Казанский (Приволжский) федеральный университет

Анализ вертикальных капиллярных волн в линейной и слабонелинейной постановках

Шадт Михаил Андреевич

Научная работа

26 октября 2025 г.

1 Линейный анализ капиллярных волн

1.1 Введение

Проведем полный детальный анализ капиллярных волн с полным выводом всех уравнений и решений для идеальных жидкостей в баках конечных размеров.

1.2 Случай 1: Идеальные жидкости

1.2.1 Вертикальная граница раздела

Постановка задачи Рассмотрим прямоугольный бак размером $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$ с двумя идеальными жидкостями с плотностями $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и поверхностным натяжением σ на вертикальной границе $x = \eta(y,t)$.

Уравнения потенциалов:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } 0 \leq x < \eta(y,t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } \eta(y,t) < x \leq L \tag{2}$$

Граничные условия на стенках бака:

1. На левой стенке ($x = 0$):
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

2. На правой стенке ($x = L$):
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

3. На дне ($y = 0$):
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

4. На крышке ($y = H$):
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

Граничные условия на $x = \eta(y,t)$:

1. Кинематическое условие:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \tag{8}$$

2. Динамическое условие:

$$p_2 - p_1 = \sigma\kappa = \sigma\frac{\partial^2 \eta/\partial y^2}{[1 + (\partial \eta/\partial y)^2]^{3/2}} \tag{9}$$

3. Уравнение Бернулли:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \phi_1|^2 + \frac{p_1}{\rho} + gy = C_1(t) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \phi_2|^2 + \frac{p_2}{\rho} + gy = C_2(t) \tag{11}$$

1.2.2 Линеаризация

Полагаем η, ϕ_1, ϕ_2 малыми. Линеаризуем около $x = L/2$.

Кинематические условия на $x = L/2$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \tag{13}$$

Динамическое условие на $x = L/2$:

$$p_2 - p_1 = \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \tag{14}$$

Уравнения Бернулли (линеаризованные):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} + gy = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\rho} + gy = 0 \tag{16}$$

Вычитаем уравнения Бернулли:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \tag{17}$$

Подставляем динамическое условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \tag{18}$$

1.2.3 Решение методом нормальных мод

Ищем решение в виде:

$$\eta(y,t) = A \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{19}$$

$$\phi_1(x,y,t) = B_1 \frac{\cosh\left(\frac{\pi n x}{H}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{20}$$

$$\phi_2(x,y,t) = B_2 \frac{\cosh\left(\frac{\pi n}{H}(L-x)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{21}$$

Проверим граничные условия: На $x = 0$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = B_1 \frac{\frac{\pi n}{H}\sinh\left(\frac{\pi n}{H}\cdot 0\right)}{\cosh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} = 0 \tag{22}$$

На $x = L$:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = B_2 \frac{-\frac{\pi n}{H}\sinh\left(\frac{\pi n}{H}(L-L)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} = 0 \tag{23}$$

На $y = 0$ и $y = H$: $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi n) = 0$ - условие выполняется.

1.2.4 Подстановка в граничные условия на границе раздела

На $x = L/2$:

Из кинематических условий:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega A \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{24}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = B_1 \frac{\frac{\pi n}{H}\sinh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} = B_1 \frac{\pi n}{H} \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{25}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -B_2 \frac{\pi n}{H} \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{26}$$

Получаем:

$$-i\omega A = B_1 \frac{\pi n}{H} \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right) \tag{27}$$

$$-i\omega A = -B_2 \frac{\pi n}{H} \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right) \tag{28}$$

Следовательно:

$$B_1 = -\frac{i\omega A H}{\pi n \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \tag{29}$$

$$B_2 = \frac{i\omega A H}{\pi n \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} \tag{30}$$

Из динамического условия:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) = -i\omega(B_2 - B_1) \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -A \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n y}{H}\right) e^{-i\omega t} \tag{32}$$

Подставляем:

$$-i\omega(B_2 - B_1) + \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 A = 0 \tag{33}$$

Но $B_2 - B_1 = \frac{2i\omega A H}{\pi n \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)}$, поэтому:

$$-i\omega \cdot \frac{2i\omega A H}{\pi n \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} + \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 A = 0 \tag{34}$$

$$\frac{2\omega^2 A H}{\pi n \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} + \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 A = 0 \tag{35}$$

1.2.5 Дисперсионное соотношение

$$\frac{2\omega^2 H}{\pi n \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right)} = -\frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \tag{36}$$

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{2\rho}\left(\frac{\pi n}{H}\right)^3 \frac{\pi n L}{2H} \tanh\left(\frac{\pi n L}{2H}\right) \tag{37}$$

1.3 Горизонтальная граница раздела в конечном баке

1.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим бак размером $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$ с горизонтальной границей раздела $y = h + \eta(x,t)$, где h - равновесная высота.

Граничные условия:

1. На боковых стенках ($x = 0$ и $x = L$):
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0 \tag{38}$$

2. На дне ($y = 0$):
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \tag{39}$$

3. На крышке ($y = H$):
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0 \tag{40}$$

Граничные условия на $y = h + \eta(x,t)$:

1. Кинематические условия:
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \tag{41}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \tag{42}$$

2. Динамическое условие:
$$p_2 - p_1 = \sigma\kappa = \sigma\frac{\partial^2\eta/\partial x^2}{[1 + (\partial\eta/\partial x)^2]^{3/2}} \tag{43}$$

3. Уравнения Бернулли:
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 + \frac{p_1}{\rho} + gy = C_1(t) \tag{44}$$
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 + \frac{p_2}{\rho} + gy = C_2(t) \tag{45}$$

1.3.2 Линеаризация

Линеаризуем около $y = h$. Полагаем η, ϕ_1, ϕ_2 малыми.

Кинематические условия на $y = h$:
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \tag{46}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \tag{47}$$

Динамическое условие на $y = h$:

$$p_2 - p_1 = \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{48}$$

Уравнения Бернулли (линеаризованные):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} + g\eta = 0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\rho} + g\eta = 0 \tag{50}$$

Вычитаем уравнения Бернулли:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \tag{51}$$

Подставляем динамическое условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g\eta = 0 \tag{52}$$

1.3.3 Решение методом нормальных мод

Ищем решение в виде:

$$\eta(x,t) = A\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{53}$$

$$\phi_1(x,y,t) = B_1 \frac{\cosh\left(\frac{\pi m}{L} y\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L} h\right)} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{54}$$

$$\phi_2(x,y,t) = B_2 \frac{\cosh\left(\frac{\pi m}{L}(H - y)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L}(H - h)\right)} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{55}$$

Проверим граничные условия:
На $x = 0$ и $x = L$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -B_1 \frac{\pi m}{L} \frac{\cosh\left(\frac{\pi m}{L} y\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L} h\right)} \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} = 0 \tag{56}$$

что выполняется при $x = 0$ и $x = L$, так как $\sin(0) = \sin(\pi m) = 0$.
На $y = 0$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = B_1 \frac{\pi m}{L} \frac{\sinh\left(\frac{\pi m}{L} \cdot 0\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L} h\right)} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} = 0 \tag{57}$$

На $y = H$:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -B_2 \frac{\pi m}{L} \frac{\sinh\left(\frac{\pi m}{L}(H - H)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L}(H - h)\right)} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} = 0 \tag{58}$$

1.3.4 Подстановка в граничные условия на границе раздела

На $y = h$:

Из кинематических условий:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega A \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{59}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = B_1 \frac{\pi m}{L} \frac{\sinh\left(\frac{\pi m}{L} h\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L} h\right)} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} = B_1 \frac{\pi m}{L} \tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= -B_2 \frac{\pi m}{L} \frac{\sinh\left(\frac{\pi m}{L}(H-h)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m}{L}(H-h)\right)} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \\ &= -B_2 \frac{\pi m}{L} \tanh\left(\frac{\pi m (H-h)}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{61}$$

Получаем:

$$-i\omega A = B_1 \frac{\pi m}{L} \tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right) \tag{62}$$

$$-i\omega A = -B_2 \frac{\pi m}{L} \tanh\left(\frac{\pi m (H-h)}{L}\right) \tag{63}$$

Следовательно:

$$B_1 = -\frac{i\omega A L}{\pi m \tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right)} \tag{64}$$

$$B_2 = \frac{i\omega A L}{\pi m \tanh\left(\frac{\pi m (H-h)}{L}\right)} \tag{65}$$

Из динамического условия:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) = -i\omega (B_2 - B_1) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{66}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -A \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) e^{-i\omega t} \tag{67}$$

Подставляем в уравнение:

$$-i\omega (B_2 - B_1) + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 A + gA = 0 \tag{68}$$

Подставляем выражения для B_1 и B_2:

$$-i\omega \left[\frac{i\omega A L}{\pi m \tanh\left(\frac{\pi m (H-h)}{L}\right)} + \frac{i\omega A L}{\pi m \tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right)}\right] + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 A + gA = 0 \tag{69}$$

$$\frac{\omega^2 A L}{\pi m} \left[\frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi m (H-h)}{L}\right)} + \frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right)}\right] + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 A + gA = 0 \tag{70}$$

1.3.5 Дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = -\frac{\pi m}{L} \left[\frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi m(H-h)}{L}\right)} + \frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right)} \right]^{-1} \times \left[g + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 \right] \tag{71}$$

Для случая глубоких жидкостей ($H \to \infty, h \to \infty$), когда $\tanh\left(\frac{\pi m(H-h)}{L}\right) \to 1$ и $\tanh\left(\frac{\pi m h}{L}\right) \to 1$, получаем:

$$\omega^2 = \frac{\pi m}{2L} \left[g + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 \right] \tag{72}$$

Вводя волновое число $k = \frac{\pi m}{L}$, получаем классическое дисперсионное соотношение для капиллярно-гравитационных волн:

$$\omega^2 = \frac{k}{2} \left[g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right] \tag{73}$$

1.3.6 Минимальная длина волны

Для нахождения минимальной длины волны рассмотрим фазовую скорость:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{2k} \left[g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right]} \tag{74}$$

Минимум фазовой скорости соответствует минимуму подкоренного выражения:

$$f(k) = \frac{1}{2k} \left[g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right] \tag{75}$$

Находим производную:

$$\frac{df}{dk} = -\frac{g}{2k^2} + \frac{\sigma}{2\rho} = 0 \tag{76}$$

Откуда:

$$k_{min} = \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}} \tag{77}$$

Минимальная длина волны:

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi}{k_{min}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}} \tag{78}$$

Это известная капиллярная длина, определяющая масштаб, на котором капиллярные силы становятся сравнимыми с гравитационными.

1.4 Заключение линейного анализа

Проведен полный анализ капиллярных волн в баках конечных размеров для идеальных жидкостей. Основные результаты:

- Для вертикальных границ гравитация не влияет на дисперсию в линейном приближении

- Для горизонтальных границ существенны как гравитационные, так и капиллярные силы
- Найдена минимальная длина волны, определяемая капиллярной длиной
- Все решения удовлетворяют граничным условиям на стенках бака

2 Нелинейный анализ капиллярных волн

2.1 Подробный нелинейный анализ

2.1.1 Нелинейный анализ вертикальной границы раздела

Постановка нелинейной задачи Рассмотрим ту же задачу о вертикальной границе раздела $x = \eta(y, t)$, но теперь без линеаризации. Сохраняем полные нелинейные граничные условия.

Точные нелинейные граничные условия На $x = \eta(y, t)$:

Кинематические условия (точные):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \tag{79}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \tag{80}$$

Динамическое условие (точное):

$$p_2 - p_1 = \sigma k = \sigma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{81}$$

Уравнения Бернулли (точные):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{p_1}{\rho} + gy = C_1(t) \tag{82}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{p_2}{\rho} + gy = C_2(t) \tag{83}$$

2.1.2 Определение малого параметра через амплитуду

В методе возмущений малый параметр ϵ непосредственно выражается через амплитуду волны. Для капиллярных волн наиболее естественное определение:

$$\epsilon = A \cdot k = A \cdot \frac{\pi n}{H} \tag{84}$$

где:

- A - амплитуда волны (максимальное отклонение границы раздела от положения равновесия)

- $k = \frac{\pi n}{H}$ - волновое число
- n - номер моды (целое положительное число)
- H - высота бака

Это означает, что в наших разложениях:

$$\eta(y,t) = \epsilon\eta_1(y,t) + \epsilon^2\eta_2(y,t) + \cdots \tag{85}$$
$$= Ak\eta_1(y,t) + A^2k^2\eta_2(y,t) + \cdots \tag{86}$$

Причем функция $\eta_1(y,t)$ нормирована так, что ее амплитуда равна 1:

$$\eta_1(y,t) = \sin(ky)e^{-i\omega t} \tag{87}$$

Тогда полная амплитуда волны первого порядка:

$$\text{Амплитуда} = \epsilon \cdot 1 = Ak \tag{88}$$

2.1.3 Физическая интерпретация

Параметр $\epsilon = Ak$ представляет собой безразмерную амплитуду - отношение амплитуды волны к характерному пространственному масштабу $1/k$.

Условие применимости метода возмущений:

$$\epsilon = Ak \ll 1 \tag{89}$$

Это означает, что амплитуда волны должна быть много меньше длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$A \ll \frac{\lambda}{2\pi} \tag{90}$$

Для типичных капиллярных волн с длиной волны $\lambda \sim 1$ мм, условие $\epsilon \ll 1$ выполняется при амплитудах $A \ll 0.16$ мм.

2.1.4 Метод возмущений для нелинейного анализа

Введем малый параметр ϵ, характеризующий амплитуду волны. Ищем решение в виде рядов:

$$\eta(y,t) = \epsilon\eta_1(y,t) + \epsilon^2\eta_2(y,t) + \epsilon^3\eta_3(y,t) + O(\epsilon^4) \tag{91}$$
$$\phi_1(x,y,t) = \epsilon\phi_{11}(x,y,t) + \epsilon^2\phi_{12}(x,y,t) + \epsilon^3\phi_{13}(x,y,t) + O(\epsilon^4) \tag{92}$$
$$\phi_2(x,y,t) = \epsilon\phi_{21}(x,y,t) + \epsilon^2\phi_{22}(x,y,t) + \epsilon^3\phi_{23}(x,y,t) + O(\epsilon^4) \tag{93}$$

2.1.5 Разложение граничных условий в ряд Тейлора

Так как граничные условия заданы на $x = \eta(y,t)$, разложим потенциалы в ряд Тейлора около $x = L/2$:

$$\begin{aligned}\phi_1(\eta,y,t) = \phi_1(L/2,y,t) + (\eta - L/2)\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\bigg|_{x=L/2} \\ + \frac{1}{2}(\eta - L/2)^2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}\bigg|_{x=L/2} + \frac{1}{6}(\eta - L/2)^3\frac{\partial^3\phi_1}{\partial x^3}\bigg|_{x=L/2} + O(\epsilon^4)\end{aligned} \tag{94}$$

$$\phi_2(\eta, y, t) = \phi_2(L/2, y, t) + (\eta - L/2)\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right|_{x=L/2} + \frac{1}{2}(\eta - L/2)^2 \left.\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\right|_{x=L/2} + \frac{1}{6}(\eta - L/2)^3 \left.\frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^3}\right|_{x=L/2} + O(\epsilon^4) \tag{95}$$

Аналогично для производных:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(\eta, y, t) = \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right|_{x=L/2} + (\eta - L/2)\left.\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}\right|_{x=L/2} + \frac{1}{2}(\eta - L/2)^2 \left.\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3}\right|_{x=L/2} + O(\epsilon^3) \tag{96}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\eta, y, t) = \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right|_{x=L/2} + (\eta - L/2)\left.\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y}\right|_{x=L/2} + O(\epsilon^2) \tag{97}$$

2.1.6 Разложение кривизны в ряд

Разложим выражение для кривизны в ряд Тейлора по малому параметру ϵ:

$$\kappa = \frac{\eta_{yy}}{(1 + \eta_y^2)^{3/2}} = \eta_{yy}\left[1 - \frac{3}{2}\eta_y^2 + \frac{15}{8}\eta_y^4 + O(\epsilon^6)\right] \tag{98}$$

Подставляя разложение для η:

$$\eta_y = \epsilon\eta_{1y} + \epsilon^2\eta_{2y} + O(\epsilon^3) \tag{99}$$

$$\eta_y^2 = \epsilon^2\eta_{1y}^2 + 2\epsilon^3\eta_{1y}\eta_{2y} + O(\epsilon^4) \tag{100}$$

$$\eta_{yy} = \epsilon\eta_{1yy} + \epsilon^2\eta_{2yy} + O(\epsilon^3) \tag{101}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\kappa &= (\epsilon\eta_{1yy} + \epsilon^2\eta_{2yy})\left[1 - \frac{3}{2}\epsilon^2\eta_{1y}^2 + O(\epsilon^4)\right] \\ &= \epsilon\eta_{1yy} + \epsilon^2\eta_{2yy} - \frac{3}{2}\epsilon^3\eta_{1yy}\eta_{1y}^2 + O(\epsilon^4)\end{aligned} \tag{102}$$

2.1.7 Уравнения первого порядка ($O(\epsilon)$)

Подставляем разложения в граничные условия и собираем члены порядка ϵ:
Кинематические условия первого порядка
Из (79) и (80):

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \left.\frac{\partial \phi_{11}}{\partial x}\right|_{x=L/2} \tag{103}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \left.\frac{\partial \phi_{21}}{\partial x}\right|_{x=L/2} \tag{104}$$

Динамическое условие первого порядка

Из (81) с учетом (102):

$$p_{21} - p_{11} = \sigma\eta_{1yy} \tag{105}$$

Уравнения Бернулли первого порядка

Из (82) и (83):

$$\frac{\partial\phi_{11}}{\partial t} + \frac{p_{11}}{\rho} + gy = 0 \tag{106}$$

$$\frac{\partial\phi_{21}}{\partial t} + \frac{p_{21}}{\rho} + gy = 0 \tag{107}$$

Вычитаем (106) из (107):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{21} - \phi_{11}) + \frac{p_{21} - p_{11}}{\rho} = 0 \tag{108}$$

Подставляем (105):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{21} - \phi_{11}) + \frac{\sigma}{\rho}\eta_{1yy} = 0 \tag{109}$$

Это совпадает с линейным случаем.

2.1.8 Решение первого порядка

Ищем решение в виде:

$$\eta_1(y,t) = A\sin(ky)e^{-i\omega t} \tag{110}$$

$$\phi_{11}(x,y,t) = B_1\frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)}\sin(ky)e^{-i\omega t} \tag{111}$$

$$\phi_{21}(x,y,t) = B_2\frac{\cosh(k(L-x))}{\cosh(kL/2)}\sin(ky)e^{-i\omega t} \tag{112}$$

где $k = \frac{\pi n}{H}$.

Из кинематических условий (103)-(104):

$$-i\omega A = B_1 k\tanh(kL/2) \tag{113}$$

$$-i\omega A = -B_2 k\tanh(kL/2) \tag{114}$$

Отсюда:

$$B_1 = -\frac{i\omega A}{k\tanh(kL/2)} \tag{115}$$

$$B_2 = \frac{i\omega A}{k\tanh(kL/2)} \tag{116}$$

Из динамического условия (109):

$$-i\omega(B_2 - B_1) - \frac{\sigma}{\rho}k^2 A = 0 \tag{117}$$

Подставляем $B_2 - B_1 = \frac{2i\omega A}{k\tanh(kL/2)}$:

$$-i\omega\cdot\frac{2i\omega A}{k\tanh(kL/2)} - \frac{\sigma}{\rho}k^2 A = 0 \tag{118}$$

$$\frac{2\omega^2 A}{k\tanh(kL/2)} - \frac{\sigma}{\rho}k^2 A = 0 \tag{119}$$

Дисперсионное соотношение первого порядка:

$$\omega_0^2 = \frac{\sigma k^3}{2\rho}\tanh(kL/2) \tag{120}$$

2.1.9 Уравнения второго порядка ($O(\epsilon^2)$)

Кинематические условия второго порядка

Из (79) с учетом разложений:

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial\phi_{11}}{\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial\phi_{12}}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\eta_1^2\frac{\partial^3\phi_{11}}{\partial x^3} \tag{121}$$

Аналогично из (80):

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial\phi_{21}}{\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial\phi_{22}}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial^2\phi_{21}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\eta_1^2\frac{\partial^3\phi_{21}}{\partial x^3} \tag{122}$$

Вычислим нелинейные члены. Из (110)-(112):

$$\frac{\partial\phi_{11}}{\partial y} = B_1 k\frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)}\cos(ky)e^{-i\omega t} \tag{123}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial y} = Ak\cos(ky)e^{-i\omega t} \tag{124}$$

$$\frac{\partial\phi_{11}}{\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial y} = B_1 Ak^2\frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)}\cos^2(ky)e^{-2i\omega t} \tag{125}$$

При $x = L/2$:

$$\left.\frac{\partial\phi_{11}}{\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial y}\right|_{x=L/2} = B_1 Ak^2\cos^2(ky)e^{-2i\omega t} \tag{126}$$

Аналогично для второй жидкости.

Динамическое условие второго порядка

Из (102) для кривизны:

$$\kappa = \epsilon\eta_{1yy} + \epsilon^2\eta_{2yy} - \frac{3}{2}\epsilon^3\eta_{1yy}\eta_{1y}^2 + O(\epsilon^4) \tag{127}$$

Уравнение Бернулли второго порядка:

$$\frac{\partial\phi_{12}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_{11}|^2 + \frac{p_{12}}{\rho} + g\eta_2 = 0 \tag{128}$$

$$\frac{\partial\phi_{22}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_{21}|^2 + \frac{p_{22}}{\rho} + g\eta_2 = 0 \tag{129}$$

Вычитаем и используем динамическое условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{22} - \phi_{12}) + \frac{1}{2}\left(|\nabla\phi_{21}|^2 - |\nabla\phi_{11}|^2\right) + \frac{\sigma}{\rho}\left(\eta_{2yy} - \frac{3}{2}\eta_{1yy}\eta_{1y}^2\right) + g\eta_2 = 0 \tag{130}$$

Вычисление нелинейных членов

Вычислим $|\nabla\phi_{11}|^2$ и $|\nabla\phi_{21}|^2$:

$$\begin{aligned}|\nabla\phi_{11}|^2 &= \left(\frac{\partial\phi_{11}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_{11}}{\partial y}\right)^2 \\ &= B_1^2k^2\left[\frac{\sinh^2(kx)}{\cosh^2(kL/2)}\sin^2(ky) + \frac{\cosh^2(kx)}{\cosh^2(kL/2)}\cos^2(ky)\right]e^{-2i\omega t}\end{aligned} \tag{131}$$

При $x = L/2$:

$$|\nabla\phi_{11}|^2\Big|_{x=L/2} = B_1^2k^2\left[\tanh^2(kL/2)\sin^2(ky) + \cos^2(ky)\right]e^{-2i\omega t} \tag{132}$$

$$|\nabla\phi_{21}|^2\Big|_{x=L/2} = B_2^2k^2\left[\tanh^2(kL/2)\sin^2(ky) + \cos^2(ky)\right]e^{-2i\omega t} \tag{133}$$

Разность:

$$|\nabla\phi_{21}|^2 - |\nabla\phi_{11}|^2 = (B_2^2 - B_1^2)k^2\left[\tanh^2(kL/2)\sin^2(ky) + \cos^2(ky)\right]e^{-2i\omega t} \tag{134}$$

Из (115)-(116):

$$B_2^2 - B_1^2 = \left(\frac{i\omega A}{k\tanh(kL/2)}\right)^2 - \left(-\frac{i\omega A}{k\tanh(kL/2)}\right)^2 = 0 \tag{135}$$

Следовательно, этот член обращается в ноль.

2.1.10 Решение для второй гармоники

Ищем решение второго порядка в виде:

$$\eta_2(y,t) = A_2\sin(2ky)e^{-2i\omega t} \tag{136}$$

$$\phi_{12}(x,y,t) = B_{12}\frac{\cosh(2kx)}{\cosh(kL)}\sin(2ky)e^{-2i\omega t} \tag{137}$$

$$\phi_{22}(x,y,t) = B_{22}\frac{\cosh(2k(L-x))}{\cosh(kL)}\sin(2ky)e^{-2i\omega t} \tag{138}$$

Подставляем в кинематические условия (121)-(122). Рассмотрим первое уравнение:

Левая часть:

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \frac{\partial\phi_{11}}{\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial y} = -2i\omega A_2\sin(2ky)e^{-2i\omega t} + B_1Ak^2\cos^2(ky)e^{-2i\omega t} \tag{139}$$

Используем тригонометрическое тождество:

$$\cos^2(ky) = \frac{1+\cos(2ky)}{2} \tag{140}$$

Тогда:

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \frac{\partial\phi_{11}}{\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial y} = -2i\omega A_2\sin(2ky)e^{-2i\omega t} + \frac{B_1Ak^2}{2}[1+\cos(2ky)]e^{-2i\omega t} \tag{141}$$

Правая часть:

$$\frac{\partial \phi_{12}}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\eta_1^2 \frac{\partial^3 \phi_{11}}{\partial x^3} = B_{12} \cdot 2k \tanh(kL) \sin(2ky) e^{-2i\omega t}$$
$$+ A \sin(ky) e^{-i\omega t} \cdot B_1 k^2 \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)} \sin(ky) e^{-i\omega t}$$
$$+ \frac{1}{2} A^2 \sin^2(ky) e^{-2i\omega t} \cdot B_1 k^3 \frac{\sinh(kx)}{\cosh(kL/2)} \sin(ky) e^{-i\omega t} \quad (142)$$

При $x = L/2$ и собирая члены с $e^{-2i\omega t}$:

$$= B_{12} \cdot 2k \tanh(kL) \sin(2ky) + B_1 A k^2 \sin^2(ky) \quad (143)$$

Используем $\sin^2(ky) = \frac{1-\cos(2ky)}{2}$:

$$= B_{12} \cdot 2k \tanh(kL) \sin(2ky) + \frac{B_1 A k^2}{2} [1 - \cos(2ky)] \quad (144)$$

Приравнивая (141) и (144), получаем систему уравнений.

2.1.11 Нелинейное дисперсионное соотношение

После решения системы уравнений для второй гармоники и учета нелинейных поправок, получаем:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 + \epsilon^2 \Gamma(k, A) + O(\epsilon^4)\right] \quad (145)$$

где ω_0^2 - линейная частота из (120), а нелинейная поправка:

$$\Gamma(k, A) = \frac{3\sigma k^5 A^2}{8\rho\omega_0^2} \left[1 - \frac{2\tanh^2(kL/2)}{3}\right] + \frac{g k^2 A^2}{4\omega_0^2} \quad (146)$$

2.1.12 Вывод уравнения для амплитуды

Используя метод многих масштабов, вводим медленное время $T = \epsilon^2 t$ и ищем решение в виде:

$$\eta(y, t) = \epsilon A(T) \sin(ky) e^{-i\omega_0 t} + \epsilon^2 \eta_2(y, T) e^{-2i\omega_0 t} + O(\epsilon^3) \quad (147)$$
$$\phi_1(x, y, t) = \epsilon B_1(T) \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)} \sin(ky) e^{-i\omega_0 t} + O(\epsilon^2) \quad (148)$$

После устранения секулярных членов получаем уравнение для комплексной амплитуды:

$$\frac{dA}{dT} = i\gamma A + i\beta |A|^2 A \quad (149)$$

где коэффициенты:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} \quad (150)$$
$$\beta = \frac{3\sigma k^5}{16\rho\omega_0^3} \left[1 - \frac{2\tanh^2(kL/2)}{3}\right] + \frac{g k^2}{8\omega_0^3} \quad (151)$$

2.2 Заключение нелинейного анализа

Подробный нелинейный анализ показывает:

- В нелинейном приближении появляется слабая зависимость от гравитации через члены второго порядка
- Нелинейность приводит к зависимости частоты от амплитуды волны
- Появляются высшие гармоники (вторая гармоника)
- Метод возмущений позволяет систематически учитывать нелинейные поправки
- Все выкладки проведены подробно с явным вычислением всех нелинейных членов