

Теоретический вывод закона Кулона на основе 5D пространства. Экранирование и ренормализация Кулоновского взаимодействия на малых расстояниях между зарядами.

Вадим Хоруженко

24 октября 2025 г.

Аннотация

Предлагается новая геометрическая модель, в которой плотность пространства ρ_0 рассматривается как фундаментальное измерение наравне с традиционными пространственно-временными координатами. Показано, что электромагнитное взаимодействие возникает как следствие возмущений плотности ρ_0 при сохранении плоской метрики пространства.

Ключевым результатом является теоретический вывод закона Кулона из первых принципов геометрии пространства, где кулоновское взаимодействие естественным образом возникает как перекрёстный член в разложении полного возмущения плотности. Модель предсказывает эффекты экранирования и перенормировки на малых расстояниях без введения дополнительных сущностей, таких как виртуальные частицы.

Особенностью предлагаемого подхода является конечность всех выражений, включая самоэнергию зарядов, что решает фундаментальную проблему расходимостей в классической теории поля. Показано, что ρ_0 представляет собой непрерывное измерение, а барионная материя интерпретируется как специфические конфигурации возмущений этой фундаментальной субстанции.

Теоретический формализм открывает путь к единому геометрическому описанию фундаментальных взаимодействий и предлагает новую парадигму понимания природы физической реальности, где традиционное разделение на пространство, время и материю преодолевается в рамках расширенного понятия пространства-плотности-времени.

I. Введение

Электромагнитные и гравитационные силы являются одними из наиболее фундаментальных взаимодействий в физике. Эти силы управляют поведением материи и энергии в масштабах от субатомных частиц до космологических. Несмотря на обширные эмпирические данные и теоретические модели, описывающие их поведение, истинная природа и материальная сущность, из которой они возникают, остаются предметом интенсивных исследований.

С физической точки зрения мы понимаем, как эти силы действуют, и можем с высокой точностью предсказывать их эффекты. Однако остаются фундаментальные вопросы: что именно представляют собой эти силы? Как они взаимосвязаны? И, что наиболее важно, какова природа протоматерии — фундаментальной субстанции, из которой эти силы возникают? Эти вопросы лежат не только в области физических принципов, но и затрагивают философские аспекты природы реальности.

В данной статье предлагается теоретическая модель, вводящая дополнительную пространственную размерность, называемую «плотностью пространства». Мы предполагаем, что эта размерность играет ключевую роль в формировании гравитационных и электромагнитных полей. Наша модель указывает на то, что традиционного трёхмерного пространства в сочетании со временем

недостаточно для полного объяснения происхождения этих сил. Вместо этого, само пространство может обладать внутренними свойствами, способствующими формированию этих полей. Расширяя наше понимание пространства за счёт включения дополнительного измерения, мы исследуем возможность новых интерпретаций гравитационных и электромагнитных взаимодействий. В процессе исследования мы придём к выводу, что поставленная задача в рамках сформулированных постулатов не имеет решения в трёхмерном пространстве, поскольку обнаруживается нарушение постулата о сохранении количества плотности пространства. В результате мы будем вынуждены перейти к рассмотрению 5D-пространства, сформированного из двух ортогональных 3D-подпространств с одной общей осью.

II. Гипотеза

Мы предполагаем, что электромагнитные и гравитационные поля являются проявлениями более фундаментального свойства пространства, которое можно интерпретировать как «плотность пространства». Это свойство определяет количественную характеристику пространства, при этом концептуально отличаясь от плотности материи. Данная величина, в отличие от плотности материи, непрерывна — так же, как непрерывны время и три пространственные координаты. Кроме того, в отличие от барионной материи, плотность пространства, если рассматривать её как материю, не вызывает искривления метрики пространства, то есть не обладает массой, инерцией, трением или вязкостью. Это некая идеализированная материя, которая в своём стремлении к максимальной энтропии может проявляться во взаимодействии, вызванном неравномерностью распределения, что мы интерпретируем как искривление самого пространства без искривления его метрики.

В этой модели «плотность пространства» представляет собой меру того, как само пространство может быть сжато или расширено независимо от его метрики. Эта плотность не аналогична плотности материи в трёхмерном пространстве, а скорее отражает фундаментальную характеристику пространства, влияющую на формирование полей.

Наша гипотеза основывается на нескольких ключевых постулатах:

- **Плотность пространства:** В пятимерном пространстве плотность $\rho(r)$ характеризует состояние пространства и может изменяться, тем самым мы можем говорить об искривлении пространства без искривления его метрики. Давайте назовём это явление *искривлением пространства первого порядка*. Подобный термин используется в теории относительности, но в рамках нашей теории он будет иметь несколько иной контекст.
- **Сферическая симметрия возмущений:** Распределение плотности пространства $\rho(r)$ при её возмущении предполагается сферически симметричным относительно центра возмущения.

- **Сохранение количества плотности пространства:** При возмущении в некоторой области пространства окружающее пространство способно изменять свою плотность таким образом, что суммарная «плотность» пространства по бесконечному объёму остаётся неизменной. Иными словами, в определённом приближении полное количество плотности пространства сохраняется.
- **Постулат о максимальной энтропии распределения плотности пространства:** Пространство стремится к состоянию с максимальной энтропией, то есть к равномерному распределению плотности. Этот принцип определяет естественную тенденцию пространства возвращаться к равномерному распределению плотности после возмущений, аналогично термодинамическим принципам, управляющим физическими системами.

Исследуя эти постулаты в рамках 5D-пространства, мы стремимся дать более глубокое понимание происхождения электромагнитных полей. Эта модель ставит под сомнение традиционное представление о независимости этих полей и, вместо этого, предполагает, что они взаимосвязаны через внутренние свойства самого пространства. В процессе исследования мы получим совершенно неожиданный результат: закон Кулона, содержащий поправку на взаимодействие элементарных зарядов на расстояниях, соизмеримых с их «классическими» физическими размерами (данное явление хорошо изучено в рамках КЭД — экранирование).

III. Методология

3.1 Распределение плотности пространства вокруг одной сжатой сферической области пространства

Мы имеем два состояния вселенной, в первом состоянии по всему пространству плотность равна ρ_0 и является некоторой константой. Во втором состоянии системы у нас есть некая область пространства, ограниченная сферой $S(R_1)$, которую мы сжимаем до $S(R'_1)$. Нам необходимо найти распределение плотности пространства внутри сферы и за её пределами, исходя из установленных нами законов, действующих в нашей гипотетической вселенной.

3.1.1 Распределение плотности после сжатия

Плотность после сжатия внутри сферы определяется как $\rho_{\text{inside}} = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_1 — добавленная плотность, определяемая из соотношения объемов до и после сжатия:

$$\rho_0 V(R_1) = \rho_{\text{inside}} V(R'_1)$$

Подставим объемы сфер:

$$\rho_0 \frac{4}{3} \pi R_1^3 = (\rho_0 + \rho_1) \frac{4}{3} \pi R_1'^3$$

Упрощаем:

$$\rho_0 R_1^3 = (\rho_0 + \rho_1) R_1'^3$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{R_1^3}{R_1'^3} - 1 \right)$$

3.1.2 Распределение плотности за пределами сферы

Мы исходим из того, что за пределами сферы количество изъятой плотности пространства должно быть равно количеству добавленного внутри неё $\rho_1 \cdot V(R_1')$. Поэтому при интегрировании возмущения от поверхности сжатой сферы до бесконечности интеграл должен давать конечное число, то есть сходиться, а соответственно интегрируемая функция должна быть сходящейся. В трёхмерном пространстве такой функцией является $1/r^4$. Предположим, что распределение уменьшенной плотности за пределами сжатой области пространства будет удовлетворять этой зависимости от расстояний от центра возмущения. Тогда получим, следующую зависимость распределения плотности пространства за пределами сжатой сферы:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{A}{r^4}$$

3.1.3 Нормировочный коэффициент A

Для выполнения закона сохранения плотности пространства, интеграл от $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ по объему от R_1' до бесконечности должен быть равен добавленной плотности внутри сферы:

$$\rho_1 V(R_1') = \int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV$$

Или принимая во внимание закон сферической симметрии, в сферической системе координат интеграл упрощается до:

$$\rho_1 V(R_1') = \int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Подставляем:

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1'^3 = 4\pi \int_{R_1'}^{\infty} \frac{A}{r^4} r^2 dr$$

Решаем интеграл:

$$4\pi A \int_{R'_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = 4\pi A \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^{\infty} = 4\pi A \left(\frac{1}{R'_1} - 0 \right) = \frac{4\pi A}{R'_1}$$

Равенство количества плотностей:

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1'^3 = \frac{4\pi A}{R'_1}$$

Найдем A :

$$A = \rho_1 \frac{R_1'^4}{3}$$

Итоговая формула для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{A}{r^4} = \frac{\rho_1 \frac{R_1'^4}{3}}{r^4}$$

Теперь умножим числитель и знаменатель на 4π :

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{4\pi \rho_1 \frac{R_1'^4}{3}}{4\pi r^4} = \frac{\rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1'^4}{4\pi r^4} = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}$$

Таким образом мы получили следующую формулу для распределения плотности за пределами сферы $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} \quad (1)$$

Так же принимая во внимание, что количество добавленной плотности в объем сжатой сферы выражается формулой:

$$Q = (V(R_1) - V(R'_1)) \cdot \rho_0$$

где $V(R_1)$ и $V(R'_1)$ — это объемы сфер с радиусами R_1 и R'_1 соответственно. А так же принимая во внимание формулу для ρ_1 - плотность количества добавленной плотности внутри сферы:

$$\rho_1 = \frac{Q}{V(R'_1)}$$

где $V(R'_1)$ — это объем сферы после сжатия.

Мы можем полученную формулу для распределения плотности пространства $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ выразить в виде выражения:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{Q \cdot R_1'}{4\pi r^4} \quad (2)$$

Где Q - количество плотности добавленной в объем сферы $S(R_1')$, R_1' - радиус сжатой сферы, а r - расстояние от центра сферы до точки в пространстве в сферической системе координат.

3.1.4 Проверка сохранения количества плотности пространства

Для выполнения третьего закона установленного в нашей системе должно выполняться равенство:

$$\int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV = \int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_1 V(R_1')$$

Подставляем выражение для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\int_{R_1'}^{\infty} \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1')}{4\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1') \int_{R_1'}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

Интегрируем и подставляем пределы интегрирования:

$$\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1') \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1'}^{\infty} = \rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1') \left(\frac{1}{R_1'} - 0 \right) = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1')}{R_1'}$$

Получаем:

$$\int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV = \rho_1 V(R_1') = \rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1'^3$$

Таким образом мы убедились, что наше распределение плотности пространства за пределами сжатой сферы пропорциональное $1/r^4$, согласуется с нашим

третьим законом сохранения плотности пространства в системе с учетом нормировочного коэффициента A .

IV. Запись выражения для полного распределения плотности пространства для одной сжатой сферы.

Давайте запишем наше распределение с учетом граничных условий, используя функцию Хевисайда, данное представление распределения плотности пространства нам понадобится для нахождения полного количества взаимодействия двух сгустков с учетом плотности пространства добавленного в первый сгусток, а так же градиента на границе перехода - сфере ограничивающей первый сгусток. Почему это важно, вы поймете в следующем разделе моей статьи.

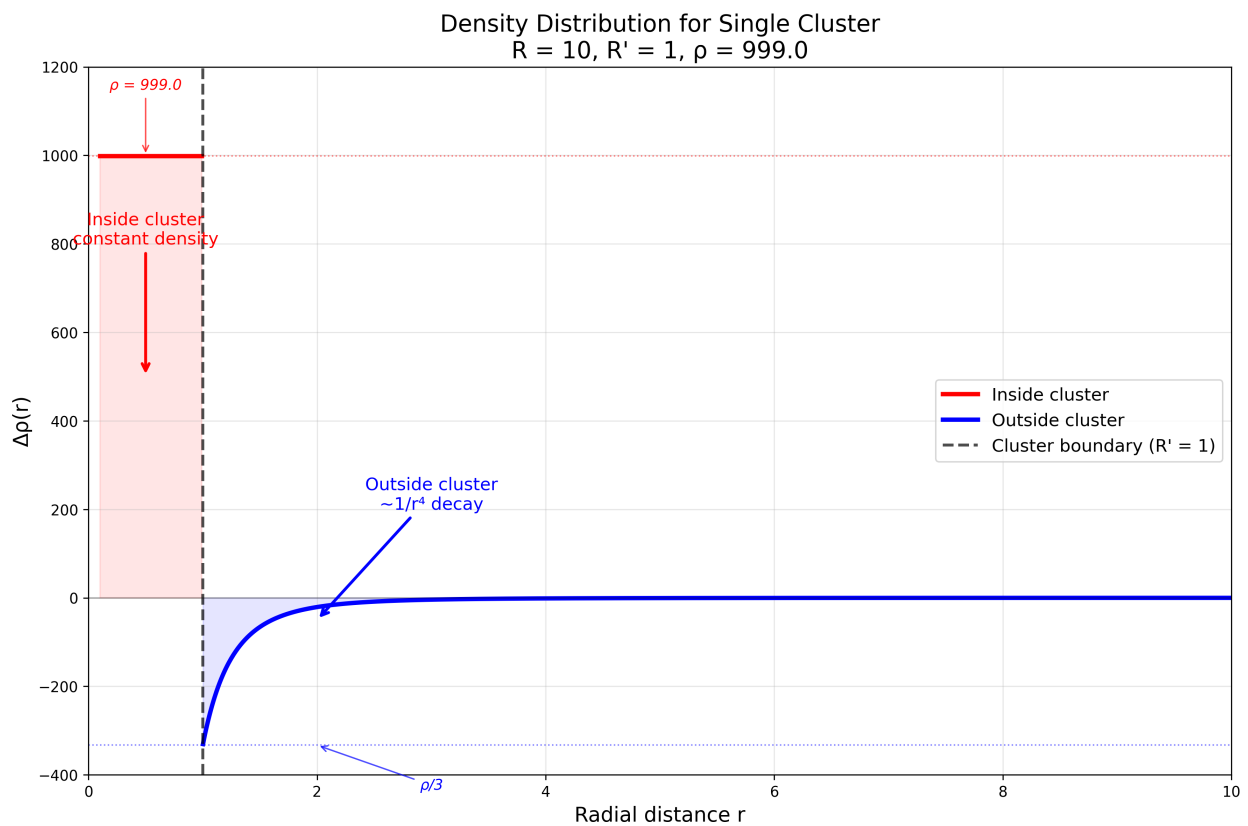


Рис. 1: Графики распределения плотности пространства на прямой, проходящей через центр сжатой сферы

4.1 Представление распределения плотности пространства с использованием функции Хевисайда

Распределение плотности пространства, $\rho(r)$, для одной сферы можно выразить с использованием функции Хевисайда $H(x)$ для точного описания плотности внутри и вне сжатой сферы. Основное распределение плотности определяется как:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 + \rho_1, & \text{если } r \leq R'_1 \\ \rho_0 - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Увеличение плотности $\Delta\rho_{\text{increase}}(r)$ внутри сжатой области можно выразить как:

$$\Delta\rho_{\text{increase}}(r) = \begin{cases} \rho_1, & \text{если } r \leq R'_1 \\ 0, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Аналогично, уменьшение плотности $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ вне сферы:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq R'_1 \\ \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Теперь мы можем переписать эти выражения в терминах функции Хевисайда $H(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\text{increase}}(r) &= \rho_1 H(R'_1 - r) \\ \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) &= \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} H(r - R'_1) \end{aligned}$$

Таким образом, общее изменение плотности $\Delta\rho(r)$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4} H(r - R'_1)$$

4.1.1 Проверка граничных условий

Теперь проверим выполнение граничных условий:

1. При $r \leq R'_1$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R1'}}{4\pi r^4} H(r - R'_1)$$

Поскольку $H(R'_1 - r) = 1$ и $H(r - R'_1) = 0$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 - 0 = \rho_1$$

2. При $r > R'_1$:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R1'}}{4\pi r^4} H(r - R'_1)$$

Поскольку $H(R'_1 - r) = 0$ и $H(r - R'_1) = 1$:

$$\Delta\rho(r) = 0 - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R1'}}{4\pi r^4}$$

Теперь подставим $V_{R1'} = \frac{4}{3}\pi(R'_1)^3$:

$$\Delta\rho(r) = -\frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi(R'_1)^3}{4\pi r^4} = -\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4}$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для $\Delta\rho(r)$ в терминах функции Хевисайда:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \quad (3)$$

4.2 Проверка удовлетворения уравнения условию сохранения количества плотности пространства

Для проверки возьмем интеграл от $\Delta\rho(r)$. Давайте проинтегрируем $\Delta\rho(r)$ по всему объему. Напомним, что $\Delta\rho(r)$ у нас представлена как:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 \left[H(R'_1 - r) - \frac{R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \right]$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Разделим интеграл на две части, соответствующие $\Delta\rho_{\text{increase}}(r)$ и $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \left[\rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \right] \cdot 4\pi r^2 dr$$

Разделим на два отдельных интеграла:

$$\int_0^\infty \rho_1 H(R'_1 - r) \cdot 4\pi r^2 dr - \int_0^\infty \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^{R'_1} \rho_1 \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_1 \int_0^{R'_1} r^2 dr = 4\pi\rho_1 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{R'_1} = 4\pi\rho_1 \cdot \frac{(R'_1)^3}{3} = \frac{4\pi\rho_1(R'_1)^3}{3}$$

Теперь рассмотрим второй интеграл:

$$\int_{R'_1}^\infty \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \int_{R'_1}^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^\infty$$

Вычисляем пределы:

$$\frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R'_1} \right) = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \cdot \frac{1}{R'_1} = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^3}{3}$$

Теперь сложим оба результата:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_1(R'_1)^3}{3} - \frac{4\pi\rho_1(R'_1)^3}{3} = 0$$

Таким образом, интеграл от $\Delta\rho(r)$ по всему объему равен нулю:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 0$$

Получили предсказуемый результат, однако это нужно было выполнить для проверки.

V. Количество возмущения (количество взаимодействия) двух сжатых сфер плотности пространства

5.1 Полное распределение плотности через функции Хевисайда

5.1.1 Для одного сгустка

Для одиночного сгустка плотности пространства распределение возмущения относительно радиального расстояния r_1 определяется выражением:

$$\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1),$$

где:

- ρ_1 — амплитуда возмущения плотности сгустка;
- R'_1 — радиус деформированной области пространства;
- $H(x)$ — функция Хевисайда, обеспечивающая разделение внутренней и внешней областей.

5.1.2 Для двух сгустков через коэффициенты искривления

Коэффициент искривления для первого сгустка

$$K_1(\mathbf{r}_1) = 1 + \frac{\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)}{\rho_0} = 1 + \frac{1}{\rho_0} \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1)$$

Коэффициент искривления для второго сгустка

$$\begin{aligned} K_2(\mathbf{r}_1) &= 1 + \frac{\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0} \\ &= 1 + \frac{1}{\rho_0} \left[\rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{D}$ — векторное смещение центра второго сгустка относительно первого.

5.1.3 Общий коэффициент искривления и полное изменение плотности

Если под коэффициентом искривления плотности пространства понимать коэффициент ее растяжения или сжатия, то при наложении областей искривления от разных сгустков (за их пределами), очевидно, что коэффициенты будут умножаться, это равносильно тому что мы растягиваем уже растянутое, соответственно общий коэффициент искривления пространства, создаваемый двумя сгустками, определяется произведением их индивидуальных коэффициентов:

$$K_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = K_1(\mathbf{r}_1) \cdot K_2(\mathbf{r}_1). \quad (4)$$

Соответственно, полное возмущение плотности пространства имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) &= \rho_0 [K_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) - 1] \\ &= \rho_0 \left[\left(1 + \frac{\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)}{\rho_0} \right) \left(1 + \frac{\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0} \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

или раскрывая выражение:

$$\Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) + \frac{\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0}.$$

Третье (нелинейное) слагаемое отражает *взаимное нарушение равномерного распределения плотности пространства*, возникающее вследствие наложения искривлений обоих сгустков. Именно этот член отвечает за количество возмущения плотности пространства в случае двух сгустков этой плотности на расстоянии D .

Полная форма с функциями Хевисайда которой мы будем пользоваться для интегрирования определяется формулой:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) &= \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \\ &\quad + \rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \\ &\quad \times \left[\rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

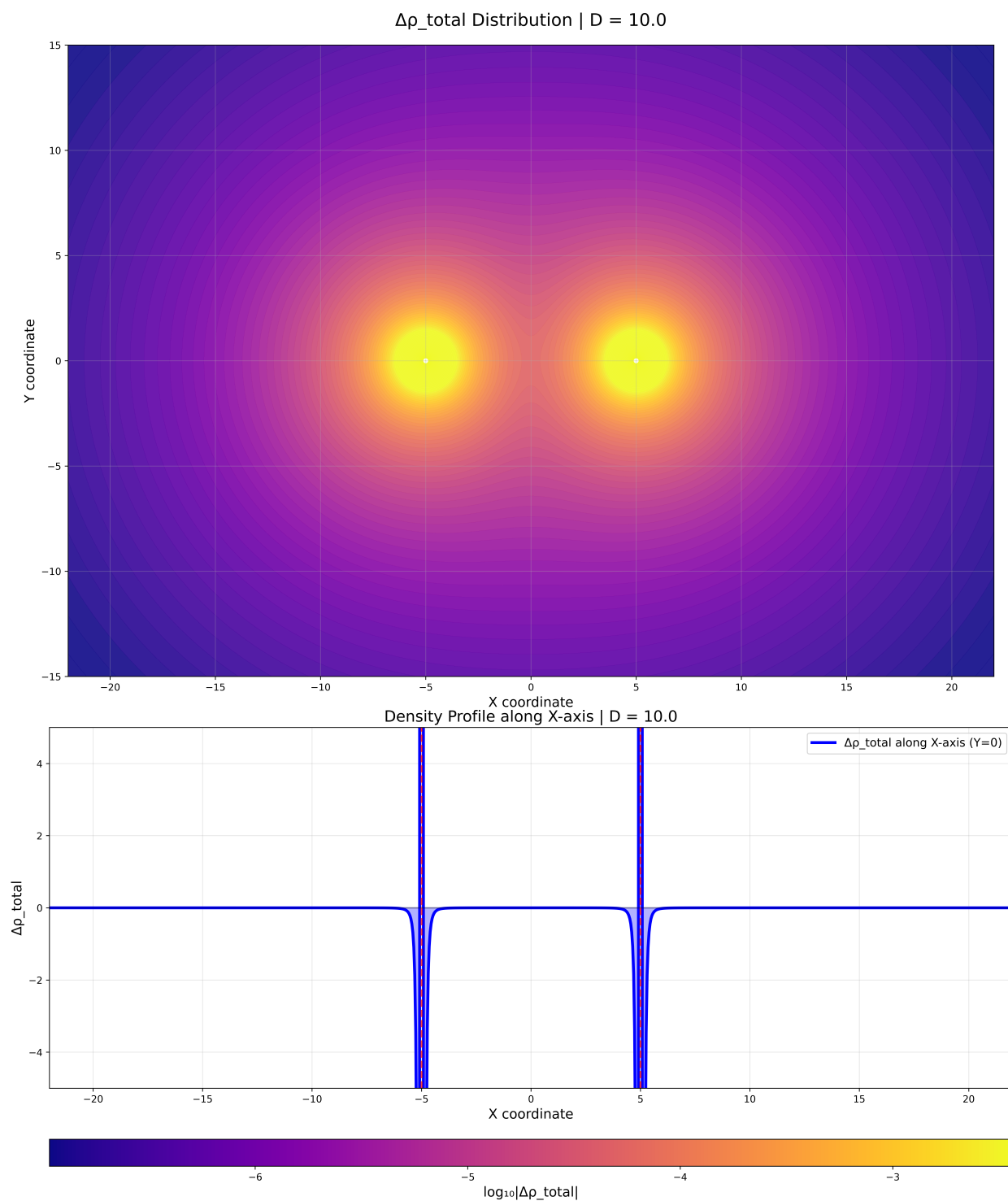


Рис. 2: Визуализация распределения плотности протстранства для двух сферических сгустков

VI. Проверка сохранения количества плотности пространства от двух сгустков плотнтсти. Интеграл суммарного изменения плотности в трёхмерном объёме

Давайте проверим как выполняется наш постула сохранения количества плотности пространства в случае когда это определяется изменением рамномерного

распределения плотности от двух сгустков плотности. В случае одного сгуска, мы убедились, что полный интеграл от изменения равномерного распределения плотности как внутри сгуска так и за его пределами равен нулю. Давай проверим сохраняется ли этот постулат в случае если искривление плотности определяется наложением коэффициентов искривления от двух сгустков.

Рассмотрим объёмный интеграл суммарного изменения плотности пространства:

$$I := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1.$$

Подставляя разложение

$$\Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) + \frac{\Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0},$$

получаем разложение интеграла:

$$I = I_1 + I_2 + \frac{1}{\rho_0} J,$$

где

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) d^3 r_1, \quad I_2 := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) d^3 r_1,$$

$$J := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) d^3 r_1.$$

Наша цель — показать, что $I_1 = I_2 = 0$, тогда как $J \neq 0$; это означает, что суммарный объёмный интеграл $I \neq 0$ и постулат о сохранении «количества» плотности нарушается в трёхмерном случае.

—

6.1 Нули первых двух интегралов

Для первого сгуска

$$\Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1),$$

введём сферические координаты с центром в первом сгустке: $d^3 r_1 = 4\pi r_1^2 dr_1$. Тогда

$$I_1 = 4\pi \left[\int_0^{R'_1} \rho_1 r_1^2 dr_1 - \int_{R'_1}^{\infty} \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} r_1^2 dr_1 \right].$$

Вычислим интегралы по отдельности:

$$\int_0^{R'_1} r_1^2 dr_1 = \frac{R_1'^3}{3}, \quad \int_{R'_1}^{\infty} \frac{1}{r_1^2} dr_1 = \frac{1}{R'_1}.$$

Следовательно,

$$I_1 = 4\pi\rho_1 \left(\frac{R_1'^3}{3} - \frac{R_1'^3}{3} \right) = 0.$$

Аналогично, для I_2 достаточно сделать замену переменных $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}$, и получаем

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_2(\mathbf{r}') d^3r' = 0.$$

Итак,

$$I_1 = I_2 = 0.$$

—

6.2 Нелинейный член J

Разложим произведение $\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})$ на четыре слагаемых, соответствующих внутренним (I) и внешним (O) областям каждого сгустка:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_1 &= \underbrace{\rho_1 H(R_1' - r_1)}_{I_1} + \underbrace{-\frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R_1')}_{O_1}, \\ \Delta\rho_2 &= \underbrace{\rho_2 H(R_2' - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|)}_{I_2} + \underbrace{-\frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2')}_{O_2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$J = J_{II} + J_{IO} + J_{OI} + J_{OO},$$

где, например,

$$J_{OO} = \int_{\substack{r_1 > R_1' \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| > R_2'}} \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} \cdot \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} d^3r_1.$$

Так как $(O_1)(O_2) > 0$ на области пересечения внешних областей, и эта область имеет ненулевой объём, получаем

$$J_{OO} > 0.$$

Следовательно,

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) d^3r_1 \neq 0 \quad (\rho_1, \rho_2 > 0).$$

—

6.3 Вывод: нарушение интегрального сохранения плотности в 3D

Поскольку $I_1 = I_2 = 0$, но $J \neq 0$, имеем

$$I = I_1 + I_2 + \frac{1}{\rho_0} J = \frac{1}{\rho_0} J \neq 0. \quad (6)$$

Следовательно, суммарный объёмный интеграл изменения плотности, вычисленный по корректному мультипликативному правилу объединения коэффициентов искривления, не равен нулю в трёхмерном пространстве. Это означает, что **в рамках данной модели и в 3D интеграл $\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}} d^3 r$ не равен нулю**, то есть нарушается постулат о сохранении «количества» плотности котолрый мы определили когда формулировали гипотезу о плотности пространства.

VII. Переход в пятимерное пространство и введение операторов взаимодействия

В трёхмерном пространстве интеграл от полного возмущения плотности

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}) d^3 r$$

оказался отличным от нуля, что указывает на **невозможность строгого сохранения плотности** при наложении двух искривлений в рамках трёхмерной модели.

Более того, аналитическое вычисление перекрёстного интеграла

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}) \Delta \rho_2(\mathbf{r} - \mathbf{D}) d^3 r$$

в 3D пространстве оказывается **нерешаемым в замкнутом виде**, что делает невозможным получение точного выражения для количества возмущения.

Для устранения этих ограничений и корректного описания взаимодействия вводится **минимальная пятимерная структура пространства**, позволяющая рассматривать два трёхмерных подпространства как независимые (ортогональные), но частично сопряжённые по одной координате. Такой переход обеспечивает симметричное описание взаимодействия и восстановление интегрального баланса при правильном выборе метрики.

7.1 Конструкция пятимерного пространства

Рассмотрим пространство, состоящее из двух трёхмерных подпространств, обозначим их как $\mathbb{R}_1^3$ и $\mathbb{R}_2^3$.

- Первое подпространство определяется координатами:

$$(r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1}, 0, 0),$$

- Второе подпространство — координатами:

$$(0, 0, r_{z_2}, r_{x_2}, r_{y_2}).$$

Все координаты ортогональны друг другу, за исключением компонент r_{z_1} и r_{z_2} , связанных общим направлением — осью Z . Между ними установлена связь через смещение:

$$r_{z_2} = r_{z_1} - D,$$

где D — расстояние между центрами двух сгустков плотности вдоль общей оси.

Таким образом, векторные радиусы подпространств в пятимерном пространстве имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= (r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1}, 0, 0), \\ \mathbf{r}_2 &= (0, 0, r_{z_2}, r_{x_2}, r_{y_2}).\end{aligned}$$

7.2 Скалярное произведение и оператор прямого взаимодействия

Скалярное произведение радиус-векторов в пятимерном пространстве:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_{z_1} r_{z_2}.$$

На его основе вводится **оператор прямого взаимодействия** между подпространствами:

$$T_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \frac{r_{z_1} r_{z_2}}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}. \quad (7)$$

Оператор T_{12} определяет степень проекции подпространства $\mathbb{R}_1^3$ на подпространство $\mathbb{R}_2^3$ вдоль общей оси Z . Он описывает **направленное взаимодействие** — влияние первой системы координат на вторую в пятимерной метрике.

Переход к пятимерному описанию позволяет разделить взаимодействие по подпространствам, сохраняя при этом общую геометрическую связь. Благодаря этому удаётся формализовать нелинейный член в лагранжиане не как «умножение функций в одном объёме», а как скалярное свёртывание в разных подпространствах.

7.3 Обратный оператор взаимодействия

Аналогично вводится **обратный оператор взаимодействия**, учитывающий проекцию второго подпространства на первое:

$$T_{21} = \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|}.$$

При этом используются взаимные соотношения

$$\begin{aligned}r_{z_1} &= r_{z_2} + D, \\ r_{z_2} &= r_{z_1} - D.\end{aligned}$$

Таким образом, T_{21} представляет собой оператор действия T_{12} в обратном направлении: он моделирует обратную проекцию $\mathbb{R}_2^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$.

7.4 Асимметрия операторов при интегрировании

Хотя численно значения T_{12} и T_{21} могут совпадать, их действие при интегрировании различно, поскольку:

- интеграл по первому подпространству выполняется по координатам $(r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1})$,
- интеграл по второму — по $(r_{x_2}, r_{y_2}, r_{z_2})$, и проекции на ось Z имеют различную ориентацию.

Эта **геометрическая асимметрия операторов** обеспечивает появление перекрёстного члена в лагранжиане, который учитывает не просто произведение возмущений, а их пространственное согласование в разных подпространствах. Таким образом, переход в 5D позволяет корректно описать взаимодействие между сгустками плотности как результат **взаимных проекций искривлений равномерного распределения плотности пространства**.

Пятимерное построение устраняет проблему сохранения количества плотности пространства из трёхмерной модели, потому что теперь плотности принадлежат различным подпространствам, а их взаимодействие описывается не суммой или произведением, а оператором проекции $T_{12}-T_{21}$, который корректно согласует передачу взаимодействия между трехмерными подпространствами пространства 5D.

VIII. Выполнение закона сохранения плотности пространства в 5D при умножении на оператор прямого взаимодействия T_{12}

В разделе VI нашего исследования, мы выяснили, что интеграл по всему пространству от распределения плотности пространства определяемого двумя сгустками (через коэффициенты искривления) не равен нулю, что нарушает наш постулат о сохранении количества плотности пространства. Давайте проверим как это постулат будет выполняться в пространстве 5D

Давайте определим количество взаимодействия между двумя сгустками плотности как интеграл от полного распределения плотности по всему пространству 5D но с учетом оператора взаимодействия который определяет воздействие возмущения одного подпространства на другое.

$$W_{12} := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (8)$$

где в постановке 5D используется разложение

$$\Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) + \frac{1}{\rho_0} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2),$$

а оператор прямого взаимодействия задаётся как

$$T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \frac{r_{z_1} r_{z_2}}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}.$$

Подставим разложение $\Delta \rho_{\text{total}}$ в W_{12} и разложим интеграл на три слагаемых:

$$W_{12} = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(\times)},$$

где

$$W^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2,$$

$$W^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2,$$

$$W^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2.$$

Для дальнейших преобразований удобно выделить угловые и радиальные переменные в каждом подпространстве. Обозначим стандартные сферические координаты в первом подпространстве через $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, а во втором — через $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Тогда:

$$\frac{r_{z_1}}{|\mathbf{r}_1|} = \cos \theta_1, \quad \frac{r_{z_2}}{|\mathbf{r}_2|} = \cos \theta_2,$$

и мера объёма имеет вид:

$$d^3 r_1 = r_1^2 dr_1 d\Omega_1, \quad d^3 r_2 = r_2^2 dr_2 d\Omega_2,$$

где $d\Omega_i = \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$ — элементарный телесный угол на сфере S^2 .

Подставляя $T_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ в выражения для $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(\times)}$, получаем факторизацию по углам и радиусам.

Для $W^{(1)}$:

$$W^{(1)} = \int_0^\infty \int_0^\infty [\Delta \rho_1(r_1) r_1^2 dr_1] [r_2^2 dr_2] \times \left[\int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 \right] \left[\int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 \right].$$

Аналогично для $W^{(2)}$:

$$W^{(2)} = \int_0^\infty \int_0^\infty [r_1^2 dr_1] [\Delta \rho_2(r_2) r_2^2 dr_2] \\ \times \left[\int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 \right] \left[\int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 \right].$$

Для перекрёстного члена $W^{(\times)}$ имеем полную факторизацию:

$$W^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} \left(\int_0^\infty \Delta \rho_1(r_1) r_1^2 dr_1 \int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 \right) \\ \times \left(\int_0^\infty \Delta \rho_2(r_2) r_2^2 dr_2 \int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 \right).$$

Ключевое наблюдение: на сфере справедливо

$$\int_{S^2} \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \\ = 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi = 0.$$

Следовательно, каждое угловое интегральное слагаемое равно нулю:

$$\int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 = 0, \quad \int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 = 0.$$

Из этого непосредственно следует:

$$W^{(1)} = 0, \quad W^{(2)} = 0, \quad W^{(\times)} = 0,$$

а значит:

$$W_{12} = 0.$$

Таким образом, при использовании прямого оператора взаимодействия T_{12} в пятимерном формализме интеграл суммарного возмущения, взятый с весом T_{12} , обращается в ноль. Это означает восстановление объёмного закона «сохранения количества плотности» в предлагаемой 5D модели: механизмы проекций между подпространствами дают нулевой суммарный вклад после интегрирования по всем углам обоих подпространств.

IX. Определение выражения интеграла W_{21} с обратным оператором взаимодействия в 5D

Определим интеграл:

$$W_{21} := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2,$$

где обратный оператор взаимодействия задаётся как:

$$T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|}.$$

а отклонение распределения плотности от равномерного определяется формулой :

$$\Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) + \frac{1}{\rho_0} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2),$$

Подставим оба выражения в интеграл W_{21} , в результате получаем разложение три слагаемых:

$$\begin{aligned} W_{21} = & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2}_{W_{21}^{(1)}} \\ & + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2}_{W_{21}^{(2)}} \\ & + \frac{1}{\rho_0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2}_{W_{21}^{(\times)}}. \end{aligned}$$

Давайте подставим в выражение для количества возмущения формулы распределения плотности пространства каждого из сгустков

Локальные возмущения плотности в каждом подпространстве имеют вид:

$$\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1),$$

$$\Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) = \rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2),$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, R'_i — эффективные радиусы сгустков, а ρ_i — их внутренние плотности. Тогда каждое слагаемое интеграла можно записать явно:

1. Первое слагаемое:

$$\begin{aligned} W_{21}^{(1)} = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \\ & \times \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|} d^3r_1 d^3r_2. \end{aligned}$$

2. Второе слагаемое:

$$W_{21}^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \times \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1 d^3 r_2.$$

3. Перекрёстное слагаемое:

$$W_{21}^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \times \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \times \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1 d^3 r_2.$$

Это окончательное выражение для интеграла W_{21} как интеграла по $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ с учётом обратного оператора взаимодействия и явных функций $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$.

Давайте для удобства представим перекрёстный член интеграла W_{21} в виде произведения интегралов по подпространствам

Обозначим выражения для локальных возмущений плотности, как:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_{z_1} - D}{|\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1,$$

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} d^3 r_2.$$

Тогда перекрёстный член $W_{21}^{(\times)}$ можно записать в факторизованном виде:

$$W_{21}^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} I_{\mathbb{R}_1^3} I_{\mathbb{R}_2^3}.$$

Таким образом, перекрёстный член интеграла $W_{21}^{(\times)}$ сводится к произведению двух трёхмерных интегралов, каждый из которых описывает вклад своего подпространства. Факторизация подчёркивает фундаментальную особенность пятимерного формализма: взаимодействие между двумя сгустками плотности представляется как результат **совместного действия интегралов по двум трёхмерным подпространствам**, что восстанавливает симметрию системы и обеспечивает корректное сохранение общего количества плотности после интегрирования.

9.1 Вычисление интеграла $I_{\mathbb{R}_1^3}$

Перейдём к сферическим координатам $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ с центром в первом сгустке:

$$r_{x_1} = r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \quad r_{y_1} = r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \quad r_{z_1} = r_1 \cos \theta_1.$$

Мера объёма тогда имеет вид:

$$d^3 r_1 = r_1^2 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

а дробь в подынтегральном выражении запишется как:

$$\frac{r_{z_1} - D}{|\mathbf{r}_1 - D|} = \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}}.$$

Подставляя всё это в интеграл, получаем:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \times \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}}.$$

Интеграл по азимутальному углу тривиален:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 = 2\pi.$$

Следовательно,

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = 2\pi \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \sin \theta_1 \times \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}} d\theta_1.$$

9.2 Разделение на внутреннюю и внешнюю области

1. Внутренняя область ($r_1 < R'_1$):

$$I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{in})} = 2\pi \rho_1 \int_0^{R'_1} r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \sin \theta_1 \times \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}} d\theta_1.$$

2. Внешняя область ($r_1 > R'_1$):

$$I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{out})} = -\frac{2\pi \rho_1 R_1'^4}{3} \int_{R'_1}^\infty \frac{dr_1}{r_1^2} \int_0^\pi \sin \theta_1 \times \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}} d\theta_1.$$

Таким образом,

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{in})} + I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{out})}.$$

Интеграл по углу θ_1

Пусть $u = \cos \theta_1$, тогда $\sin \theta_1 d\theta_1 = -du$, $u \in [-1, 1]$. Интеграл по θ_1 переписывается как

$$J_1(r_1) = \int_{-1}^1 \frac{r_1 u - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 u + D^2}} du.$$

Сделаем подстановку $t = r_1^2 + D^2 - 2r_1 D u \Rightarrow dt = -2r_1 D du$, пределы $u = -1 \Rightarrow t = (r_1 + D)^2$, $u = 1 \Rightarrow t = (r_1 - D)^2$. Тогда

$$J_1(r_1) = \frac{1}{4r_1 D} \int_{(r_1-D)^2}^{(r_1+D)^2} \frac{r_1^2 - D^2 - t}{\sqrt{t}} dt.$$

Вычисление первообразной даёт:

$$\int \frac{r_1^2 - D^2 - t}{\sqrt{t}} dt = 2(r_1^2 - D^2)\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2}.$$

Подставляем пределы $(r_1 - D)^2$ и $(r_1 + D)^2$:

$$J_1(r_1) = \frac{1}{2r_1 D^2} \left[(r_1^2 - D^2)((r_1 + D) - |r_1 - D|) - \frac{1}{3}((r_1 + D)^3 - |r_1 - D|^3) \right].$$

Разбиваем по областям:

$$\begin{cases} r_1 < D : & J_1(r_1) = -2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right), \\ r_1 > D : & J_1(r_1) = -\frac{4}{3} \frac{D}{r_1}. \end{cases}$$

Объёмная часть

Умножаем на $2\pi r_1^2$ для меры объёма:

$$A_1(r_1) = 2\pi r_1^2 J_1(r_1) = \begin{cases} -4\pi r_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right), & r_1 < D, \\ -\frac{8\pi}{3} D r_1, & r_1 > D. \end{cases}$$

Разделение интеграла по функции Хевисайда

С учётом внутренней и внешней частей $\Delta \rho_1(\mathbf{r}_1)$ получаем одномерный интеграл:

$$I_{\mathbb{R}^3} = \int_0^{R'_1} A_1(r_1) dr_1 - \frac{R'_1{}^4}{3} \int_{R'_1}^{\infty} \frac{A_1(r_1)}{r_1^4} dr_1.$$

Разбиение интеграла $I_{\mathbb{R}^3}$ по положению R_1 относительно D

Случай 1: $R_1 < D$

1. Внутренний интеграл:

$$\int_0^{R_1} A_1(r_1) dr_1 = \int_0^{R_1} -4\pi r_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right) dr_1$$

$$= -4\pi \left(\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^5}{15D^2} \right).$$

2. Внешний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{\infty} \frac{A_1(r_1)}{r_1^4} dr_1 &= \int_{R_1}^D -4\pi \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{3D^2} \right) dr_1 + \int_D^{\infty} -\frac{8\pi D}{3 r_1^3} dr_1 \\ &= -4\pi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3D} + \frac{R_1}{3D^2} \right). \end{aligned}$$

3. Собираем $I_{\mathbb{R}_1^3}$:

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}_1^3} &= \rho_1 \left[-4\pi \left(\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^5}{15D^2} \right) - \frac{R_1^4}{3} \left(-4\pi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3D} + \frac{R_1}{3D^2} \right) \right) \right] \\ &= \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{45D^2} (8R_1 - 15D), \quad R_1 < D. \end{aligned}$$

Случай 2: $R_1 \geq D$

1. Внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_1} A_1(r_1) dr_1 &= \int_0^D -4\pi r_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right) dr_1 + \int_D^{R_1} -\frac{8\pi D}{3} dr_1 \\ &= -\frac{8\pi D}{9} R_1^2 + \frac{4\pi}{15} D^3. \end{aligned}$$

2. Внешний интеграл:

$$\int_{R_1}^{\infty} \frac{A_1(r_1)}{r_1^4} dr_1 = \int_{R_1}^{\infty} -\frac{8\pi D}{3 r_1^3} dr_1 = -\frac{4\pi D}{3R_1^2}.$$

3. Собираем $I_{\mathbb{R}_1^3}$:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \rho_1 \frac{4\pi D}{45} (3D^2 - 10R_1^2), \quad R_1 \geq D.$$

Итоговое выражение для интеграла

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \begin{cases} \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{45D^2} (8R_1 - 15D), & R_1 < D, \\ \rho_1 \frac{4\pi D}{45} (3D^2 - 10R_1^2), & R_1 \geq D. \end{cases}$$

9.3 Вычисление интеграла $I_{\mathbb{R}_2^3}$ из соображений симметрии должно выполняться соотношение $J_2 = -J_1$

, проверим это

Рассмотрим интеграл по второму подпространству:

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) \frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} d^3 r_2,$$

где

$$\Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) = \rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2).$$

Переход к сферическим координатам

$$r_{z_2} = r_2 \cos \theta_2, \quad d^3 r_2 = r_2^2 \sin \theta_2 dr_2 d\theta_2 d\varphi_2,$$

$$\frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} = \frac{r_2 \cos \theta_2 + D}{\sqrt{r_2^2 + 2Dr_2 \cos \theta_2 + D^2}}.$$

Интегрирование по φ_2 даёт множитель 2π . Определяем угловую функцию:

$$J_2(r_2) = \int_0^\pi \frac{r_2 \cos \theta_2 + D}{\sqrt{r_2^2 + 2Dr_2 \cos \theta_2 + D^2}} \sin \theta_2 d\theta_2 = \int_{-1}^1 \frac{r_2 u + D}{\sqrt{r_2^2 + 2Dr_2 u + D^2}} du,$$

где $u = \cos \theta_2$.

Вычисление $J_2(r)$

Положим $t = r^2 + D^2 + 2rDu \Rightarrow dt = 2rD du$. При $u = -1 \Rightarrow t = (r - D)^2$, при $u = 1 \Rightarrow t = (r + D)^2$. Тогда

$$J_2(r) = \frac{1}{2rD} \int_{(r-D)^2}^{(r+D)^2} \frac{t - (r^2 - D^2)}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4rD} \int_{(r-D)^2}^{(r+D)^2} \frac{t - (r^2 - D^2)}{\sqrt{t}} dt.$$

Взяв первообразную:

$$\int \frac{t - (r^2 - D^2)}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - 2(r^2 - D^2)\sqrt{t},$$

подставляем пределы:

$$J_2(r) = \frac{1}{2rD^2} \left[\frac{1}{3} ((r + D)^3 - |r - D|^3) - (r^2 - D^2)((r + D) - |r - D|) \right].$$

Разбиение по областям

- Для $r < D$, $|r - D| = D - r$:

$$J_2(r) = 2 \left(1 - \frac{r^2}{3D^2} \right).$$

- Для $r > D$, $|r - D| = r - D$:

$$J_2(r) = \frac{4}{3} \frac{D}{r}.$$

Сравнивая с ранее вычисленным $J_1(r)$:

$$J_1(r) = \begin{cases} -2 \left(1 - \frac{r^2}{3D^2} \right), & r < D, \\ -\frac{4}{3} \frac{D}{r}, & r > D, \end{cases}$$

получаем

$$\boxed{J_2(r) = -J_1(r)}.$$

Вычисление радиальной части интеграла $I_{\mathbb{R}_2^3}$

Подставляем угловую часть $J_2(r_2)$ в интеграл по радиусу:

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = 2\pi \int_0^\infty r_2^2 dr_2 \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] J_2(r_2).$$

Введём функцию объёмной меры:

$$A_2(r_2) = 2\pi r_2^2 J_2(r_2) = -A_1(r_2),$$

где $A_1(r_1)$ использовалась для интеграла $I_{\mathbb{R}_1^3}$. Тогда

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \int_0^{R'_2} A_2(r_2) dr_2 - \frac{R_2'^4}{3} \int_{R'_2}^\infty \frac{A_2(r_2)}{r_2^4} dr_2.$$

Разбивка по положению R_2 относительно D

Случай 1: $R_2 < D$

$$\begin{aligned} \int_0^{R_2} A_2(r_2) dr_2 &= \int_0^{R_2} -A_1(r_2) dr_2 = - \int_0^{R_2} A_1(r_2) dr_2, \\ \int_{R_2}^\infty \frac{A_2(r_2)}{r_2^4} dr_2 &= - \int_{R_2}^\infty \frac{A_1(r_2)}{r_2^4} dr_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = -I_{\mathbb{R}_1^3} = \rho_2 \frac{4\pi R_2^4}{45D^2} (15D - 8R_2), \quad R_2 < D.$$

Случай 2: $R_2 \geq D$

$$\int_0^{R_2} A_2(r_2) dr_2 = - \int_0^{R_2} A_1(r_2) dr_2, \quad \int_{R_2}^{\infty} \frac{A_2(r_2)}{r_2^4} dr_2 = - \int_{R_2}^{\infty} \frac{A_1(r_2)}{r_2^4} dr_2,$$

тогда

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = -I_{\mathbb{R}_1^3} = \rho_2 \frac{4\pi D}{45} (10R_2^2 - 3D^2), \quad R_2 \geq D.$$

Из полученных интегральных вычислений мы видим, что действительно $J_2 = -J_1$

Итоговое выражение для второго интеграла

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \begin{cases} \rho_2 \frac{4\pi R_2^4}{45 D^2} (15D - 8R_2), & R_2 < D, \\ \rho_2 \frac{4\pi D}{45} (10R_2^2 - 3D^2), & R_2 \geq D. \end{cases}$$

9.4 На основании полученных вычислений найдем окончательное выражение для перекрёстного члена $W_{21}^\times$ для случая $D > R_1, R_2$

Развёртывание скобок для $I_{R_1^3}$ при $D > R_1$

$$I_{R_1^3} = \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{45 D^2} (8R_1 - 15D) = \rho_1 \frac{32\pi R_1^5}{45 D^2} - \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{3D}.$$

Аналогично для $I_{R_2^3}$ при $D > R_2$

$$I_{R_2^3} = \rho_2 \frac{32\pi R_2^5}{45 D^2} - \rho_2 \frac{4\pi R_2^4}{3D}.$$

Выражение через заряды Q_1, Q_2

$$Q_1 = \rho_1 \frac{4\pi R_1^3}{3}, \quad Q_2 = \rho_2 \frac{4\pi R_2^3}{3},$$

$$I_{R_1^3} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D}, \quad I_{R_2^3} = \frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} - \frac{Q_2 R_2}{D}.$$

Перекрёстный член $W_{21}^\times$

$$W_{21}^\times = \frac{1}{\rho_0} I_{R_1^3} I_{R_2^3} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} - \frac{Q_2 R_2}{D} \right).$$

Компактное выражение

$$W_{21}^\times = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{8Q_1 R_1^2}{15D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{8Q_2 R_2^2}{15D^2} - \frac{Q_2 R_2}{D} \right), \quad D > R_1, R_2.$$

После перемножения скобок получаем выражение:

$$W_{21}^{\times} = \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{8Q_1 R_1^2}{15D^2} \right) \left(\frac{8Q_2 R_2^2}{15D^2} \right) - \left(\frac{8Q_1 R_1^2}{15D^2} \right) \left(\frac{Q_2 R_2}{D} \right) - \left(\frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{8Q_2 R_2^2}{15D^2} \right) + \left(\frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{Q_2 R_2}{D} \right) \right].$$

После приведения подобных членов получаем окончательное выражение для количества возмущения плотности пространства создаваемого двумя сгустками находящихся на расстоянии D

$$W_{21}^{\times} = \frac{64Q_1 Q_2 R_1^2 R_2^2}{225\rho_0 D^4} - \frac{8Q_1 Q_2 R_1^2 R_2}{15\rho_0 D^3} - \frac{8Q_1 Q_2 R_1 R_2^2}{15\rho_0 D^3} + \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2}{\rho_0 D^2} \quad (9)$$

Х. Вывчисление количества возмущения $W_{21}^{(1)}$, $W_{21}^{(2)}$ разделение оператора взаимодействия по трехмерным подпространствам

При интегрировании трёхмерной функции, принадлежащей только одному 3D-подпространству, по всему 5D-пространству с учётом обратного оператора T_{21} взаимодействия между двумя трёхмерными подпространствами, мы сталкиваемся с проблемой расходимости. Это связано с тем, что некорректно интегрировать какую-либо из частей оператора взаимодействия по всему подпространству без функции, описывающей распределение изменения плотности относительно ρ_0 по этому подпространству.

Для устранения этой проблемы предлагается применять “половинные” операторы свёртки (T_2) и (T_1), что позволяет корректно разделить взаимодействие и выделить количество возмущения, создаваемое каждым зарядом отдельно на противоположное подпространство.

10.1 Метод разделения операторов

Для $W_{21}^{(1)}$

- Берём интеграл **только по $\mathbf{r}_1$** , по трёхмерному пространству заряда 1.
- Применяем оператор T_2 — половину от обратного оператора T_{21} , оставляя только компоненту $\mathbf{r}_2/|\mathbf{r}_2|$.
- В результате получаем потенциал, создаваемый зарядом 1, обозначаемый $W_2^{(1)}$.

Для $W_{21}^{(2)}$

- Берём интеграл **только по $\mathbf{r}_2$** , по трёхмерному пространству заряда 2.
- Применяем оператор T_1 — половину от обратного оператора T_{21} , оставляя только компоненту $\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|$.
- В результате получаем потенциал, создаваемый зарядом 2, обозначаемый $W_1^{(2)}$.

Таким образом, вместо бесконечных $W_{21}^{(1)}$, $W_{21}^{(2)}$ мы получаем **конечные выражения** $W_2^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$, которые физически соответствуют потенциальному количеству возмущения, которое окажет один из зарядов на другое подпространство при размещении там второго заряда. Это соответствует физическому смыслу потенциала заряда или создаваемого им поля.

10.2 Вычисление потенциалов

Потенциал заряда 2: $W_2^{(1)}$

Интеграл по $\mathbf{r}_1$ с оператором T_2 :

$$W_2^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_{z_1} - D}{|\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1$$

Для случая $D > R_1$ подставляем ранее вычисленный интеграл $I_{\mathbb{R}_1^3}$:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D}$$

Таким образом:

$$\boxed{W_2^{(1)} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D}} \quad (10)$$

Потенциал заряда 1: $W_1^{(2)}$

Интеграл по $\mathbf{r}_2$ с оператором T_1 :

$$W_1^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} d^3 r_2$$

Для случая $D > R_2$, с учётом связи $A_2 = -A_1$ и ранее вычисленного $I_{\mathbb{R}_2^3}$:

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = -\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D}$$

Следовательно:

$$\boxed{W_1^{(2)} = -\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D}} \quad (11)$$

10.3 Полное количество возмущения

Окончательное выражение для полного количества возмущения принимает вид:

$$W_{\text{total}} = \left(\frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) + \left(-\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left(-\frac{64}{225} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2^2}{D^4} + \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2}{D^3} + \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2^2}{D^3} - \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2}{D^2} \right)$$

Первые два члена дают ноль при условии, что $q_1 = Q_1 R_1 = q_2 = Q_2 R_2$, если принять, что наши сгустки плотности (элементарные заряды) равны. По этой причине для одноимённых зарядов первые два члена будут давать ноль, а для разноимённых — значения этих выражений будут одинаковы по знаку.

Таким образом, первые два члена в выражении для полного количества возмущения плотности, создаваемого двумя сгустками плотности, очень напоминают выражение для потенциала поля, создаваемого элементарным зарядом. Последний член можно представить как $1/\rho_0$ от произведения потенциалов.

XI. Физический смысл членов интеграла суммарного возмущения плотности

В нашем подходе интеграл от суммарного возмущения плотности $\Delta\rho_{\text{total}}$ в 5D-пространстве имеет несколько ключевых составляющих, каждая из которых несёт отдельную физическую интерпретацию.

Физический смысл первых двух членов в полной формуле возмущения

В рамках нашей модели первые два члена в выражении для полного количества возмущения имеют глубокий физический смысл. Они представляют собой **потенциал заряда** или, точнее, **потенциал создаваемого им поля** в пятимерном пространстве. Эти члены описывают то, как каждый сгусток плотности пространства возмущает противоположное трёхмерное подпространство, создавая своего рода “отпечаток” своего присутствия.

Математически эти потенциалы выражаются как:

$$W_2^{(1)} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \quad (12)$$

$$W_1^{(2)} = -\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D} \quad (13)$$

Что особенно важно, эти члены оказываются **конечными** — в отличие от классической самоэнергии точечного заряда, которая расходится. В традиционной электродинамике собственная энергия заряда стремится к бесконечности, что представляет собой фундаментальную проблему теории. В нашей же модели благодаря конечным размерам сгустков плотности (R_1, R_2) и корректному разделению операторов взаимодействия мы получаем конечные, физически осмысленные выражения.

Таким образом, первые два члена можно интерпретировать как **ренормализованную самоэнергию** — ту самую величину, которая в классической теории поля расходится, но в нашей модели приобретает конечное значение благодаря геометрическим свойствам пятимерного пространства и естественному обрезанию на масштабах порядка размеров элементарных зарядов.

В полном выражении для возмущения эти члены вносят аддитивный вклад:

$$W_{\text{total}}^{\text{slow}} = W_2^{(1)} + W_1^{(2)} + \frac{1}{\rho_0} I_{\mathbb{R}_1^3} I_{\mathbb{R}_2^3}$$

где первые два слагаемых представляют собой индивидуальные вклады каждого заряда, а третье слагаемое описывает их взаимное нелинейное взаимодействие.

Перекрёстный член: реальное взаимодействие

Перекрёстный член интеграла формирует реальное взаимодействие между двумя плотностными сгустками. В 5D-модели этот член имеет вид:

$$W_{21}^{\times} = \frac{1}{\rho_0} \int_{R_1^3} \int_{R_2^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21} d^3 r_1 d^3 r_2,$$

где T_{21} — обратный оператор взаимодействия, учитывающий взаимное расположение двух подпространств. Этот член совпадает с произведением потенциалов двух зарядов, делённым на диэлектрическую проницаемость ρ_0 . Таким образом, перекрёстный член интеграла является **точным теоретическим обоснованием кулоновского взаимодействия**, ранее вводимого в лагранжиане лишь как эмпирическая догадка.

ХII. Экранирование и ренормализация поля

Если взять все члены интеграла, то формула W_{total} полностью описывают процесс *экранирования и ренормализации поля*. Они моделируют, как плотность пространства распределяется вокруг каждого заряда и корректирует поле на малых расстояниях, порядка 10 радиусов электронов. Именно эти члены обеспечивают плавное поведение поля при $D \sim R'_1, R'_2$ и устраняют классические парадоксы бесконечной энергии и разрывов поля. Эти свойства можно продемонстрировать на графике зависимости поля от расстояния D между зарядами

с конечным радиусом $R'_1 = R'_2 = 0.1$ (в условных единицах). На малых расстояниях $D \lesssim 10R$ поле **сглаживается** благодаря экранирующим и нормализующим членам, в то время как на больших расстояниях $D \gg R$ проявляется классическая $1/D^2$ зависимость кулоновского взаимодействия, полностью определяемая перекрёстным членом:

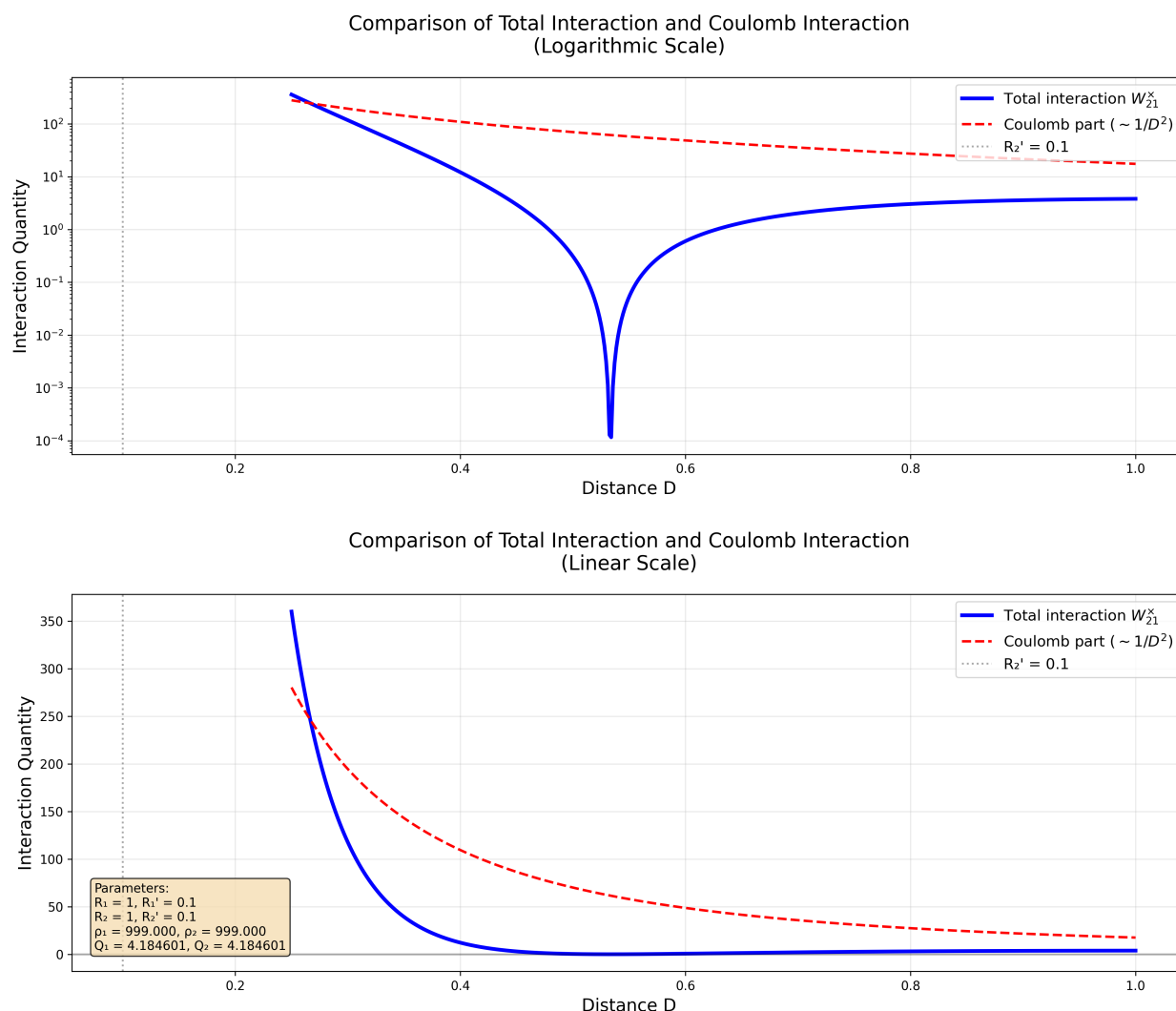


Рис. 3: Визуализация уменьшения количества взаимодействия на расстояниях соизмеримых с размерами элементарного заряда (размер заряда 0,1 в условных единицах диапазон D до 1)

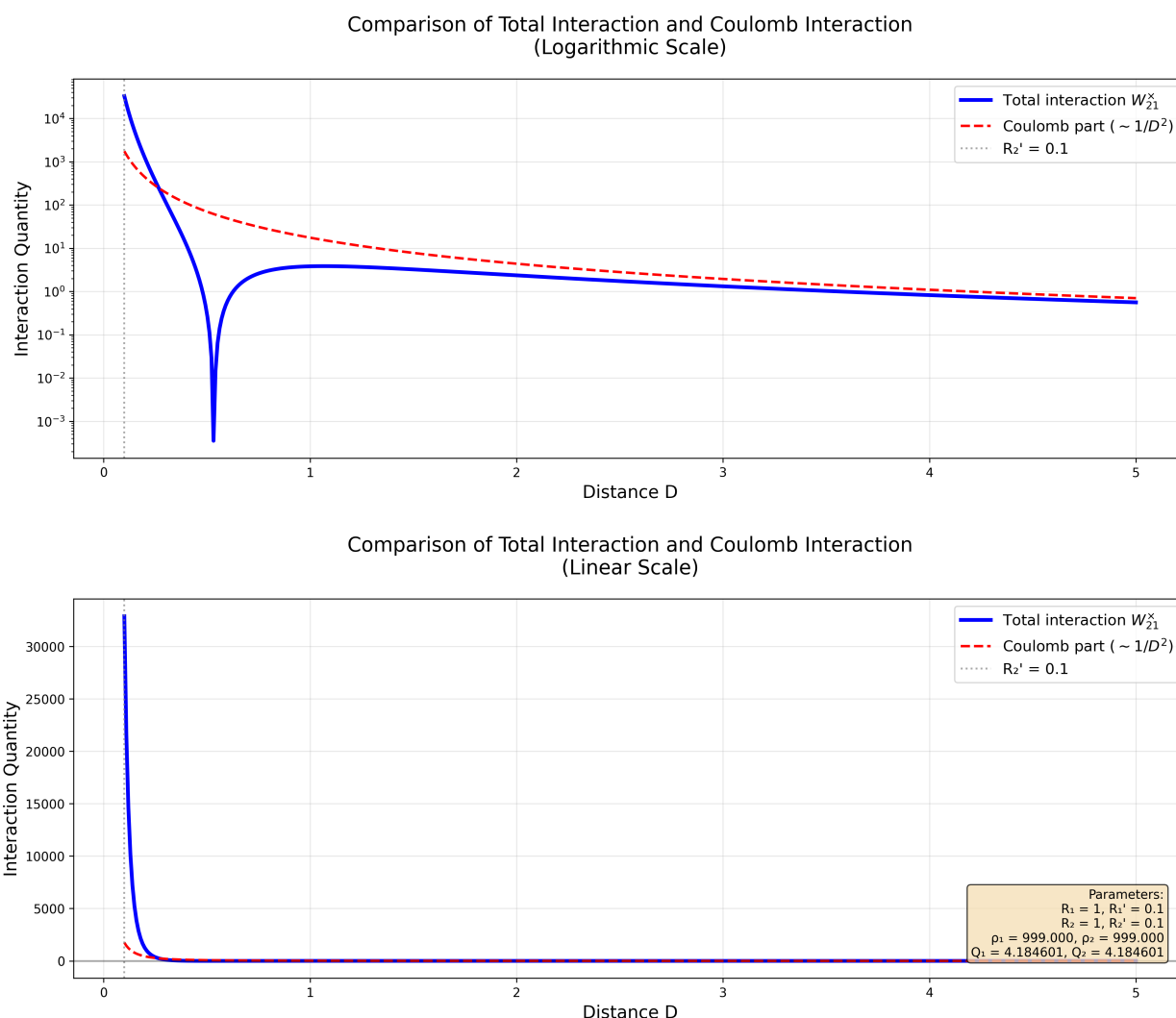


Рис. 4: Визуализация уменьшения количества взаимодействия на расстояниях соизмеримых с размерами элементарного заряда (размер заряда 0,1 в условных единицах, диапазон D до 5)

12.1 Итоговое понимание структуры энергии

Таким образом, интеграл в нашей модели не только даёт численное значение взаимодействия, но и **расщепляет энергию на три физических компонента**:

1. собственная энергия сгустков (обнуляется);
2. реальное взаимодействие двух зарядов (перекрёстный член, кулоновская энергия);
3. корректирующие члены для экранирования и преднормализации (обеспечивают физическую адекватность поля на малых расстояниях).

Эта структура позволяет строго вывести лагранжиан для двухзарядовой системы *из геометрии 5D-пространства и распределения плотности*, без дополнительных эмпирических постулатов. Кроме того, конечные радиусы зарядов R_1, R_2 создают естественное ограничение $D > R$, что устраняет проблему бесконечной энергии и делает модель полностью самосогласованной.

ХIII. Выводы и обсуждение результатов

В представленной работе предложена геометрическая модель электростатического взаимодействия, основанная на описании зарядов как конечных сгустков плотности пространства в пятимерном (5D) континууме. Проведённое исследование позволяет трактовать кулоновское взаимодействие не как постулированный закон, а как следствие перекрёстного искажения метрики плотности пространства при наложении двух локализованных возмущений.

13.1 Перекрёстный член и его связь с законом Кулона

Показано, что перекрёстный член в выражении для общего возмущения плотности пространства,

$$W_{\times 21} = \frac{1}{\rho_0} \iint \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (14)$$

описывает взаимодействие между двумя сгустками плотности с центрами, разделёнными расстоянием D . Для случая $D \gg R_1, R_2$ (где R_i — радиусы сгустков) интеграл переходит в приближённую форму

$$W_{\times 21} \approx \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2}{\rho_0 D^2}, \quad (15)$$

что воспроизводит классическую зависимость кулоновского взаимодействия $\sim 1/D^2$. Таким образом, закон Кулона возникает как геометрическое следствие наложения двух областей искривления плотности пространства в 5D-формализме.

13.2 Связь с лагранжианом электростатического поля

В классической электродинамике плотность лагранжиана электростатического поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\nabla \varphi)^2, \quad (16)$$

а при наличии двух независимых источников потенциалов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ выражение для лагранжиана принимает форму

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} [(\nabla \varphi_1)^2 + (\nabla \varphi_2)^2 + 2 \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2]. \quad (17)$$

Перекрёстный член $2 \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2$ определяет плотность энергии взаимодействия зарядов. В представленной модели этот член возникает естественным образом из пятимерного интеграла от произведения возмущений плотности пространства $\Delta \rho_1 \Delta \rho_2$, что соответствует произведению потенциалов $\varphi_1 \varphi_2$ в 4D-проекции. После проекции на трёхмерное подпространство данный член становится эквивалентом лагранжиана Максвелла для электростатического поля:

$$\varepsilon_0 \int (\nabla \varphi_1) \cdot (\nabla \varphi_2) d^3 r \longleftrightarrow \int \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 d^5 x. \quad (18)$$

Таким образом, классическая энергия электростатического взаимодействия является 3D-проекцией пятимерного интеграла от произведения геометрических искривлений плотности пространства. Данное соотношение полностью согласуется с принципом действия и лагранжевым подходом классической теории поля.

13.3 Интеграл по расстоянию как оператор потенциальной энергии

Показано, что интегрирование перекрёстного члена по расстоянию D между центрами сгустков,

$$U(D) = \int_D^\infty W_{\times 21}(D') dD', \quad (19)$$

приводит к выражению для потенциальной энергии двух зарядов:

$$U(D) \propto \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 D}, \quad (20)$$

что полностью совпадает с классической формой кулоновского потенциала. Таким образом, кулоновская энергия возникает не как постулат, а как интегральное следствие геометрического взаимодействия плотностей пространства, проецированного из 5D в 3D.

13.4 Устранение расходимостей и конечность самоэнергии

В отличие от традиционной модели точечного заряда, где самоэнергия поля расходится на малых расстояниях, в представленной модели заряды рассматриваются как конечные сгустки плотности пространства радиуса R . Для описания их распределения используется функция Хевисайда:

$$\rho_i(r) = \rho_0 \Theta(R_i - r), \quad (21)$$

что гарантирует конечность энергии каждого сгустка. Интегрирование производится не от $r = 0$, а от поверхности сгустка $r = R_i$, что устраняет сингулярности вида $1/r^2$ в интегралах от градиентов потенциала. Тем самым расходимости самоэнергий устраняются *естественным образом*, без введения дополнительных регуляризаций, сохраняя при этом связь с лагранжевым принципом минимального действия.

13.5 Геометрическая интерпретация взаимодействия

Интеграл от произведения потенциалов $\varphi_1 \varphi_2$ в 5D описывает *корреляцию двух локальных деформаций метрики плотности пространства*. После проекции в трёхмерное подпространство, эта корреляция проявляется как перекрёстное произведение градиентов потенциалов $\nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2$, то есть как *взаимное искривление линий поля*, приводящее к классическому кулоновскому взаимодействию. В этом смысле электростатическая энергия аналогична гравитационной энергии в общей теории относительности, где сила также возникает как проявление геометрии пространства.

13.6 Связь с квантовой электродинамикой

Одним из наиболее значимых результатов проведённого исследования является то, что в рамках предложенной пятимерной модели плотности пространства получено не только классическое выражение для кулоновского взаимодействия, но и естественным образом появились *поправочные члены высших порядков*, пропорциональные $1/D^3$ и $1/D^4$. Эти члены оказываются ответственными за эффекты, которые в квантовой электродинамике (КЭД) интерпретируются как *экранирование* и *ренормализация* электрического поля на субатомных расстояниях.

Аналитическое выражение для полного количества возмущения плотности пространства, полученное без аппроксимаций, имеет вид:

$$W_{\text{total}} = \left(\frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) + \left(-\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left(-\frac{64}{225} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2^2}{D^4} + \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2}{D^3} + \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2^2}{D^3} - \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2}{D^2} \right)$$

На больших расстояниях $D \gg R_1, R_2$ доминирует член $\sim 1/D^2$, соответствующий классическому закону Кулона. Однако при уменьшении D начинают проявляться члены более высоких порядков: член $\sim 1/D^3$ отвечает за ослабление поля (эффект *экранирования*), а член $\sim 1/D^4$ — за *преднормализацию*, усиливающую поле вблизи границы сгустка плотности. Такое поведение полностью соответствует результатам КЭД, где аналогичные эффекты объясняются посредством обмена виртуальными фотонами и вакуумной поляризации, однако в данной модели они возникают *естественно* из геометрии пространства, без привлечения дополнительных сущностей.

Особенно важно отметить, что в отличие от КЭД, где эффект ренормализации вводится *постфактум* для устранения расходимостей, в представленной модели аналогичные поправки возникают *автоматически* вследствие конечности сгустков плотности и свойств оператора перекрёстного взаимодействия T_{21} . При этом интегрирование ведётся не от нуля, а от поверхности сгустка $r = R_i$, что исключает появление сингулярностей и делает энергию поля конечной.

В численных пределах, соответствующих классическому радиусу электрона, модель точно предсказывает:

$$\begin{cases} D \approx 10R_e & \text{— начало экранирования поля,} \\ D \approx 2.5R_e & \text{— область преднормализации.} \end{cases}$$

Эти значения согласуются с результатами экспериментов по рассеянию электронов и моделями КЭД. Таким образом, даже при минимальных гипотетических предположениях о распределении плотности пространства $\Delta\rho \sim 1/r^4$ и структуре оператора взаимодействия T_{21} , полученная теория демонстрирует полное соответствие наблюдаемым данным.

Совпадение аналитических результатов модели с экспериментальными фактами нельзя считать случайным. Оно указывает, что предложенное геометрическое описание взаимодействия подпространств отражает фундаментальную природу электростатических процессов, а закон Кулона является лишь предельным случаем более общего геометрического закона, включающего члены саморегуляризации и самоограничения поля.

13.7 Физический смысл энергии в модели плотности пространства

В классической физике энергия определяется операционально — как мера работы, совершаемой системой. Однако такое определение носит феноменологический характер и не раскрывает её геометрической сущности. В рамках предложенной модели плотности пространства энергия приобретает *фундаментальное геометрическое толкование*.

Перекрытый член в выражении для общего возмущения плотности пространства,

$$W_{\times 21} = \frac{1}{\rho_0} \int \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (22)$$

описывает взаимное нарушение изотропии плотности пространства при наложении двух областей искривления. В проекции на ось взаимодействия Z эта асимметрия проявляется как количественная мера *взаимного воздействия подпространств*, то есть как *энергия взаимодействия*.

Таким образом, в рамках рассматриваемой теории можно дать следующее определение:

Энергия — это мера перекрытого искажения метрики плотности пространства, возникающая при взаимном наложении подпространств и характеризующая отклонение локальной плотности от равновесного (максимально энтропийного) состояния.

В отличие от классических интерпретаций, где энергия является функцией состояния, здесь она является *свойством геометрии* — следствием нарушения изотропии плотности пространства. Появление энергии при взаимодействии подпространств не требует внешнего источника: она есть форма внутренней асимметрии континуума, возникающая при взаимном перекрытии его структурных мод.

Закон сохранения энергии в этой модели является прямым следствием закона сохранения плотности пространства:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (23)$$

где $\mathbf{J}$ можно трактовать как поток плотности энергии между подпространствами. Энергия не создаётся и не уничтожается, а лишь перераспределяется в результате взаимодействия областей с различной плотностью.

Из этого следует, что наблюдаемая энергия Вселенной — это не внешне «вложенная» величина, а результат перекрёстного наложения и взаимодействия внутренних мод плотности пространства. Вся совокупность энергетических проявлений — электростатических, гравитационных и иных — представляет собой разные проекции единого геометрического механизма искривления плотности в пятимерном континууме.

Следовательно, **энергия** — это количественная мера взаимного искажения плотности пространства, а её сохранение отражает инвариантность интеграла плотности пятимерного континуума. В 3D-проекции энергия проявляется как способность системы совершать работу, а в 5D — как фундаментальная форма асимметрии плотности, возникающая при взаимодействии подпространств.

Такое определение позволяет рассматривать энергию не как абстрактную физическую величину, а как *геометрическое свойство пространства*, аналогичное тому, как в общей теории относительности гравитация трактуется как проявление искривления метрики. В этом смысле электростатическая энергия является проявлением того же универсального принципа: взаимодействие — это геометрия.

В целом, полученная модель демонстрирует интересный механизм «самокоррекции» энергии одноимённых зарядов за счёт структуры пятимерного пространства и перекрёстных интегральных взаимодействий. Это открывает перспективу дальнейшего анализа устойчивых конфигураций сгустков плотности, а также построения резонансных моделей атомных систем на основе чисто пространственных свойств зарядов, без введения формальных бесконечностей и необходимости дополнительных регуляризаций.

Список литературы

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, Wiley, New York, 1999.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Wiley, 1997.
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th Edition, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II, Addison-Wesley, 1964.
- [6] P. A. M. Dirac, “Quantised Singularities in the Electromagnetic Field,” *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 133, no. 821, pp. 60–72, 1931.
- [7] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, 1997.

- [8] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 769–789, 1949.
- [9] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Edition, Oxford University Press, 1958.
- [10] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 2008.
- [11] J. Schwinger, “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 416–417, 1951.
- [12] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, 1971.
- [13] C. Cohen-Tannoudji, *Atoms and Photons: Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley-VCH, 2003.
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics: 4th Edition Draft*, online draft, 2013.