$ и функции $f(x_n)$ были действительными одновременно, обусловлено тем, что при предельном переходе к нерелятивистской механике рассматривается только компонента g_{00} метрического тензора [4].

2 Уравнения квантовой теории

Чтобы рассмотреть связь уравнения Шредингера с волновым уравнением $(\partial_n\partial^n\sqrt{-g} = 0)$, представим последнее в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial^2\sqrt{-g}}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^2\sqrt{-g} \qquad (2.1)$$

где $\nabla = \partial/\partial x^\alpha$ $(c = 1)$.

Согласно (1.19) возьмем интеграл (dV) правой и левой части выражения (2.1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial^2\sqrt{-g}}{\partial t^2}dV = \int\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^2\sqrt{-g}\right)dV \qquad (2.2)$$

Переходя к временной и пространственный компоненте метрического тензора и учитывая условия нормировки (см. выражение 1.20 - 1.21), получим

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial^2\sqrt{g_{00}}}{\partial t^2} = \int\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla^2\sqrt{\gamma}\right)dV \qquad (2.3)$$

Возьмем интеграл $(d\tau)$ правой и левой части выражения (2.3), тогда

$$\int \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial^2\sqrt{g_{00}}}{\partial t^2}d\tau = \int\int\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla^2\sqrt{\gamma}\right)dV d\tau \qquad (2.4)$$

Рассматривая выражение (2.4) при двух бесконечно близких событиях, происходящих в одной и той же точке пространства ($d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$ [4]), получим

$$\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t} = \int\sqrt{g_{00}}dt\int\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla^2\sqrt{\gamma}\right)dV \qquad (2.5)$$

Согласно (1.21 - 1.22) перейдем к комплексному представлению уравнения (2.5):

$$-\hbar^2\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \int\psi(t)dt\int\psi^*(x^\alpha)(-\hbar^2)\nabla^2\psi(x^\alpha)dV \qquad (2.6)$$

где $\sqrt{g_{00}} = \psi(t) = e^{-i\xi t/\hbar}$ и $\sqrt{\gamma} = \psi(x^\alpha) = e^{ip_\alpha x^\alpha/\hbar}$.

Считая, что интеграл $\int \psi(t)dt = i\hbar\frac{\psi(t)}{\xi}$ (2.6), получим

$$-\hbar^2\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = i\hbar\frac{\psi(t)}{\xi}\int \psi^*(x^\alpha)(-\hbar^2)\nabla^2\psi(x^\alpha)dV \quad (2.7)$$

В соответствии с условиями нормировки (1.20 - 1.21) преобразуем интеграл в выражении (2.7) (см. дополнение), тогда

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \frac{\psi(t)}{\xi}p_\alpha p^\alpha \quad (2.8)$$

Умножив правую и левую часть (2.8) на волновую функцию $\psi(x^\alpha)$, имеем

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\xi}p_\alpha p^\alpha\psi \quad (2.9)$$

где $\psi = \psi(t)\psi(x^\alpha)$.
Вместо произведения $p_\alpha p^\alpha\psi$ можно написать $(-\hbar^2)\nabla^2\psi$, тогда окончательно получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{\xi}\nabla^2\psi \quad (2.10)$$

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона-Фока [9] в криволинейных координатах

$$D_kD^k\psi - m^2\psi = 0, \quad (2.11)$$

где $D_kD^k\psi = \partial_k\partial^k\psi + \Gamma^n_{kn}\partial^k\psi$ [4].
Заменяя заменяя волновую функцию ψ (2.11) на определитель метрического тензора $\sqrt{-g}$, получим

$$\partial_k\partial^k\sqrt{-g} + \Gamma^n_{kn}\partial^k\sqrt{-g} - m^2\sqrt{-g} = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\partial^k\sqrt{-g} + \Gamma^n_{kn}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^k\sqrt{-g} = m^2 \quad (2.12)$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\partial^k\sqrt{-g} + \Gamma^n_{kn}\Gamma^{lk}_l = m^2$$

Согласно выражению (1.16) первое слагаемое (2.12) равно нулю, тогда

$$\Gamma^n_{kn}\Gamma^{lk}_l - m^2 = 0 \quad (2.13)$$

С помощью матриц Дирака (γ^k) представим уравнение (2.13) в виде произведения двух коммутирующих матричных операторов (факторизация [9]):

$$\Gamma^n_{kn}\Gamma^{lk}_l - m^2 = (-i\gamma^k\Gamma^n_{kn} + m)(i\gamma^m\Gamma^l_{ml} - m)$$

Предположим, что матричные операторы удовлетворяют уравнению вида [9]

$$i\gamma^k\Gamma^l_{kl} - m = 0 \quad (2.14)$$

Тогда раскрывая коэффициент связности Γ^l_{ml} в (2.14), имеем

$$\frac{i\gamma^k}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} - m = 0$$
$$i\gamma^k\partial_k\sqrt{-g} - m\sqrt{-g} = 0 \quad (2.15)$$

Заменяя определитель $\sqrt{-g}$ на волновую функцию ψ, получим известное уравнение Дирака [9]:

$$i\gamma^k\partial_k\psi - m\psi = 0 \quad (2.16)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (1.14):

$$D_n\Gamma^{kn}_k = 0$$
$$D_n(g^{in}\Gamma^k_{ik}) = 0 \quad (2.17)$$
$$\Gamma^k_{ik}D_ng^{in} + g^{in}D_n\Gamma^k_{ik} = 0$$

Известно, что ковариантная производная $D_ng^{in} = 0$ [4], тогда уравнение (2.17) примет следующий вид

$$g^{in}D_n\Gamma^k_{ik} = 0 \quad (2.18)$$

В полученной выражении (2.18) раскроем ковариантную производную ($D_n\Gamma^k_{ik}$), тогда

$$g^{in}(\partial_n\Gamma^k_{ik} - \Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mk}) = 0 \quad (2.19)$$

Проведя альтернацию тензора, стоящего в скобках в выражении (2.19), по индексам n и k без деления на 2 [5], получим

$$\partial_n\Gamma^k_{ik} - \Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mk} = \partial_n\Gamma^k_{ik} - \partial_k\Gamma^k_{in} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{mn} - \Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mk} = -R_{in}$$

где R_{in} – тензор Риччи [4-5].
Подставляя тензор R_{in} в уравнение (2.19), имеем

$$g^{in}D_n\Gamma^k_{ik} = 0$$
$$-g^{in}R_{in} = 0 \quad (2.20)$$
$$R = 0$$

где R – скалярная кривизна пространства [4-5].
Полученное выражение: $R = 0$ (2.20), представляет собой известные уравнения гравитационного поля (уравнения Эйнштейна) в пустом пространстве [4-5].

Дополнение

При выводе уравнения (2.10) было использовано следующее "среднее значение" (2.7-2.8):

$$\overline{p^2_\alpha} = \int \psi^*(x^\alpha)(-\hbar^2)\nabla^2\psi(x^\alpha)dV \rightarrow$$
$$\rightarrow p_\alpha p^\alpha\int \psi^*(x^\alpha)\psi(x^\alpha)dV =$$
$$= p_\alpha p^\alpha\int |\psi|^2dV = p_\alpha p^\alpha$$

Такой подход позволяет перейти к волновой функции (ψ) и к комплексному (операторному) представлению в строгом соответствии с определением (1.22). Однако, так называемое, "среднее значение" ($\overline{p^2_\alpha}$) можно рассматривать с точки зрения статистической интерпретании определителя метрического тензора ($\sqrt{-g}$), понимая, что под волновой функцией подразумевается гравитационная волна и квадрат её модуля интерпретируется как плотность вероятности. В то же время известно, что с точки зрения квантовой теоирии выражение вида (1.22) используется, прежде всего, для определения квантово-механических операторов [7]. В этом случае вывод уравнения (2.10) можно упростить, т. е. не переходить к "средним значениям" , считая производные (∇) операторами механических величин $(-i\hbar\nabla)$.

Рассматривая временную и пространственную компоненту метрического тензора, представим уравнение (2.1) в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial^2\sqrt{g_{00}}}{\partial t^2}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla^2\sqrt{\gamma} \qquad (3.1)$$

Согласно (1.19) возьмем интеграл $(d\tau)$ правой и левой части выражения (3.1)

$$\int\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial^2\sqrt{g_{00}}}{\partial t^2}d\tau=\int\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla^2\sqrt{\gamma}\right)d\tau \qquad (3.2)$$

Рассматривая выражение (3.2) при двух бесконечно близких событиях ($d\tau=\sqrt{g_{00}}dt$ [4]), получим

$$\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}=\int\sqrt{g_{00}}dt\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla^2\sqrt{\gamma}\right) \qquad (3.3)$$

Согласно (1.21 - 1.22) перейдем к комплексному представлению уравнения (3.3):

$$-\hbar^2\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=\left(\psi^*(x^\alpha)(-\hbar^2)\nabla^2\psi(x^\alpha)\right)\int\psi(t)dt \qquad (3.4)$$

где $\sqrt{g_{00}}=\psi(t)=e^{-i\xi t/\hbar}$ и $\sqrt{\gamma}=\psi(x^\alpha)=e^{ip_\alpha x^\alpha/\hbar}$. Считая, что в (3.4) интеграл $\int\psi(t)dt=i\hbar\frac{\psi(t)}{\xi}$ и $\psi^*(x^\alpha)(-\hbar^2)\nabla^2\psi(x^\alpha)=p_\alpha^2$, имеем

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=\frac{\psi(t)}{\xi}p_\alpha^2 \qquad (3.5)$$

Умножим правую и левую часть выражения (3.5) на волновую функцию $\psi(x^\alpha)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\xi}p_\alpha^2\psi \qquad (3.6)$$

где $\psi=\psi(t)\psi(x^\alpha)$.

Вместо произведения $p_\alpha^2\psi$ можно написать $(-\hbar^2)\nabla^2\psi$, тогда получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{i\hbar}{\xi}\nabla^2\psi \qquad (3.7)$$

Кроме того, необходимо подробнее рассмотреть выражение (1.19) для значений $\bar{E}$:

$$\begin{aligned}\bar{E}&=\int\int\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}\frac{ds}{c}dV=\\&=\frac{1}{c}\int\int\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}\frac{ds}{dt}dtdV\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Переходя к волновой функции $\sqrt{g_{00}}=\psi=e^{-i\xi t/\hbar}$ и к оператору $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$, выражение (3.8) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{E}&=\frac{1}{c}\int\int\psi^*i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{ds}{dt}dtdV=\\&=\frac{1}{c}\int\int\xi\frac{ds}{dt}dtdV=\\&=\frac{\xi}{mc^2}\int\int mc\frac{ds}{dt}dtdV\end{aligned} \qquad (3.9)$$

След тензора энергии-импульса частиц возьмем в виде $T_k^k=mc\frac{ds}{dt}$ [4], тогда

$$\bar{E}=\frac{\xi}{mc^2}\int\int T_k^k dtdV=\frac{\xi}{mc^2}\int\mathcal{E}(t)dt \qquad (3.10)$$

где $\mathcal{E}(t)=\int T_k^k dV$ можно интерпретировать как функцию распределения некоторой случайной величины (энергия системы).

Считая, что в выражении (3.10) отношение $\frac{1}{mc^2}\int\mathcal{E}(t)dt=1$, получим $\bar{E}=\xi$.

Литература

1. R. Carroll ArXiv GR-QC/0501045 (2005).
2. D. Bohm Phys. Rev. 85 (1952).
3. C.C. Perelman Phys. Lett. B (2018).
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теория поля, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2001), с. 536.
5. П.К. Рашевский Риманова геометрия и тензорный анализ, Едиториал УРСС, Москва (2003), с. 664.
6. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике, Наука, Москва (1973), с. 832.
7. Д.И. Блохинцев Основы квантовой механики, Наука, Москва (1983), с. 665.
8. Д.И. Блохинцев Пространство и время в микромире, Наука, Москва (1970), с. 360.
9. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков Введение в теорию квантованных полей, Наука, Москва (2008), с. 736.