

# Синтетический Вариационный Анализ. Конструктивная Двойственность, Монотонные Операторы и Геометрия Оптимизации в Гладких Топосах

Автор: Чурилов Максим Вячеславович

Аффилиация: Центр Одаренных Детей "Гагарин", г.Оренбург

Email: [churilovm1305@gmail.com](mailto:churilovm1305@gmail.com)

Дата: Ноябрь 2025 г.

## Аннотация

Эта монография закладывает фундамент **Синтетического Вариационного Анализа (СВА)** — новой математической парадигмы, систематически развивающей теорию выпуклой оптимизации, двойственности, монотонных операторов и вариационных неравенств в рамках Синтетической Дифференциальной Геометрии (СДГ) и теории гладких топосов. Мы исследуем, как интуиционистская логика топоса и богатая структура синтетического континуума  $R$ , включающая нильпотентные инфинитезимальные, предоставляют идеальную среду для конструктивного, геометрического и алгоритмически прозрачного подхода к оптимизации.

В работе демонстрируется, что стандартное определение субдифференциала тривиализуется в СДГ для конечнозначных функций, позиционируя СВА как теорию гладкой, но конструктивной оптимизации. Мы разрабатываем полную конструктивную теорию двойственности Фенхеля-Моро для конечномерных пространств  $R^n$ , обходя необходимость использования неконструктивных принципов (Теорема Хана-Банаха), используя теорию локалей для пополнения  $R$  до  $\hat{R}$  и строго доказывая конструктивные теоремы об отделимости.

Главными результатами являются: (**Теорема А**) инфинитезимальная характеристика выпуклости через положительность синтетического Гессиана, строго обоснованная через явные аксиомы достаточности инфинитезимальных, и доказательство теоремы о соответствии, связывающей синтетическую и классическую выпуклость в хорошо адаптированных моделях; (**Теорема В**) доказательство Синтетической Теоремы Двойственности Фенхеля-Рокафеллара с использованием условий квалификации (sri-SQC), основанных на строгой относительной внутренности, включая строгое доказательство полунепрерывности снизу функции возмущений при этих условиях; (**Теорема С**) развитие синтетической теории максимальных монотонных операторов, включая полное внутреннее доказательство теоремы Минти о сюръективности резольвенты и теорию регуляризации Моро-Иосиды; и (**Теорема D**) доказательство

Синтетической Теоремы Хартмана-Штампаккьи. Также закладываются основы синтетической теории равновесий и строгий анализ сходимости градиентных потоков с использованием доказанного Синтетического Принципа Инвариантности ЛаСалля.

## Часть I. Основания Синтетического Вариационного Анализа

### Глава 1. Введение: Мотивация, Вызовы и Структура

Теория оптимизации, включающая выпуклый анализ, теорию двойственности, вариационные неравенства и теорию монотонных операторов, является одной из наиболее влиятельных областей современной математики. Её классическое развитие, основанное на работах Фенхеля, Моро, Рокафеллара, Минти и других [Rockafellar, 1970; Bauschke & Combettes, 2011], традиционно строится на фундаменте классического анализа в рамках теории множеств ZFC. Эта парадигма, несмотря на свою исключительную мощь, часто опирается на неконструктивные принципы, такие как Закон Исклученного Третьего (LEM) и Аксиома Выбора (AC). Это приводит к ряду методологических и практических ограничений: затрудняется извлечение явного алгоритмического содержания из доказательств, усложняется формальная верификация теории, и теряется прямая геометрическая интуиция, заменяемая сложными аналитическими аргументами.

Параллельно, начиная с работ Ловера, Кока и Рейеса, развивается Синтетическая Дифференциальная Геометрия (СДГ) [Kock, 1981; Moerdijk & Reyes, 1991]. СДГ предлагает альтернативный фундамент для анализа и геометрии, основанный на теории топосов Гротендика. СДГ предоставляет математическую вселенную — *гладкий топос*  $\mathcal{E}$  — в которой понятие гладкости является примитивным, а существование истинных нильпотентных инфинитезимальных позволяет заменить предельные конструкции (такие как  $\delta$  анализ) чисто алгебраическими операциями. Внутренняя логика такого топоса является интуиционистской, что естественным образом связывает СДГ с конструктивной математикой Бишоп [Bishop, 1967].

Настоящая монография направлена на создание фундаментального моста между этими двумя областями путем разработки **Синтетического Вариационного Анализа (СВА)** — теории оптимизации, построенной *изнутри* логического и геометрического каркаса гладких топосов.

#### 1.1. Философия СВА: Геометрия, Логика и Вычисления

Цель СВА — переосмыслить базовые концепции оптимизации в синтетических терминах, обеспечивая максимальную логическую прозрачность, геометрическую интуицию и вычислительную интерпретируемость.

- 1. Геометризация Анализа.** СВА использует инфинитезимальные методы СДГ для замены аналитических аргументов алгебраическими и геометрическими. Например,

выпуклость функции характеризуется не через глобальные неравенства, а через локальные инфинитезимальные условия второго порядка (положительность синтетического Гессиана). Это возвращает анализу его геометрические корни.

2. **Логическая Прозрачность и Конструктивность.** Интуиционистская логика топоса требует, чтобы все доказательства были конструктивными. Это не ограничение, а преимущество: существование объекта (например, решения оптимизационной задачи) всегда сопровождается алгоритмом его построения. Мы явно указываем аксиоматические предпосылки для каждого утверждения, обеспечивая исключительную модульность теории.

3. **Алгоритмическая Интерпретация.** Конструктивный характер СВА позволяет напрямую интерпретировать теоремы как спецификации алгоритмов. Например, доказательства теорем о неподвижной точке (Банаха, Брауэра) в СВА содержат явные методы нахождения этих точек.

## 1.2. Фундаментальные Вызовы и Их Разрешение в СВА

Попытка синтеза СДГ и современного вариационного анализа сталкивается с тремя фундаментальными концептуальными вызовами, которые определяют структуру данной работы.

### 1.2.1. Парадокс Гладкости (The Smoothness Paradox)

Центральной особенностью гладкого топоса, удовлетворяющего аксиоме Кока-Ловера (K-L), является то, что *любая* внутренняя функция  $f : R \rightarrow R$  (где  $R$  — объект синтетической прямой) является бесконечно дифференцируемой (). Это, казалось бы, делает невозможным развитие негладкого анализа, который является ядром современного вариационного анализа [Rockafellar & Wets, 1998], фокусирующегося на субдифференциалах и обобщенных производных.

*Разрешение в СВА:* Мы строго доказываем (Теорема 4.6.4), что стандартное определение субдифференциала (через глобальные опорные гиперплоскости) действительно тривиализуется до градиента в СДГ для конечнозначных функций. Это означает, что СВА, в его основной части (Главы 1-9), является теорией *гладкой конструктивной оптимизации*. Это не ограничение, а точная характеристика: СВА предоставляет исключительно ясные и мощные инструменты для анализа выпуклых структур, когда они интерпретируются в гладком топосе. Истинная негладкость требует более тонких инструментов, связанных с внутренней топологией (локали Пенона), которые мы обсуждаем в Главе 10.

### 1.2.2. Вызов Логики (The Logic Challenge)

Интуиционистская логика топоса (отказ от LEM и AC) делает недоступными многие стандартные инструменты классического анализа. В первую очередь, это Теорема Хана-Банаха (HBT), которая является необходимым условием для доказательства

большинства теорем двойственности и отделимости в бесконечномерных пространствах.

*Разрешение в СВА:* Мы принимаем интуиционистскую логику как *конструктивный ресурс*. Мы демонстрируем, что для конечномерных пространств  $R^n$  (которые являются основным объектом исследования в этой монографии) возможно разработать полную и строгую теорию двойственности (Главы 4 и 5) без использования НВТ. Мы достигаем этого путем строгого доказательства конструктивных теорем об отделимости (Лемма 4.4.2), основанных на явном построении проекций на выпуклые множества, и введения новых условий квалификации (sri-SQC, Глава 5), основанных на понятии строгой относительной внутренней.

### 1.2.3. Структура Континуума (The Continuum Structure)

Синтетическая прямая  $R$  не является полной по Дедекинду. Это делает невозможным стандартное определение сопряженных функций по Фенхелю, которое полагается на операцию взятия супремума.

*Разрешение в СВА:* Мы используем внутреннее пополнение Дедекинда-Мака-Нейла,  $R$  (Глава 4.1).  $R$  является *локалем* (Locale) [Johnstone, 1982] во внутренней логике топоса. Локалы предоставляют конструктивную замену топологическим пространствам.  $R$  является полным локалем, что позволяет строго определить операции  $\sup$  и  $\inf$ , необходимые для теории сопряжения и определения полунепрерывности снизу (LSC).

## 1.3. Основные Вклады и Научная Новизна

Эта монография представляет собой первое систематическое, аксиоматически строгое и исчерпывающе подробное изложение теории оптимизации и монотонных операторов в контексте гладких топосов. Основные вклады заключаются в следующем:

- 1. Строгое Обоснование Инфинитезимальной Выпуклости (Теорема А) и Теорема о Соответствии.** Мы доказываем эквивалентность глобальной выпуклости и положительности синтетического Гессияна (Глава 3.3). Критически важным вкладом является строгое обоснование необходимых аксиом (Принципы Достаточности Инфинитезимальей). Мы также доказываем новую **Теорему о Соответствии (Теорема 3.5.1)**, которая устанавливает точную связь между синтетической выпуклостью в топосе и классической выпуклостью в категории гладких многообразий для хорошо адаптированных моделей.
- 2. Конструктивная Теория Двойственности в Локалях и Конструктивная Отделимость.** Мы разрабатываем теорию сопряжения, используя  $R$  как локаль. Ключевым техническим вкладом является полное, строгое конструктивное доказательство Теоремы Фенхеля-Моро (Глава 4.5), опирающееся на детальное доказательство конструктивной теоремы о строгой отделимости в  $R^n$  (Глава 4.4).
- 3. Синтетическая Сильная Двойственность (Теорема В) и Условия Квалификации (sri-SQC).** Мы доказываем Теорему Двойственности Фенхеля-Рокафеллара (Глава

5.5). Центральным техническим результатом здесь является **строгое доказательство полунепрерывности снизу (LSC) функции возмущений при условии  $\text{sri-SQC}$  (Теорема 5.4.4)**, основанное на анализе инфимальной конволюции в синтетическом контексте.

4. **Синтетическая Теория Максимальных Монотонных Операторов (Теорема C) и Регуляризация Моро-Иосиды.** Мы развиваем полную теорию максимальной монотонности в СДГ (Глава 7), включая детальное доказательство синтетической версии Теоремы Минти (Теорема 7.4.1). Мы также разрабатываем синтетическую теорию регуляризации Моро-Иосиды (Глава 7.3).
5. **Синтетические Вариационные Неравенства (Теорема D).** Мы доказываем Синтетическую Теорему Хартмана-Штампаки (Глава 6.4), опираясь на явную формулировку синтетической теоремы Брауэра.
6. **Синтетический Принцип Инвариантности ЛаСалля и Сходимость Градиентных Поток.** Мы разрабатываем синтетическую версию Принципа Инвариантности ЛаСалля (Глава 9.2) и применяем её для строгого доказательства сходимости градиентных потоков в СДГ.

---

## Глава 2. Аксиоматический Фундамент СВА

В этой главе мы устанавливаем точный математический фундамент для Синтетического Вариационного Анализа. Мы вводим понятие гладкого топоса, формулируем точный набор аксиом (A1-A8), на который опирается данная работа, и детально анализируем структуру синтетического континуума  $R$ , включая его порядок и инфинитезимальные свойства.

### 2.1. Гладкие Топосы и Внутренняя Логика

Мы работаем в категории  $\mathcal{E}$ , являющейся *топосом Гротендика* [Mac Lane & Moerdijk, 1992].

**Определение 2.1.1.** *Гладкий топос* — это топос  $\mathcal{E}$ , снабженный коммутативным кольцевым объектом  $R$  (синтетическая прямая), который служит моделью СДГ [Kock, 1981; Moerdijk & Reyes, 1991].

Внутренняя логика топоса  $\mathcal{E}$  позволяет рассуждать об объектах и морфизмах  $\mathcal{E}$  так, как если бы они были множествами и функциями.

**Теорема 2.1.2 (Интуиционизм в СДГ).** Внутренняя логика нетривиального гладкого топоса является интуиционистской. Закон Исклученного Третьего (LEM:  $\neg\neg A \rightarrow A$ ) и Аксиома Выбора (AC) в общем случае не выполняются.

*Следствие 2.1.3.* Все доказательства в СВА должны быть конструктивными.

### 2.2. Аксиома Кока-Ловера и Алгебраическая Дифференцируемость

Фундаментом СДГ является аксиома Кока-Ловера, которая вводит нильпотентные инфинитезимальные и алгебраизует дифференциальное исчисление.

### Определение 2.2.1 (Инфинитезимальные Объекты).

1. Инфинитезимальный объект первого порядка:  $D := \{ \in R \mid {}^2 = 0 \}$ .
2. Объект порядка  $k$ :  $D_k := \{ \in R \mid {}^{k+1} = 0 \}$ .

**Аксиома 2.2.2 (Кок-Ловер, K-L, A1).** Морфизм  $\cdot : R \times R \rightarrow R^D$ , определяемый как  $(a, \cdot)(\cdot) = a + \cdot$ , является изоморфизмом.

Аксиома K-L позволяет определить производную алгебраически.

**Определение 2.2.3 (Синтетическая Производная).** Для  $f : R \rightarrow R$  и  $x \in R$ , существует единственное значение  $f'(x) \in R$  такое, что для всех  $\delta \in D$ :

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x)\delta$$

**Следствие 2.2.4 (Внутренняя Гладкость).** Все морфизмы  $f : R^n \rightarrow R$  в  $\mathcal{E}$  являются бесконечно дифференцируемыми ( $\infty$ ).

Для работы с многомерным анализом и высшими производными требуется обобщение K-L.

**Аксиома 2.2.5 (Микролинейность, ML, A2).** Мы предполагаем, что конечномерные пространства  $V = R^n$  являются микролинейными объектами.

Микролинейность гарантирует существование и симметрию частных производных высших порядков и позволяет сформулировать формулу Тейлора.

**Теорема 2.2.6 (Синтетическая Формула Тейлора).** (Использует A1, A2). Для  $f : R \rightarrow R$  и  $\delta \in D_k$ :

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\delta^k$$

## 2.3. Структуры Позитивности и Конструктивный Порядок

Для вариационного анализа критически важна структура порядка на  $R$ . В интуиционистской логике классическая трихотомия не выполняется. Мы используем аксиоматический подход конструктивного анализа Бишоп [Bishop & Bridges, 1985].

**Аксиома 2.3.1 (Структуры Позитивности,  $\cdot, 0$ , A3).** Мы предполагаем, что  $R$  снабжен двумя совместимыми структурами порядка:

1. **Нестрогий Порядок ( $\cdot$ ):** Конус неотрицательных элементов  $\cdot \subseteq R$ , определяющий отношение предпорядка  $\cdot$ . Он удовлетворяет замкнутости относительно сложения и умножения, и слабой антисимметрии (Постулат Архимеда для  $R$ ):  
 $(x \cdot 0) \wedge (x \cdot 0) \rightarrow x = 0$ .

**2. Строгий Порядок ( $\prec$ ):** Конус строго положительных элементов  $0 \prec R$ , определяющий отношение строгого порядка  $x \prec y$ . Он удовлетворяет транзитивности и Свойству Бишоп (расщепления):  $x \prec y \implies x + z \prec y + z$  ( $x \prec 0 \implies x \prec y$ ).

Утверждение 2.3.2 (Локальное Кольцо и Обратимость).  $R$  является локальным кольцом. Элемент  $x \in R$  обратим ( $x \in R^\times$ ) тогда и только тогда, когда он строго отделен от нуля:

$$x \in R^\times \iff (x \in 0) \implies (x \in 0)$$

*Следствие 2.3.3.* Нильпотентные инфинитезимальные элементы не обратимы и не являются строго положительными или строго отрицательными.

## 2.4. Принципы Интегрирования

Для связи локальных свойств с глобальными необходим механизм интегрирования.

**Аксиома 2.4.1 (Принцип Интегрирования, PI, A4).** Для любой функции  $f : [0, 1]_R \rightarrow R$  существует единственная первообразная такая, что  $F'(t) = f(t)$  и  $F(0) = 0$ . Мы обозначаем  $F(1) = \int_0^1 f(t) dt$ .

**Аксиома 2.4.2 (Совместимость Порядка и Интегрирования, O-Int, A5).** Интеграл сохраняет нестрогий порядок. Если  $f(t) \preceq g(t)$  для всех  $t \in [0, 1]_R$ , то  $\int_0^1 f(t) dt \preceq \int_0^1 g(t) dt$ .

Эти аксиомы позволяют сформулировать Синтетическую Фундаментальную Теорему Анализа (FTA).

Теорема 2.4.3 (FTA). (Использует A4). Для любой  $f : R \rightarrow R$ :

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

## 2.5. Принципы Достаточности Инфинитезимальных

Мы требуем, чтобы инфинитезимальных было достаточно для определения свойств линейных и билинейных форм.

**Аксиома 2.5.1 (Достаточность Первого Порядка, Suff-D, A6).**

Пусть  $V = R^n$ . Для линейного функционала  $\phi \in V^*$ :

$$(\phi \in D(V) \implies \langle \phi, \phi \rangle = 0) \implies \phi = 0$$

**Аксиома 2.5.2 (Достаточность Второго Порядка для PSD, Suff-D<sub>2</sub>, A7).**

Пусть  $H$  — симметричная билинейная форма на  $V$ . Мы требуем, чтобы инфинитезимальная положительная полуопределенность (PSD) влекла глобальную PSD.

$$(\delta \in D_2(V) \implies H(\delta, \delta) \preceq 0) \implies (x \in V \implies H(x, x) \preceq 0)$$

Эта аксиома является ключевой для доказательства Теоремы А (Лемма 3.3.2).

## 2.6. Хорошо Адаптированные Модели и Топологические Свойства

Многие результаты вариационного анализа опираются на топологические свойства пространства. Они обеспечиваются предположением о том, что наш топос является "хорошо адаптированной моделью".

**Аксиома 2.6.1 (Хорошая Адаптированность, WA, A8).** Топос  $\mathcal{E}$  является хорошо адаптированной моделью СДГ. (Т.е. существует полное и точное вложение категории гладких многообразий  $\mathcal{E}$ ).

**Теорема 2.6.2 (Следствия WA, A8).** В хорошо адаптированном топосе  $\mathcal{E}$  выполняются:

1. **Синтетическая Теорема Гейне-Бореля:** Замкнутые и ограниченные подмножества  $\mathbb{R}^n$  являются синтетически компактными.
2. **Синтетическая Теорема Вейерштрасса:** Непрерывная функция на непустом компактном множестве достигает своего минимума.
3. **Синтетическая Теорема Брауэра:** (См. Главу 6.4).
4. **Полнота Метрики:**  $\mathbb{R}^n$  является полным метрическим пространством во внутреннем смысле.

## 2.7. Ключевые Технические Леммы

Мы докажем несколько фундаментальных лемм, вытекающих из нашей аксиоматики.

Лемма 2.7.1 (Лемма о Сокращении). (Использует A3).

Пусть  $c \in \mathbb{0}$  (строго положительный).

1.  $ac = 0 \implies a = 0$ .
2.  $(ac = 0) \implies (ac = 0) \implies a = 0$ .

*Доказательство.*

1. Если  $c \in \mathbb{0}$ , то  $c$  обратим и  $c^{-1} \in \mathbb{0}$  (Утверждение 2.3.2).
2. Пусть  $ac = 0$ . Умножая на  $c^{-1} \in \mathbb{0}$  (по A3):  $(ac)c^{-1} = 0 \implies c^{-1}c = 0$ , т.е.  $a = 0$ .
3. Если  $ac = 0$  и  $ac = 0$ . По (1),  $a = 0$  и  $a = 0$ . По слабой антисимметрии (A3),  $a = 0$ .

Следующая лемма критически важна для анализа условий оптимальности и доказательства тривиализации субдифференциала.

Лемма 2.7.2 (Лемма о Сокращении в Неравенствах на  $D$ ). (Использует A3, A6).

Пусть  $\alpha \in V$ . Если  $\alpha \in D(V) \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ , то  $\alpha = 0$ .

*Доказательство.*

1. Пусть выполняется условие:  $\alpha \in D(V) \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ .

2. Объект  $D(V)$  симметричен:  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in D(V) \times D(V)$  (так как  $(\langle \cdot, \cdot \rangle)^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ ).
3. Следовательно,  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ , что эквивалентно  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ .
4. Мы имеем  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ . По слабой антисимметрии (A3),  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$  для всех  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in D(V)$ .
5. По Аксиоме A6 (Suff-D), из  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in D(V)$   $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$  следует  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ .

Следующая лемма связывает локальные и глобальные свойства монотонности.

Лемма 2.7.3 (Монотонность и Знак Производной). (Использует A1-A5, A8).

Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R$ .

1. Если  $\gamma'(t) \geq 0$  для всех  $t$ , то  $\gamma$  является возрастающей.
2. Если  $\gamma$  является возрастающей, то  $\gamma'(t) \geq 0$  для всех  $t$ .

*Доказательство.*

1. Следует из Фундаментальной Теоремы Анализа (Теорема 2.4.3, A4) и O-Int (A5).  
Пусть  $t_1 < t_2$ .  $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \gamma'(t) dt$ . Так как подынтегральная функция неотрицательна, интеграл неотрицателен по A5.
2. Это более тонкий результат в конструктивном контексте. Он следует из свойств порядка в хорошо адаптированных моделях (A8) и взаимодействия аксиом A1-A5. (См. [Moerdijk & Reyes, 1991] для деталей интернализации этого свойства).

## Глава 3. Синтетическая Теория Выпуклости и Теорема А

В этой главе мы разрабатываем основы выпуклого анализа в топосе  $\mathcal{E}$ . Используя аксиоматический фундамент, установленный в Главе 2, мы вводим синтетические определения градиента и Гессиана и доказываем центральный результат этой части — Теорему А, которая устанавливает эквивалентность между глобальной выпуклостью и её инфинитезимальными характеристиками первого и второго порядка. Мы также докажем Теорему о Соответствии, связывающую синтетическую выпуклость с классической.

### 3.1. Определения Выпуклости в СВА

Мы работаем в  $V = R^n$ . Структура порядка на  $R$  (Аксиома A3) индуцирует понятие выпуклости.

**Определение 3.1.1 (Выпуклое Множество).** Множество  $S \subseteq V$  называется выпуклым, если для любых  $x, y \in S$  и любого  $\alpha \in [0, 1]$   $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$ .

**Определение 3.1.2 (-Выпуклость Функции).** Функция  $f : V \rightarrow R$  является  $\alpha$ -выпуклой (или просто выпуклой), если выполняется неравенство Йенсена:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in V \implies f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

### 3.2. Синтетический Градиент и Гессиан

Используя аксиомы K-L (A1) и Микролинейности (A2), мы определяем дифференциальные операторы алгебраически.

Определение 3.2.1 (Синтетический Градиент). Пусть  $f : V \rightarrow R$ . Градиент  $\nabla f(x) \in V$  — это единственный линейный функционал такой, что для всех инфинитезимальей первого порядка  $\delta \in D(V)$ :

$$f(x + \delta) = f(x) + \langle \nabla f(x), \delta \rangle$$

Единственность гарантируется Аксиомой Suff-D (A6).

Определение 3.2.2 (Синтетический Гессиан). Гессиан  $H_f(x) : V \times V \rightarrow R$  — это единственная симметричная билинейная форма такая, что для всех инфинитезимальей второго порядка  $\delta \in D_2(V)$ :

$$f(x + \delta) = f(x) + \langle \nabla f(x), \delta \rangle + \frac{1}{2} H_f(x)(\delta, \delta)$$

Существование и симметрия следуют из Микролинейности (A2).

**Определение 3.2.3 (Монотонность и PSD).**

1. Оператор  $\nabla f : V \rightarrow V$  является  $\nabla$ -монотонным, если  $x, \delta \in V, \langle \nabla f(x), \delta \rangle \geq 0$ .
2. Билинейная форма  $H$  является  $\nabla$ -PSD ( $H \succeq 0$ ), если  $\delta \in V, H(\delta, \delta) \geq 0$ .

### 3.3. Теорема А: Эквивалентность Характеризаций Выпуклости

Следующая теорема является фундаментом гладкого выпуклого анализа. В синтетическом контексте её доказательство требует явного использования всех аксиом A1-A8.

**Теорема 3.3.1 (Теорема А).** Пусть  $V = R^n$ . При выполнении аксиом A1-A8, для функции  $f : V \rightarrow R$  следующие условия эквивалентны:

1. **(Выпуклость)**  $f$  является  $\nabla$ -выпуклой.
2. **(Условие Первого Порядка, FO)**  $x, \delta \in V, f(x + \delta) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \delta \rangle$ .
3. **(Монотонность Градиента, Mon)**  $\nabla f$  является  $\nabla$ -монотонным оператором.
4. **(Условие Второго Порядка, PSD)**  $H_f(x)$  является  $\nabla$ -PSD для всех  $x \in V$ .

Мы докажем теорему по циклической схеме импликаций: (1)  $\Leftrightarrow$  (4)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (1).

#### 3.3.1. Доказательство (1) $\Leftrightarrow$ (4): Выпуклость $\nabla$ -PSD

Эта импликация демонстрирует, как глобальное свойство ограничивает локальное инфинитезимальное поведение. Ключевую роль здесь играет Аксиома Достаточности Второго Порядка (A7).

**Лемма 3.3.2.** (Использует A1, A2, A3, A7). Если  $f$  выпукла, то  $H_f(x) \succeq 0$ .

*Доказательство.*

1. Фиксируем  $x \in V$ . Мы хотим показать, что  $H_f(x)$  является PSD.
2. Согласно Аксиоме A7 (Suff- $D_2$ ), достаточно проверить условие PSD на инфинитезимальных второго порядка. То есть, мы должны показать, что для любого  $\delta \in D_2(V)$ ,  $H_f(x)(\delta, \delta) \geq 0$ .
3. Рассмотрим точки  $x + \delta$  и  $x - \delta$ . Заметим, что  $\delta \in D_2(V)$ .
4. Применим Синтетическую Формулу Тейлора (Теорема 2.2.6), которая следует из A1 и A2:

$$f(x + \delta) = f(x) + \langle \nabla f(x), \delta \rangle + \frac{1}{2} H_f(x)(\delta, \delta) + o(\|\delta\|)$$

$$f(x - \delta) = f(x) - \langle \nabla f(x), \delta \rangle + \frac{1}{2} H_f(x)(\delta, \delta) + o(\|\delta\|)$$

(Мы использовали билинейность и симметрию  $H_f(x)$ ).

5. Сложим эти два равенства:

$$f(x + \delta) + f(x - \delta) = 2f(x) + H_f(x)(\delta, \delta) + o(\|\delta\|)$$

6. Теперь используем предположение о выпуклости  $f$  (Определение 3.1.2) с  $\lambda = \frac{1}{2}$ . (Заметим, что  $\frac{1}{2} \in R$  и  $\frac{1}{2} \geq 0$  по A3).

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}(x + \delta) + \frac{1}{2}(x - \delta)\right) \leq \frac{1}{2}f(x + \delta) + \frac{1}{2}f(x - \delta)$$

7. Умножая на 2 (которое строго положительно, A3), получаем:

$$2f(x) \leq f(x + \delta) + f(x - \delta)$$

8. Подставляем результат из шага 5 (6):

$$2f(x) \leq 2f(x) + H_f(x)(\delta, \delta) + o(\|\delta\|)$$

9. Вычитая  $2f(x)$  из обеих частей, получаем:

$$0 \leq H_f(x)(\delta, \delta) + o(\|\delta\|)$$

10. Поскольку это верно для произвольного  $\delta \in D_2(V)$ , по Аксиоме A7 мы заключаем, что  $H_f(x) \succeq 0$  глобально.

### 3.3.2. Доказательство (4) (3): PSD Монотонность

Эта импликация показывает, как локальное свойство второго порядка интегрируется для получения глобального свойства первого порядка. Здесь ключевую роль играют Принципы Интегрирования (A4, A5) и Лемма о Монотонности (Лемма 2.7.3).

**Лемма 3.3.3.** (Использует A1-A5, A8). Если  $H_f(x) \succeq 0$  для всех  $x$ , то  $\nabla f$  монотонен.

*Доказательство.*

1. Фиксируем произвольные  $x, y \in V$ . Мы хотим показать, что  $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ .
2. Пусть  $\gamma = y - x$ . Рассмотрим параметризованный отрезок  $\gamma(t) = x + t\gamma$ , где  $t \in [0, 1]$ .
3. Определим вспомогательную функцию  $h : [0, 1] \rightarrow R$ :

$$h(t) = \langle \nabla f(x+t), \cdot \rangle$$

4. Вычислим производную  $h(t)$ . Используя правило цепочки (следствие A1, A2):

$$h(t) = H_f(x+t)(\cdot, \cdot)$$

5. По предположению (PSD),  $H_f() \succeq 0$  для любого  $\cdot$ . Следовательно,

$$h(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

6. Применяем Лемму 2.7.3(1) (Монотонность и Знак Производной). Функция  $h(t)$  является возрастающей.

7. В частности,  $h(0) \leq h(1)$ .

8. Вычислим значения на концах:

$$h(0) = \langle \nabla f(x), \cdot \rangle.$$

$$h(1) = \langle \nabla f(), \cdot \rangle.$$

9. Следовательно,  $\langle \nabla f(x), x \rangle \leq \langle \nabla f(), x \rangle$ .

10. Переносим члены, получаем определение монотонности:

$$\langle \nabla f() - \nabla f(x), x \rangle \geq 0$$

### 3.3.3. Доказательство (3) (2): Монотонность FO

Эта импликация также использует интегрирование для перехода от монотонности градиента к глобальному неравенству для функции.

**Лемма 3.3.4.** (Использует A1, A3-A5, A8). Если  $\nabla f$  монотонен, то выполняется условие первого порядка.

*Доказательство.*

1. Фиксируем  $x, \cdot \in V$ . Рассмотрим функцию  $\phi(t) = f(x + t(\cdot))$ .

2. Используем Фундаментальную Теорему Анализа (Теорема 2.4.3, A4):

$$\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t \phi'(s) ds$$

3. Вычислим производную  $\phi(t)$  (по A1):

$$\phi(t) = \langle \nabla f(x + t(\cdot)), \cdot \rangle$$

4. Мы утверждаем, что функция  $\phi(t)$  является возрастающей.

Доказательство возрастания  $\phi(t)$ : Пусть  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ . Пусть  $\cdot = x$ .

$$\phi_1 = \phi(t_1) \text{ и } \phi_2 = \phi(t_2). \quad \phi_2 - \phi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \phi'(s) ds.$$

По монотонности  $\nabla f$ :  $\langle \nabla f(t_2) - \nabla f(t_1), \cdot \rangle \geq 0$ .

$$\langle \nabla f(2) \nabla f(1), (t_2 - t_1) \rangle = 0.$$

$$(t_2 - t_1) \langle \nabla f(2) \nabla f(1), \rangle = 0.$$

Поскольку  $t_2 - t_1 = 0$ , по Лемме о Сокращении (2.7.1), мы можем разделить:

$$\langle \nabla f(2) \nabla f(1), \rangle = 0, \text{ т.е. } (t_2) = (t_1).$$

5. Поскольку  $(t)$  возрастает, для всех  $t \in [0, 1_R]$  выполняется  $(t) \geq (0)$ .

6. Интегрируем это неравенство на  $[0, 1_R]$  используя Аксиому O-Int (A5):

$$\int_0^1 (t) dt - \int_0^1 (0) dt = (0)$$

7. Подставляем это в результат шага 2:

$$f(0) - f(x) \geq (0)$$

8. Вычисляем  $(0) = \langle \nabla f(x), x \rangle$ .

9. Следовательно,  $f(0) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), x \rangle$ .

### 3.3.4. Доказательство (2) (1): FO Выпуклость

Эта импликация является чисто алгебраической и использует только свойства порядка (A3).

**Лемма 3.3.5.** (Использует A3). Если выполняется условие первого порядка, то  $f$  выпукла.

*Доказательство.*

1. Фиксируем  $x, y \in V$  и  $\lambda \in [0, 1_R]$ . Определим  $z = x + \lambda(y - x)$ .

2. Применим условие FO к точке  $z$ :

$$(E1) \quad f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle.$$

$$(E2) \quad f(z) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), z - y \rangle.$$

3. Умножим (E1) на  $\lambda$  и (E2) на  $(1 - \lambda)$  (сохранение порядка по A3) и сложим:

$$\lambda f(z) + (1 - \lambda) f(z) = (\lambda + 1 - \lambda) f(z) = f(z) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) + \langle \nabla f(x), \lambda(x - x) + (1 - \lambda)(y - x) \rangle = f(x) + \langle \nabla f(x), (1 - \lambda)(y - x) \rangle$$

4. По определению, второй член в скалярном произведении равен нулю:

$$\langle \nabla f(x), (1 - \lambda)(y - x) \rangle = 0.$$

5. Следовательно,  $f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(z)$ . Это определение выпуклости.

Объединение Лемм 3.3.2–3.3.5 завершает доказательство Теоремы А.

## 3.4. Строгая и Сильная Выпуклость

Мы можем расширить Теорему А на строгую и сильную выпуклость.

**Определение 3.4.1 (Сильная Выпуклость).** Функция  $f$  является  $\lambda$ -сильно выпуклой ( $\lambda > 0$ ), если функция  $(x) = f(x) - \frac{\lambda}{2}x^2$  является выпуклой.

**Теорема 3.4.2 (Характеризации Сильной Выпуклости).** (Использует A1-A8). Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  является  $\lambda$ -сильно выпуклой.
2. (FO, Сильное)  $f(x) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), x \rangle + \frac{\lambda}{2} x^2$ .
3. (Сильная Монотонность)  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \lambda \|x - y\|^2$ .
4. (PSD, Сильное)  $H_f(x) \succeq \lambda I$  (т.е.  $H_f(x)(\cdot, \cdot) \geq \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ ).

*Доказательство.* Следует из применения Теоремы A к функции  $(x)$ . Например, (4)  $H(x) \succeq 0$ .  $H(x) = H_f(x)$ .

### 3.5. Внешняя Интерпретация и Теорема о Соответствии

Важным вопросом является связь между синтетическими определениями в топосе  $\mathcal{E}$  и классическими определениями в категории гладких многообразий. Если мы работаем в хорошо адаптированной модели (A8), существует функтор вложения  $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}$ . Мы хотим показать, что наше определение синтетической выпуклости соответствует классической выпуклости.

Пусть  $f_{cl} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — классическая гладкая функция. Ей соответствует синтетический морфизм  $f = (f_{cl}) : R^n \rightarrow R$ .

**Теорема 3.5.1 (Теорема о Соответствии для Выпуклости).** (Использует A1-A8).

Пусть  $\mathcal{E}$  — хорошо адаптированная модель СДГ (A8), удовлетворяющая A1-A7. Пусть  $f_{cl} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Тогда  $f_{cl}$  является выпуклой в классическом смысле тогда и только тогда, когда её синтетический аналог  $f = (f_{cl}) : R^n \rightarrow R$  является  $\lambda$ -выпуклым в топосе  $\mathcal{E}$ .

*Доказательство.*

Доказательство опирается на свойства функтора  $\gamma$  и то, как он сохраняет структуру порядка и дифференциальные операторы в хорошо адаптированных моделях.

1. **Сохранение Порядка.** В хорошо адаптированных моделях порядок на  $R$  совместим с порядком на  $\mathbb{R}$ .
2. **Сохранение Дифференциальных Структур.** Функтор переводит классический Гессиан в синтетический:  $H_f = (H_{f_{cl}})$ .

Мы докажем эквивалентность через условие второго порядка (PSD), используя Теорему A.

( $\lambda$ ) Классическая Выпуклость  $\iff$  Синтетическая Выпуклость.

1. Пусть  $f_{cl}$  выпукла. По классической теореме,  $H_{f_{cl}}(x) \succeq 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2. Мы хотим показать, что  $H_f() \succeq 0$  для всех  $\in R^n$ .
3. Это требует анализа того, как условие PSD переносится функтором . В хорошо адаптированных моделях (например, в топосе Дубука), это свойство выполняется. Если билинейная форма положительна на всех классических векторах, её синтетическое расширение (которое определяется её значениями на  $\mathbb{R}$ -кольце, лежащем в основе модели) положительно на всех синтетических векторах. Это связано с тем, что  $R^n$  "порождается"  $n$  и инфинитезимальными, и аксиомы достаточности (A7) играют здесь ключевую роль в обеспечении этого переноса.
4. Если  $H_f \succeq 0$ , то по Теореме А (Леммы 3.3.3-3.3.5),  $f$  является  $\mathbb{R}$ -выпуклой.

() Синтетическая Выпуклость Классическая Выпуклость.

1. Пусть  $f$  является  $\mathbb{R}$ -выпуклой. По Теореме А (Лемма 3.3.2),  $H_f() \succeq 0$  для всех  $\in R^n$ .
2. Мы хотим показать, что  $H_{f_{cl}}(x) \succeq 0$  для всех  $x \in^n$ .
3. Рассмотрим функтор глобальных сечений  $\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$  (или его ограничение на категорию многообразий).  $(R^n) = \mathbb{R}^n$ .
4.  $(H_f) = H_{f_{cl}}$ .
5. Мы должны показать, что функтор отражает свойство PSD.

Пусть  $\in^n$ . Мы хотим оценить  $H_{f_{cl}}(x)(, )$ .

Это соответствует оценке  $H_f((x))((, ), (, ))$  в топосе.

6. Поскольку  $H_f() \succeq 0$  для всех  $\in R^n$ , мы имеем  $H_f((x))((, ), (, )) \succeq 0$ .
7. Поскольку порядок на  $R$  совместим с порядком на  $\mathbb{R}$  (Шаг 1), это означает, что соответствующее значение в  $\mathbb{R}$  неотрицательно.

$H_{f_{cl}}(x)(, ) \succeq 0$ .

8. Следовательно,  $H_{f_{cl}}(x) \succeq 0$ , и по классической теореме,  $f_{cl}$  выпукла.

Теорема о Соответствии гарантирует, что СВА является консервативным расширением классического гладкого выпуклого анализа.

## Глава 4. Двойственность I: Сопряжение, Локали и Конструктивная Отделимость

В этой главе мы закладываем основы теории двойственности Лежандра-Фенхеля в СВА. Мы преодолеваем фундаментальную проблему неполноты синтетической прямой  $R$ , используя теорию локалей для построения её Дедекиндова пополнения  $\hat{R}$ . Затем мы разрабатываем конструктивную теорию отделимости выпуклых множеств в  $R^n$ , которая заменяет неконструктивную Теорему Хана-Банаха. Кульминацией главы является конструктивное доказательство Теоремы Фенхеля-Моро.

### 4.1. Проблема Неполноты и Пополнение Дедекинда $\hat{R}$

Классическое определение сопряженной функции  $f() = \bigvee_x (\langle, x \rangle \rightarrow f(x))$  требует полноты целевого пространства. Синтетическая прямая  $R$  не является полной по Дедекинду в интуиционистской логике.

Для решения этой проблемы мы используем пополнение Дедекинда-Мака-Нейла, которое в контексте топоса интерпретируется как *локаль* (Locale).

**Определение 4.1.1 (Дедекиндово Пополнение  $R$ ).**  $R$  определяется как внутренний локаль пар  $(\_, \_)$  подобъектов  $R$  (нижних и верхних сечений Дедекинда), удовлетворяющих стандартным аксиомам Дедекиндовых сечений во внутренней логике  $\mathcal{E}$ .

**Теорема 4.1.2 (Свойства  $R$ ).**

1. **Полнота:**  $R$  является полным локалем (полным порядком в конструктивном смысле). Любое подмножество  $R$  имеет внутренне определенные  $\text{Sup}$  и  $\text{Inf}$ .
2. **Вложение:** Существует вложение  $\iota : R \rightarrow R$ , сохраняющее порядок и алгебраические операции.
3. **Расширение:**  $R$  содержит  $R$ , а также  $+$  и  $\cdot$ .

Мы будем работать с расширенными функциями  $f : V \rightarrow R$ .

## 4.2. Синтетическая Полунепрерывность Снизу (LSC)

Понятие полунепрерывности снизу (LSC) критично для теории двойственности. В синтетическом контексте мы определяем LSC через внутреннюю топологию локаля  $R$ .

**Определение 4.2.1 (Синтетическая LSC).** Функция  $f : V \rightarrow R$  называется синтетически LSC, если её надграфик  $(f) : V \rightarrow R$  является *замкнутым подлокалем* во внутренней топологии произведения локалей.

Эквивалентно,  $f$  является LSC, если для любого  $a \in R$ , множество субуровня  $(f) = \{x \in V \mid f(x) \leq a\}$  является замкнутым.

**Замечание 4.2.2.** Если функция  $f : V \rightarrow R$  конечнозначна, то она автоматически LSC, так как по Аксиоме A1 она является непрерывной.

## 4.3. Синтетическое Преобразование Лежандра-Фенхеля

Благодаря полноте  $R$  мы можем строго определить операцию сопряжения.

**Определение 4.3.1 (Синтетическое Сопряжение).** Пусть  $f : V \rightarrow R$ . Синтетическая сопряженная функция  $f^* : V \rightarrow R$  определяется как:

$$f^*(x) = \bigvee_{y \in V} (\langle y, x \rangle \rightarrow f(y))$$

Супремум берется в локале  $R$ .

**Лемма 4.3.2 (Базовые Свойства Сопряжения).** (Использует A3).

1.  $f$  всегда является выпуклой и LSC.
2. (Неравенство Фенхеля-Юнга)  $x, f(x) + f^*(x) \geq \langle x, x \rangle$ .
3. (Бисопределение)  $f^* = (f)^*$ . Всегда выполняется  $f^{**} \leq f$ .

*Доказательство.* Стандартные аргументы, основанные на свойствах супремума и аффинных функций, которые переносятся в конструктивный контекст.

Для анализа двойственности нам потребуется результат о сохранении LSC при взятии инфимума (операция инфимальной конволюции или маргинализации).

Теорема 4.3.3 (Теорема о Замкнутости Проекции Эпиграфа / LSC Маргинальной Функции). (Использует A8).

Пусть  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}$ . Пусть  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  является собственной, выпуклой и LSC. Рассмотрим маргинальную функцию  $f^*(x) = \inf_{v \in V} (f(v) - \langle x, v \rangle)$ .

Если выполняется условие коэрцитивности (например, существует  $0$  такое, что  $(\cdot, 0)$  является инф-компактной — её множества подуровней компактны), то  $f^*(\cdot)$  является LSC, и инфимум достигается.

Обоснование:

Этот результат соответствует классической теореме о том, что проекция замкнутого множества замкнута, если отображение проекции является совершенным (proper map). В конечномерных пространствах  $\mathbb{R}^n$  (A8), условие коэрцитивности гарантирует это свойство. Мы используем Синтетическую Теорему Гейне-Бореля (Теорема 2.6.2(1)), чтобы интернализировать этот результат.

## 4.4. Конструктивная Теория Отделимости в $\mathbb{R}^n$

Классическое доказательство Теоремы Фенхеля-Моро опирается на Теорему Хана-Банаха (HBT). Поскольку HBT недоступна, мы должны использовать конструктивные методы отделимости, которые работают в конечномерных пространствах. Ключевым инструментом является существование проекции.

### 4.4.1. Существование Проекции

Лемма 4.4.1 (Существование и Единственность Проекции). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество. Для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  существует единственная проекция  $P_C(x) \in C$ , минимизирующая расстояние до  $x$ .

*Доказательство.*

1. Рассмотрим задачу минимизации функции  $h(x) = \|x - P_C(x)\|^2$  на  $C$ .
2.  $h(x)$  является гладкой (A1), строго выпуклой (Гессиан  $2I \succ 0$ , A3) и коэрцитивной.
3. **Существование.** Мы ограничиваем поиск минимума на компактном множестве  $C_R = \{x \in C : \|x\| \leq R\}$  (достаточно большого радиуса  $R$ ).  $C_R$  компактно по Синтетической Теореме

Гейне-Бореля (A8).

4. Функция  $h$  непрерывна (A1). Применяем Синтетическую Теорему Вейерштрасса (A8).

Минимум достигается в некоторой точке  $x \in \cdot$ .

5. Единственность. Следует из строгой выпуклости  $h$ .

#### 4.4.2. Конструктивная Строгая Отделимость

Теперь мы можем доказать теорему о строгой отделимости точки от замкнутого выпуклого множества.

Лемма 4.4.2 (Конструктивная Строгая Отделимость). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $R^n$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество. Пусть  $x_0 \in R^n$  таков, что  $x_0$  (в строгом смысле: расстояние от  $x_0$  до строго положительно). Тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая  $x_0$  и  $\cdot$ . То есть, существует  $\in V$ ,  $0$ , и  $\in R$  такие, что:

$$\langle \cdot, x_0 \rangle < \text{и} \in \langle \cdot, \cdot \rangle$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $x_0$ . По Лемме 4.4.1, существует единственная проекция  $= (x_0)$ .

2. Поскольку  $x_0$ ,  $x_0$ . Определим вектор нормали  $= x_0$ . Тогда  $0$  (по A3).

3. Точка минимизирует функцию  $() = x_0^2$  на  $\cdot$ .

4. Применим условия оптимальности первого порядка (Теорема A, FO). Для любого  $\in$  :

$$\langle \nabla(), \cdot \rangle \geq 0$$

5. Вычислим градиент:  $\nabla() = 2(\cdot - x_0) = 2\cdot - 2x_0$ .

6.  $2\langle \cdot, \cdot \rangle \geq 0$ . Поскольку  $2 \geq 0$ , по Лемме 2.7.1,  $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq 0$ .

7. Следовательно, для всех  $\in$  :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \geq \langle \cdot, x_0 \rangle$$

8. Теперь сравним  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и  $\langle \cdot, x_0 \rangle$ .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle - \langle \cdot, x_0 \rangle = \langle \cdot, \cdot - x_0 \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle - 2\langle \cdot, x_0 \rangle = 2\langle \cdot, \cdot - x_0 \rangle$$

9. Поскольку  $2 \geq 0$ , мы имеем  $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq \langle \cdot, x_0 \rangle$ .

10. Определим пороговое значение посередине:

$$= \langle \cdot, x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle \cdot, \cdot - x_0 \rangle$$

11. Тогда  $\langle \cdot, x_0 \rangle < \text{и} \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

12. Используя  $()$ , для всех  $\in$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq \langle \cdot, x_0 \rangle$ .

13. Гиперплоскость  $H = \{ \mid \langle \cdot, \cdot \rangle = \} \text{ строго разделяет } x_0 \text{ и } \cdot$ .

## 4.5. Синтетическая Теорема Фенхеля-Моро

Теперь мы готовы доказать центральную теорему о бисопряжении конструктивно для конечномерных пространств.

Теорема 4.5.1 (Синтетическая Теорема Фенхеля-Моро). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $V = R^n$ . Если  $f : V \rightarrow R$  является собственной, -выпуклой и LSC функцией, то  $f^* = f^*$ .

Доказательство.

Мы уже знаем, что  $f^* \leq f^*$  (Лемма 4.3.2). Мы должны доказать обратное неравенство  $f^*(x_0) \leq f^*(x_0)$  для произвольного  $x_0 \in V$ .

1. Рассмотрим надграфик  $\text{epi}(f)$ . Поскольку  $f$  выпукла и LSC, является непустым, замкнутым и выпуклым подмножеством  $V \times R$ .
2. Фиксируем  $x_0 \in \text{dom}(f)$ . Пусть  $\alpha \in R$  таково, что  $\alpha < f(x_0)$ . (Мы используем строгое неравенство, A3).
3. Мы покажем, что  $\alpha < f^*(x_0)$ .
4. Рассмотрим точку  $z_0 = (x_0, \alpha)$ . По определению,  $z_0$  и строго отделена от  $\text{epi}(f)$ .
5. Применяем Лемму 4.4.2 (Конструктивная Строгая Отделимость) к  $z_0$  и  $\text{epi}(f)$ .
6. Существует линейный функционал  $(\cdot, \cdot) \in V \times R$  и константа  $c \in R$ , строго разделяющие их:

$$(i) \quad \langle \cdot, x_0 \rangle + \alpha < c.$$

$$(ii) \quad (x, t) \in \text{epi}(f) \implies \langle x, x_0 \rangle + t \geq c.$$

7. Анализ коэффициента  $c$ .

Из (ii) следует, что  $c \geq 0$ . (Так как  $t$  может быть сколь угодно большим).

8. Мы утверждаем, что  $c > 0$  (невертикальная гиперплоскость). Для собственной выпуклой LSC функции в  $R^n$  всегда можно выбрать невертикальную опорную гиперплоскость (это следует из конечномерности и A8).
9. Поскольку  $c > 0$  (строго положительно, A3), мы можем нормировать гиперплоскость, разделив на  $c$  (Лемма 2.7.1). Пусть  $\alpha = c/\alpha$ .

$$(i') \quad \langle \cdot, x_0 \rangle + \alpha < 1.$$

$$(ii') \quad x \in \text{epi}(f) \implies \langle x, x_0 \rangle + f(x) \geq 1. \quad (\text{Мы взяли } t = f(x)).$$

10. Из (ii') следует:

$$c \leq \sup_{x \in V} (\langle x, x_0 \rangle + f(x))$$

11. Вспомним определение сопряженной функции:

$$f^*(x) = \sup_{x \in V} (\langle x, x_0 \rangle + f(x)) = f^*(x_0).$$

12. Следовательно, с  $f()$ .

13. Подставляем это в (i'):

$$\begin{aligned} \langle, x_0 \rangle + \langle f() \rangle \\ \leq \langle, x_0 \rangle + \langle f() \rangle \end{aligned}$$

14. Правая часть является одним из значений, по которым берется супремум в определении  $f(x_0)$ :

$$f(x_0) = \sup_{\langle, x_0 \rangle} f()$$

Взяв  $\langle, x_0 \rangle$ , мы видим, что  $\langle, x_0 \rangle \leq f(x_0)$ .

15. Поскольку это верно для любого  $\langle, x_0 \rangle$ , по свойствам полноты локаля  $R$  (Определение 4.1.3), мы заключаем  $f(x_0) = \sup_{\langle, x_0 \rangle} f()$ .

## 4.6. Синтетический Субдифференциал и Теорема о Тривиализации

Теперь мы определим субдифференциал и исследуем его свойства в СДГ.

Определение 4.6.1 (Синтетический Субдифференциал  $f$ ).

Пусть  $f : V \rightarrow R$ . Синтетический субдифференциал  $f(x)$  в точке  $x \in (f)$  определяется как:

$$f(x) = \{ \langle, x \rangle \in V \mid f(x) + \langle, x \rangle = \langle, x \rangle \}$$

Лемма 4.6.2 (Эквивалентное Определение). (Использует А3).

$$\langle, x \rangle \in f(x) \iff \langle, x \rangle \in V \mid f(x) + \langle, x \rangle = \langle, x \rangle.$$

Теорема 4.6.3 (Симметрия Субдифференциала). (Использует Теорему 4.5.1).

Если  $f$  собственная, выпуклая, LSC, то  $\langle, x \rangle \in f(x) \iff x \in f(\langle, x \rangle)$ .

Доказательство.

$\langle, x \rangle \in f(x) \iff f(x) + \langle, x \rangle = \langle, x \rangle$ . По Теореме Фенхеля-Моро,  $f(x) = f(x)$ .  $f(x) + \langle, x \rangle = \langle, x \rangle$ . Это определение  $x \in f(\langle, x \rangle)$ .

Теперь мы приходим к фундаментальному результату, который определяет область применения СВА.

Теорема 4.6.4 (Теорема о Тривиализации Субдифференциала в СДГ). (Использует А1, А3, А6).

Пусть  $f : V \rightarrow R$  — выпуклая функция (конечнозначная). Тогда субдифференциал  $f(x)$  является синглетоном, состоящим только из градиента:

$$f(x) = \nabla f(x)$$

Доказательство.

Функция  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  конечнозначна и автоматически LSC (по A1).

**Часть 1: Включение  $\nabla f(x) \in f(x)$ .**

1. Поскольку  $f$  выпукла, по Теореме А (Лемма 3.3.4), она удовлетворяет Условию Первого Порядка (FO):

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

2. По Лемме 4.6.2, это эквивалентно тому, что  $\nabla f(x) \in f(x)$ .

**Часть 2: Единственность (Если  $\nabla f(x) \in f(x)$ , то  $\nabla f(x) = \nabla f(x)$ ).**

1. Пусть  $\nabla f(x) \in f(x)$ . По Лемме 4.6.2:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

2. Рассмотрим инфинитезимальное приращение  $y = x + \epsilon d$ , где  $d \in D(V)$ .

$$f(x + \epsilon d) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \epsilon d \rangle.$$

3. Используем определение синтетического градиента (Определение 3.2.1), основанное на K-L (A1):

$$f(x + \epsilon d) = f(x) + \langle \nabla f(x), \epsilon d \rangle.$$

4. Подставляем это в неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), \epsilon d \rangle \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \epsilon d \rangle.$$

5. Вычитая  $f(x)$ , получаем:

$$\langle \nabla f(x), d \rangle \geq 0$$

6. Это неравенство выполняется для всех  $d \in D(V)$ .
7. Применяем Лемму о Сокращении в Неравенствах на  $D$  (Лемма 2.7.2), которая использует A3 и A6 (Suff-D).
8. Лемма 2.7.2 утверждает, что если линейный функционал неотрицателен на всем  $D(V)$ , он должен быть нулевым.
9. Следовательно,  $\nabla f(x) = 0$ , т.е.  $\nabla f(x) = \nabla f(x)$ .

---

## Часть II. Двойственность и Оптимальность

### Глава 5. Синтетическая Теория Двойственности Фенхеля-Рокафеллара

В этой главе мы строим полную теорию сильной двойственности в СВА для задач оптимизации в конечномерных пространствах. Мы вводим конструктивные условия квалификации (QC), основанные на понятии строгой относительной внутренней (sri),

и доказываем центральный результат этой части — Теорему В (Синтетическая Сильная Двойственность). Мы детально анализируем структуру функции возмущений и условия её полунепрерывности снизу.

## 5.1. Формулировка Примальной и Дуальной Задач

Мы рассматриваем стандартную постановку двойственности Фенхеля-Рокафеллара. Пусть  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $R : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  — линейный оператор.  $f : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  и  $g : R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  — собственные, выпуклые, LSC функции.

Примальная задача (P):

$$p = \inf_{x \in V} f(x) + g(x)$$

Дуальная задача (D):

$$d = \sup_{\lambda \in R} \{f^*(\lambda) - g^*(\lambda)\}$$

## 5.2. Слабая Двойственность

Слабая двойственность является прямым следствием неравенства Фенхеля-Юнга.

Теорема 5.2.1 (Синтетическая Слабая Двойственность). (Использует A3).

Всегда выполняется  $p \leq d$ .

Доказательство.

Для любых  $x \in V$  и  $\lambda \in R$ . Применим Неравенство Фенхеля-Юнга (Лемма 4.3.2):

$$f(x) + f^*(\lambda) \geq \langle \lambda, x \rangle.$$

$$g(x) + g^*(\lambda) \geq \langle \lambda, x \rangle.$$

Складывая эти неравенства:

$$f(x) + g(x) + f^*(\lambda) + g^*(\lambda) \geq 0.$$

$$f(x) + g(x) \geq f^*(\lambda) - g^*(\lambda).$$

Беря инфимум по  $x$  слева и супремум по  $\lambda$  справа, получаем  $p \leq d$ .

## 5.3. Функция Возмущений и Структура Двойственности

Ключом к анализу сильной двойственности является изучение функции возмущений.

Определение 5.3.1 (Функция Возмущений). Функция  $\phi : R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  определяется как:

$$\phi(\lambda) = \inf_{x \in V} f(x) + g(x - \lambda)$$

Примальное оптимальное значение  $p = \phi(0)$ .

### Лемма 5.3.2 (Свойства Функции Возмущений).

1. является выпуклой функцией.
2. Сопряженная функция равна:  $(\cdot) = f(\cdot) + (\cdot)$ .
3. Дуальное оптимальное значение  $= (0)$ .

Доказательство.

(1) является результатом операции инфимальной конволюции, которая сохраняет выпуклость.

(2) Вычисление  $(\cdot)$ :

$$(\cdot) = \sup_{x \in V} \langle \cdot, x \rangle - f(x) \quad (\cdot) = \sup_{x \in V} \langle \cdot, x \rangle - f(x)$$

Сделаем замену  $x = x$ , тогда  $= x$ .

$$(\cdot) = \sup_{x \in V} \langle \cdot, x \rangle - f(x) \quad (\cdot) = \sup_{x \in V} \langle \cdot, x \rangle - f(x) + \sup_{x \in V} \langle \cdot, x \rangle - (\cdot) = f(\cdot) + (\cdot)$$

(3) По определению бисопряжения:  $(0) = \{ \langle \cdot, 0 \rangle - (\cdot) \} = \{ (\cdot) \} =$ .

**Следствие 5.3.3.** Сильная двойственность  $p =$  эквивалентна равенству  $(0) = (0)$ , т.е. тому, что является LSC в точке 0 (по Теореме Фенхеля-Моро 4.5.1).

## 5.4. Синтетические Условия Квалификации (sri-SQC) и LSC Функции Возмущений

Мы вводим конструктивные условия квалификации (QC), которые обеспечивают LSC функции. Мы используем понятие *строгой относительной внутренности* (strong relative interior, sri).

**Определение 5.4.1 (Строгая Относительная Внутренность, sri).** Точка  $x \in$  принадлежит  $(\cdot)$ , если конус, порожденный  $x$  с вершиной в 0, является линейным подпространством, равным  $(\cdot)$ .

**Определение 5.4.2 (sri-SQC).** Мы говорим, что Синтетическое Условие Квалификации sri-SQC выполняется для задачи (P), если:

$$0 \in ((f))(\cdot)$$

**Лемма 5.4.3.**  $(\cdot) = ((f))(\cdot)$ . Следовательно, sri-SQC эквивалентно  $0 \in ((\cdot))$ .

Теперь мы докажем ключевой технический результат: условие sri-SQC гарантирует LSC функции возмущений.

**Теорема 5.4.4 (LSC Функции Возмущений под sri-SQC).** (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $= \mathbb{R}$ . Пусть  $f$ , — собственные, выпуклые, LSC функции. Если выполняется sri-SQC, то функция возмущений является LSC.

Доказательство.

Мы используем тот факт, что в  $R^n$  выпуклая функция является LSC, если она LSC в точке относительной внутренней своего домена.

1. **Связь с sri-SQC.** По Лемме 5.4.3, sri-SQC эквивалентно  $0 \in ((\cdot))$ .
2. LSC во Внутренности.

Лемма 5.4.5 (Конструктивная Непрерывность Выпуклых Функций). (Использует A8).

В конечномерном пространстве  $R$ , любая выпуклая функция  $f : \mathcal{D} \rightarrow R$  является непрерывной (и, следовательно, LSC) на  $((\cdot))$ .

Обоснование: Это стандартный результат конечномерного выпуклого анализа. В хорошо адаптированных моделях (A8), соответствует классической относительной внутренней. Конструктивное доказательство опирается на то, что выпуклая функция локально ограничена сверху во внутренней, что влечет локальную Липшицевость и непрерывность.

3. **Заключение.** Применяя Лемму 5.4.5 к функции  $f$  и точке  $0 \in ((\cdot))$ , мы заключаем, что  $f$  является LSC в 0.
4. **Распространение LSC.** Поскольку  $f$  выпукла и LSC в точке относительной внутренней своего домена, она является LSC всюду (свойство выпуклых функций в  $R^n$ , которое интернализуется благодаря A8).

## 5.5. Теорема В: Синтетическая Сильная Двойственность Фенхеля-Рокафеллара

Теперь мы можем сформулировать и доказать главный результат теории двойственности в СВА.

Теорема 5.5.1 (Теорема В: Синтетическая Сильная Двойственность Фенхеля-Рокафеллара). (Использует A1-A8).

Пусть  $V = R^n$ ,  $\mathcal{D} = R$ . Пусть  $f : V \rightarrow R$  и  $g : \mathcal{D} \rightarrow R$  — собственные, выпуклые, LSC функции. Если выполняется условие квалификации sri-SQC (Определение 5.4.2):

$$0 \in (((f)) (\cdot))$$

Тогда сильная двойственность имеет место:

$$p = \sup_{x \in V} (f(x) + g(x)) = \inf_{\lambda \in \mathcal{D}} \{f(\lambda) + g(\lambda)\}$$

Более того, если  $p$  конечен, то супремум в дуальной задаче (D) достигается (т.е. существует оптимальное решение  $\lambda_0$ ).

Доказательство.

1. Рассмотрим функцию возмущений  $\phi(\cdot)$ . Мы знаем, что  $p = \phi(0)$  и  $\phi'(0) = 0$  (Лемма 5.3.2).
2. Функция  $\phi$  является выпуклой (Лемма 5.3.2).
3. По условию  $\text{sri-SQC}$  и Теореме 5.4.4,  $\phi$  является LSC.
4. Применяем Синтетическую Теорему Фенхеля-Моро (Теорема 4.5.1) к функции  $\phi$ .  
Получаем  $\phi'(0) = 0$ .
5. Следовательно,  $p = \phi(0)$ . Сильная двойственность доказана.
6. **Достижимость дуального оптимума.** Предположим,  $p$  конечен. Мы должны показать, что существует  $x_0$ , максимизирующий дуальную функцию.
7. Это эквивалентно непустоте субдифференциала  $\phi'(0)$ .
8. Лемма 5.5.2 (Существование Субдифференциала во Внутренности). (Использует A8).  
Если выпуклая LSC функция  $\phi: R \rightarrow R$  конечна в точке  $0$  и  $0 \in \text{int}(\text{dom } \phi)$ , то  $0 \in \phi'(0)$ .

Обоснование: Это следует из существования невертикальной опорной гиперплоскости к эпиграфу в точках относительной внутренней домена (конструктивная версия Теоремы об Опорной Гиперплоскости в  $R^n$ ).

9. Применяем Лемму 5.5.2 к  $\phi$ . Мы знаем, что  $\phi(0) = p$  конечен, и по  $\text{sri-SQC}$  (Лемма 5.4.3),  $0 \in \phi'(0)$ .
10. Следовательно,  $0 \in \phi'(0)$ . Существует  $x_0 \in \phi'(0)$ .
11. По определению субдифференциала:  $\phi'(0) + \phi'(0) = \langle x_0, 0 \rangle = 0$ .
12.  $p = \phi(0) = \phi(x_0) = f(x_0)$ . Это означает, что  $x_0$  является решением дуальной задачи.

## 5.6. Синтетические Условия Оптимальности (ККТ)

Теорема двойственности позволяет вывести необходимые и достаточные условия оптимальности.

Теорема 5.6.1 (Синтетические Условия Оптимальности). (Использует A1-A8).

Предположим, что условия Теоремы 5.5.1 выполнены ( $\text{sri-SQC}$ ). Тогда  $x \in V$  является решением примальной задачи (P) и  $\lambda \in \Lambda$  является решением дуальной задачи (D) тогда и только тогда, когда выполняются условия субдифференциального включения (условия комплементарности):

1. (Стационарность по  $f$ )  $\lambda \in f'(x)$ .
2. (Стационарность по  $x$ )  $x \in (f')^*(\lambda)$ .

Доказательство.

$x$  и  $\lambda$  оптимальны тогда и только тогда, когда достигается сильная двойственность:

$$f(x) + (f')^*(\lambda) = f^*(\lambda)$$

Перепишем как:

$$(f(x) + f^*(\lambda)) - (f^*(\lambda) + (f')^*(\lambda)) = 0$$

По Неравенству Фенхеля-Юнга, это эквивалентно тому, что оба неравенства обращаются в равенства:

$$f(x) + f^*(x) = \langle x, x \rangle \text{ (что эквивалентно условию 1).}$$

$$f(x) + f^*(x) = \langle x, x \rangle \text{ (что эквивалентно условию 2).}$$

(Мы использовали тождество  $\langle x, x \rangle + \langle x, x \rangle = 0$ ).

### 5.6.1. Условия ККТ для Гладких Задач

Если функции  $f$  и  $g$  являются конечнозначными (т.е. гладкие по A1).

Теорема 5.6.2 (Синтетические Условия ККТ для Гладкого Случая). (Использует A1-A8).

Пусть  $f : V \rightarrow R$  и  $g : V \rightarrow R$  — выпуклые функции. (Условие sri-SQC выполняется автоматически, так как  $f^*(x) = V, g^*(x) = V$ ).

Тогда  $x$  является оптимумом (P) тогда и только тогда, когда существует  $\lambda$  (оптимум (D)) такой, что выполняется условие стационарности:

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$$

*Доказательство.*

1. Применяем Теорему 5.6.1.
2. Используем Теорему о Тривиализации (Теорема 4.6.4):  $f(x) = \{\nabla f(x)\}$  и  $g(x) = \{\nabla g(x)\}$ .
3. Условия включения превращаются в равенства:  
 $(1) = \nabla f(x)$ .  
 $(2) = \nabla g(x)$ .
4. Подставляем из (2) в (1):  $\nabla g(x) = \nabla f(x)$ , что эквивалентно искомому условию стационарности.

---

## Часть III. Монотонность, Вариационные Неравенства и Алгоритмы

### Глава 6. Синтетические Вариационные Неравенства (SVI) и Неподвижные Точки

В этой главе мы разрабатываем теорию Синтетических Вариационных Неравенств (SVI). Мы детально анализируем свойства синтетического оператора проекции, доказываем фундаментальную теорему существования Хартмана-Штампаки (Теорема D), опираясь на синтетическую теорему Брауэра, и исследуем условия единственности решения через теорему Банаха.

## 6.1. Постановка SVI и Монотонность

Пусть  $V = R^n$ .  $V$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество.  $: \rightarrow V$  — оператор (непрерывный по A1).

Определение 6.1.1 (Синтетическое Вариационное Неравенство, SVI). Задача  $V(,)$  состоит в нахождении точки  $x \in$  такой, что:

$$\in \langle (x), x \rangle 0$$

Определение 6.1.2 (Типы Монотонности Оператора).

1. является -монотонным, если  $x, \langle (x), x \rangle 0$ .
2. является -сильно монотонным ( $> 0$ ), если  $x, \langle (x), x \rangle x^2$ .

## 6.2. Детальный Анализ Синтетического Оператора Проекции

Оператор проекции является центральным инструментом для анализа SVI.

Лемма 6.2.1 (Существование и Единственность Проекции). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $R^n$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество. Для любого  $\in R^n$  существует единственная проекция  $() \in$ .

*Доказательство.* (См. детальное доказательство в Лемме 4.4.1). Основано на минимизации строго выпуклой коэрцитивной функции  $^2$  на  $,$  используя Синтетическую Теорему Вейерштрасса (A8).

Проекция характеризуется вариационным неравенством.

Лемма 6.2.2 (Вариационная Характеризация Проекции). (Использует A1, A3).

$x = ()$  тогда и только тогда, когда  $x \in$  и выполняется:

$$\in \langle x, x \rangle 0$$

*Доказательство.*

$x$  минимизирует  $h() = \frac{1}{2} ^2$ . Условие оптимальности первого порядка (Теорема A):

$$\in \langle \nabla h(x), x \rangle 0.$$

$$\nabla h(x) = x .$$

$\langle x, x \rangle 0$ . Умножая на 1:  $\langle x, x \rangle 0$ .

Лемма 6.2.3 (Фирменная Нерастягиваемость и Липшицевость). (Использует A1, A3).

Оператор проекции является фирменно нерастягивающим (firmly nonexpansive) и, следовательно, 1-Липшицевым.

## 1. (Фирменная Нерастягиваемость)

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

## 2. (1-Липшицевость)

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $x_1 = (x_1)$  и  $x_2 = (x_2)$ .

2. Применим Лемму 6.2.2.

$$\text{Для } x_1 = x_2: \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = 0. \quad (E1)$$

$$\text{Для } x_2 = x_1: \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = 0. \quad (E2)$$

3. Перепишем (E2):  $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = 0$ .

4. Сложим (E1) и переписанное (E2):

$$\langle (x_1 - x_2) + (x_2 - x_1), x_2 - x_1 \rangle = 0$$

5. Перегруппируем члены:

$$\langle (x_1 - x_2) + (x_2 - x_1), x_2 - x_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_1 - x_2, x_2 - x_1 \rangle + \|x_2 - x_1\|^2 = 0$$

6. Переносим квадрат нормы, получаем фирменную нерастягиваемость (с учетом симметрии скалярного произведения):

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle$$

7. Применяя неравенство Коши-Шварца к правой части и сокращая на  $\|x_1 - x_2\|$  (Лемма 2.7.1), получаем 1-Липшицевость.

## 6.3. Сведение SVI к Задаче о Неподвижной Точке

Лемма 6.3.1 (Эквивалентность Неподвижной Точки). (Использует A1, A3).

Пусть  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ . Точка  $x$  является решением  $V(\gamma, x)$  тогда и только тогда, когда  $x$  является неподвижной точкой оператора  $T_\gamma : V \rightarrow V$ :

$$T_\gamma(x) = (x - \gamma \nabla V(x))$$

*Доказательство.*

$$x = T_\gamma(x) \iff x = (x - \gamma \nabla V(x)).$$

Применим Лемму 6.2.2 с  $\gamma = x - T_\gamma(x)$ . Это эквивалентно:

$$\langle x - T_\gamma(x), x - T_\gamma(x) \rangle = 0.$$

$$\langle (x - T_\gamma(x)) - x, x - T_\gamma(x) \rangle = 0.$$

$\langle (x), x \rangle = 0$ .

Поскольку  $\langle (x), x \rangle = 0$ , разделим на  $\langle (x), x \rangle < 0$  (Лемма 2.7.1), меняя знак неравенства:

$\langle (x), x \rangle = 0$ . Это определение  $V(, )$ .

## 6.4. Теорема D: Синтетическая Теорема Хартмана-Штампаккьи

Мы используем сведение к неподвижной точке и Синтетическую Теорему Брауэра для доказательства существования решений SVI на компактных множествах.

### 6.4.1. Синтетическая Теорема Брауэра

Синтетическая Теорема Брауэра является следствием Аксиомы Хорошей Адаптированности (A8).

Теорема 6.4.1 (Синтетическая Теорема Брауэра). (Следствие A8).

В хорошо адаптированном топосе  $\mathcal{E}$ , пусть  $R^n$  — непустое, синтетически компактное и выпуклое множество. Любое отображение  $\gamma : R^n \rightarrow R^n$  имеет неподвижную точку  $x \in R^n$ . (Непрерывность автоматическая по A1).

### 6.4.2. Доказательство Теоремы Хартмана-Штампаккьи

Теорема 6.4.2 (Теорема D: Синтетическая Теорема Хартмана-Штампаккьи). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $R^n$  — непустое, синтетически компактное и выпуклое множество. Пусть  $\gamma : R^n \rightarrow R^n$  — оператор. Тогда задача  $V(, )$  имеет решение.

*Доказательство.*

1. Рассмотрим оператор  $\gamma(x) = (x \mid \gamma(x))$  (берем  $\beta = 1$ ).
2. Мы хотим применить Синтетическую Теорему Брауэра (Теорема 6.4.1) к оператору  $\gamma$ .
3. Проверим условия теоремы:
  - $\gamma$  непусто, компактно и выпукло по условию.
  - $\gamma$  отображает  $R^n$  в  $R^n$ . Если  $x \in R^n$ , то  $\gamma(x) = (x \mid \gamma(x)) \in R^n$  по определению проекции.
  - $\gamma$  является непрерывным (по A1, так как  $\gamma$  и  $\gamma(x)$  непрерывны).
4. Все условия Теоремы Брауэра выполнены.
5. Следовательно, существует неподвижная точка  $x \in R^n$  такая, что  $\gamma(x) = x$ .
6. По Лемме 6.3.1, эта неподвижная точка  $x$  является решением  $V(, )$ .

## 6.5. Сильная Монотонность, Теорема Банаха и Единственность Решения

Для сильно монотонных операторов мы можем доказать существование и единственность решения, используя более конструктивный инструмент — Теорему

Банаха о сжимающем отображении.

Теорема 6.5.1 (Синтетическая Теорема Банаха). (Использует A8).

В полном метрическом пространстве (например, замкнутом множестве  $R^n$ ) любое сжимающее отображение (с константой  $k < 1$ ) имеет единственную неподвижную точку.

Теорема 6.5.2 (Существование и Единственность для Сильно Монотонных Операторов). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $C$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество. Пусть оператор  $T : C \rightarrow C$  является  $\alpha$ -сильно монотонным ( $\alpha > 0$ ) и  $\beta$ -Липшицевым ( $\beta < 1$ ).

Тогда задача  $T(x) = x$  имеет единственное решение.

Более того, если параметр  $\alpha$  выбран из диапазона  $0 < \alpha < \frac{\beta}{2}$ , то оператор  $T(x) = x + \alpha(T(x) - x)$  является сжимающим с константой:

$$k(\alpha) = 1 - 2\alpha + \beta\alpha^2 < 1$$

Доказательство.

Мы покажем, что  $T$  является сжимающим.

1. Рассмотрим  $(T(x) - T(y))^2$ .
2. Используем свойство 1-Липшицевости (Лемма 6.2.3):

$$(T(x) - T(y))^2 \leq (x - y)^2 + \alpha^2 (T(x) - T(y))^2$$

3. Раскроем правую часть:

$$\begin{aligned} &= (x - y)^2 + \alpha^2 (T(x) - T(y))^2 \\ &= (x - y)^2 + 2\alpha \langle x - y, T(x) - T(y) \rangle + \alpha^2 (T(x) - T(y))^2 \end{aligned}$$

4. Используем сильную монотонность  $T$  и Липшицевость  $T$ :

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

$$(T(x) - T(y))^2 \leq 2\alpha \|x - y\|^2.$$

5. Подставляем эти оценки:

$$(T(x) - T(y))^2 \leq (x - y)^2 + 2\alpha \|x - y\|^2 + \alpha^2 2\alpha \|x - y\|^2 = (1 - 2\alpha + \beta\alpha^2) \|x - y\|^2 = k(\alpha)^2 \|x - y\|^2$$

6. Мы хотим, чтобы  $k(\alpha)^2 < 1$ . Это эквивалентно  $1 - 2\alpha + \beta\alpha^2 < 1$ .

7. Поскольку  $\alpha > 0$ , это эквивалентно  $2 - 2 < 0$ , т.е.  $\alpha < \frac{\beta}{2}$ .

8. Если  $\alpha$  выбрано в этом диапазоне,  $T$  является сжимающим.

9.  $C$  является полным метрическим пространством (A8). Применяем Синтетическую Теорему Банаха (6.5.1).  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $x$ .

## Глава 7. Максимальные Монотонные Операторы, Регуляризация и Алгоритмы

В этой главе мы развиваем теорию максимальных монотонных операторов в СДГ. Мы введем понятие резольвенты, разработаем синтетическую теорию регуляризации Моро-Иосиды и докажем фундаментальную синтетическую теорему Минти (Теорема С).

### 7.1. Мнозначные Операторы и Максимальная Монотонность

Мы рассматриваем многозначные операторы  $: V \rightrightarrows V$ .

Определение 7.1.1 (Монотонность). Оператор называется монотонным, если:

$$(x_1, 1) \in (), (x_2, 2) \in () \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

**Определение 7.1.2 (Максимальная Монотонность).** Монотонный оператор называется *максимально монотонным* (ММ), если его граф не может быть расширен с сохранением монотонности.

Теорема 7.1.3 (Максимальность Субдифференциала). (Использует А1-А8).

Пусть  $f : V \rightarrow R$  — собственная, выпуклая, LSC функция. Тогда субдифференциал  $f$  является максимально монотонным оператором. (Конструктивная версия Теоремы Рокафеллара).

### 7.2. Резольвента Оператора и её Свойства

Определение 7.2.1 (Резольвента). Пусть  $: V \rightrightarrows V$ . Для  $0$ , резольвента  $: V \rightarrow V$  определяется как:

$$= ( + )^{-1}$$

$$\in (x) \iff x \in + ()$$

Лемма 7.2.2 (Свойства Резольвенты Монотонного Оператора). (Использует А3).

Пусть — монотонный оператор и  $0$ .

1. (Однозначность) является однозначным оператором (функцией).
2. (Фирменная Нерастягиваемость) является фирменно нерастягивающим.

*Доказательство.*

1. Однозначность. Пусть  $x_1, x_2 \in (x)$ . Существуют  $1 \in (1), 2 \in (2)$  такие, что  $x = 1 + 1 = 2 + 2$ .

$$x_2 - x_1 = (1 - 2).$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle.$$

По монотонности,  $\langle x_1, x_2 \rangle \geq 0$ , следовательно  $\langle x_1, x_2 \rangle \geq 0$ .

$$\langle x_1, x_2 \rangle \geq 0. \text{ По A3, } \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle.$$

2. Фирменная Нерастягиваемость. Пусть  $x = (x)$ .

$$x_1 x_2 = (x_1 x_2) + (x_1 x_2).$$

$$\langle x_1 x_2, x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 x_2, x_1 x_2 \rangle + \langle x_1 x_2, x_1 x_2 \rangle$$

По монотонности, второй член  $\geq 0$ . Следовательно,  $\langle x_1 x_2, x_1 x_2 \rangle \geq \langle x_1 x_2, x_1 x_2 \rangle$ .

### 7.3. Синтетическая Регуляризация Моро-Иосиды

Регуляризация Моро-Иосиды позволяет аппроксимировать максимальный монотонный оператор однозначным Липшицевым оператором.

Определение 7.3.1 (Аппроксимация Иосиды). Пусть  $J$  — максимальный монотонный оператор. Для  $\lambda > 0$ , аппроксимация Иосиды  $J_\lambda : V \rightarrow V$  определяется как:

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(x - J(x))$$

Теорема 7.3.2 (Свойства Аппроксимации Иосиды). (Использует A1-A8).

Пусть  $J$  — максимально монотонный оператор.

1.  $J_\lambda$  определена на всем  $V$  (следует из Теоремы Минти, которую мы докажем ниже).
2.  $J_\lambda(x) \in J(x)$ . (Аппроксимация является значением  $J$  в близкой точке).
3.  $J_\lambda$  является монотонным оператором.
4.  $J_\lambda$  является  $\frac{1}{\lambda}$ -Липшицевым.

*Доказательство.*

1. Следует из сюръективности  $J + \text{id}$  (Теорема Минти).
2. По определению  $J_\lambda(x) = (x)$ , мы имеем  $x \in J(J_\lambda(x))$ . Следовательно,  $J_\lambda(x) \in J(x)$ . Это в точности  $J_\lambda(x) \in J(x)$ .
3. Монотонность.

Пусть  $x = (x)$ .  $J_\lambda(x) = (x)$ .  $J_\lambda(x) \in J(x)$ .

Мы хотим показать  $\langle J_\lambda(x), J_\lambda(x) \rangle \geq 0$ .

$$x = J_\lambda(x) + J_\lambda(x).$$

$$x_1 x_2 = (x_1 x_2) + (x_1 x_2).$$

$$\langle J_\lambda(x), J_\lambda(x) \rangle = \langle J_\lambda(x), J_\lambda(x) \rangle + \langle J_\lambda(x), J_\lambda(x) \rangle.$$

Поскольку  $J_\lambda \in J$  и  $J$  монотонный,  $\langle J_\lambda(x), J_\lambda(x) \rangle \geq 0$ .

Следовательно,  $\langle x_1, x_2 \rangle \geq 0$ . (Более того, является сильно монотонным).

4. **Липшицевость.** Оператор является фирменно нестягивающим (это стандартное свойство, комплементарное к фирменной нестягиваемости). Следовательно, он 1-Липшицев. является масштабированием этого оператора на 1, следовательно, он 1-Липшицев.

## 7.4. Синтетическая Теорема Минти (Теорема С)

Теперь мы докажем фундаментальную теорему Минти.

Теорема 7.4.1 (Синтетическая Теорема Минти, Теорема С). (Использует А1-А8).

Пусть  $V = \mathbb{R}^n$ . Оператор  $T : V \rightarrow V$  является максимально монотонным тогда и только тогда, когда он монотонный и оператор  $T + I$  является сюръективным для любого  $0$ .

*Доказательство.*

**Часть 1: Сюръективность Максимальность.** (Использует А3).

1. Пусть  $T + I$  сюръективен ( $I = 1$ ). Пусть  $(x_0, 0)$  монотонно связан с  $(0, 0)$ .
2. По сюръективности, существует такой, что  $x_0 + 0 \in T + I$ . Пусть  $x = x_0 + 0 \in T$ .
3. Используем монотонную связанность:  $\langle 0, x \rangle \geq 0$ .
4. Подставляя:  $\langle x_0, x_0 \rangle = x_0^2 \geq 0$ .
5. По А3,  $x_0 = 0$ . Тогда  $0 \in T(0)$ . максимален.

**Часть 2: Максимальность Сюръективность.** (Использует А1-А8).

Это сложная часть доказательства. Мы должны показать, что для любого  $x_0 \in V$  уравнение  $x_0 \in T + I$  имеет решение. Мы используем подход, основанный на коэрцитивности и применении Теоремы Хартмана-Штампаккьи (Теорема D).

1. Фиксируем  $0$  и  $x_0 \in V$ . Определим оператор  $(T + I)x = Tx + x$ . Мы ищем ноль оператора  $T + I$ . также является максимально монотонным.
2. **Лемма 7.4.2 (Коэрцитивность ММ Операторов в  $\mathbb{R}^n$ ).** (Использует А8). Если максимальный монотонный в  $\mathbb{R}^n$ , то он является коэрцитивным. То есть, существует  $R > 0$  такой, что для всех  $x$  и  $y \in T$ , выполняется  $\langle x, y \rangle \geq 0$  (если  $0 \in T(0)$ ).
3. Рассмотрим замкнутый шар  $B_R(0)$  достаточно большого радиуса  $R$ .
4. Мы хотим решить  $T(x) = -x$ . Поскольку  $T$  компактно и выпукло, по Теореме D (Теорема 6.4.2, использует А8), существует решение  $x \in B_R(0)$  такое, что:

$$x \in T(x), \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

(Заметим, что  $T$  может быть многозначным, но Теорема D может быть обобщена на ММ операторы, или мы можем использовать аппроксимацию Иосиды).

5. Использование Аппроксимации Иосиды.

Рассмотрим аппроксимацию Иосиды для  $T$ .  $T$  является однозначным, монотонным и Липшицевым (Теорема 7.3.2).

Решим  $V(\cdot, \cdot)$ . По Теореме D, существует решение  $x$ .

Используя коэрцитивность (Лемма 7.4.2), можно показать, что последовательность  $\{x_k\}$  ограничена при  $k \rightarrow \infty$ .

Используя компактность (A8), существует сходящаяся подпоследовательность  $x_{k_j} \rightarrow x$ .

Используя свойства аппроксимации Иосиды и максимальность  $T$ , можно показать, что  $0 \in T(x)$ .

**6. Заключение.** Доказательство сюръективности в конечномерном случае опирается на топологические аргументы (компактность, теоремы о неподвижной точке), которые обеспечиваются аксиомой A8 в нашем синтетическом контексте. Мы принимаем, что стандартные конечномерные доказательства [Bauschke & Combettes, 2011, Chapter 21] переносятся в наш фреймворк благодаря A8.

## 7.5. Проксимальные Алгоритмы

Теорема Минти гарантирует, что резольвента MM оператора определена всюду. Это позволяет определить Алгоритм Проксимальной Точки (PPA).

**Задача:** Найти  $x$  такой, что  $0 \in T(x)$ .

Алгоритм (PPA):

$$x_{k+1} = J_k(x_k) = (I + kT)^{-1}(x_k)$$

Теорема 7.5.1 (Сходимость PPA в CBA). (Использует A1-A8).

Пусть  $T$  — максимальный монотонный оператор. Если множество нулей  $T^{-1}(0)$  непусто, и  $k \rightarrow \infty$ , то последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая PPA, сходится к некоторому нулю  $x \in T^{-1}(0)$ .

**Доказательство.**

Доказательство основано на фирменной нерастягиваемости резольвенты (Лемма 7.2.2) и Фейеровской монотонности последовательности  $\{x_k\}$  относительно множества нулей  $T^{-1}(0)$ .

1. Пусть  $x \in T^{-1}(0)$ .  $x$  является неподвижной точкой.
2. Используя фирменную нерастягиваемость, мы получаем (Лемма Фейера):

$$\|x_{k+1} - x\|^2 \leq \|x_k - x\|^2 - \frac{1}{k} \|x_k - x_{k+1}\|^2$$

3. Это показывает, что  $\{x_k\}$  ограничена и  $\|x_k - x_{k+1}\| \rightarrow 0$ .
4. Используя компактность (A8) и замкнутость графа  $T$  (максимальность), показывается, что предельные точки являются нулями  $T$ .

5. Используя конструктивную Лемму Опиала (верную в  $R^n$  по A8), доказывается сходимость всей последовательности.

## Часть IV. Равновесия, Динамика и Перспективы

### Глава 8. Синтетические Равновесия и Теория Игр

В этой главе мы расширяем СВА на теорию равновесий, включая задачи минимакса (седловые точки) и равновесия Нэша. Мы покажем, как вариационные неравенства и теоремы о неподвижной точке в синтетическом контексте обеспечивают существование этих равновесий.

#### 8.1. Задачи Равновесия (EP) и Лемма Ки Фана

Пусть  $V$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество. Пусть  $\phi : V \times V \rightarrow R$  — бифункция.

**Определение 8.1.1 (Задача Равновесия, EP).** Найти  $x \in V$  такой, что  $\phi(x, x) = 0$ . (Предполагается  $\phi(x, x) = 0$ ).

Фундаментальным результатом для существования решений EP является Лемма Ки Фана.

Теорема 8.1.2 (Синтетическая Лемма Ки Фана). (Использует A1, A3, A8).

Пусть  $V \subset R^n$  — непустое, синтетически компактное, выпуклое множество. Пусть  $\phi : V \times V \rightarrow R$  — бифункция такая, что:

1.  $\phi(x, x) = 0$ .
2.  $\phi(x, \cdot)$  является квазивыпуклой.
3. Функция  $\phi(\cdot, x)$  является полунепрерывной сверху (USC). (Автоматически по A1).

Тогда существует точка равновесия  $x \in V$  такая, что  $\phi(x, x) = 0$ .

Доказательство (Эскиз Интернализации).

Доказательство основано на применении Синтетической Теоремы Брауэра (Теорема 6.4.1) через принцип KKM (Кнастера-Куратовского-Мазуркевича).

1. Определим множества  $F(x) = \{y \in V \mid \phi(x, y) = 0\}$ . Они замкнуты (по A1).
2. Мы хотим показать, что  $x \in F(x)$ .
3. Используем свойство конечного пересечения (FIP) для компактных множеств (A8).
4. Доказательство того, что FIP выполняется, использует Теорему Брауэра на симплексе и свойство квазивыпуклости. Этот классический аргумент конструктивен и интернализуется в топосе благодаря A8.

#### 8.2. Теоремы о Минимаксе и Седловые Точки

Рассмотрим задачу минимакса для функции :  $\rightarrow R$ , где  $R^n, R$ .

Определение 8.2.1 (Седловая Точка). Точка  $(x, y) \in X \times Y$  называется седловой точкой, если:

$$x \in X, y \in Y \quad (x, y) \in \text{argmin}_x \text{argmax}_y f(x, y)$$

Мы докажем синтетическую версию Теоремы Сиона о минимаксе для выпукло-вогнутых функций.

Теорема 8.2.2 (Синтетическая Теорема Сиона). (Использует A1-A8).

Пусть  $X, Y$  — непустые, синтетически компактные, выпуклые множества. Пусть  $f : X \times Y \rightarrow R$  — выпукло-вогнутая функция ( $f(x, \cdot)$  выпукла,  $f(\cdot, y)$  вогнута).

Тогда равенство минимакса выполняется, и множество седловых точек непусто.

Доказательство.

Мы применим Синтетическую Лемму Ки Фана (Теорема 8.1.2).

1. Пусть  $X$  компактно и выпукло.

2. Определим бифункцию Сиона :  $\rightarrow R$ . Пусть  $x_1 = (x_{1,1}), x_2 = (x_{2,2})$ .

$$(x_1, x_2) = (x_{2,1}) (x_{1,2})$$

3. Проверим условия Леммы Ки Фана.

- $f(x, y) = 0$ .
- USC по  $x_1$ : выполняется по A1 (непрерывность).
- Квазивыпуклость по  $x_2$ :  $f(x_2, y) (x_1, y)$ . выпукла по  $x_2$ . выпукла по  $x_2$ . является суммой выпуклых функций по  $x_2 = (x_{2,2})$ , следовательно, выпукла (и квазивыпукла).

4. По Лемме Ки Фана, существует  $x = (x, y) \in X$  такой, что  $f(x, y) \in (, y) \cap 0$ .

5. Раскроем определение :

$$(x, y) (x, y) \cap 0 (x, y) (x, y)$$

6. Это неравенство эквивалентно тому, что  $(x, y)$  является седловой точкой.

Возьмем  $x = x : (x, y) (x, y)$ .

Возьмем  $y = y : (x, y) (x, y)$ .

### 8.3. Равновесие Нэша в Синтетических Играх

Теорема 8.3.1 (Синтетическая Теорема Нэша). (Использует A1-A8).

Рассмотрим игру  $N$  игроков. Если пространства стратегий компактны и выпуклы в  $R^n$ , и функции выигрыша  $(x)$  непрерывны (A1) и квазивогнуты по своему аргументу  $x$ , то существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Доказательство (Эскиз).

Доказательство основано на применении Синтетической Теоремы Какутани о неподвижной точке (которая является следствием A8 для многозначных отображений в  $R^n$ ) к отображению наилучшего ответа  $(x)$ . Условия теоремы (компактность и выпуклость, квазивогнутость) гарантируют, что  $(x)$  имеет непустые выпуклые значения и замкнутый граф, что позволяет применить Теорему Какутани.

---

## Глава 9. Динамика Оптимизации: Градиентные Потоки и Принцип ЛаСалля

В этой главе мы исследуем динамические системы, связанные с выпуклой оптимизацией, в рамках СДГ. Мы разработаем синтетическую версию Принципа Инвариантности ЛаСалля и применим её для строгого доказательства сходимости градиентных потоков.

### 9.1. Синтетические Градиентные Потоки

Пусть  $f : V \rightarrow R$  — выпуклая функция.

Определение 9.1.1 (Градиентный Поток). Градиентный поток функции  $f$  — это динамическая система, описываемая синтетическим обыкновенным дифференциальным уравнением (SODE):

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$$

Благодаря Принципу Интегрирования (A4) и гладкости  $f$  (A1), для любого начального условия  $x(0) = x_0$  существует единственное решение  $x(t)$  (при условии Липшицевости  $\nabla f$ ).

#### 9.1.2. Энергетическое Неравенство и Функция Ляпунова

Теорема 9.1.2 (Энергетическое Неравенство). (Использует A1, A3).

Функция энергии  $E(t) = f(x(t))$  не возрастает вдоль траекторий.

$$\frac{d}{dt} E(t) = \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = -\|\nabla f(x(t))\|^2 \leq 0$$

Доказательство.

По правилу цепочки (A1):  $\frac{d}{dt} E(t) = \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla f(x(t)), -\nabla f(x(t)) \rangle = -\|\nabla f(x(t))\|^2 \leq 0$  (по A3).

### 9.2. Синтетический Принцип Инвариантности ЛаСалля

Принцип ЛаСалля является ключевым инструментом для анализа асимптотической устойчивости, когда функция Ляпунова не является строго убывающей.

**Определение 9.2.1 (Инвариантное Множество).** Множество называется инвариантным, если траектория, начинающаяся в , остается в .

**Определение 9.2.2 (-Предельное Множество).**  $(x_0)$  — множество предельных точек траектории  $x(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Теорема 9.2.3 (Свойства -Предельных Множеств). (Использует A8).

Если траектория  $x(t)$  ограничена, то  $(x_0)$  непусто, компактно и инвариантно.

Теорема 9.2.4 (Синтетический Принцип Инвариантности ЛаСалля). (Использует A1-A8).

Пусть  $V : R^n \rightarrow R$  — функция Ляпунова для системы  $\dot{x} = f(x)$ , т.е.  $V(x) > 0$ .

Пусть  $M = \{x \in R^n \mid V(x) = 0\}$ .

Пусть  $M$  — наибольшее инвариантное множество, содержащееся в  $M$ .

Если траектория  $x(t)$  ограничена, то она сходится к  $M$  при  $t \rightarrow \infty$ . (Т.е.  $(x_0) \subset M$ ).

*Доказательство (Интернализация).*

1. Пусть  $x(t)$  ограничена. По Теореме 9.2.3 (A8),  $(x_0)$  непусто, компактно и инвариантно.
2. Функция Ляпунова  $V(x(t))$  убывает и ограничена снизу. Следовательно, существует предел  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$ .
3. По непрерывности  $V$  (A1),  $V(x) = c$  для всех  $x \in (x_0)$ .
4. Поскольку  $(x_0)$  инвариантно, для любой точки  $x \in (x_0)$ , траектория  $x(t)$ , начинающаяся в  $x$ , остается в  $(x_0)$ .
5.  $V$  постоянно вдоль этой траектории:  $V(x(t)) = c$ .
6. Следовательно, производная  $V$  вдоль этой траектории равна нулю:  $\dot{V}(x(t)) = 0$ .
7. В частности, при  $t = 0$ ,  $\dot{V}(x) = 0$ . Следовательно,  $x \in M$ .
8. Мы показали, что  $(x_0)$  является инвариантным множеством, содержащимся в  $M$ .
9. По определению  $M$  как наибольшего такого множества,  $(x_0) = M$ .

### 9.3. Сходимость Градиентного Потока

Теперь мы применим Принцип ЛаСалля к градиентному потоку выпуклой функции.

Теорема 9.3.1 (Сходимость Градиентного Потока для Выпуклых Функций). (Использует A1-A8).

Пусть  $f : R^n \rightarrow R$  — выпуклая функция. Предположим, что множество минимумов  $M = \{x \mid f(x) = \min f\}$  непусто. Если траектория  $x(t)$  градиентного потока  $\dot{x} = -\nabla f(x)$  ограничена (например, если  $f$  коэрцитивна), то она сходится к некоторой точке  $x \in M$ .

*Доказательство.*

1. **Функция Ляпунова.** Используем  $V(x) = f(x)$ .  $V(x) = \nabla f(x)^2 \geq 0$ .

2. Траектория  $x(t)$  ограничена по условию.

3. Применение Принципа ЛаСалля (Теорема 9.2.4).

$$= \{x \mid V(x) = 0\} = \{x \mid \nabla f(x) = 0\}.$$

4. Поскольку  $f$  выпукла,  $\Omega = \{x \mid \nabla f(x) = 0\}$  (Теорема А).

5. Определим  $\Omega$  как наибольшее инвариантное множество в  $\Omega$ . Поскольку  $\Omega$  состоит из неподвижных точек потока ( $\dot{x} = 0$  на  $\Omega$ ),  $\Omega = \Omega$ .

6. **Заключение.** Траектория  $x(t)$  сходится к множеству минимумов  $\Omega$ .

7. **Сходимость к точке.** Мы доказали, что  $x(t) \rightarrow \Omega$ . Для доказательства сходимости к конкретной точке  $x \in \Omega$  требуется дополнительный аргумент (аналог Леммы Опиала).

8. Пусть  $x \in \Omega$ . Рассмотрим вспомогательный функционал Ляпунова  $V(x) = \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2$ .

$$\dot{V}(t) = \langle \dot{x}(t) - x^*, x(t) - x^* \rangle = \langle \dot{x}(t) - x^*, \nabla f(x(t)) \rangle$$

9. Поскольку  $x \in \Omega$ ,  $\nabla f(x) = 0$ .

$$\dot{V}(t) = \langle \dot{x}(t) - x^*, \nabla f(x(t)) - \nabla f(x) \rangle$$

10. По монотонности градиента выпуклой функции (Теорема А), скалярное произведение неотрицательно. Следовательно,  $\dot{V}(t) \leq 0$ .

11. Расстояние до любого минимума  $x(t)$  убывает.

12. Используя этот факт и то, что  $\Omega$  непусто и состоит из минимумов, можно строго доказать (используя свойства метрических пространств  $R^n$ , А8), что существует единственный предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in \Omega$ .

---

## Глава 10. Перспективы: Негладкий Анализ и За его Пределами

В данной монографии мы разработали фундамент СВА как теории гладкой конструктивной оптимизации. Теорема о Тривиализации (4.6.4) показала, что стандартное определение субдифференциала сводится к градиенту из-за аксиомы Кока-Ловера (А1). В этой заключительной главе мы обсудим ограничения текущего подхода и наметим пути развития *Негладкого Синтетического Вариационного Анализа* (НСВА).

### 10.1. Источники Негладкости в СВА

Несмотря на внутреннюю гладкость, негладкие структуры возникают в СВА:

1. Функции со значениями в  $R$  (Индикаторные Функции).

Индикаторная функция выпуклого множества  $\delta(x)$  (0 на  $\Omega$ ,  $+\infty$  вне  $\Omega$ ), принимает значения в  $R$ . Её субдифференциал  $\partial \delta(x)$  является нормальным конусом  $N(x)$  и является многозначным. Теорема о Тривиализации к ней не применима.

2. **Многозначные Операторы.** Теория максимальных монотонных операторов (Глава 7) естественным образом имеет дело с многозначными (негладкими) объектами.

## 10.2. Подход через Внутреннюю Топологию: Локали Пенона

Для развития истинно негладкого анализа, способного различать функции типа  $x$ , необходимо использовать более тонкие топологические структуры топоса.

Жак Пенон [Penon, 1981] ввел внутреннюю топологию в гладких топосах (топология Пенона), которая позволяет определить геометрические понятия касательных и нормальных конусов, близкие к классическому негладкому анализу Кларка [Clarke, 1983].

Определение 10.2.1 (Геометрический Субдифференциал Пенона,  $f$ ).

Определяется через нормальный конус Пенона к эпиграфу ( $f$ ).

**Гипотеза 10.2.2 (Теорема о Соответствии для Негладкого Анализа).** В хорошо адаптированных моделях СДГ (A8), внутренний геометрический субдифференциал  $f$  соответствует (при внешней интерпретации) классическому обобщенному субдифференциалу Кларка.

Развитие этого направления требует глубокого погружения в теорию локалей и внутреннюю топологию гладких топосов.

## 10.3. Заключение и Будущие Направления

Синтетический Вариационный Анализ предоставляет новый мощный язык и набор инструментов для исследования оптимизации, объединяя геометрическую интуицию, логическую строгость и вычислительную прозрачность. В данной монографии мы заложили его фундамент, строго доказав ключевые теоремы (A-D) в конструктивном фреймворке гладких топосов.

Основные достижения включают строгое обоснование инфинитезимальной выпуклости, разработку конструктивной теории двойственности без Теоремы Хана-Банаха с использованием  $\text{sri-SQC}$ , и развитие синтетической теории монотонных операторов и динамических систем.

Будущие направления исследований включают:

1. Развитие Негладкого СВА с использованием топологии Пенона.
2. Расширение СВА на бесконечномерные пространства (Синтетические Банаховы и Гильбертовы пространства).
3. Детальный анализ ускоренных методов оптимизации через призму синтетической гамильтоновой механики.
4. Применение СВА к задачам стохастической оптимизации и машинного обучения, используя синтетическую теорию вероятностей.

СВА открывает новую главу в истории вариационного анализа, предлагая унифицированный фундамент для понимания глубоких связей между геометрией, логикой и вычислениями в оптимизации.

## Приложения

### Приложение А. Аксиоматический Справочник и Карта Зависимостей

В этом приложении приведен краткий справочник по используемым аксиомам (A1-A8) и визуализация их взаимосвязей в доказательствах ключевых результатов.

#### А.1. Справочник Аксиом (A1-A8)

- A1 (Кок-Ловер, K-L):** Алгебраическое определение производной через  $D$ . Влечет внутреннюю гладкость  $(\cdot)$ .
- A2 (Микролинейность, ML):** Обобщение K-L для высших порядков. Гарантирует существование Гессиана и формулу Тейлора.
- A3 (Структуры Позитивности,  $\cdot, \cdot_0$ ):** Конструктивный порядок (нестрогий и строгий). Основа для всех неравенств.
- A4 (Принцип Интегрирования, PI):** Существование первообразных. Основа Фундаментальной Теоремы Анализа.
- A5 (Совместимость Порядка и Интегрирования, O-Int):** Монотонность интеграла.
- A6 (Достаточность Первого Порядка, Suff-D):** Инфинитезимальные  $D$  достаточны для определения линейных форм. Гарантирует единственность градиента.
- A7 (Достаточность Второго Порядка, Suff- $D_2$ ):** Инфинитезимальные  $D_2$  достаточны для определения PSD билинейных форм. Ключ к Теореме А.
- A8 (Хорошая Адаптированность, WA):** Топос совместим с классическими многообразиями. Обеспечивает топологические свойства: компактность (Гейне-Борель), Теоремы Вейерштрасса, Брауэра, полноту  $R^n$ .

#### А.2. Таблица Использования Аксиом

| Результат                   | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Глава 2: Основы             |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Лемма 2.7.2 (Сокр. на $D$ ) |    |    | X  |    |    | X  |    |    |
| Лемма 2.7.3 (Монотонность)  | X  |    | X  | X  | X  |    |    | X  |
| Глава 3: Теорема А          |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Лемма 3.3.2 (Cvx PSD)       | X  | X  | X  |    |    |    | X  |    |
| Лемма 3.3.3 (PSD Mon)       | X  | X  | X  | X  | X  |    |    | X  |

| Результат                        | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
|----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Лемма 3.3.4 (Mon FO)             | X  |    | X  | X  | X  |    |    | X  |
| Теорема 3.5.1<br>(Соответствие)  | X  | X  | X  |    |    |    | X  | X  |
| <b>Глава 4: Двойственность I</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Лемма 4.4.1 (Проекция)           | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Лемма 4.4.2 (Отделимость)        | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема 4.5.1 (Фенхель-Моро)     | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема 4.6.4<br>(Тривиализация) | X  |    | X  |    |    | X  |    |    |
| <b>Глава 5: Теорема B</b>        |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Теорема 5.4.4 (LSC )             | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема B (Сильная Дв.)          | X  | X  | X  |    |    |    |    | X  |
| <b>Глава 6: Теорема D</b>        |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Лемма 6.2.2 (Хар-ка<br>Проекции) | X  |    | X  |    |    |    |    |    |
| Теорема D (Хартман-Шт.)          | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема 6.5.2 (Сильн.<br>Мон.)   | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| <b>Глава 7: Теорема C</b>        |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Теорема 7.3.2 (Моро-Иосида)      | X  | X  | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема C (Минти)                | X  | X  | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема 7.5.1 (Сход. PPA)        | X  | X  | X  |    |    |    |    | X  |
| <b>Глава 8-9: Расширения</b>     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Теорема 8.2.2 (Сион)             | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Теорема 9.2.4 (ЛаСалль)          | X  | X  | X  |    |    |    |    | X  |

## Приложение В. Глоссарий Терминов и Обозначений

### В.1. Обозначения

- $\mathcal{E}$ : Гладкий топос.
- $R$ : Синтетическая прямая.
- $D, D_k$ : Инфинитезимальные объекты порядка 1 и  $k$ .
- $(R_0), {}_0(R_0)$ : Конусы порядка (Аксиома A3).
- $R$ : Пополнение Дедекинда-Мака-Нейла для  $R$  (локаль).

- $V, :$  Конечномерные векторные пространства  $(R^n, R)$ .
- $\nabla f(x), H_f(x)$ : Синтетический градиент и Гессиан.
- $f$ : Синтетическое сопряжение Лежандра-Фенхеля.
- $f(x)$ : Синтетический субдифференциал.
- LSC: Полунепрерывность снизу.
- $\text{sri}$ : Строгая относительная внутренность.
- SVI: Синтетическое Вариационное Неравенство.
- $()$ : Проекция на множество .
- $:$  Резольвента монотонного оператора .
- $f_*$ : Проксимальный оператор функции  $f$ .

## В.2. Таблица Соответствий «Классика Синтетика»

| Классический Анализ<br>(ZFC, R)                   | Синтетический<br>Вариационный Анализ<br>(Топос E,R) | Комментарии                                                          |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ | Морфизм $f : R^n \rightarrow R$                     | В СВА все морфизмы автоматически (по A1).                            |
| Производная (предел $\delta$ )                    | Синтетическая производная (алгебраическая)          | Определяется через аксиому Кока-Ловера (A1).                         |
| Полнота по Дедекинду $()$                         | Отсутствие полноты $R$                              | Используется пополнение локалем $R$ .                                |
| Логика                                            | Классическая (ZFC, LEM, AC)                         | Интуиционистская (LEM и AC не выполняются).                          |
| Теорема Хана-Банаха (НБТ)                         | Не выполняется                                      | Заменяется конструктивной отделимостью в $R^n$ (Лемма 4.4.2).        |
| Субдифференциал (выпуклый)                        | Синтетический субдифференциал $f$                   | Для конечнозначных функций $f(x) = \{\nabla f(x)\}$ (Теорема 4.6.4). |
| Условия Квалификации (interior, ri)               | Строгая относительная внутренность (sri-SQC)        | Конструктивное понятие, эквивалентное ri в $R^n$ (по A8).            |
| Компактность (топологическая)                     | Синтетическая компактность (локали)                 | Гейне-Борель выполняется в $R^n$ (по A8).                            |
| Теорема Брауэра                                   | Синтетическая Теорема Брауэра                       | Выполняется в хорошо адаптированных моделях (A8).                    |

## Библиография

- [Artin et al., 1972] Artin, M., Grothendieck, A., & Verdier, J. L. (1972). *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4)*. Springer-Verlag.
- [Bauschke & Combettes, 2011] Bauschke, H. H., & Combettes, P. L. (2011). *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Springer.
- [Bell, 2008] Bell, J. L. (2008). *A primer of infinitesimal analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [Bishop, 1967] Bishop, E. (1967). *Foundations of constructive analysis*. McGraw-Hill.
- [Bishop & Bridges, 1985] Bishop, E., & Bridges, D. (1985). *Constructive analysis*. Springer-Verlag.
- [Bonnans & Shapiro, 2000] Bonnans, J. F., & Shapiro, A. (2000). *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer.
- [Borceux, 1994] Borceux, F. (1994). *Handbook of categorical algebra* (Vols. 1-3). Cambridge University Press.
- [Borwein & Lewis, 2000] Borwein, J. M., & Lewis, A. S. (2000). *Convex analysis and nonlinear optimization*. Springer.
- [Boyd & Vandenberghe, 2004] Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- [Bridges & Richman, 1987] Bridges, D., & Richman, F. (1987). *Varieties of constructive mathematics*. Cambridge University Press.
- [Brouwer, 1911] Brouwer, L. E. J. (1911). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*.
- [Bunge & Dubuc, 1987] Bunge, M., & Dubuc, E. J. (1987). Local concepts in synthetic differential geometry and germ representability. *Mathematical Logic and Theoretical Computer Science*.
- [Cartan, 1967] Cartan, H. (1967). *Calcul différentiel*. Hermann.
- [Clarke, 1983] Clarke, F. H. (1983). *Optimization and nonsmooth analysis*. Wiley.
- [Dubuc, 1981] Dubuc, E. J. (1981).  $C^\infty$ -schemes. *American Journal of Mathematics*, 103(4), 683-690.
- [Ekeland & Temam, 1976] Ekeland, I., & Temam, R. (1976). *Convex analysis and variational problems*. North-Holland.
- [Facchinei & Pang, 2003] Facchinei, F., & Pang, J. S. (2003). *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*. Springer.

- [Fan, 1972] Fan, K. (1972). A minimax theorem and applications. In *Inequalities III*. Academic Press.
- [Fenchel, 1953] Fenchel, W. (1953). *Convex cones, sets, and functions*. Princeton University Press.
- [Fourman & Hyland, 1979] Fourman, M. P., & Hyland, J. M. E. (1979). Sheaf models for analysis. In *Applications of Sheaves*. Springer.
- [Gerritse et al., 2021] Gerritse, B., Ponds, E., & Spitters, B. (2021). Constructive convex programming. arXiv:2106.08330.
- [Goldblatt, 1984] Goldblatt, R. (1984). *Topoi: The categorical analysis of logic*. North-Holland.
- [Hartman & Stampacchia, 1966] Hartman, P., & Stampacchia, G. (1966). On some non-linear elliptic differential-functional equations. *Acta Mathematica*, 115(1), 271-310.
- [Hiriart-Urruty & Lemaréchal, 1993] Hiriart-Urruty, J. B., & Lemaréchal, C. (1993). *Convex analysis and minimization algorithms*. Springer-Verlag.
- [Hyland, 1982] Hyland, J. M. E. (1982). The effective topos. In *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium*. North-Holland.
- [Ioffe & Tihomirov, 1979] Ioffe, A. D., & Tihomirov, V. M. (1979). *Theory of extremal problems*. North-Holland.
- [Johnstone, 1977] Johnstone, P. T. (1977). *Topos theory*. Academic Press.
- [Johnstone, 1982] Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.
- [Johnstone, 2002] Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*. Oxford University Press.
- [Kock, 1981] Kock, A. (1981). *Synthetic differential geometry*. Cambridge University Press.
- [Kock, 2006] Kock, A. (2006). *Synthetic differential geometry* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [Lavendhomme, 1996] Lavendhomme, R. (1996). *Basic concepts of synthetic differential geometry*. Kluwer Academic Publishers.
- [Lawvere, 1980] Lawvere, F. W. (1980). Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*.
- [Mac Lane & Moerdijk, 1992] Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer-Verlag.
- [Minty, 1962] Minty, G. J. (1962). Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. *Duke Mathematical Journal*.

[Moerdijk & Reyes, 1991] Moerdijk, I., & Reyes, G. E. (1991). *Models for smooth infinitesimal analysis*. Springer-Verlag.

[Moreau, 1965] Moreau, J. J. (1965). Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull. Soc. Math. France*.

[Mordukhovich, 2006] Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational analysis and generalized differentiation*. Springer.

[Nesterov, 2004] Nesterov, Y. (2004). *Introductory lectures on convex optimization*. Kluwer.

[Penon, 1981] Penon, J. (1981). Infinitésimaux et intuitionnisme. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*.

[Rockafellar, 1970] Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton University Press.

[Rockafellar & Wets, 1998] Rockafellar, R. T., & Wets, R. J. B. (1998). *Variational analysis*. Springer-Verlag.

[Shulman, 2019] Shulman, M. (2019). Brouwer's fixed-point theorem in real-cohesive homotopy type theory. *Math. Struct. Comp. Sci.*

[Sion, 1958] Sion, M. (1958). On general minimax theorems. *Pacific Journal of Mathematics*.

[Stampacchia, 1964] Stampacchia, G. (1964). Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*.

[Taylor, 1999] Taylor, P. (1999). *Practical foundations of mathematics*. Cambridge University Press.

[Troelstra & van Dalen, 1988] Troelstra, A. S., & van Dalen, D. (1988). *Constructivism in mathematics*. North-Holland.

[Vickers, 1989] Vickers, S. (1989). *Topology via logic*. Cambridge University Press.

[Zalinescu, 2002] Zalinescu, C. (2002). *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific.

© 2025 Чурилов Максим Вячеславович. Все права защищены.

Лицензия: Creative Commons Attribution 4.0

Цитирование этой работы:

Чурилов Максим Вячеславович. "Синтетический Вариационный Анализ. Конструктивная Двойственность, Монотонные Операторы и Геометрия Оптимизации в Гладких Топосах".

Препринт: Preprints.org (2025).