

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ФОН КАРМАНА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Селюгин С.В.

e-mail: *selyugin@rambler.ru*

Рассмотрены тонкие композитные геометрически нелинейные пластины в условиях растяжения и изгиба. Пластины полагаются линейно-упругими, подчиняющимися гипотезе прямых нормалей Кирхгоффа и классической теории слоистых пластин. Волокна слоёв пластины могут иметь различные углы ориентации в зависимости от положения точки на пластине. Деформирование пластин описывается приближением фон Кармана. Рассмотрены и проанализированы кинематический и статический вариационные принципы. Показано, что при положительных главных потоках мембранных сил (что характерно, например, для нижней поверхности крыла большого удлинения пассажирского самолёта) эти принципы приводят к минимуму и максимуму, соответственно. Также показано, что двойственный зазор для рассмотренных вариационных принципов – отсутствует. Сравнение геометрически линейной и геометрически нелинейной пластин с одинаковой укладкой волокон слоёв позволяет сделать вывод о большей обобщённой жесткости и меньшей обобщенной податливости последней пластины в геометрически нелинейном приближении фон Кармана. Предложен эволюционный алгоритм оптимизации углов укладки волокон слоёв, обладающий монотонными свойствами сходимости. Представлен пример, иллюстрирующий рассмотренные вариационные принципы и их границы погрешности.

Ключевые слова: композитная пластина, фон Карман, растяжение и изгиб, углы укладки волокон слоёв, экстремальные вариационные принципы.

© Селюгин С.В., 2025

1. Введение

Композитные конструкции, в частности, пластины, стержни, балки, оболочки, составные конструкции, привлекают значительное внимание инженеров и исследователей вследствие их широкого использования в аэрокосмических, судовых, морских и гражданских приложениях.

Важную роль при анализе работы конструкций играют вариационные принципы (см. Васидзу 1987), которые, в частности, служат фундаментом широко распространенного метода конечных элементов.

Так, в работе Stumpf (1979) указаны важнейшие на тот момент исследования по вариационным принципам для изотропных нелинейных (физически и геометрически) пластин и оболочек. В том числе, описаны двойственные вариационные принципы для изотропных пластин фон Кармана. Указано, что для таких пластин, двойственные кинематический и статический вариационные принципы (использующие тензор градиентов перемещений и 1-й тензор напряжений Пиола) являются, при положительных главных мембранных напряжениях, минимальным и максимальным принципом, соответственно. Полное доказательство последнего утверждения не приводится, но указан путь его проведения через доказательство положительной определённости некоторой матрицы 5×5 посредством её LU-разложения на произведение матриц.

Настоящая работа посвящена экстремальным вариационным принципам (и связанным с ними вопросам) для статически нагруженных композитных пластин фон Кармана. Результаты работы применимы, например, для анализа и проектирования нижней поверхности крыла большого удлинения пассажирского самолёта.

Работа состоит из Введения и восьми Разделов.

В Разделе 2 приведены основные предположения.

В Разделе 3 обсуждается кинематический вариационный принцип и получены условия, при которых данный принцип приводит к минимуму функционала общей потенциальной энергии пластины.

В Разделе 4 рассматривается статический вариационный принцип.

Раздел 5 посвящен определению двойственного зазора для рассмотренных вариационных принципов.

В Разделе 6 обсуждается сравнение общих потенциальной и дополнительной энергий геометрически линейной и геометрически нелинейной пластин.

В Разделе 7 предложен эволюционный монотонный алгоритм оптимизации углов укладки волокон слоёв, использующий вариационные подходы Разделов 3 и 4.

В Разделе 8 представлен иллюстрирующий пример по использованию рассмотренных вариационных принципов и рассчитаны границы погрешностей для возможных полей перемещений и внутренних усилий.

В Разделе 9 представлено заключение работы.

2. Предположения

Приняты следующие предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина постоянной толщиной h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечётное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала, толщина которого достаточна для восприятия перерезывающей силы.

Пластина нагружена изгибом распределенной нагрузкой $q(x,y)$ (x,y – координаты в плоскости пластины) и растяжением-сдвигом, и деформируется

в соответствии с гипотезой прямых нормалей Кирхгоффа и приближением фон Кармана (см. Reddy 2004). Такое нагружение и деформирование характерно, например, для нижней поверхности крыла большого удлинения пассажирского самолёта.

Толщина пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 заданы погонные силы N_{xv} и N_{yv} , действующие по x , y в плоскости, а на C_2 – нулевые перемещения u , v , w по x , y , z , соответственно. Приняты краевые условия защемления по контуру C_2 .

Волокна слоев композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Приняты гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали к поверхности Γ , означающие равенство нулю xz , yz , zz компонент тензора деформаций Грина.

Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

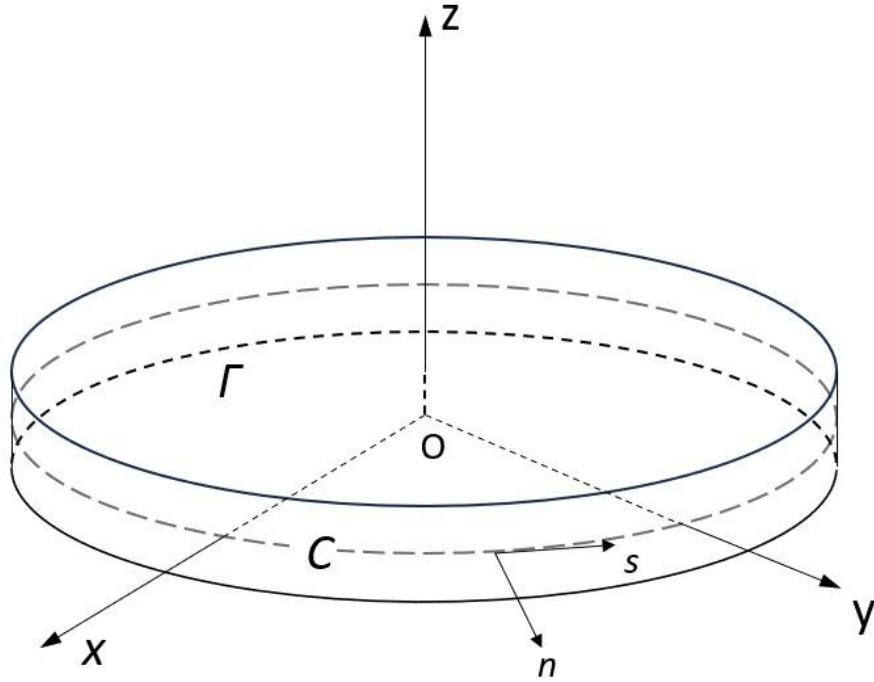


Рис. 1. Тонкая пластина.

Компоненты перемещений $u_i, i = 1, 2, 3$, компоненты тензоров деформаций Грина ε_{ij} и градиентов перемещений $u_{i,j}, i, j = 1, 2, 3$, точек внутри пластины как функции x - y - z перемещений u, v, w в срединной плоскости записываются в виде:

$$\begin{cases} u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3 = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - zw_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - zw_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy} \end{cases}$$

$$u_{i,j} = \begin{cases} u_{,x} - zw_{,xx}; & u_{,y} - zw_{,xy}; & -w_{,x} \\ v_{,x} - zw_{,xy}; & v_{,y} - zw_{,yy}; & -w_{,y} \\ w_{,x}; & w_{,y}; & 0 \end{cases} \quad (1)$$

Вводятся векторы-столбцы

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Также нам потребуются векторы-столбцы погонных сил $\vec{N}$ и погонных моментов $\vec{M}$:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{pmatrix} \quad (3)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ - компоненты тензора напряжений Кирхгоффа, которые, как известно (см. Селюгин 2024а), равны тем же компонентам 1-го тензора напряжений Пиола. Интегралы (3) от $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ выражаются через деформации, кривизны и матрицы жесткости композитной пластины A и D (Gibson 1994):

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon}_0, \quad \vec{M} = D\vec{k} \quad (4)$$

3. Кинематический вариационный принцип

Как известно (Васильев 1988, Reddy 2004), кинематика деформирования рассматриваемой консервативно нагруженной пластины описывается кинематическим вариационным принципом. В соответствии с этим принципом разность Φ функционалов общей потенциальной энергии деформации пластины Π и потенциала внешних сил W стационарна по x, y, z перемещениям u, v, w точек пластины. Имеем

$$\delta\Phi = \delta\Pi - \delta W = 0$$

(δ – символ вариации), где общая потенциальная энергия деформации пластины

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] \quad (5)$$

(T – символ транспонирования), а потенциал внешних сил

$$W = \iint q w d\Gamma + \int dC_1 [N_{xv} u + N_{yv} v] \quad (6)$$

где интегрирование ведется по всей недеформированной срединной поверхности Γ пластины.

Функционал общей потенциальной энергии Φ пластины запишется в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] - \iint q w d\Gamma - \int dC_1 [N_{xv} u + N_{yv} v] \quad (7)$$

Как известно, первая вариация функционала (7) по переменным u , v , w приводит к уравнениям равновесия по соответствующим степеням свободы.

Запишем эту вариацию в виде:

$$\delta\Phi = \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \delta\vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \delta\vec{k}] - \iint q \delta w d\Gamma - \int dC_1 [N_{xv} \delta u + N_{yv} \delta v] \quad (8)$$

Вычислим вторую вариацию от (7), варьируя (8).

$$\delta(\delta\Phi) = \iint d\Gamma [\delta\vec{\varepsilon}_0^T A \delta\vec{\varepsilon}_0 + \vec{\varepsilon}_0^T A \delta^2 \vec{\varepsilon}_0 + \delta\vec{k}^T D \delta\vec{k} + \vec{k}^T D \delta^2 \vec{k}] \quad (9)$$

Рассмотрим в четвёртом члене справа в (9) вектор-столбец $\vec{k}$, который линеен по вторым производным прогибов, и его вторую вариацию. Имеем

$$\delta^2 \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial y^2 \\ -2\partial^2/\partial x \partial y \end{pmatrix} \delta^2 w \quad (10)$$

Так как w является независимой кинематической переменной, то её вторая вариация тождественно равна нулю. Следовательно, четвёртый член в (9) равен нулю.

Рассмотрим далее второй член в (9). Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_0^T A \delta^2 \vec{\varepsilon}_0 = \vec{N}^T \delta^2 \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix} = \vec{N}^T \delta^2 \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix} + \\ \vec{N}^T \delta^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

По соображениям, аналогичным изложенным в предыдущем абзаце, первый член справа в (11) равен нулю. Используя эти соображения при преобразованиях второго члена, получаем:

$$\vec{\varepsilon}_0^T A \delta^2 \vec{\varepsilon}_0 = \vec{N}^T \begin{pmatrix} (\delta w_{,x})^2 \\ (\delta w_{,y})^2 \\ 2\delta w_{,x}\delta w_{,y} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что, если оба главных (мембранных) усилия положительны в каждой точке срединной плоскости пластины, то в системе координат, совпадающей с направлениями этих усилий, величина (12) – положительна.

Матрицы A и D – положительно определены (Reddy 2004, Gibson 1994). Следовательно, вторая вариация Φ – положительно определена и функционал Φ в пластине при равновесии в условиях положительных главных мембранных погонных усилий достигает минимума.

Заметим, что по нашему мнению, условия положительности главных мембранных погонных усилий для положительной определенности функционала Φ могут быть ослаблены, чему автор предполагает посвятить одну из последующих работ.

4. Статический вариационный принцип

Перейдем к рассмотрению статического вариационного принципа для композитной пластины фон Кармана.

В работе (Селюгин 2024а) представлен вариационный принцип для дополнительной энергии композитной закритически деформируемой пластины фон Кармана. Приведенные в этой работе результаты применимы и к случаю, рассмотренному в настоящей работе (единственное дополнение – в настоящей работе в кинематическом вариационном принципе учтен потенциал прогиба пластины распределенной нагрузкой q вида $\iint qwd\Gamma$).

Первая вариация дополнительного вариационного функционала U_c даётся формулой (4.12) работы Селюгин (2024а).

Как показано в работе Stumpf (1979), при условиях на выпуклость удельной потенциальной энергии деформации (выполненных в рассматриваемом случае, см. выше), функционал U_c является сопряженным с функционалом U и эти функционалы связаны между собой преобразованием Лежандра. Поэтому минимизация U по перемещениям является двойственной задачей к максимизации U_c по первому тензору напряжений Пиола. Следовательно, дополнительный вариационный функционал U_c имеет максимум по силовым факторам в актуальном напряженном состоянии (см. также Гельфанд и Фомин, 1961).

Таким образом, общая дополнительная энергия пластины (входящая со знаком минус в дополнительный вариационный функционал U_c), имеет минимум по силовым факторам в актуальном напряженном состоянии.

5. О двойственном зазоре

Рассмотрим сумму общих потенциальной энергии деформации Π и дополнительной энергии Π_c пластины. Как известно (Stumpf 1979, Васидзу 1987), для удельных величин этих энергий p и p_c справедливо соотношение

$$p + p_c = \sigma_{ij}^p u_{j,i} \quad (13)$$

где σ_{ij}^p – первый тензор напряжений Пиола, а $u_{j,i}$ – тензор градиентов перемещений ($i,j=1,2,3$). Также рассмотрим, как указанная сумма $\Pi + \Pi_c$ соотносится с потенциалом внешних сил W , представленным соотношением (6).

Как известно, дополнительная энергия единицы площади пластины π_c даётся формулой (Селюгин 2024а)

$$\pi_c = \frac{1}{2}(\overline{N^p})^T A^{-1} \overline{N^p} + \frac{1}{2}(\overline{M^p})^T D^{-1} \overline{M^p} + \frac{1}{2}(N_{xz}^p)^2 \frac{N_y^p}{N_x^p N_y^p - (N_{xy}^p)^2} + \frac{1}{2}(N_{yz}^p)^2 \frac{N_x^p}{N_x^p N_y^p - (N_{xy}^p)^2} - \frac{N_{xz}^p N_{yz}^p N_{xy}^p}{N_x^p N_y^p - (N_{xy}^p)^2} \quad (14)$$

где $N_x^p, N_y^p, N_{xy}^p, N_{xz}^p, N_{yz}^p$ – соответствующие погонные силы в пластине, вычисленные через компоненты 1-го тензора напряжений Пиола $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \sigma_{xy}^p$ (см. там же). Как было сказано выше, силы N_x, N_y, N_{xy} и N_x^p, N_y^p, N_{xy}^p (также как и соответствующие им мембранные напряжения) попарно равны между собой при вычислении по формулам (3), использующим тензор напряжений Кирхгоффа, и 1-й тензор напряжений Пиола. Погонные моменты M_x^p, M_y^p, M_{xy}^p и составленный из них вектор-столбец вычислены по формулам (3), где вместо напряжений Кирхгоффа используются компоненты 1-го тензора напряжений Пиола. Очевидно, что эти моменты соответственно равны M_x, M_y, M_{xy} .

Нетрудно видеть, что при положительных главных значениях мембранных погонных сил удельная дополнительная энергия единицы площади пластины (14) – превышает соответствующую удельную потенциальную энергию деформации.

На эскизе Рис. 2 показана зависимость обобщенного усилия P конструкции от обобщенного перемещения Δ в рассматриваемом случае. Как нетрудно видеть, при геометрически нелинейном деформировании общая дополнительная энергия конструкции – больше общей потенциальной энергии деформации.

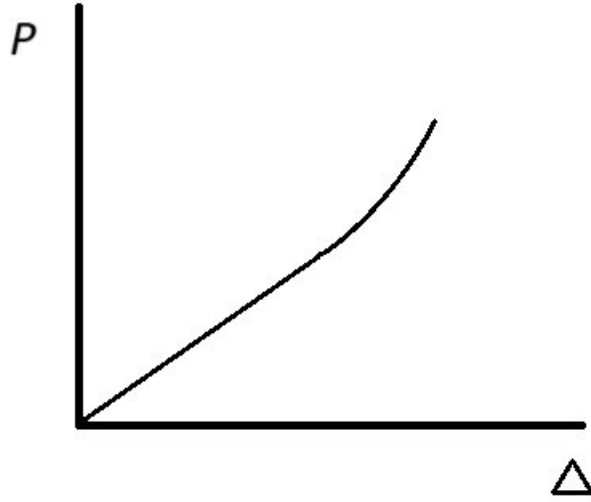


Рис. 2.

Вычислим интеграл по толщине пластины от $\sigma_{ij}^p u_{j,i}$ для $i,j=1,2$. Имеем:

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz (\sigma_{ij}^p u_{j,i}) = \int_{-h/2}^{h/2} dz \{ \sigma_x^p (u_{,x} - zw_{,xx}) + \sigma_y^p (v_{,y} - zw_{,yy}) + \sigma_{xy}^p (u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xx}) + \sigma_{xz}^p w_{,x} + \sigma_{yz}^p w_{,y} \} \quad (15)$$

Не входящие в (15) компоненты 1-го тензора напряжений Пиола, как можно видеть из общей формулы (Васидзу 1987),

$$\sigma_{ij}^p = \sigma_{ik} (\delta_{jk} + u_{j,k}) \quad (16)$$

равны нулю (δ_{jk} - символ Кронекера).

После простых преобразований в (15) с учётом (3) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} dz (\sigma_{ij}^p u_{j,i}) = & \frac{\partial}{\partial x} [N_x^p u - M_x^p w_{,x} + M_{x,x}^p w + N_{xy}^p v - M_{xy}^p w_{,y} + M_{xy,y}^p w + \\ & N_{xz}^p w] + \frac{\partial}{\partial y} [N_y^p v - M_y^p w_{,y} + M_{y,y}^p w + N_{xy}^p u + M_{xy,x}^p w - M_{xy}^p w_{,x} + N_{yz}^p w] - \\ & u N_{x,x}^p - w M_{x,xx}^p - v N_{y,y}^p - w M_{y,yy}^p - u N_{xy,y}^p - v N_{xy,x}^p - 2w M_{xy,xy}^p - w N_{xz,x}^p - \\ & w N_{yz,y}^p \end{aligned} \quad (17)$$

Перегруппировывая члены в (17), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} dz (\sigma_{ij}^p u_{j,i}) = & \frac{\partial}{\partial x} [N_x^p u - M_x^p w_{,x} + M_{x,x}^p w + N_{xy}^p v - M_{xy}^p w_{,y} + M_{xy,y}^p w + \\
& N_{xz}^p w] + \frac{\partial}{\partial y} [N_y^p v - M_y^p w_{,y} + M_{y,y}^p w + N_{xy}^p u + M_{xy,x}^p w - M_{xy}^p w_{,x} + N_{yz}^p w] - \\
& u(N_{x,x}^p + N_{xy,y}^p) - v(N_{xy,x}^p + N_{y,y}^p) - w[M_{x,xx}^p + 2M_{xy,xy}^p + M_{y,yy}^p + N_{xz,x}^p + \\
& N_{yz,y}^p + q] + qw \quad (18)
\end{aligned}$$

Из анализа выражения в (18) видно, что в него входят (см. Селюгин 2024а) уравнения равновесия по x , y , z , умноженные на u , v , w , соответственно.

Далее проинтегрируем (18) по всей площади пластины и воспользуемся для преобразования этого интеграла теоремой Остроградского-Гаусса (теоремой о дивергенции). Обозначим l , m – направляющие косинусы нормали в плоскости x , y к граничному контуру C . Имеем:

$$\begin{aligned}
\iint d\Gamma \int_{-h/2}^{h/2} dz (\sigma_{ij}^p u_{j,i}) = & \oint \{l(N_x^p u + N_{xy}^p v) + l(-M_x^p w_{,x} + M_{x,x}^p w - M_{xy}^p w_{,y} + \\
& M_{xy,y}^p w + N_{xz}^p w) + m(N_y^p u + N_{yz}^p v) + m(-M_y^p w_{,y} + M_{y,y}^p w + M_{xy,x}^p w - \\
& M_{xy}^p w_{,x} + N_{yz}^p w)\} + \iint d\Gamma [qw] \quad (19)
\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
\iint d\Gamma \int_{-h/2}^{h/2} dz (\sigma_{ij}^p u_{j,i}) = & \oint dC \{N_{xv} u + N_{yv} v + l(-M_x^p w_{,x} + M_{x,x}^p w - M_{xy}^p w_{,y} + \\
& M_{xy,y}^p w + N_{xz}^p w) + m(-M_y^p w_{,y} + M_{y,y}^p w + M_{xy,x}^p w - M_{xy}^p w_{,x} + N_{yz}^p w)\} + \\
& \iint d\Gamma [qw] \quad (20)
\end{aligned}$$

Как известно из постановки задачи равновесия (Раздел 2 и Васидзу 1987), величины N_{xv} и N_{yv} – заданы на C_1 , а перемещения u , v , w – равны нулю на C_2 .

В фигурных скобках в правой части (20) фактически стоят краевые условия (см. Васидзу 1987).

В итоге получаем соотношение для суммы общих протенциальной энергии деформации и дополнительной энергии пластины фон Кармана (в т.ч. композитной)

$$\Pi + \Pi_c = W \quad (21)$$

Из последнего соотношения видно, что сумма $\Pi + \Pi_c$ равно W при фон-Кармановском растяжении-изгибе пластины. Как известно, и при малых прогибах эта сумма также равна потенциалу внешних сил.

Таким образом, двойственный зазор для рассмотренных вариационных принципов – отсутствует.

6. Сравнение поведения геометрически линейной и геометрически нелинейной композитных пластин

Рассмотрим поведение некоторой композитной пластины в условиях значительного изгиба и растяжения. Главные значения мембранных сил будем считать положительными. Пластина может анализироваться в геометрически линейном приближении (с перемещениями $\vec{u}_{lin}$) и в геометрически нелинейном приближении фон Кармана (с перемещениями $\vec{u}_{nl}$).

Для геометрически линейного приближения (см. Reddy 2004) справедлив принцип минимума общей потенциальной энергии пластины. В соответствии с этим принципом, рассматривая $\vec{u}_{nl}$ как кинематически допустимое поле перемещений, для общей потенциальной энергии геометрически-линейной пластины U^{lin} справедливо неравенство:

$$U^{lin}(\vec{u}_{lin}) \leq U^{lin}(\vec{u}_{nl}) \quad (22)$$

Далее, учитывая выше сказанное о положительности главных значений мембранных сил, можно записать для общей потенциальной энергии геометрически линейной U^{lin} и геометрически нелинейной U^{nl} пластины

$$U^{lin}(\vec{u}_{nl}) \leq U^{nl}(\vec{u}_{nl}) \quad (23)$$

Следовательно, комбинируя (22) и (23), получаем:

$$U^{lin}(\vec{u}_{lin}) \leq U^{nl}(\vec{u}_{nl}) \quad (24)$$

то есть, при тех же краевых условиях и нагружении *общая потенциальная энергия геометрически нелинейной пластины не меньше общей потенциальной энергии геометрически линейной пластины.*

Используем далее статический вариационный принцип, рассмотренный выше. В соответствии с этим принципом распределение сил и моментов для геометрически линейной пластины может рассматриваться как статически допустимое для геометрически нелинейной пластины. Тогда для общей дополнительной энергии геометрически линейной Π_c^{lin} и нелинейной Π_c^{nl} пластин справедливо неравенство:

$$\Pi_c^{nl} \leq \Pi_c^{lin} \quad (25)$$

Это означает, что *общая дополнительная энергия геометрически нелинейной пластины не превосходит общую дополнительную энергию геометрически линейной пластины.*

Неравенства (24) и (25), соответственно, позволяют сделать вывод о большей обобщённой жесткости и меньшей обобщенной податливости рассматриваемой пластины в геометрически нелинейном приближении фон Кармана, по сравнению с пластиной, анализируемой по геометрически линейной теории. Аналогичный подход был использован в работе Selyugin (2004), посвященной оптимизации геометрически нелинейных ферм.

7. Эволюционный алгоритм оптимизации углов укладки

Полученные выше результаты (а также работа Селюгин 2024b) позволяют построить алгоритм оптимизации (минимизации податливости) композитной пластины (в условиях растяжения и значительного изгиба), деформируемой в приближении фон Кармана, за счёт выбора углов укладки волокон слоёв.

Алгоритм заключается в выполнении двух шагов. На первом шаге отыскивается решение условий оптимальности 1-го порядка (см. Селюгин

2024b) при неизменных мембранных силах и моментах. На втором шаге найденные распределения углов укладки волокон слоёв используются для определения соответствующим им параметров деформирования. Приведенные выше вариационные принципы позволяют сказать, что на втором шаге общая дополнительная энергия пластины (как мера её податливости) уменьшается. Использование осей координат главных мембранных усилий и главных моментов пластины для определения членов условий оптимальности позволяет получить их аналитические, хотя и несколько громоздкие, выражения.

Предлагаемый алгоритм является алгоритмом эволюционного типа.

8. Пример

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера квадратную пластину размерами $b*b$ (см. Рис. 3). Пластина толщиной h изготовлена из специального ортотропного материала (Gibson 1994) с одинаковыми значениями модуля Юнга E по осям ортотропии (ориентированным вдоль осей x, y), некоторым значением модуля сдвига G в плоскости $X-Y$, и коэффициентом Пуассона μ , равным 0.25. Отношение E/G принято равным 14. Указанные выше характеристики соответствуют, например, композиционному материалу, изготовленному из тканого препрега углеполимера типа углеволокно-эпоксидная смола.

Поверхность пластины нагружена постоянной, не зависящей от координат x, y , нагрузкой q на единицу площади.

На сторонах, параллельных оси x , пластина свободна, а на сторонах, параллельных оси y , перемещения u, v, w по осям координат x, y, z , соответственно, равны нулю.

Отношение $\frac{b}{h}$ принято равным 200, что соответствует пластине толщиной 2 мм и размерами 400х400 мм.

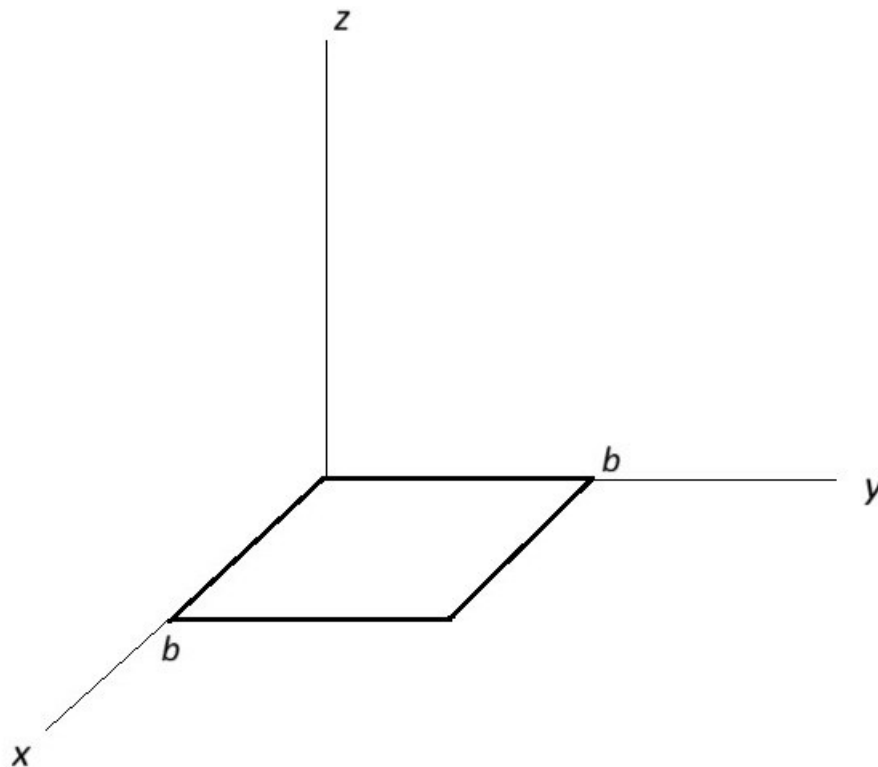


Рис. 3 Плоская ортотропная пластина.

Перемещения центрального слоя пластины приняты в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = d_1 \left(\frac{2x}{b} - 1 \right) \left(1 - \left(\frac{2x}{b} - 1 \right)^2 \right) \\ v = d_2 \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \left(1 - \left(\frac{2x}{b} - 1 \right)^2 \right) \\ w = d_3 \left(1 - \left(\frac{2x}{b} - 1 \right)^2 \right) \end{array} \right\} \quad (26)$$

где d_1, d_2, d_3 – неизвестные коэффициенты, которые должны быть определены из описанного выше кинематического вариационного принципа.

Потенциальная энергия пластины U запишется в виде (см. (2)):

$$U = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] - \iint q w d\Gamma = \frac{1}{2} A_{11} \left(\frac{48}{15} d_1^2 - \frac{128}{15b} d_1 d_3^2 + \frac{64}{15b^2} d_3^4 \right) + A_{12} \left[d_2 \left(\frac{16}{15} d_1 + \frac{32}{15b} d_3^2 \right) \right] + \frac{1}{2} A_{22} \frac{32}{15} d_2^2 + \frac{1}{2} A_{66} \frac{32}{9} d_2^2 + \frac{1}{2} D_{11} \frac{64}{b^2} d_3^2 - q \frac{2}{3} b^2 d_3 \quad (27)$$

Величины элементов матриц A и D даются формулами:

$$A_{11} = A_{22} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \quad A_{12} = \frac{\mu Eh}{1-\mu^2} \quad A_{66} = Gh \quad D_{11} = \frac{\frac{1}{3} Eh^3}{1-\mu^2} \quad (28)$$

Производные от U по d_1, d_2, d_3 должны быть равны нулю, вследствие кинематического вариационного принципа. Эти нулевые производные, с точностью до постоянных множителей, приводят к соотношениям:

$$\begin{cases} 3A_{11}d_1 - A_{11}\frac{4}{b}d_3^2 + A_{12}d_2 = 0 \\ \frac{1}{5}A_{12}d_1 + \frac{2}{5b}A_{12}d_3^2 + \frac{2}{5}A_{22}d_2 + \frac{1}{3}A_{66}d_2 = 0 \\ -\frac{128}{15b}A_{11}d_1d_3 + \frac{128}{5b^2}A_{11}d_3^3 + \frac{64}{15b}A_{12}d_2d_3 + D_{11}\frac{64}{b^2}d_3 - q\frac{2b^2}{3} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Система (29) – нелинейная система алгебраических уравнений третьего порядка. Эта система приводит к кубическому уравнению относительно $\frac{d_3}{h}$, записываемому в виде:

$$\left(\frac{d_3}{h}\right)^3 + 32 * K_{13} \left(\frac{d_3}{h}\right) - K_{13} \frac{q b^4}{E h^4} (1 - \mu^2) = 0 \quad (30)$$

где

$$\begin{cases} K_{13} = \frac{1}{-\frac{256}{5}K_{12} + \frac{192}{5} + \frac{128}{5}\mu K_{11}} \\ K_{12} = \frac{1}{3-\mu \left(\frac{30\mu}{6\mu^2+24+20\frac{G(1-\mu^2)}{E}} \right)} \\ K_{11} = \frac{1}{\mu-3\frac{6\mu^2+24+20\frac{G(1-\mu^2)}{E}}{30\mu}} \end{cases} \quad (31)$$

Так как дискриминант уравнения (30) – положителен, это приводит к единственному корню, вычисляемому по известной формуле Кардано (Корн и Корн, 2003).

Для оценки поведения конструкции с помощью статического вариационного принципа, описанного выше в соответствующем разделе, воспользуемся следующими заданными функциями для ненулевых силовых факторов:

$$\begin{cases} M_x = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2x}{b} - 1 \right)^2 \right) q_1 \frac{b^2}{4} \\ N_{xz} = (q_1 - q) \left(\frac{2x}{b} - 1 \right) \frac{b}{2} \\ N_x = q_2 \frac{b}{2} \end{cases} \quad (32)$$

Как нетрудно проверить, соотношения (32) удовлетворяют уравнению равновесия по z (первое соотношение ниже) и силовым краевым условиям на свободных кромках (Васидзу 1987):

$$\begin{cases} M_{x,xx} + N_{xz,x} + q = 0 \\ N_y = N_{xy} = M_y = 0 \\ (M_{xy,x} + M_{y,y}) + M_{xy,x} + N_{yz} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Величины q_1, q_2 должны быть определены из статического вариационного принципа.

Дополнительный вариационный функционал U_c записывается в виде:

$$U_c = - \iint dx dy \left[\frac{1}{2} M_x D_{11}^{-1} M_x + \frac{1}{2} N_x A_{11}^{-1} N_x + \frac{1}{2} \frac{N_{xz}^2}{N_x} \right] = - \left\{ \frac{q_1^2 b^6}{80 E h^3} + \frac{q_2^2 b^4}{8 E h} + \frac{(q_1 - q)^2 b^3}{12 q_2} \right\} \quad (34)$$

где

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{E h} \quad ; \quad D_{11}^{-1} = \frac{3}{E h^3} \quad (35)$$

Дифференцируя (34) по q_1, q_2 и приравнявая эти производные нулю, получаем:

$$\begin{cases} \frac{b^3 q_1}{20 E h^3} + \frac{q_1 - q}{3 q_2} = 0 \\ -\frac{b q_2}{E h} + \frac{(q_1 - q)^2}{3 q_2^2} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

В итоге из (36) следует кубическое уравнение (с положительным дискриминантом) вида:

$$\frac{q_1^3}{E^3} + \frac{8000 \left(\frac{h}{b} \right)^8 q_1}{9 E} - \frac{8000 \left(\frac{h}{b} \right)^8 q}{9 E} = 0 \quad (37)$$

Единственное решение этого уравнения даётся известной формулой Кардано Корн и Корн, 2003).

Результаты расчётов для различных нагрузок на Рис. 4 и в Табл. 1 иллюстрируют полученные двойственные вариационные принципы и возможные погрешности при использовании кинематически допустимых перемещений и статически допустимых усилий.

Из представленных данных видно, что U_c везде меньше, чем U , и разница между этими величинами невелика.

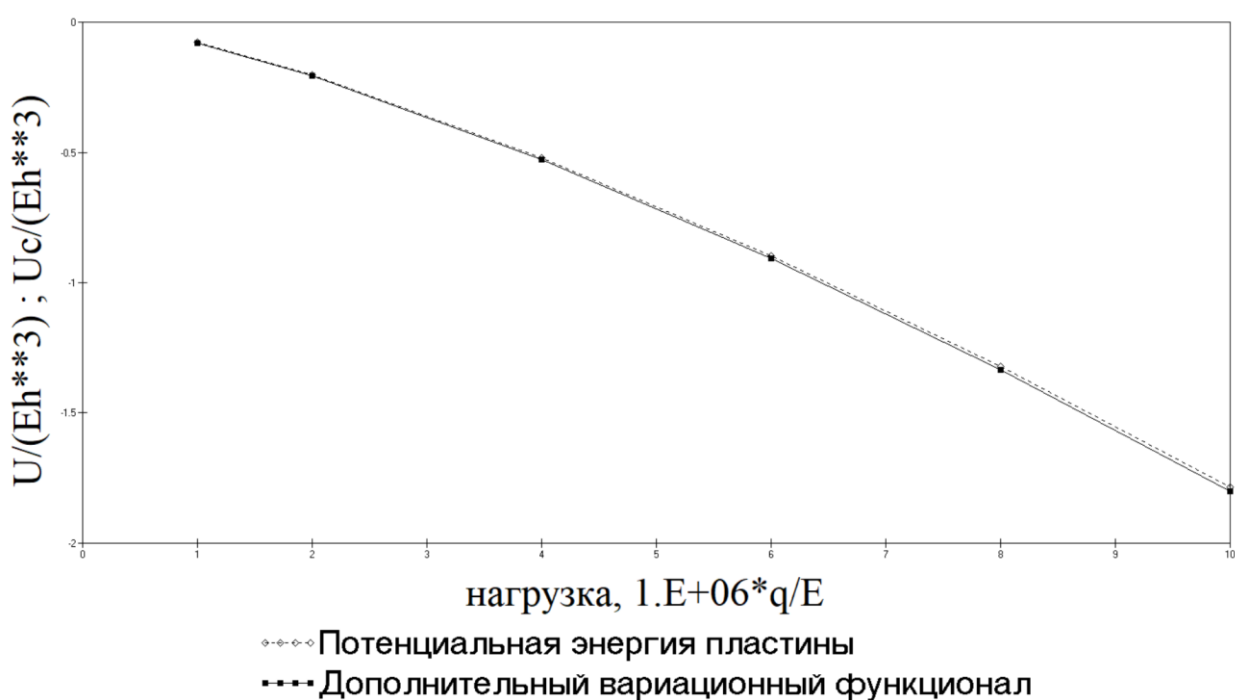


Рис. 4. Сравнение результатов для двойственных вариационных принципов.

q/E	U/(Eh**3)	Uc/(Eh**3)	Приближенный прогиб в центре пластины, w/h
1.E-6	-0.0784962	-0.0812212	4.3237
2.E-6	-0.203170	-0.207089	5.38905
4.E-6	-0.520068	-0.526420	6.74339
6.E-6	-0.898457	-0.907354	7.69784
8.E-6	-1.32296	-1.33452	8.45932
10.E-6	-1.78528	-1.79961	9.10319

Табл. 1. Сравнение результатов для двойственных вариационных принципов.

9. Заключение

Доказано, что в состоянии равновесия композитной пластины её общая потенциальная энергия достигает минимума.

Доказано, что в состоянии равновесия композитной пластины её дополнительный вариационный функционал достигает максимума.

Показано, что для двойственных друг другу кинематического и статического вариационных принципов (описывающих деформирование изотропной или композитной пластины фон Кармана) двойственный зазор равен нулю.

Сравнение геометрически линейной и геометрически нелинейной пластин с одинаковой укладкой слоёв позволяют сделать вывод о БОльшей обобщённой жесткости и меньшей обобщенной податливости последней пластины в геометрически нелинейном приближении фон Кармана.

Предложен эволюционный алгоритм оптимизации укладки, обладающий монотонными свойствами сходимости, вследствие статического вариационного принципа.

Представлен иллюстрирующий пример композитной пластины, в котором показано использование рассмотренных вариационных принципов и рассчитаны границы погрешностей для некоторых возможных полей перемещений и внутренних усилий.

Результаты работы применимы, например, для нижней поверхности крыла большого удлинения пассажирского самолёта.

Литература

Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.

Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.

Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.

Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы : пер. с англ. - 6-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2003. - 831 с.

Селюгин С. В. (а) Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин, Изв. РАН. МТТ, 2024, N3, 148-163.

Селюгин С. В. (b) Анализ и проектирование пластин и панелей из композиционных материалов. М.: МАИ, 155 с.

Gibson R. Principles of composite material mechanics. McGraw-Hill, 1994

Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis, 2nd Edition. CRC Presss, N-Y, 2004.

Selyugin S.V. On optimal geometrically non-linear trusses. Struct Multidisc Optim 28, 1–12 (2004) DOI 10.1007/s00158-004-0462-4

Stumpf H. The derivation of dual extremum and complementary stationary principles in geometrically non-linear shell theory. Ing Archiv, 1979, 8, 221-237.