

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ЛЕЖАНДРА

Автор: Трушников Владимир Владимирович

Октябрь, 2025

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ЛЕЖАНДРА

Аннотация: В статье приведено доказательство гипотезы построенное на сравнении интервалов, максимального между простыми и между соседними квадратами натуральных.

Abstract: The article presents a proof of the hypothesis based on a comparison of intervals, the maximum between primes and between adjacent squares of natural numbers.

Ключевые слова: Гипотеза Лежандра, табличная трансформация натурального ряда, простые, интервалы, близнецы.

Key words: Legendre hypothesis, tabular transformation of natural numbers, prime numbers, intervals, twins.

Введение

Гипотеза Лежандра утверждает о существовании простого числа между соседними квадратами. Эта гипотеза остаётся недоказанной и входит в число четырёх проблем Ландау, сформулированных в 1912 году как главные и «неприступные» проблемы теоретической математики.

ПРИМЕЧАНИЕ: В представленном доказательстве гипотезы Лежандра использованы базовые понятия и определения такие как коэффициент трансформации, области проявленных и непроявленных простых, изложенные в авторской статье “Табличная трансформация натурального ряда, как метод выявления простых”.

Доказательство

В результате деления чисел натурального ряда на очередное простое, отсеиваются числа кратные ему. Очередное простое, в качестве коэффициента трансформации, всегда больше предыдущего, поэтому между отсеянными кратными, всегда существуют простые, выявленные в результате предыдущих этапов. Для доказательства гипотезы нам достаточно принять в качестве аксиомы, что между кратными для любого коэффициента трансформации всегда существует как минимум одно простое.

Простое число в качестве текущего коэффициента трансформации в квадрате делит натуральный ряд на две области: проявленных и пока еще непроявленных простых. Очередной коэффициент трансформации больше предыдущего, больше любого предыдущего, таким образом, охватывает своим значением все меньшие значения. Поэтому распределение простых, однажды проявленное, уже никогда не будет подвержено никаким изменениям в последующих этапах трансформации. Изменениям подвергается только непроявленная область. В каждом очередном этапе трансформации непроявленная область фрагментируется очередным коэффициентом. Отсеивание чисел, кратных коэффициенту трансформации в очередных этапах приводит к увеличению интервалов между простыми в непроявленной области начиная от границы раздела названных областей, которые затем, уже в очередных этапах становятся проявленными. Это значит, что максимальные интервалы между простыми также определяются текущим коэффициентом трансформации и как минимум один из максимальных интервалов всегда находится в пределах проявленной в непосредственной близости от границы раздела.

Учитывая, что между кратными проявленной области всегда существует как минимум одно простое, максимальные интервалы между простыми, в этом случае, не будут превышать суммы значений текущего коэффициента трансформации и предыдущего. Этот факт мы и будем использовать в нашем доказательстве. Второй факт, который мы будем учитывать, связан с тем, что максимальная сумма произвольного текущего коэффициента трансформации и предыдущего принадлежит паре простых, именуемых близнецами. Таким образом, можно записать:

$$P_n - P_{n-1} < P_i + P_{i-1} \quad (1)$$

здесь: $P_n - P_{n-1}$ - максимальный интервал между двумя простыми в диапазоне ограниченном текущим коэффициентом трансформации;

P_i - текущий коэффициент трансформации;

P_{i-1} - предыдущий коэффициент трансформации, а в случае пары близнецов: $P_{i-1} = P_{i-2}$

$$P_n - P_{n-1} < P_i + P_{i-2} \quad (2)$$

$$P_n - P_{n-1} < 2P_i - 2 \quad (3)$$

Будем доказывать, что максимальные интервалы между простыми всегда меньше диапазона между любыми соседними квадратами натуральных.

1) Представим ряд натуральных чисел в квадрате в виде Таблицы 1:

i	N_i^2	$N_i^2 - N_{i-1}^2$
1	1	
		3
2	4	
		5
3	9	
		7
4	16	
		9
5	25	
		11
6	36	

Таблица 1. Ряд натуральных чисел в квадрате.

Диапазон между двумя квадратами равен:

$$N_i^2 - (N_{i-1})^2 = 2i - 1 \quad (4)$$

Учитывая что любое простое, рассматриваемое нами в качестве находящегося между квадратами, меньше крайнего квадрата, т.е. $P_i < N_i^2$, а также учитывая принадлежность простых к ряду натуральных, неравенство (3) можно записать в виде:

$$P_n - P_{n-1} < 2i - 2 \quad (5)$$

Сравним правые части (5) и (4):

$$\overset{(5)}{2i - 2} < \overset{(4)}{2i - 1} \quad (6)$$

Максимальные интервалы между простыми всегда меньше диапазона между любыми соседними квадратами в пределах области ограниченной значением N_i^2 :

$$P_n - P_{n-1} < N_i^2 - (N_{i-1})^2 \quad (7)$$

Значит между соседними квадратами всегда существует как минимум одно простое.

Гипотеза Лежандра доказана

Библиографический список:

При написании статьи дополнительная литература не использовалась.