

Обобщенная алгебра Клиффорда – универсальный инструмент описания и объединения фундаментальных полей

Алимжан Холмуратович Бабаев^{1, 2}

¹Физический факультет, Узбекский Национальный Университет, Ташкент, Республика Узбекистан

²Факультет прикладной математики и информатики, НГТУ, Новосибирск, РФ

ORCID

0000-0002-4071-5524 Alimzhan Babaev

Аннотация

В статье представлен обзор конструкции алгебры Клиффорда в псевдоримановом пространстве $R^{1,3}$ для описания и объединения фундаментальных полей: гравитационного, электромагнитного и поля Дирака. Квадратичная дифференциальная форма $\nabla A = \nabla \bullet A + \nabla \wedge A$ была определена как мера локальной неоднородности векторного поля в $R^{1,3}$. В ∇A вместо классических скалярных и векторных произведений было применено произведение Клиффорда: внутреннее $\nabla \bullet A$ и внешнее $\nabla \wedge A$. Также вместо ортонормированного базиса в пространстве Минковского ($E^{1,3}$) $\{t, x, y, z\}$ был использован, так называемый, канонический базис, составленный из матриц Дирака $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, что значительно расширяет смысл и возможности классического базиса. Свойство ассоциативности произведения $\nabla \nabla A = (\nabla \nabla A) = \nabla(\nabla A)$ позволило получить: а) уравнение Эйнштейна из $(\nabla \nabla A)$; б) уравнение Максвелла из $\nabla(\nabla A)$. При этом две независимые системы Максвелла также объединились в единое уравнение. Преобразование ∇A как сумма трёх независимых бикватернионов $\nabla A = \sum_{\alpha} \mathcal{B}_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) позволило получить биспиноры (антибиспиноры), повороты на пространственных и временных плоскостях в $R^{1,3}$, а также функции представления и генераторы группы Лоренца в $R^{1,3}$. Градиент биспиноров позволил вывести три пары уравнений типа Дирака для трёх поколений фермионов и бозонов. Преобразования векторов с помощью обобщенных бикватернионов ($x' = \mathcal{B}_{\alpha} \bullet x \bullet \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha}$), а точнее, преобразования Лоренца в криволинейных координатах привели к универсальному виду закона Доплера. Аппроксимирующая функция предполагаемого нелинейного закона Хаббла была вычислена из экспериментальных данных по измерению зависимости красного смещения от расстояния до наблюдаемых звезд. Эта нелинейность закона Хаббла объясняет механизм ускоренного увеличения красного смещения для модели Стационарной Вселенной без модели «Большого Взрыва»

Abstract

This article presents an overview of the construction of Clifford algebra in pseudo-Riemannian space $R^{1,3}$ for describing and unifying fundamental fields: gravitational, electromagnetic, and Dirac fields. The quadratic differential form $\nabla A = \nabla \bullet A + \nabla \wedge A$ was defined as a measure of the local inhomogeneity of a vector field in $R^{1,3}$. Instead of the classical scalar and vector products in ∇A , the Clifford product was used: the inner $\nabla \bullet A$ and outer $\nabla \wedge A$ ones. In addition, instead of the orthonormal basis in the Minkowski space ($E^{1,3}$) $\{t, x, y, z\}$, the so-called canonical basis, composed of the Dirac matrices $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, was used, which significantly expanded the meaning and capabilities of the classical basis. The associativity property of the product $\nabla \nabla A = (\nabla \nabla A) = \nabla(\nabla A)$ made it possible to obtain the following: a) the Einstein equation from $(\nabla \nabla A)$; and b) the Maxwell equation from $\nabla(\nabla A)$. Simultaneously, two independent Maxwell systems were combined into a single equation too. Transforming ∇A into a sum of three independent biquaternions $\nabla A = \sum_{\alpha} \mathcal{B}_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) allowed us to obtain bispinors (antibispinors), rotations on the spatial and temporal planes in $R^{1,3}$, and representation functions and generators of the Lorentz group in $R^{1,3}$. The gradient of the bispinors allowed us to derive three pairs of Dirac-type equations for the three generations of fermions and bosons. Transformations of vectors using generalized biquaternions ($x' = \mathcal{B}_{\alpha} \bullet x \bullet \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha}$), or more precisely, Lorentz transformations in curvilinear coordinates, led to the universal form of the Doppler law. The approximation function of the proposed nonlinear Hubble law was calculated from experimental data on the dependence of the redshift on the distance to the observed stars. This nonlinearity of the Hubble law explains the mechanism for the accelerated increase in redshift for the steady-state model without the Big Bang.

Ключевые слова

Бикватернионы; Биспиноры; Уравнения Максвелла; Уравнение Эйнштейна; Уравнение Дирака; Теория всего; Представления и генераторы группы Лоренца; Преобразование Лоренца; Эффект Доплера; Закон Хаббла; Ускоренное расширение Вселенной.

Keywords

Biquaternions; Bispinors; Maxwell's equations; Einstein's equation; Dirac's equation; Theory of everything; Representations and generators of the Lorentz group; Lorentz transformation; Doppler effect; Hubble's law; Accelerated expansion of the Universe.

1. Введение

В поисках описания геометрических объектов приемами алгебры Клиффорд пришел к своей геометрической алгебре. Классическая алгебра Клиффорда – это алгебра над полем действительных чисел в псевдоевклидовом векторном пространстве $E^{1,3}$. В пространстве $E^{1,3}$ бикватернионы, созданные из суммы четных чисел Клиффорда, образуют ассоциативное кольцо с единицей [1]. Эти удвоенные кватернионы (действительные и мнимые) образуют алгебру бикватернионов. Её измененную структуру с матрицами Дирака вместо единичных векторов физики называют алгеброй Дирака. Она оказалась универсальной для описания физических процессов, например, таких, как уравнения Дирака, и не только.

Но классическая алгебра Клиффорда недостаточна для описания процессов в неевклидовом пространстве $(R^{1,3})$.

Цель данной статьи – краткий обзор конструирования алгебры Клиффорда в псевдоримановом пространстве $R^{1,3}$ [2].

Это даёт возможность:

1) объединить две независимые системы уравнений Максвелла (однородную и неоднородную) в единое уравнение. При этом, 4-х мерный электромагнитный ток приобретает явный геометрический смысл как градиент от дивергенции поля $(\nabla(\nabla \cdot A))$;

2) унифицировать фундаментальные поля (гравитационное, электромагнитное и поле Дирака);

3) описать преобразования Лоренца в обобщенном виде (в криволинейных координатах), т.е., в конечном итоге, получить эффект Доплера в криволинейных координатах и закон Хаббла в универсальном виде. Это даёт возможность объяснить механизм ускоренного расширения вселенной даже без «Большого Взрыва»;

Формализм векторной алгебры никак не противопоставляется Лагранжеву формализму, а наоборот, изящная формулировка обобщенной алгебры Клиффорда дополняет и упрощает математическое описание и понимание физических процессов.

2. Основная часть

2.1. Векторы в обобщенной алгебре Клиффорда

В обобщенной алгебре Клиффорда векторы в пространстве $R^{1,3}$ обозначаются как

$$A = a_k \cdot e^k \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

Замечание 1. По повторяющимся индексам (так называемым «немым» индексам) идет суммирование (соглашение Эйнштейна), т.е., в формуле (1) идёт суммирование по индексу k .

Замечание 2. Латинские буквы в индексах принимают значения от 0 до 3, а греческие – от 1 до 3. Например, $k = 0, 1, 2, 3$ и $\alpha = 1, 2, 3$.

Замечание 3. Под термином «вектор» (терминология Грассмана) подразумевается тензор 1-го ранга размерностью n .

a_k – действительные числа, которые также могут

и матрицами:

$$A_k = (a_{k0}, a_{k1}, \dots, a_{kn})^T e_k \quad (2)$$

В случае (2) произведение векторов A_m и A_l выполняется по правилу Кронекера [3]:

$$A_m A_l = (a_{m0}, a_{m1}, \dots, a_{mn})^T (a_{l0}, a_{l1}, \dots, a_{ln}) e_m e_l$$

Замечание 4. В общем случае $A_m A_l$ – тензорное (диадное) произведение двух тензоров 1-го ранга. Поэтому A_m и A_l могут иметь разные размерности.

e_m – векторы локального криволинейного базиса. Этот базис $\{e_m\}$ связан с каноническим базисом $\{\gamma^k\}$ следующей формулой:

$$e_m = \gamma^k \partial X_k / \partial q^m \equiv \gamma^k \partial_m X_k \quad (3)$$

$X_k = X_k(q^i)$ – функции перехода между криволинейными q^i и декартовыми координатами x^k , т.е., функции перехода между базисами $\{e^i\}$ и $\{\gamma^k\}$.

γ^k – «единичные векторы» – орты ортонормированного 4-х мерного прямоугольного базиса. Этот базис проведен в точке касания $R^{1,3}$ и $E^{1,3}$. На самом деле γ^k – есть матрицы размерностью 4x4, которые удовлетворяют условиям

$$\gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j = \pm 2\delta_{jk} I \quad (4)$$

Если $j = 0$ или $k = 0$, то в формуле (4) берется знак «+». В других случаях берется знак «-».

Матрицы Дирака [4] удовлетворяют условию (4). Внутренняя структура матриц γ^k не имеет никакого значения.

δ_{jk} – символ Кронекера, I – единичная матрица.

Базис (4) назовем каноническим, обобщая и расширяя понятие ортонормированного базиса.

Внутреннее произведение векторов $e_i \cdot e_k$ [5] – есть симметричный тензор 2-го ранга или метрический тензор, который определяет метрику, т.е., меру искривления (деформации) пространства:

$$e_i \cdot e_k = g_{ik} \quad (5)$$

где « $\cdot$ » – это символ внутреннего произведения.

Внешнее произведение векторов $e_i \wedge e_k$ [5] – есть антисимметричный тензор 2-го ранга, который определяет кручение (вращение) пространства:

$$e_i \wedge e_k = \tau_{ik} \quad (6)$$

где « $\wedge$ » – это символ внешнего произведения.

2.2. Обобщенные бикватернионы

Определим неоднородность $\mathcal{B}$ векторного поля с потенциалом A в $R^{1,3}$

$$\mathcal{B} = \nabla A = \nabla \cdot A + \nabla \wedge A \quad (7)$$

где

$$\nabla \cdot A = e^i \cdot e^k D_i A_k = g^{ik} D_i A_k \quad (8)$$

$$\nabla \wedge A = e^i \wedge e^k D_i A_k = \tau^{ik} D_i A_k \quad (9)$$

$\nabla = e^i D_i$ – оператор набла в криволинейных координатах;

$D_i = D/\partial q^i$ – символ ковариантного дифференцирования.

Известно, что

$$\begin{aligned} \nabla \wedge A &= F = e^\alpha \wedge e^0 F_{\alpha 0} + e^\lambda \wedge e^\mu F_{\lambda \mu} = \\ &= e^\alpha \wedge e^0 F_{\alpha 0} + \gamma(e_\alpha \wedge e_0) E^{\alpha 0 \lambda \mu} F_{\lambda \mu} = E + \gamma H \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$F = E + \gamma H$$

$F_{kn} = D_k A_n - D_n A_k$ – тензор электромагнитного поля;

$E_{ijkn} = (-g)^{0.5} \epsilon_{ijkn}$ ($\epsilon_{0123} = -1$) есть абсолютно антисимметричный тензор 4-го ранга или символ Леви - Чивиты в ковариантном виде;
 g – детерминант метрического тензора;
 $\gamma = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ – мнимая единичная матрица ($\gamma\gamma = -I$), матричный аналог мнимой единицы i ;
 E – реальный (полярный) бивектор или напряженность электрического поля;
 H – псевдобивектор (аксиальный) или индукция магнитного поля.

Неоднородность $\mathcal{B}$ состоит из:

А) (8) – симметричного тензора второго ранга $\nabla \bullet A$, который определяет степень деформации поля,
 В) (9) – антисимметричного тензора второго ранга $\nabla \wedge A$, который определяет степень кручения (вращения) поля.

Квадрат $\mathcal{B}$ (7) содержит в себе все четные числа Клиффорда [6]:

$$\mathcal{B}^2 = (S + E + \gamma H)^2 = RS + PS + RV + PV \quad (11)$$

где

$RS = I(S^2 + E^2 - H^2)$ – реальные «скаляры»,
 $PS = \gamma E \bullet H$ – псевдоскаляры,
 $RV = 2 SE$ – реальные бивекторы,
 $PV = 2 \gamma SH$ – псевдобивекторы,
 $S \equiv I D_k A^k$.

RS, PS, RV и PV преобразуем через гиперболические функции комплексного аргумента [7].
Замечание 5. Под термином «скаляр» подразумевается след тензора $\nabla \bullet A$, т.е., $S \equiv I D_k A^k$.
 Складывая RS и PS и упрощая, получим:

$$RS + PS = |\tau_{\alpha 0}| |\tau_{\beta 0}| \cosh((z_\alpha + z_\beta)/2) \quad (12)$$

Далее, складывая RV и PV и упрощая, получим:

$$RV + PV = 2 \tau_{\alpha 0} |\tau_{\beta 0}| \cosh((z_\alpha/2) \sinh((z_\beta/2) \quad (13)$$

Складывая (12) и (13) и избавляясь от квадратного корня, получим:

$$\mathcal{B} = \sum_{\alpha=1}^3 (|\tau_{\alpha 0}| \cosh(z_\alpha/2) + \tau_{\alpha 0} \sinh(z_\alpha/2)) \quad (14)$$

где

$$|\tau_{\alpha 0}| = |e_\alpha \wedge e_0| = (g_{\alpha 0} g_{\alpha 0} - g_{\alpha \alpha} g_{00})^{0.5}$$

$z_\alpha = I \eta_\alpha + \gamma \varphi_\alpha$ – комплексный угол поворота вокруг оси α ,

η_α – угол поворота на плоскости tx_α или быстрота [8];
 φ_α – обыкновенный угол поворота вокруг оси α .

Меняя порядок умножения базисных векторов $\tau_{\alpha 0}$ на $\tau_{0\alpha}$ и преобразуя так же, как в (14), получим обратные вращения (обратные бикватернионы):

$$\tilde{\mathcal{B}}_\alpha = |\tau_{0\alpha}| \cosh(z_\alpha/2) + \tau_{0\alpha} \sinh(z_\alpha/2) \quad (15)$$

Из формул (14) и (15) видно, что каждый $\mathcal{B}_\alpha$ ($\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$) состоит из реального скаляра и псевдоскаляра, реального бивектора и псевдобивектора. Другими словами, $\mathcal{B}_\alpha$ – есть обобщенный бикватернион, т.е., бикватернион в пространстве $R^{1,3}$ в виде матриц. Таким образом, формулы (14) и (15) показывают, что неоднородность $\mathcal{B}$ в пространстве $R^{1,3}$ состоит из трех вращений на касательных плоскостях tx , ty , tz и трех пространственных вращений вокруг осей α .

Используя формулу Эйлера

$$\cosh(z_\alpha/2) = 0.5(\exp(z_\alpha/2) + \exp(-z_\alpha/2)) = Y_\alpha + \tilde{Y}_\alpha$$

$$\sinh(z_\alpha/2) = 0.5(\exp(z_\alpha/2) - \exp(-z_\alpha/2)) = Y_\alpha - \tilde{Y}_\alpha$$

обобщенный бикватернион (14) запишем в виде:

$$\mathcal{B}_\alpha = (|\tau_{\alpha 0}| + \tau_{\alpha 0}) Y_\alpha + (|\tau_{\alpha 0}| - \tau_{\alpha 0}) \tilde{Y}_\alpha \quad (16)$$

где

$$\begin{cases} Y_\alpha = 0.5 \exp(z_\alpha/2) \\ \tilde{Y}_\alpha = 0.5 \exp(-z_\alpha/2) \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\quad (17.2)$$

В случае «плоского» пространства $E^{1,3}$ бикватернион $\mathcal{B}_\alpha$ имеет вид:

$$B_\alpha = I \cosh(Z_\alpha/2) + \gamma_\alpha \gamma_0 \sinh(Z_\alpha/2) \quad (18)$$

или в виде матричной экспоненты:

$$B_\alpha = \exp(\gamma_\alpha \gamma_0 Z_\alpha/2) \quad (19)$$

где $Z_\alpha = I X_\alpha + \gamma Y_\alpha$ – комплексная матричная функция с параметрами X_α и Y_α .

Функция B_α (формула (18) и/или (19)) называется функцией представления группы ∇A , что является группой Лоренца $SO(1,3)$ [9], если ∇A в $E^{1,3}$.

Генераторы [10] групп определяются как

$$L_\alpha = \frac{dB_\alpha}{dX_\alpha} |_{X_\alpha=0} = \gamma_\alpha \gamma_0 I = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & -\sigma_\alpha \end{pmatrix} \quad (20.1)$$

$$K_\alpha = \frac{dB_\alpha}{dY_\alpha} |_{Y_\alpha=0} = \gamma_\alpha \gamma_0 \gamma = i \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha \end{pmatrix} \quad (20.2)$$

В формулах (20) матрицы Дирака использованы в представлении Вейля.

Обобщенные бикватернионы трудно записать в виде матричной экспоненты в $R^{1,3}$. Поэтому для вычисления генераторов, обобщенных бикватернионов используем формулу

$$\mathcal{B}_\alpha = |\tau_{\alpha 0}| \cosh(Z_\alpha/2) + \tau_{\alpha 0} \sinh(Z_\alpha/2) \quad (21)$$

По аналогии с формулами (20) вычислим генераторы группы ∇A в $R^{1,3}$, но вместо

обыкновенного дифференцирования будем использовать ковариантное дифференцирование.

Учитывая, что метрический тензор g_{kn} и векторы e^k являются «константами» относительно ковариантного дифференцирования, т.е., ковариантная производная g_{kn} и e^k равна нулю, то из (21) получим генераторы группы ∇A в $R^{1,3}$ в виде:

$$\mathcal{L}_\alpha = D \mathcal{B}_\alpha / dX_\alpha |_{X_\alpha=0} = (e_\alpha \wedge e_0) \quad (21.1)$$

$$\mathcal{K}_\alpha = D \mathcal{B}_\alpha / dY_\alpha |_{Y_\alpha=0} = (e_\alpha \wedge e_0) \gamma \quad (21.2)$$

Формулы (21) – это генераторы группы ∇A в $R^{1,3}$, т.е., обобщение генераторов группы Лоренца в псевдоримановом пространстве. Конкретный вид генераторов (21) зависит от параметров метрики: g_{kn} и $X_m(q)$.

2.3. Обобщенные биспиноры

Учитывая (17), из формулы (16) мы получим обобщенные биспиноры в виде:

$$\begin{cases} \Psi_\alpha = (|\tau_{\alpha 0}| + \tau_{\alpha 0}) Y_\alpha \\ \tilde{\Psi}_\alpha = (|\tau_{\alpha 0}| - \tau_{\alpha 0}) \tilde{Y}_\alpha \end{cases} \quad (22.1)$$

$$\quad (22.2)$$

Ψ_α , $\tilde{\Psi}_\alpha$ – обобщенный биспинор и антибиспинор.

Так как бикватернионы образуют кольцо, мы докажем, что (22.1) и (22.2) являются идеалами (левыми и правыми обобщенными биспинорами соответственно) кольца бикватернионов в $R^{1,3}$.

Следуя терминологии теории групп, в общем случае (в $R^{1,3}$), можем сказать, что идеалом S кольца K является такое подмножество

$$\forall s \in S \text{ и } \forall k \in K,$$

где выполняется следующее равенство [11]:

$$sk = cS.$$

Здесь s , точнее s/c – единичный элемент кольца, c – действительное число.

Если $c > 0$, то S – положительный идеал (просто идеал). Если $c < 0$, то S – отрицательный идеал (назовем антиидеалом). Проще говоря, идеал «проглатывает» (не замечает) единичный элемент при умножении. Идеалы могут быть правыми и/или левыми. Если идеал является и левым, и правым одновременно, то такой идеал называется двусторонним идеалом или просто идеалом.

В физике идеалам кольца бикватернионов соответствуют биспиноры (положительные биспиноры), которые описывают частицы. Антиидеалам соответствуют антибиспиноры (отрицательные спиноры), которые описывают античастицы.

Утверждение 1.

Обобщенные биспиноры (22.1) и (22.2) являются идеалами кольца бикватернионов.

Действительно,

$$\Psi_\alpha \bullet \tau_{\alpha 0} = (|\tau_{\alpha 0}| + \tau_{\alpha 0})Y_\alpha \bullet \tau_{\alpha 0} = (|\tau_{\alpha 0}| \bullet \tau_{\alpha 0} + \tau_{\alpha 0} \bullet \tau_{\alpha 0})Y_\alpha = \\ = (|\tau_{\alpha 0}| \bullet \tau_{\alpha 0} + \tau_{\alpha 0}^2)Y_\alpha = |\tau_{\alpha 0}| (|\tau_{\alpha 0}| + \tau_{\alpha 0})Y_\alpha = |\tau_{\alpha 0}| \Psi_\alpha$$

Точно так же

$$\tilde{\Psi}_\alpha \bullet \tau_{\alpha 0} = (|\tau_{\alpha 0}| - \tau_{\alpha 0})\tilde{Y}_\alpha \bullet \tau_{\alpha 0} = -\tau_{\alpha 0} \bullet \tilde{\Psi}_\alpha$$

В нашем случае обобщенный бивектор $\tau_{\alpha 0}$ (точнее, $\tau_{\alpha 0}/|\tau_{\alpha 0}|$) является единичным элементом кольца обобщенных бикватернионов $\mathcal{B}_\alpha$ (Ψ_α и $\tilde{\Psi}_\alpha$).

Из вышесказанного следует, что неоднородность векторного поля $\mathcal{B}$ состоит из трёх независимых обобщенных биспиноров и трёх независимых обобщенных антибиспиноров, что доказано в [12].

Градиент биспиноров (антибиспиноров) даёт три пары независимых уравнений типа Дирака [13]:

$$\begin{cases} \nabla \Psi_\alpha = \lambda \Psi_\alpha \\ \nabla \tilde{\Psi}_\alpha = \mu \tilde{\Psi}_\alpha \end{cases} \quad (23.1) \quad (23.2)$$

о чём речь пойдет позже.

2.4. Преобразования Лоренца в криволинейных координатах

В классической алгебре Клиффорда (в $E^{1,3}$) преобразования векторов, в частности, преобразование Лоренца, задаются формулой [14]:

$$x' = B_\alpha \bullet x \bullet \tilde{B}_\alpha \quad (24)$$

Обратные преобразования – формулой:

$$x = \tilde{B}_\alpha \bullet x' \bullet B_\alpha \quad (25),$$

где

B_α – бикватернион в $E^{1,3}$ в форме (18), т.е., в $E^{1,3}$,

$\tilde{B}_\alpha$ – обратный (комплексно-сопряженный) бикватернион,

$x = \gamma_k x^k$ – вектор пространства-времени в неподвижной системе координат (K),

$x' = \gamma_k x'^k$ – тот же вектор в движущейся системе координат (K').

В пространстве $R^{1,3}$ преобразования (24) и (25) имеют вид:

$$\begin{cases} x' = \mathcal{B}_\alpha \bullet x \bullet \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \\ x = \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \bullet x' \bullet \mathcal{B}_\alpha \end{cases} \quad (26.1) \quad (26.2)$$

Для преобразований в формулах (26) $\mathcal{B}_\alpha$ и $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ будем брать в нормированном виде:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_\alpha = (|\tau_{\alpha 0}| \cosh(z_\alpha/2) + \tau_{\alpha 0} \sinh(z_\alpha/2))/|\tau_{\alpha 0}| \\ \tilde{\mathcal{B}}_\alpha = (|\tau_{\alpha 0}| \cosh(z_\alpha/2) - \tau_{\alpha 0} \sinh(z_\alpha/2))/|\tau_{\alpha 0}| \end{cases} \quad (27.1) \quad (27.2)$$

В формулах (26) векторы x' и x разлагаются по базису как

$$\begin{cases} x' = e_k x'^k \\ x = e_k x^k \end{cases} \quad (28.1) \quad (28.2),$$

где

x'^k и x^k – криволинейные координаты.

Согласно двойному cross - произведению Клиффорда (обобщенный случай тройного векторного произведения в геометрической алгебре [15]),

$$z \bullet (x \wedge y) = - (x \wedge y) \bullet z = (z \bullet x) y - (z \bullet y) x \quad (29)$$

преобразование (26.2) запишем как

$$x = \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \bullet \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \bullet x' \quad (30)$$

Действительно, векторы e_0 и e_α коммутируют с $|\tau_\alpha|$, но антикоммутируют с $\tau_\alpha = e_\alpha \wedge e_0$.

Подставляя векторы (28.1) и (28.2) в (30), затем упрощая $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \bullet \tilde{\mathcal{B}}_\alpha$, получим

$$e_0 x'^0 + e_\alpha x'^\alpha = (I \cosh \eta_\alpha + \frac{\tau_{\alpha 0}}{|\tau_{\alpha 0}|} \sinh \eta_\alpha) \bullet (e_0 x'^0 + e_\alpha x'^\alpha) \quad (31)$$

Согласно формуле (29), внутреннее произведение бивектора $\tau_{\alpha 0} = e_\alpha \wedge e_0$ на векторы e_0 и e_α равно:

$$\begin{cases} e_\alpha \wedge e_0 \bullet e_0 = (e_0 \bullet e_0) e_\alpha - (e_0 \bullet e_\alpha) e_0 = g_{00} e_\alpha - g_{0\alpha} e_0 \\ (e_\alpha \wedge e_0) \bullet e_\alpha = (e_\alpha \bullet e_0) e_\alpha - (e_\alpha \bullet e_\alpha) e_0 = g_{\alpha 0} e_\alpha - g_{\alpha\alpha} e_0 \end{cases} \quad (32.1) \quad (32.2)$$

Если базис ортогональный, то (32.1) и (32.2) сильно упрощаются:

$$\begin{cases} e_\alpha \wedge e_0 \bullet e_0 = g_{00} e_\alpha \\ (e_\alpha \wedge e_0) \bullet e_\alpha = -g_{\alpha\alpha} e_0 \end{cases} \quad (33.1) \quad (33.2)$$

Также $|\tau_{\alpha 0}| = (-g_{00} g_{\alpha\alpha})^{0.5}$

Так как базис $\{e_k\}$ ортогональный, то, подставляя (33.1) и (33.2) в (32), получим

$$e_0 x'^0 + e_\alpha x'^\alpha = (e_0 x'^0 \cosh \eta_\alpha + e_\alpha x'^\alpha \cosh \eta_\alpha + \frac{g_{00} e_\alpha x'^0}{\sqrt{-g_{00} g_{\alpha\alpha}}} \sinh \eta_\alpha - \frac{g_{\alpha\alpha} e_0 x'^\alpha}{\sqrt{-g_{00} g_{\alpha\alpha}}} \sinh \eta_\alpha)$$

Разделяя по векторам e_0 и e_α , получим преобразование Лоренца в криволинейных координатах:

$$\begin{cases} x^0 = x'^0 \cosh \eta_\alpha + x'^\alpha \sinh \eta_\alpha |\tau_{\alpha 0}| / g_{00} \\ x^\alpha = x'^\alpha \cosh \eta_\alpha - x'^0 \sinh \eta_\alpha |\tau_{\alpha 0}| / g_{\alpha\alpha} \end{cases} \quad (34.1) \quad (34.2)$$

Формулы (34) – есть преобразования Лоренца в обобщенном виде.

3. Применения.

3.1 Объединение двух систем уравнений

Максвелла. 4-х мерный электромагнитный ток.

Берем градиент от неоднородности векторного поля $\nabla \mathcal{B}$:

$$\nabla \nabla A = \nabla (\nabla \bullet A + \nabla \wedge A) = \nabla (\nabla \bullet A) + \nabla \bullet (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge \nabla A \quad (35)$$

или

$$\nabla \nabla A = (\nabla \bullet \nabla + \nabla \wedge \nabla) A = \nabla \bullet \nabla A + \nabla \wedge \nabla \bullet A + \nabla \wedge \nabla A \quad (36)$$

(35) и (36) – эквивалентны, так как умножение $\nabla \nabla A$ ассоциативно, т.е., $(\nabla \nabla) A = \nabla (\nabla A)$.

В 4-х мерном пространстве произведение $\nabla \nabla A$, точнее, $\nabla \wedge \nabla A$ (тривектор) дуально псевдовектору [16]. Поэтому (35) и (36) запишем в виде:

$$\nabla (\nabla \bullet A) + \nabla \bullet (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge \nabla A = \mu T \bullet A \quad (37)$$

$$(\nabla \bullet \nabla) A + (\nabla \wedge \nabla) \bullet A + \nabla \wedge \nabla A = \mu T \bullet A \quad (38)$$

$T \bullet A$ – единственный способ конструирования псевдовектора из самого вектора A , где T – симметричный псевдотензор второго ранга. μ – коэффициент, смысл которого выясним позже.

Из уравнения (37) или (38) получим однородную систему уравнений Максвелла [17]:

$$\nabla \wedge \nabla A = \nabla \wedge F = 0 \quad (39)$$

В формуле (37) градиент дивергенции векторного поля $\nabla(\nabla \bullet A)$ идентифицируем как плотность 4-х мерного электромагнитного тока J [18]:

$$J = \nabla(\nabla \bullet A) - \mu T \bullet A \quad (40)$$

Из (40) видно, что 4-х ток может быть положительным (исток), если $\nabla(\nabla \bullet A) - \mu T \bullet A > 0$ и отрицательным (сток), если $\nabla(\nabla \bullet A) - \mu T \bullet A < 0$.

Отметим, что по трактовке (40) 4-х ток зависит от T . Забегая вперед, скажем, что T – это тензор энергии - импульса.

Повторный градиент (40) даёт закон сохранения 4-х тока (управление непрерывности) [19]:

$$\nabla \bullet J = 0 \quad (41)$$

и закон сохранения вихревого 4-х тока [19]:

$$\nabla \wedge J = 0 \quad (42)$$

Теперь, учитывая (39) и обозначение 4-х тока (40), мы запишем уравнение (37) в форме

$$\nabla \bullet F = -J \quad (43)$$

(43) – неоднородная система уравнений Максвелла [17].

Таким образом, мы объединили две независимые системы уравнений Максвелла.

В формуле (43) 4-х ток J не постоянен, т.е., с увеличением энергии взаимодействия T (например, при малых расстояниях) заряд J уменьшается. Проще говоря, при малых расстояниях неоднородная система уравнений Максвелла (43) становится нелинейной.

3.2 Объединение уравнений Эйнштейна и Максвелла.

Теперь из (38) выведем уравнение Эйнштейна. $(\nabla \bullet \nabla)A = \square A$, $\square$ – оператор Даламбера. $(\nabla \wedge \nabla) \bullet A = -Ric \bullet A$, Ric – тензор Риччи.

Тогда уравнение (38) можно записать в виде

$$\square A - Ric \bullet A = \mu T \bullet A \quad (44)$$

Согласно формуле Лихнеровича [20],

$$\square A = \square^* A + 0.5 R A, \quad (45)$$

где

$$R = g \bullet Ric - \text{скалярная кривизна},$$

$$\square^* A \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial A}{\partial x^j})$$

$\square^*$ – оператор Бохнера [21].

Проще говоря, $\square A$ – это операция от вектора A , а $\square^* A$ – операция от скалярной (!) функции A :

$$\square^* A_k = -\lambda_k A_k \quad (46)$$

λ_k – собственные значения оператора ($k = 0, 1, 2, 3$), так как A – 4-х компонентная функция.

A_k – собственные функции оператора, причем в (46) A_k – скалярные функции.

Подставляя (45) и (46) в (44), получим уравнение Эйнштейна:

$$Ric - 0.5 R + \lambda = -\mu T \quad (47)$$

λ физики называют космологической постоянной, $\mu = 8\pi G/c^4$, G – гравитационная постоянная, c – скорость света в вакууме, T – тензор энергии-импульса материи.

Примечание. $\lambda_k \leq 4$, т.е. число собственных чисел λ (число космологических постоянных) может быть до 4.

Уравнения Эйнштейна можно получить прямым

вычислением в координатной форме [22]. Для этого продифференцируем (38) и поменяем дважды порядок дифференцирования в $\nabla \bullet (\nabla \bullet \nabla A)$:
 $e^n \bullet (e^i \bullet e^j) e^k \nabla_n (\nabla_i \nabla_j A_k) = g^{ij} g^{nk} \nabla_n (\nabla_i \nabla_j A_k) \rightarrow$
 $\rightarrow g^{ij} g^{nk} \nabla_i (\nabla_n \nabla_j A_k) \rightarrow g^{ij} g^{nk} \nabla_i (\nabla_j \nabla_n A_k).$
 Далее, «освобождаясь» от дифференцирования, т.е., интегрируя, также получим уравнение Эйнштейна.

3.3 Вывод уравнений типа Дирака из обобщенных бикватернионов.

Теперь выведем уравнения типа Дирака из обобщенных биспиноров (антибиспиноров), т.е., из (22.1) и (22.2). Для этого возьмем градиент от (22) и найдем собственные числа и собственные функции Y_α и $\tilde{Y}_\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \Psi_\alpha = e^k (|\tau_{\alpha 0}| + \tau_{\alpha 0}) D_k Y_\alpha = \lambda I Y_\alpha \\ \nabla \tilde{\Psi}_\alpha = e^k (|\tau_{\alpha 0}| - \tau_{\alpha 0}) D_k \tilde{Y}_\alpha = \mu I \tilde{Y}_\alpha \end{array} \right. \quad (48.1)$$

$$(48.2)$$

(48.1) и (48.2) – уравнения типа Дирака в криволинейных координатах для частиц и античастиц.

В пространстве $E^{1,3}$ (48) имеют простой вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \Psi_\alpha = \gamma^k (I + \gamma^\alpha \gamma^0) \partial_k Y_\alpha = \lambda I Y_\alpha \\ \nabla \tilde{\Psi}_\alpha = \gamma^k (I - \gamma^\alpha \gamma^0) \partial_k \tilde{Y}_\alpha = \mu I \tilde{Y}_\alpha \end{array} \right. \quad (49.1)$$

$$(49.2)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_\alpha = 0.5 U \exp(0.5 \gamma p_k x^k) \\ \tilde{Y}_\alpha = 0.5 V \exp(-0.5 \gamma p_k x^k) \end{array} \right. \quad (50.1)$$

$$(50.2)$$

Для простоты мы возьмём мнимую часть (только c γ) волновых функций (50), p_k – 4-х импульсы, x^k – евклидовы координаты.

$$U = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T, V = (v_0, v_1, v_2, v_3)^T,$$

u_k, v_k – постоянные векторы.

При решении (49) используем матрицы Дирака в представлении Вейля.

Решаем уравнения (49) для случаев:

1) неоднородность векторного поля ∇A имеет только деформационную часть, т.е., $\nabla \bullet A \neq 0$, а вращательная часть равна нулю, т.е., $\nabla \wedge A = 0$. Это равносильно тому, что в уравнении (49) отсутствуют $\gamma^\alpha \gamma^0$.

Тогда уравнения (49) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^k \partial_k Y_\alpha = \lambda I Y_\alpha \\ \gamma^k \partial_k \tilde{Y}_\alpha = \mu I \tilde{Y}_\alpha \end{array} \right. \quad (51.1)$$

$$(51.2)$$

2) неоднородность ∇A имеет только вращательную часть, т.е., $\nabla \wedge A \neq 0$, а деформационная часть равна нулю, т.е., $\nabla \bullet A = 0$. Это соответствует тому, что в уравнении (49) отсутствует часть I .

В этом случае уравнения (49) принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^k \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_k Y_\alpha = \lambda I Y_\alpha \\ \gamma^k \gamma^\alpha \gamma^0 \partial_k \tilde{Y}_\alpha = -\mu I \tilde{Y}_\alpha \end{array} \right. \quad (52.1)$$

$$(52.2)$$

Пусть $\alpha=3$. Для других значений ($\alpha=1, 2$) уравнения (51) и (52) решаются аналогично.

Подставляя (50) в (51) и в (52) и упрощая, получим:

для (51.1)

$$\gamma^0 p_0 - \gamma^\beta p_\beta \gamma - 2\lambda I U \exp(0.5 \gamma p_k x^k) = 0 \quad (53)$$

для (52.2)

$$(-\gamma^3 p_0 - \gamma^\beta \gamma^3 \gamma^0 p_\beta) \gamma - 2\lambda I U \exp(0.5 \gamma p_k x^k) = 0 \quad (54)$$

Корнями характеристического уравнений (53) и (54) являются

$$\lambda^4 = (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)^2 = m^4$$

и

m – масса частицы.

и Напомним, что $\lambda = 0$ ($m = 0$) тоже являются собственными числами (53) и (54) для частиц $m = 0$, так как нулевой вектор является собственным вектором любого оператора. Из (55) видно, что корень λ , т.е., масса частицы – комплексная. Решаем (53) и (54) относительно p_0 . Затем, умножая эти уравнения на $i(u_1, 0, 0, 0)^T$, $i(0, u_2, 0, 0)^T$ этих уравнений.

Решениями (51.1) являются

$$\begin{cases} \Phi_{31} = (-2i\lambda, 0, -p_3, -p_1 - ip_2)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (56.1) \\ \Phi_{32} = (0, -2i\lambda, -p_1 + ip_2, p_3)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (56.2) \\ \Phi_{33} = (p_3, p_1 + ip_2, 2i\lambda, 0)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (56.3) \\ \Phi_{34} = (p_1 - ip_2, -p_3, 0, 2i\lambda)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (56.4) \end{cases}$$

Решениями (52.1) являются

$$\begin{cases} \Psi_{31} = (-2i\lambda, 0, -p_3, -p_1 - ip_2)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (57.1) \\ \Psi_{32} = (0, 2i\lambda, -p_1 + ip_2, p_3)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (57.2) \\ \Psi_{33} = (p_3, p_1 + ip_2, -2i\lambda, 0)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (57.3) \\ \Psi_{34} = (p_1 - ip_2, -p_3, 0, 2i\lambda)^T \exp(0.5\gamma p_k x^k) / 2p_0 & (57.4) \end{cases}$$

Чтобы отличить решения (56) и (57) друг от друга, их специально обозначили как Φ и Ψ .

Для антиспиноров $\tilde{\Phi}_3$ и $\tilde{\Psi}_3$ получим решения, идентичные (56) и (57), но со знаком «-» в экспоненте и с обратным знаком перед λ .

Рассмотрим решения $\lambda > 0$, т.е., Φ_{33} , Φ_{34} и Ψ_{32} , Ψ_{34} . Эти функции описывают частицу с $m > 0$. Функции Φ_{31} , Φ_{32} , Ψ_{31} , Ψ_{33} описывают частицу с $m < 0$ ($\lambda < 0$ – античастицу).

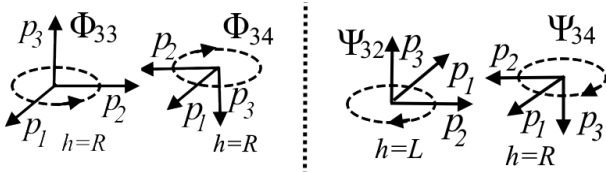


Рисунок 1. Геометрическое представление решений

На рисунке 1 показаны решения с $\lambda > 0$ в трехмерной системе координат p_1, p_2, p_3 (в правой тройке x, y, z).

Из рисунка 1 видно, что Φ_{33} имеет правую полярность, т.е., спиральность частицы правая $h = R$. Проще говоря, при изменении направления движения на противоположное ($p_3 \rightarrow -p_3$) частица сохраняет свою спиральность.

На правом рисунке 1 видно, что Ψ_{32} имеет левую полярность, т.е., спиральность частицы левая $h = L(-1)$. Ψ_{34} имеет правую спиральность $h = R(1)$. Проще говоря, при изменении направления движения на противоположное ($p_3 \rightarrow -p_3$) частица меняет свою спиральность.

В случае безмассовых частиц ($m = 0$) спиральность имеет особое значение. И для Φ , и для Ψ частица сама себе античастица. При переходе из Φ_{33} в Φ_{34}

(решения с $\lambda > 0$) частица одна и та же и спиральность не меняется. А при переходе с Ψ_{32} в Ψ_{34} (решения с $\lambda > 0$) частица одна и та же, но спиральность меняется. Проще говоря, Ψ_{32} и Ψ_{34} описывают одну частицу, но с разными спиральностями. В работе [22] Φ определен как γ – фотон, а Ψ_α – как ν_α нейтрино трех поколений.

Согласно Ландау [23], линейную поляризацию нейтрино (одного поколения) можно получить линейной комбинацией круговых поляризаций:

$$P$$

где $P_{H,V}$ – горизонтальная и вертикальная поляризация, $P_{L,R}$ – левая и правая поляризация. Следует отметить, что этот переход возможен, когда существуют обе поляризации ($P_{H,V}$ и $P_{L,R}$). В результате опыта (взаимодействия извне) можно зафиксировать только одно состояние. Это означает, что после эксперимента такой переход невозможен.

Так как и фотон, и нейтрино получаются из одного уравнения (49), можно сделать вывод: фотон и три поколения нейтрино составляют смешанное «фотон - нейтрино» состояние, структуру – синглет (фотон) + триплет (три поколения нейтрино). По аналогии с оптикой можно сделать вывод, что до опыта (эксперимента) все три поколения нейтрино (возможно и фотон) находились в смешанном состоянии. Опыт (эксперимент) тем или иным способом «поляризует» это состояние. После опыта мы не сможем наблюдать более одного состояния

Кроме того, деформация пространства генерирует фотон, т.е., бозон, а вращение (роторная часть) пространства создает поколения нейтрино, т.е., фермион [24].

3.4 Эффект Доплера в криволинейных координатах

Теперь из (34) выведем эффект Доплера в криволинейных координатах. Изменение частоты и направления распространения сферической монохроматической волны определяется из условия равенства фаз [25] волны в обеих системах отсчета: K и K' :

$$g_{00} k'^0 x'^0 + g_{\alpha\alpha} k'^\alpha x'^\alpha = g_{00} k^0 x^0 + g_{\alpha\alpha} k^\alpha x^\alpha$$

где $k'^i = (\omega'/c, \mathbf{k}')$, $k^i = (\omega/c, \mathbf{k})$ – волновой вектор в подвижной и неподвижной системах координат, соответственно.

Подставляя сюда значения x^0, x^α из (28), получим: $g_{00} k'^0 x'^0 + g_{\alpha\alpha} k'^\alpha x'^\alpha = g_{00} k^0 x'^0 \cosh \eta_\alpha - k^\alpha x'^0 \sinh \eta_\alpha |\tau_{\alpha 0}| + k^0 x'^\alpha \sinh \eta_\alpha |\tau_{\alpha 0}| + g_{\alpha\alpha} k^\alpha x'^\alpha$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых переменных, имеем:

$$\begin{cases} k'^0 = k^0 \cosh \eta_\alpha - k^\alpha \sinh \eta_\alpha |\tau_{\alpha 0}| / g_{00} & (58.1) \\ k'^\alpha = k^\alpha \cosh \eta_\alpha + k^0 \sinh \eta_\alpha |\tau_{\alpha 0}| / g_{\alpha\alpha} & (58.2) \end{cases}$$

Формула (58.1) – есть эффект Доплера, а (58.2) – абберрация волны в обобщенном виде.

Преобразования Лоренца и эффект Доплера

вычислим во временно - сферической системе координат:

$q^0 = ct$ – время, $q^1 = r$ – радиус - вектор, $q^2 = \theta$ – зенитный угол, $q^3 = \varphi$ – азимутальный угол.

$0 \leq t \leq \infty$, $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Пусть $\alpha = 3$, т.е. $x'^0 = ct'$, $x'^3 = \varphi'$, $x^0 = ct$, $x^3 = \varphi$.

В этом случае $g_{00} = 1$, $g_{11} = -1$, $g_{22} = -r^2$,

$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$, $|\tau_{30}| = r \sin \theta$.

Тогда из (34) получим преобразования Лоренца для движения на азимутальной плоскости со скоростью $\beta_\varphi = v_\varphi/c$:

$$\begin{cases} ct = (ct' + r \sin \theta \beta_\varphi \varphi') / (1 - \beta_\varphi^2)^{0.5} \\ \varphi = (\varphi' + \beta_\varphi ct' / r \sin \theta) / (1 - \beta_\varphi^2)^{0.5} \end{cases} \quad (59.1)$$

$$(59.2)$$

Найдем вид эффекта Доплера и aberrации. Но

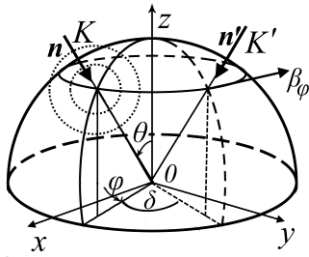


Рисунок 2 Аберрация

прежде найдем вид волнового вектора в случае только при азимутальном движении со скоростью β_φ ($\beta_r = 0$, $\beta_\theta = 0$) (Рисунок 2).

Волновой вектор n перпендикулярен фронту сферической

монохроматической волны и составляет угол φ с x , а n' – угол $\varphi + \delta$. Угол между n и n' равен δ .

Учитывая $k^3 = \omega \cos \Delta = \omega \cos \theta = \omega$ из уравнений (58), получим

$$\begin{cases} \omega' = \omega (1 - r \sin \theta \beta_\varphi) / (1 - \beta_\varphi^2)^{0.5} \\ \omega' \cos \delta = \omega (1 - \beta_\varphi / r \sin \theta) / (1 - \beta_\varphi^2)^{0.5} \end{cases} \quad (60.1)$$

$$(60.2)$$

где

δ – угол aberrации или разница между углом падения волны от источника и наблюдаемым углом, который меняется из-за вращения приёмника (например, Земли) по орбите.

Так как волновой фронт – концентричные сферы, то волновой вектор n является также нормалью сфер, т.е. угол Δ между n и нормалью равен нулю.

Уравнение (60.1) – эффект Доплера, а (60.2) – aberrация волны при азимутальной скорости источника и/или приёмника. В формуле (60.2) угол aberrации δ определен относительно волнового вектора n .

Случай $\alpha = 1$ (радиальное движение источника и/или приёмника относительно друг друга) ничем не отличается от классического случая эффекта Доплера в прямоугольной системе координат.

3.5 Новый (нелинейный) закон Хаббла

Теперь найдем зависимость красного смещения $z = (\omega - \omega') / \omega'$ от расстояния r между источником и приёмником волны.

Подставляя (60.1) в z , получим

$$z = \sin \theta \beta_\varphi \cdot r / (1 - \sin \theta \beta_\varphi \cdot r) \quad (61)$$

Если быть корректным, то «скорость разбегания» галактик v и красное смещение z – не тождественные понятия. Другими словами, z является неоднозначной мерой линейной скорости «разбегания» космических объектов при азимутальной скорости (по орбите) источника и/или приёмника волны.

Хаббл вывел свой эмпирический закон [26] из

предположения радиального разбегания галактик, опираясь на эффект Доплера в классическом случае, т.е., в прямоугольных координатах. С открытием ускоренного расширения Вселенной [27] стало очевидным, что закон Хаббла отклоняется от линейности.

Чтобы «спасти» закон Хаббла, формулу (61) умножим на $k \cdot c$ и получим зависимость «скорости разбегания» галактик v от расстояния между ними r , т.е. модифицированный закон Хаббла:

$$v = k \cdot c \cdot z = k \cdot c \cdot \sin \theta \beta_\varphi \cdot r / (1 - \sin \theta \beta_\varphi \cdot r) \quad (62)$$

В (61), а также в (62) все переменные (z , $\beta_\varphi = v_\varphi/c$, r) – безразмерные. Поэтому принимаем $r = d/R_0$.

$R_0 = 14300 \text{ Mnk}$ [28] – радиус эффективного горизонта частиц, вплоть до которого мы можем видеть частицы, созданные с момента Большого взрыва;

d – расстояние от объекта до наблюдателя, измеряемое в Mnk ;

$\beta_\varphi = 24000/300000 = 0,08$ – линейная скорость в периферии собственной орбиты S4714 [29]. Это самая высокая скорость в нашей галактике, Млечном Пути.

Для «малых расстояний» (до 4 Mnk) коэффициент $k = 291,2583845$ определяется методом наименьшего квадрата из эксперимента [30], опираясь на который, Хаббл построил свой эмпирический линейный закон (внутренний рисунок № 1 Рисунок 3 Закон Хаббла). Уравнение (61) при «малых» расстояниях мало отличается от линейной функции, т.е., от классического закона Хаббла.

Для «дальних» расстояний (до 500 Mnk) коэффициент равен $k = 42,21890063$. Он также определяется из экспериментальных данных [30]+[31] методом наименьшего квадрата (внутренний рисунок № 2 Рисунок 3 Закон Хаббла). Выкладки выполнены редактором символьных вычислений «Maple 2022». Таблица экспериментальных данных дана в [14]. Малая выборка (недостаточность экспериментальных данных по измерению зависимости $z \sim d$) не позволяет оценить достоверность нашей гипотезы с помощью критериев статистической проверки.

При экстраполивании формулы (61) на «сверхдальние» расстояния ($> 6000 \text{ Mnk}$), нелинейность закона Хаббла становится заметной даже визуально (Рисунок 3 Закон Хаббалиния № 3).

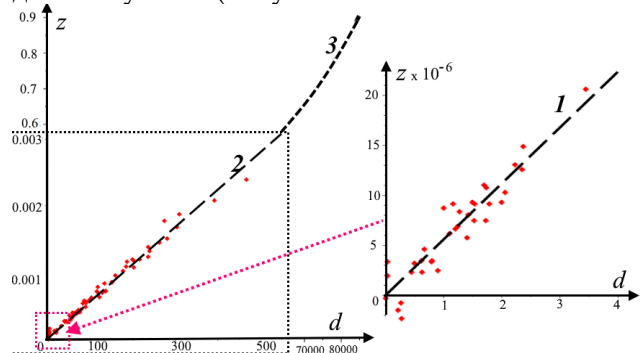


Рисунок 3 Закон Хаббла – зависимость $z \sim d$. ■ – эксперимент, - - - аппроксимация функцией (61).

Замечка. На рисунке 3 показана зависимость красного смещения от расстояния: $z \sim d$, а не зависимость «скорости разбегания» от расстояния, что более корректно.

Из рисунка видно, что с увеличением расстояния между источником и наблюдателем d красное смещение z увеличивается с ускорением.

Красное смещение z зависит и от расстояния между объектом и наблюдателем d , и от зенитного угла θ относительно эклиптики, т.е. относительно плоскости орбиты вращения Земли вокруг Солнца.

Следуя традициям астрономов, зенитный угол берём от $\pi/2$ (зенит) до $-\pi/2$ (надир): $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

На рисунке показана зависимость красного смещения от расстояния d между объектом и наблюдателем и от зенитного угла θ . Из графика видно, что с увеличением расстояния d увеличивается красное смещение z , с ускорением. Это, якобы, подтверждает кажущееся ускоренное расширение Вселенной ($d_1 > d_2 > d_3 > d_4$).

Из рисунка также видно, что чем ближе θ к нулю, тем больше красное смещение. Проще говоря, чем ближе угол θ к плоскости эклиптики, тем больше красное смещение, т.е., красные смещения от разных источников сконцентрированы вокруг «оси Зла» [32].

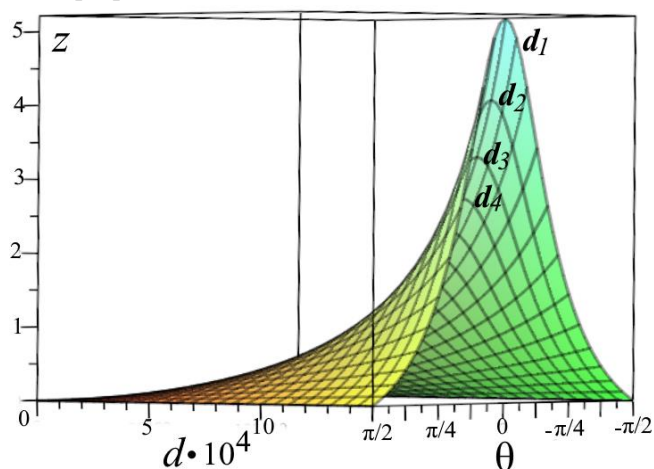


Рисунок 4. Зависимость $z \sim f(d, \theta)$. d в Мпк.

В работе [14] подробно изучены гравитационное линзирование [33] и поляризация реликтовых излучений [34] как результат уравнения (61), т.е., модифицированного закона Хаббла (эффекта Доплера в криволинейных координатах).

4. Выводы

1. Обобщенная алгебра Клиффорда (в $R^{1,3}$) является универсальным математическим аппаратом для описания и объединения физических фундаментальных полей:
2. Эквивалентность формы записи $(\nabla\nabla)A = \nabla(\nabla A)$ объединяет гравитационное и электромагнитное поля в пространстве $R^{1,3}$, а именно:
 - из $(\nabla\nabla)A$ выводятся уравнения Эйнштейна,
 - из $\nabla(\nabla A)$ получается неоднородная система уравнений Максвелла.

3. Градиент от расходимости поля + поправка $\mu T \cdot A$ идентифицируются как источник 4-х тока: $J = \nabla(\nabla \cdot A) - \mu T \cdot A$.

Из-за поправки $\mu T \cdot A$ неоднородная система уравнений Максвелла становится нелинейной. Также 4-х мерный электромагнитный ток, в частности, электрический заряд не является постоянным, а зависит от энергии (расстояния).

4. Использование произведений Клиффорда и новая форма записи 4-х тока позволили объединить в единое уравнение две независимые системы Максвелла.

5. Преобразование неоднородности ∇A в сумму трех независимых обобщенных бикватернионов в форме гиперболических функций позволило записать генераторы группы Лоренца в пространстве $R^{1,3}$. Градиент этих обобщенных бикватернионов даёт уравнения типа Дирака для трех поколений частиц.

Деформация поля $(\nabla \cdot A)$ генерирует бозоны, а кручение поля $(\nabla \wedge A)$ – фермионы.

6. Преобразования Лоренца и эффект Доплера даны в криволинейных координатах благодаря использованию обобщенных бикватернионов. Это позволило записать закон Хаббла в криволинейных координатах.

7. Получен нелинейный закон Хаббла, согласно которому красное смещение зависит и от расстояния между объектами, и от зенитного угла наблюдения. Новый закон Хаббла позволяет утверждать:

- А) Ускоренное увеличение красного смещения с увеличением расстояния между объектами возможно даже при стационарной Вселенной.
- В) Скопление красного смещения вокруг «оси Зла» (на плоскости эклиптики) происходит из-за зависимости красного смещения от зенитного угла.

Благодарность

Хочу отметить незаменимую помощь моей жены – соратницы Любови Гомазковой в создании данной работы.

5. Литература

1. Biquaternion Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Biquaternion>
2. Pseudo-Riemannian manifold. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudo-Riemannian_manifold
3. Kronecker product. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product
4. Gamma matrices. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_matrices
5. Chris J. L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February 1994, pages 4-6. <https://doi.org/10.17863/CAM.16148>
6. Nicholas Wheeler. Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD ALGEBRAS. Reed College Physics

Department October 2003.

<https://www.reed.edu/physics/faculty/wheeler/documents/Miscellaneous%20Math/Clifford%20Algebra.pdf>

7. Hyperbolic functions. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions

8. Rapidity. Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity>

9. Lorentz group. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_group

10. Exponential map (Lie theory). Wikipedia.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_map_\(Lie_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_map_(Lie_theory))

11. Ideal (ring theory). Wikipedia.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_\(ring_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_(ring_theory))

12. A. K. Babaev. Biquaternions, rotations and spinors in generalized Clifford algebras. SCI-ARTICLE.RU. № 45 (May) 2017. pp. 296-304. https://sci-article.ru/number/05_2017.pdf .(in Russian). Preprint: The inhomogeneity of a vector field as a sum of biquaternions, rotations, and spinors in a generalized Clifford algebra. <https://doi.org/10.24108/preprints-3112462> . <https://preprints.ru/article/766> (in English).

13. A. Kh. Babaev. Derivation of the Dirac equation from the inhomogeneity of space and solution for neutrino generations. SCI-ARTICLE.RU. №52 (December) 2017. https://sci-article.ru/number/12_2017.pdf pp. 237-244 (in Russian).

14. A. Kh. Babaev. Description of Lorentz Transformations, the Doppler Effect, Hubble's Law, and Related Phenomena in Curvilinear Coordinates by Generalized Biquaternions. American Journal of Astronomy and Astrophysics 2025, Vol. 12, No. 1, pp. 9-20. <https://doi.org/10.11648/j.ajaa.20251201.1> 2

15. Vector triple product. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product#Vector_triple_product

16. A. Kh. Babaev. The alternative formalism based on the generalized Clifford algebra. SCI-ARTICLE.RU. №40 (December) 2016 pp. – 34-42 (in Russian). https://sci-article.ru/number/12_2016.pdf . Preprint: <https://doi.org/10.24108/preprints-3112490> (in English).

17. Differential forms. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

18. Four-current. Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Four-current>

19. A. Kh. Babaev. SCI-ARTICLE.RU Conservation of 4-dimensional electromagnetic current in a formalism based on Clifford algebra. №42 (February) 2017. Pp. 27-38. https://sci-article.ru/number/02_2017.pdf . Preprint: <https://doi.org/10.24108/preprints-3112478> (in Russian).

20. [17] Peter Petersen. Demystifying the curvature term in Lichnerowicz Laplacians.

<https://www.math.ucla.edu/~petersen/BLWformulas.pdf>

21. [18] Bochner Laplacian.

https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operators_in_differential_geometry

22. A. Kh. Babaev. Unification of Maxwell Systems, Einstein, and Dirac Equations in Pseudo-Riemannian Space $R_{1,3}$ by Clifford Algebra. American Journal of Modern Physics (Volume 13) Issue 6). 23 November 2024 .

<https://www.sciencepublishinggroup.com/article/10.11648/j.ajmp.20241306.13>

23. L. D. Landau, On one possibility for the polarization properties of neutrinos, "JETP", v. 32, p. 407. (in Russian).

24. A. Kh. Babaev. Inhomogeneity of the vector field and quantum statistics of elementary particles. SCI-ARTICLE.RU №118 (June) 2023. pp. 82-86 (in Russian). https://sci-article.ru/number/06_2023.pdf

25. Landau L. D., Lifshitz E. M., The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics, vol. 2, pp. 123 – 127

26. Hubble's law. Wikipedia. .

https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law

27. Accelerating expansion of the universe Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Accelerating_expansion_of_the_universe

28. Observable universe. Wikipedia.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe#:~:text=According%20to%20calculations%2C%20the%20current,45.7%20billion%20light%2Dyears\).](https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe#:~:text=According%20to%20calculations%2C%20the%20current,45.7%20billion%20light%2Dyears).)

29. [19] Florian Peißker, Andreas Eckart, Michal Zajaček, Basel Ali, Marzieh Parsa. S62 and S4711: Indications of a population of faint fast moving stars inside the S2 orbit -- S4711 on a 7.6 year orbit around Sgr~A* // The Astrophysical Journal. — 2020-08-11. — v. 899, Edit. 1. — S. 50. — ISSN 1538-4357.

<https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.04764>

30. [20] Hubble E. (1929). "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". Proceedings of the National Academy of Sciences 15 (3): 168–173. DOI: 10.1073/pnas.15.3.168

31. [21] W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, L. Ferrarese, D. D. Kelson, S. Sakai, J. R. Mould, R. C. Kennicutt Jr., H. C. Ford, J. A. Graham and others, Hubble, E. (1929). "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". Proceedings of the National Academy of Sciences. 15 (3): 168–173. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant, <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0012376>.

<https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0012376>

32. Axis of evil (cosmology). Wikipedia.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Axis_of_evil_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Axis_of_evil_(cosmology))

33. Gravitational lens. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_lens

34. Polarization (cosmology). Wikipedia.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Polarization_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Polarization_(cosmology)) .