

Электрическое и магнитное взаимодействия как проявления геометрии 5-мерного пространства и динамики плотности энергии вакуума.

Вадим Хоруженко

5 ноября 2025 г.

Аннотация

Статья предлагает радикальное упрощение основ физики через введение концепции протоматерии — мнимой плотности пространства, представляющей собой дополнительное негеометрическое измерение. Показано, что данная концепция позволяет единым образом описать феномены, ранее требовавшие раздельных сущностей: заряды оказываются сгустками плотности, электрическое поле — ее градиентом, магнитное поле — градиентом потока, а квантовые состояния — ее резонансными модами. В рамках формализма из первых принципов выводятся законы Кулона и Био-Савара, обосновывается постулат Бора и конечность собственной энергии заряда. Модель не противоречит экспериментальным данным, но пересматривает их интерпретацию, указывая на производную природу магнитного поля и существование абсолютных (гравитационно-связанных) систем отсчета. Темная материя и темная энергия отождествляются с самой тканью протоматерии, что снимает необходимость введения гипотетических частиц.

I. Введение

Электромагнитные и гравитационные силы являются одними из наиболее фундаментальных взаимодействий в физике. Эти силы управляют поведением материи и энергии в масштабах от субатомных частиц до космологических. Несмотря на обширные эмпирические данные и теоретические модели, описывающие их поведение, истинная природа и материальная сущность, из которой они возникают, остаются предметом интенсивных исследований.

С физической точки зрения мы понимаем, как эти силы действуют, и можем с высокой точностью предсказывать их эффекты. Однако остаются фундаментальные вопросы: что именно представляют собой эти силы? Как они взаимосвязаны? И, что наиболее важно, какова природа протоматерии — фундаментальной субстанции, из которой эти силы возникают? Эти вопросы лежат не только в области физических принципов, но и затрагивают философские аспекты природы реальности.

В данной статье предлагается теоретическая модель, вводящая дополнительную пространственную размерность, называемую «плотностью пространства». Мы предполагаем, что эта размерность играет ключевую роль в формировании гравитационных и электромагнитных полей. Наша модель указывает на то, что традиционного трёхмерного пространства в сочетании со временем недостаточно для полного объяснения происхождения этих сил. Вместо этого, само пространство может обладать внутренними свойствами, способствующими формированию этих полей. Расширяя наше понимание пространства за счёт включения дополнительного измерения, мы исследуем возможность новых интерпретаций гравитационных и электромагнитных взаимодействий. В

процессе исследования мы придём к выводу, что поставленная задача в рамках сформулированных постулатов не имеет решения в трёхмерном пространстве, поскольку обнаруживается нарушение постулата о сохранении количества плотности пространства. В результате мы будем вынуждены перейти к рассмотрению 5D-пространства, сформированного из двух ортогональных 3D-подпространств с одной общей осью.

II. Гипотеза

Мы предполагаем, что электромагнитные и гравитационные поля являются проявлениями более фундаментального свойства пространства, которое можно интерпретировать как «плотность пространства». Это свойство определяет количественную характеристику пространства, при этом концептуально отличаясь от плотности материи. Данная величина, в отличие от плотности материи, непрерывна — так же, как непрерывны время и три пространственные координаты. Кроме того, в отличие от барионной материи, плотность пространства, если рассматривать её как материю, не вызывает искривления метрики пространства, то есть не обладает массой, инерцией, трением или вязкостью. Это некая идеализированная материя, которая в своём стремлении к максимальной энтропии может проявляться во взаимодействии, вызванном неравномерностью распределения, что мы интерпретируем как искривление самого пространства без искривления его метрики.

В этой модели «плотность пространства» представляет собой меру того, как само пространство может быть сжато или расширено независимо от его метрики. Эта плотность не аналогична плотности материи в трёхмерном пространстве, а скорее отражает фундаментальную характеристику пространства, влияющую на формирование полей.

Наша гипотеза основывается на нескольких ключевых постулатах:

- **Плотность пространства:** В пятимерном пространстве плотность $\rho(r)$ характеризует состояние пространства и может изменяться, тем самым мы можем говорить об искривлении пространства без искривления его метрики. Давайте назовём это явление *искривлением пространства первого порядка*. Подобный термин используется в теории относительности, но в рамках нашей теории он будет иметь несколько иной контекст.
- **Сферическая симметрия возмущений:** Распределение плотности пространства $\rho(r)$ при её возмущении предполагается сферически симметричным относительно центра возмущения.
- **Сохранение количества плотности пространства:** При возмущении в некоторой области пространства окружающее пространство способно изменять свою плотность таким образом, что суммарная «плотность» пространства по бесконечному объёму остаётся неизменной. Иными словами, в определённом приближении полное количество плотности пространства сохраняется.

- **Постулат о максимальной энтропии распределения плотности пространства:** Пространство стремится к состоянию с максимальной энтропией, то есть к равномерному распределению плотности. Этот принцип определяет естественную тенденцию пространства возвращаться к равномерному распределению плотности после возмущений, аналогично термодинамическим принципам, управляющим физическими системами.

Исследуя эти постулаты в рамках 5D-пространства, мы стремимся дать более глубокое понимание происхождения электромагнитных полей. Эта модель ставит под сомнение традиционное представление о независимости этих полей и, вместо этого, предполагает, что они взаимосвязаны через внутренние свойства самого пространства. В процессе исследования мы получим совершенно неожиданный результат: закон Кулона, содержащий поправку на взаимодействие элементарных зарядов на расстояниях, соизмеримых с их «классическими» физическими размерами (данное явление хорошо изучено в рамках КЭД — экранирование).

III. Методология

3.1 Распределение плотности пространства вокруг одной сжатой сферической области пространства

Мы имеем два состояния вселенной: в первом состоянии по всему пространству плотность равна ρ_0 и является некоторой константой. Во втором состоянии системы у нас есть некая область пространства, ограниченная сферой $S(R_1)$, которую мы сжимаем до $S(R'_1)$. Нам необходимо найти распределение плотности пространства внутри сферы и за её пределами, исходя из установленных нами законов, действующих в нашей гипотетической вселенной.

3.1.1 Распределение плотности после сжатия

Плотность после сжатия внутри сферы определяется как $\rho_{\text{inside}} = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_1 — добавленная плотность, определяемая из соотношения объемов до и после сжатия:

$$\rho_0 V(R_1) = \rho_{\text{inside}} V(R'_1)$$

Подставим объемы сфер:

$$\rho_0 \frac{4}{3} \pi R_1^3 = (\rho_0 + \rho_1) \frac{4}{3} \pi R_1'^3$$

Упрощаем:

$$\rho_0 R_1^3 = (\rho_0 + \rho_1) R_1'^3$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{R_1^3}{R_1'^3} - 1 \right)$$

3.1.2 Распределение плотности за пределами сферы

Мы исходим из того, что за пределами сферы количество изъятой плотности пространства должно быть равно количеству добавленного внутри неё $\rho_1 \cdot V(R'_1)$. Поэтому при интегрировании возмущения от поверхности сжатой сферы до бесконечности интеграл должен давать конечное число, то есть сходиться, а соответственно интегрируемая функция должна быть сходящейся. В трёхмерном пространстве такой функцией является $1/r^4$. Предположим, что распределение уменьшенной плотности за пределами сжатой области пространства будет удовлетворять этой зависимости от расстояний от центра возмущения. Тогда получим следующую зависимость распределения плотности пространства за пределами сжатой сферы:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{A}{r^4}$$

3.1.3 Нормировочный коэффициент A

Для выполнения закона сохранения плотности пространства, интеграл от $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ по объему от R'_1 до бесконечности должен быть равен добавленной плотности внутри сферы:

$$\rho_1 V(R'_1) = \int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV$$

Или, принимая во внимание закон сферической симметрии, в сферической системе координат интеграл упрощается до:

$$\rho_1 V(R'_1) = \int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Подставляем:

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1'^3 = 4\pi \int_{R'_1}^{\infty} \frac{A}{r^4} r^2 dr$$

Решаем интеграл:

$$4\pi A \int_{R'_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = 4\pi A \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^{\infty} = 4\pi A \left(\frac{1}{R'_1} - 0 \right) = \frac{4\pi A}{R'_1}$$

Равенство количества плотностей:

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1'^3 = \frac{4\pi A}{R'_1}$$

Найдем A :

$$A = \rho_1 \frac{R_1'^4}{3}$$

Итоговая формула для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{A}{r^4} = \frac{\rho_1 \frac{R_1'^4}{3}}{r^4}$$

Теперь умножим числитель и знаменатель на 4π :

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{4\pi\rho_1 \frac{R_1'^4}{3}}{4\pi r^4} = \frac{\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1'^4}{4\pi r^4} = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1')}{4\pi r^4}$$

Таким образом мы получили следующую формулу для распределения плотности за пределами сферы $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1')}{4\pi r^4} \quad (1)$$

Так же принимая во внимание, что количество добавленной плотности в объем сжатой сферы выражается формулой:

$$Q = (V(R_1) - V(R_1')) \cdot \rho_0$$

где $V(R_1)$ и $V(R_1')$ — это объемы сфер с радиусами R_1 и R_1' соответственно. А так же принимая во внимание формулу для ρ_1 - плотность количества добавленной плотности внутри сферы:

$$\rho_1 = \frac{Q}{V(R_1')}$$

где $V(R_1')$ — это объем сферы после сжатия.

Мы можем полученную формулу для распределения плотности пространства $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ выразить в виде выражения:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \frac{Q \cdot R_1'}{4\pi r^4} \quad (2)$$

Где Q - количество плотности добавленной в объем сферы $S(R_1')$, R_1' - радиус сжатой сферы, а r - расстояние от центра сферы до точки в пространстве в сферической системе координат.

3.1.4 Проверка сохранения количества плотности пространства

Для выполнения третьего закона, установленного в нашей системе, должно выполняться равенство:

$$\int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV = \int_{R_1'}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_1 V(R_1')$$

Подставляем выражение для $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\int_{R_1'}^{\infty} \frac{\rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1')}{4\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_1 \cdot R_1' \cdot V(R_1') \int_{R_1'}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

Интегрируем и подставляем пределы интегрирования:

$$\rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1) \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^{\infty} = \rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1) \left(\frac{1}{R'_1} - 0 \right) = \frac{\rho_1 \cdot R'_1 \cdot V(R'_1)}{R'_1}$$

Получаем:

$$\int_{R'_1}^{\infty} \Delta\rho_{\text{decrease}}(r) \cdot dV = \rho_1 V(R'_1) = \rho_1 \frac{4}{3} \pi R'^3_1$$

Таким образом мы убедились, что наше распределение плотности пространства за пределами сжатой сферы пропорциональное $1/r^4$, согласуется с нашим третьим законом сохранения плотности пространства в системе с учетом нормировочного коэффициента A .

IV. Запись выражения для полного распределения плотности пространства для одной сжатой сферы

Давайте запишем наше распределение с учетом граничных условий, используя функцию Хевисайда. Данное представление распределения плотности пространства нам понадобится для нахождения полного количества взаимодействия двух сгустков с учетом плотности пространства, добавленного в первый сгусток, а также градиента на границе перехода - сфере, ограничивающей первый сгусток. Почему это важно, вы поймете в следующем разделе моей статьи.

4.1 Представление распределения плотности пространства с использованием функции Хевисайда

Распределение плотности пространства, $\rho(r)$, для одной сферы можно выразить с использованием функции Хевисайда $H(x)$ для точного описания плотности внутри и вне сжатой сферы. Основное распределение плотности определяется как:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 + \rho_1, & \text{если } r \leq R'_1 \\ \rho_0 - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Увеличение плотности $\Delta\rho_{\text{increase}}(r)$ внутри сжатой области можно выразить как:

$$\Delta\rho_{\text{increase}}(r) = \begin{cases} \rho_1, & \text{если } r \leq R'_1 \\ 0, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Аналогично, уменьшение плотности $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$ вне сферы:

$$\Delta\rho_{\text{decrease}}(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq R'_1 \\ \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V(R'_1)}{4\pi r^4}, & \text{если } r > R'_1 \end{cases}$$

Поскольку $H(R'_1 - r) = 0$ и $H(r - R'_1) = 1$:

$$\Delta\rho(r) = 0 - \frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot V_{R1'}}{4\pi r^4}$$

Теперь подставим $V_{R1'} = \frac{4}{3}\pi(R'_1)^3$:

$$\Delta\rho(r) = -\frac{R'_1 \cdot \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi(R'_1)^3}{4\pi r^4} = -\frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4}$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для $\Delta\rho(r)$ в терминах функции Хевисайда:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \quad (3)$$

4.2 Проверка удовлетворения условия сохранения количества плотности пространства

Для проверки возьмем интеграл от $\Delta\rho(r)$. Давайте проинтегрируем $\Delta\rho(r)$ по всему объему. Напомним, что $\Delta\rho(r)$ у нас представлена как:

$$\Delta\rho(r) = \rho_1 \left[H(R'_1 - r) - \frac{R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \right]$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Разделим интеграл на две части, соответствующие $\Delta\rho_{\text{increase}}(r)$ и $\Delta\rho_{\text{decrease}}(r)$:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \left[\rho_1 H(R'_1 - r) - \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \right] \cdot 4\pi r^2 dr$$

Разделим на два отдельных интеграла:

$$\int_0^\infty \rho_1 H(R'_1 - r) \cdot 4\pi r^2 dr - \int_0^\infty \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} H(r - R'_1) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^{R'_1} \rho_1 \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_1 \int_0^{R'_1} r^2 dr = 4\pi\rho_1 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{R'_1} = 4\pi\rho_1 \cdot \frac{(R'_1)^3}{3} = \frac{4\pi\rho_1(R'_1)^3}{3}$$

Теперь рассмотрим второй интеграл:

$$\int_{R'_1}^\infty \frac{\rho_1 \cdot R_1'^4}{3r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \int_{R'_1}^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R'_1}^\infty$$

Вычисляем пределы:

$$\frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_1'} \right) = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^4}{3} \cdot \frac{1}{R_1'} = \frac{4\pi\rho_1 R_1'^3}{3}$$

Теперь сложим оба результата:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_1 (R_1')^3}{3} - \frac{4\pi\rho_1 (R_1')^3}{3} = 0$$

Таким образом, интеграл от $\Delta\rho(r)$ по всему объему равен нулю:

$$\int_0^\infty \Delta\rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 0$$

Получили предсказуемый результат, однако это нужно было выполнить для проверки.

V. Количество возмущения (количество взаимодействия) двух сжатых сфер плотности пространства

5.1 Полное распределение плотности через функции Хевисайда

5.1.1 Для одного сгустка

Для одиночного сгустка плотности пространства распределение возмущения относительно радиального расстояния r_1 определяется выражением:

$$\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R_1' - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R_1'),$$

где:

- ρ_1 — амплитуда возмущения плотности сгустка;
- R_1' — радиус деформированной области пространства;
- $H(x)$ — функция Хевисайда, обеспечивающая разделение внутренней и внешней областей.

5.1.2 Для двух сгустков через коэффициенты искривления

Коэффициент искривления для первого сгустка

$$K_1(\mathbf{r}_1) = 1 + \frac{\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)}{\rho_0} = 1 + \frac{1}{\rho_0} \left[\rho_1 H(R_1' - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R_1') \right]$$

Коэффициент искривления для второго сгустка

$$K_2(\mathbf{r}_1) = 1 + \frac{\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0} \\ = 1 + \frac{1}{\rho_0} \left[\rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \right],$$

где $\mathbf{D}$ — векторное смещение центра второго сгустка относительно первого.

5.1.3 Общий коэффициент искривления и полное изменение плотности

Если под коэффициентом искривления плотности пространства понимать коэффициент ее растяжения или сжатия, то при наложении областей искривления от разных сгустков (за их пределами), очевидно, что коэффициенты будут умножаться, это равносильно тому что мы растягиваем уже растянутое, соответственно общий коэффициент искривления пространства, создаваемый двумя сгустками, определяется произведением их индивидуальных коэффициентов:

$$K_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = K_1(\mathbf{r}_1) \cdot K_2(\mathbf{r}_1). \quad (4)$$

Соответственно, полное возмущение плотности пространства имеет вид:

$$\Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = \rho_0 [K_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) - 1] \\ = \rho_0 \left[\left(1 + \frac{\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)}{\rho_0} \right) \left(1 + \frac{\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0} \right) - 1 \right].$$

Или, раскрывая выражение:

$$\Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) + \frac{\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0}.$$

Третье (нелинейное) слагаемое отражает *взаимное нарушение равномерного распределения плотности пространства*, возникающее вследствие наложения искривлений обоих сгустков. Именно этот член отвечает за количество возмущения плотности пространства в случае двух сгустков этой плотности на расстоянии $\mathbf{D}$.

Полная форма с функциями Хевисайда, которой мы будем пользоваться для интегрирования, определяется формулой:

$$\Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \\ + \rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \\ + \frac{1}{\rho_0} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right]$$

$$\times \left[\rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R'_2{}^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \right]. \quad (5)$$

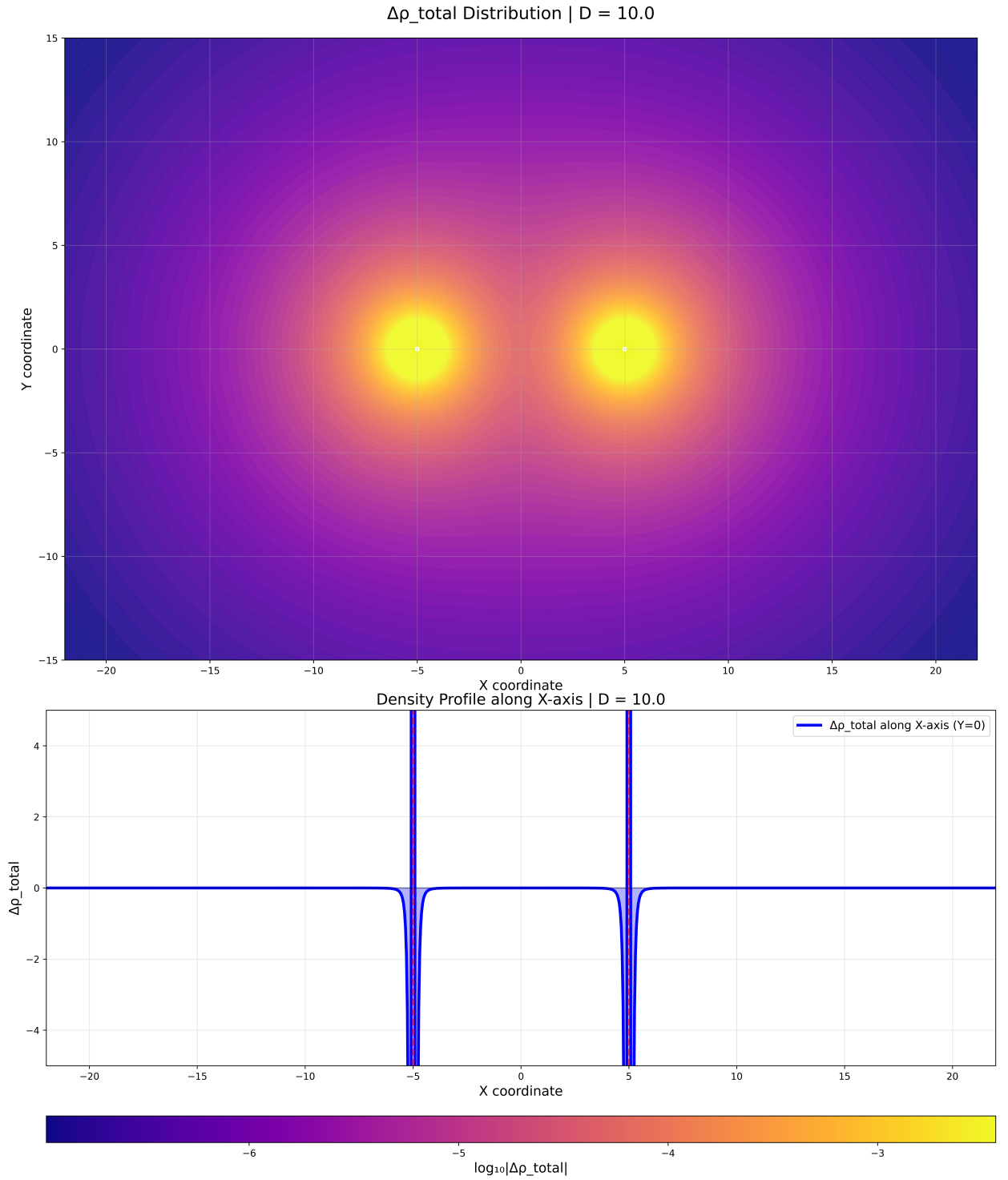


Рис. 2: Визуализация распределения плотности пространства для двух сферических сгустков

VI. Проверка сохранения количества плотности пространства от двух сгустков плотности. Интеграл суммарного изменения плотности в трёхмерном объёме

Давайте проверим, как выполняется наш постулат сохранения количества плотности пространства в случае, когда оно определяется изменением равномерного распределения плотности от двух сгустков плотности. В случае одного сгустка мы убедились, что полный интеграл от изменения равномерного распределения плотности как внутри сгустка, так и за его пределами равен нулю. Давайте проверим, сохраняется ли этот постулат в случае, если возмущение плотности определяется наложением коэффициентов искривления от двух сгустков.

Рассмотрим объёмный интеграл суммарного изменения плотности пространства:

$$I := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1.$$

Подставляя разложение

$$\Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1) = \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) + \frac{\Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})}{\rho_0},$$

получаем разложение интеграла:

$$I = I_1 + I_2 + \frac{1}{\rho_0} J,$$

где

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) d^3 r_1, \quad I_2 := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) d^3 r_1,$$

$$J := \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) d^3 r_1.$$

Наша цель — показать, что $I_1 = I_2 = 0$, тогда как $J \neq 0$; это означает, что суммарный объёмный интеграл $I \neq 0$ и постулат о сохранении «количества» плотности нарушается в трёхмерном случае.

—

6.1 Нули первых двух интегралов

Для первого сгустка

$$\Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1),$$

введём сферические координаты с центром в первом сгустке: $d^3 r_1 = 4\pi r_1^2 dr_1$. Тогда

$$I_1 = 4\pi \left[\int_0^{R'_1} \rho_1 r_1^2 dr_1 - \int_{R'_1}^{\infty} \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} r_1^2 dr_1 \right].$$

Вычислим интегралы по отдельности:

$$\int_0^{R'_1} r_1^2 dr_1 = \frac{R_1'^3}{3}, \quad \int_{R'_1}^{\infty} \frac{1}{r_1^2} dr_1 = \frac{1}{R'_1}.$$

Следовательно,

$$I_1 = 4\pi\rho_1 \left(\frac{R_1'^3}{3} - \frac{R_1'^3}{3} \right) = 0.$$

Аналогично, для I_2 достаточно сделать замену переменных $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}$, и получаем

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_2(\mathbf{r}') d^3r' = 0.$$

Итак,

$$I_1 = I_2 = 0.$$

—

6.2 Нелинейный член J

Разложим произведение $\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D})$ на четыре слагаемых, соответствующих внутренним (I) и внешним (O) областям каждого сгустка:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_1 &= \underbrace{\rho_1 H(R'_1 - r_1)}_{I_1} + \underbrace{-\frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1)}_{O_1}, \\ \Delta\rho_2 &= \underbrace{\rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|)}_{I_2} + \underbrace{-\frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2)}_{O_2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$J = J_{II} + J_{IO} + J_{OI} + J_{OO},$$

где, например,

$$J_{OO} = \int_{\substack{r_1 > R'_1 \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| > R'_2}} \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} \cdot \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} d^3r_1.$$

Так как $(O_1)(O_2) > 0$ на области пересечения внешних областей, и эта область имеет ненулевой объём, получаем

$$J_{OO} > 0.$$

Следовательно,

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) d^3r_1 \neq 0 \quad (\rho_1, \rho_2 > 0).$$

—

6.3 Вывод: нарушение интегрального сохранения плотности в 3D

Поскольку $I_1 = I_2 = 0$, но $J \neq 0$, имеем

$$I = I_1 + I_2 + \frac{1}{\rho_0} J = \frac{1}{\rho_0} J \neq 0. \quad (6)$$

Следовательно, суммарный объёмный интеграл изменения плотности, вычисленный по корректному мультипликативному правилу объединения коэффициентов искривления, не равен нулю в трёхмерном пространстве. Это означает, что **в рамках данной модели и в 3D интеграл $\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}} d^3 r$ не равен нулю**, то есть нарушается постулат о сохранении «количества» плотности, который мы определили, когда формулировали гипотезу о плотности пространства.

VII. Переход в пятимерное пространство и введение операторов взаимодействия

В трёхмерном пространстве интеграл от полного возмущения плотности

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}) d^3 r$$

оказался отличным от нуля, что указывает на **невозможность строгого сохранения плотности** при наложении двух искривлений в рамках трёхмерной модели.

Более того, аналитическое вычисление перекрёстного интеграла

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}) \Delta \rho_2(\mathbf{r} - \mathbf{D}) d^3 r$$

в 3D пространстве оказывается **нерешаемым в замкнутом виде**, что делает невозможным получение точного выражения для количества возмущения.

Для устранения этих ограничений и корректного описания взаимодействия вводится **минимальная пятимерная структура пространства**, позволяющая рассматривать два трёхмерных подпространства как независимые (ортогональные), но частично сопряжённые по одной координате. Такой переход обеспечивает симметричное описание взаимодействия и восстановление интегрального баланса при правильном выборе метрики.

7.1 Конструкция пятимерного пространства

Рассмотрим пространство, состоящее из двух трёхмерных подпространств, обозначим их как $\mathbb{R}_1^3$ и $\mathbb{R}_2^3$.

- Первое подпространство определяется координатами:

$$(r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1}, 0, 0),$$

- Второе подпространство — координатами:

$$(0, 0, r_{z_2}, r_{x_2}, r_{y_2}).$$

Все координаты ортогональны друг другу, **за исключением компонент** r_{z_1} и r_{z_2} , связанных общим направлением — осью Z . Между ними установлена связь через смещение:

$$r_{z_2} = r_{z_1} - D,$$

где D — расстояние между центрами двух сгустков плотности вдоль общей оси.

Таким образом, векторные радиусы подпространств в пятимерном пространстве имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= (r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1}, 0, 0), \\ \mathbf{r}_2 &= (0, 0, r_{z_2}, r_{x_2}, r_{y_2}).\end{aligned}$$

7.2 Скалярное произведение и оператор прямого взаимодействия

Скалярное произведение радиус-векторов в пятимерном пространстве:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_{z_1} r_{z_2}.$$

На его основе вводится **оператор прямого взаимодействия** между подпространствами:

$$T_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \frac{r_{z_1} r_{z_2}}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}. \quad (7)$$

Оператор T_{12} определяет степень проекции подпространства $\mathbb{R}_1^3$ на подпространство $\mathbb{R}_2^3$ вдоль общей оси Z . Он описывает **направленное взаимодействие** — влияние первой системы координат на вторую в пятимерной метрике.

Переход к пятимерному описанию позволяет разделить взаимодействие по подпространствам, сохраняя при этом общую геометрическую связь. Благодаря этому удаётся формализовать нелинейный член в лагранжиане не как «умножение функций в одном объёме», а как скалярное свёртывание в разных подпространствах.

7.3 Обратный оператор взаимодействия

Аналогично вводится **обратный оператор взаимодействия**, учитывающий проекцию второго подпространства на первое:

$$T_{21} = \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|}.$$

При этом используются взаимные соотношения

$$\begin{aligned}r_{z_1} &= r_{z_2} + D, \\ r_{z_2} &= r_{z_1} - D.\end{aligned}$$

Таким образом, T_{21} представляет собой оператор действия T_{12} в обратном направлении: он моделирует обратную проекцию $\mathbb{R}_2^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$.

7.4 Асимметрия операторов при интегрировании

Хотя численно значения T_{12} и T_{21} могут совпадать, их действие при интегрировании различно, поскольку:

- интеграл по первому подпространству выполняется по координатам $(r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1})$,
- интеграл по второму — по $(r_{x_2}, r_{y_2}, r_{z_2})$, и проекции на ось Z имеют различную ориентацию.

Эта **геометрическая асимметрия операторов** обеспечивает появление перекрёстного члена в лагранжиане, который учитывает не просто произведение возмущений, а их пространственное согласование в разных подпространствах. Таким образом, переход в 5D позволяет корректно описать взаимодействие между сгустками плотности как результат **взаимных проекций искривлений равномерного распределения плотности пространства**.

Пятимерное построение устраняет проблему сохранения количества плотности пространства из трёхмерной модели, потому что теперь плотности принадлежат различным подпространствам, а их взаимодействие описывается не суммой или произведением, а оператором проекции $T_{12} - T_{21}$, который корректно согласует передачу взаимодействия между трёхмерными подпространствами пространства 5D.

VIII. Выполнение закона сохранения плотности пространства в 5D при умножении на оператор прямого взаимодействия T_{12}

В разделе VI нашего исследования мы выяснили, что интеграл по всему пространству от распределения плотности пространства, определяемого двумя сгустками (через коэффициенты искривления), не равен нулю, что нарушает наш постулат о сохранении количества плотности пространства. Давайте проверим, как этот постулат будет выполняться в пространстве 5D.

Давайте определим количество взаимодействия между двумя сгустками плотности как интеграл от полного распределения плотности по всему пространству 5D, но с учётом оператора взаимодействия, который определяет воздействие возмущения одного подпространства на другое:

$$W_{12} := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2, \quad (8)$$

где в постановке 5D используется разложение

$$\Delta\rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) + \frac{1}{\rho_0} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2),$$

а оператор прямого взаимодействия задаётся как

$$T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \frac{r_{z_1} r_{z_2}}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}.$$

Подставим разложение $\Delta\rho_{\text{total}}$ в W_{12} и разложим интеграл на три слагаемых:

$$W_{12} = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(\times)},$$

где

$$W^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2,$$

$$W^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2,$$

$$W^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) T_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2.$$

Для дальнейших преобразований удобно выделить угловые и радиальные переменные в каждом подпространстве. Обозначим стандартные сферические координаты в первом подпространстве через $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, а во втором — через $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Тогда:

$$\frac{r_{z_1}}{|\mathbf{r}_1|} = \cos \theta_1, \quad \frac{r_{z_2}}{|\mathbf{r}_2|} = \cos \theta_2,$$

и мера объёма имеет вид:

$$d^3r_1 = r_1^2 dr_1 d\Omega_1, \quad d^3r_2 = r_2^2 dr_2 d\Omega_2,$$

где $d\Omega_i = \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$ — элементарный телесный угол на сфере S^2 .

Подставляя $T_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ в выражения для $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(\times)}$, получаем факторизацию по углам и радиусам.

Для $W^{(1)}$:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \int_0^\infty \int_0^\infty [\Delta\rho_1(r_1) r_1^2 dr_1] [r_2^2 dr_2] \\ &\quad \times \left[\int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 \right] \left[\int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогично для $W^{(2)}$:

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \int_0^\infty \int_0^\infty [r_1^2 dr_1] [\Delta\rho_2(r_2) r_2^2 dr_2] \\ &\quad \times \left[\int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 \right] \left[\int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 \right]. \end{aligned}$$

Для перекрёстного члена $W^{(\times)}$ имеем полную факторизацию:

$$W^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} \left(\int_0^\infty \Delta\rho_1(r_1) r_1^2 dr_1 \int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 \right)$$

$$\times \left(\int_0^\infty \Delta \rho_2(r_2) r_2^2 dr_2 \int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 \right).$$

Ключевое наблюдение: на сфере справедливо

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \cos \theta d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, каждое угловое интегральное слагаемое равно нулю:

$$\int_{S^2} \cos \theta_1 d\Omega_1 = 0, \quad \int_{S^2} \cos \theta_2 d\Omega_2 = 0.$$

Из этого непосредственно следует:

$$W^{(1)} = 0, \quad W^{(2)} = 0, \quad W^{(\times)} = 0,$$

а значит:

$$W_{12} = 0.$$

Таким образом, при использовании прямого оператора взаимодействия T_{12} в пятимерном формализме интеграл суммарного возмущения, взятый с весом T_{12} , обращается в ноль. Это означает восстановление объёмного закона «сохранения количества плотности» в предлагаемой 5D модели: механизмы проекций между подпространствами дают нулевой суммарный вклад после интегрирования по всем углам обоих подпространств.

IX. Определение выражения интеграла W_{21} с обратным оператором взаимодействия в 5D

Определим интеграл:

$$W_{21} := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2,$$

где обратный оператор взаимодействия задаётся как:

$$T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|},$$

а отклонение распределения плотности от равномерного определяется формулой:

$$\Delta \rho_{\text{total}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) + \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) + \frac{1}{\rho_0} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2).$$

Подставим оба выражения в интеграл W_{21} , в результате получаем разложение на три слагаемых:

$$\begin{aligned}
W_{21} = & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2}_{W_{21}^{(1)}} \\
& + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2}_{W_{21}^{(2)}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2}_{W_{21}^{(\times)}}.
\end{aligned}$$

Давайте подставим в выражение для количества возмущения формулы распределения плотности пространства каждого из сгустков

Локальные возмущения плотности в каждом подпространстве имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) &= \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1), \\
\Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) &= \rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2),
\end{aligned}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, R'_i — эффективные радиусы сгустков, а ρ_i — их внутренние плотности. Тогда каждое слагаемое интеграла можно записать явно:

1. Первое слагаемое:

$$\begin{aligned}
W_{21}^{(1)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \\
&\times \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|} d^3r_1 d^3r_2.
\end{aligned}$$

2. Второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
W_{21}^{(2)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \\
&\times \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|} d^3r_1 d^3r_2.
\end{aligned}$$

3. Перекрёстное слагаемое:

$$\begin{aligned}
W_{21}^{(\times)} = & \frac{1}{\rho_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \\
& \times \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \\
& \times \frac{(r_{z_2} + D)(r_{z_1} - D)}{|\mathbf{r}_2 + D| |\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1 d^3 r_2.
\end{aligned}$$

Это окончательное выражение для интеграла W_{21} как интеграла по $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ с учётом обратного оператора взаимодействия и явных функций $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$.

Давайте для удобства представим перекрёстный член интеграла W_{21} в виде произведения интегралов по подпространствам

Обозначим выражения для локальных возмущений плотности, как:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbb{R}_1^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_{z_1} - D}{|\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1, \\
I_{\mathbb{R}_2^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} d^3 r_2.
\end{aligned}$$

Тогда перекрёстный член $W_{21}^{(\times)}$ можно записать в факторизованном виде:

$$W_{21}^{(\times)} = \frac{1}{\rho_0} I_{\mathbb{R}_1^3} I_{\mathbb{R}_2^3}.$$

Таким образом, перекрёстный член интеграла $W_{21}^{(\times)}$ сводится к произведению двух трёхмерных интегралов, каждый из которых описывает вклад своего подпространства. Факторизация подчёркивает фундаментальную особенность пятимерного формализма: взаимодействие между двумя сгустками плотности представляется как результат **совместного действия интегралов по двум трёхмерным подпространствам**, что восстанавливает симметрию системы и обеспечивает корректное сохранение общего количества плотности после интегрирования.

9.1 Вычисление интеграла $I_{\mathbb{R}_1^3}$

Перейдём к сферическим координатам $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ с центром в первом сгустке:

$$r_{x_1} = r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \quad r_{y_1} = r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \quad r_{z_1} = r_1 \cos \theta_1.$$

Мера объёма тогда имеет вид:

$$d^3 r_1 = r_1^2 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

а дробь в подынтегральном выражении запишется как:

$$\frac{r_{z_1} - D}{|\mathbf{r}_1 - D|} = \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}}.$$

Подставляя всё это в интеграл, получаем:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \\ \times \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}}.$$

Интеграл по азимутальному углу тривиален:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 = 2\pi.$$

Следовательно,

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = 2\pi \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \sin \theta_1 \\ \times \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}} d\theta_1.$$

9.2 Разделение на внутреннюю и внешнюю области

1. Внутренняя область ($r_1 < R'_1$):

$$I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{in})} = 2\pi \rho_1 \int_0^{R'_1} r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \sin \theta_1 \\ \times \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}} d\theta_1.$$

2. Внешняя область ($r_1 > R'_1$):

$$I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{out})} = -\frac{2\pi \rho_1 R_1'^4}{3} \int_{R'_1}^\infty \frac{dr_1}{r_1^2} \int_0^\pi \sin \theta_1 \\ \times \frac{r_1 \cos \theta_1 - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 \cos \theta_1 + D^2}} d\theta_1.$$

Таким образом,

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{in})} + I_{\mathbb{R}_1^3}^{(\text{out})}.$$

Интеграл по углу θ_1

Пусть $u = \cos \theta_1$, тогда $\sin \theta_1 d\theta_1 = -du$, $u \in [-1, 1]$. Интеграл по θ_1 переписывается как

$$J_1(r_1) = \int_{-1}^1 \frac{r_1 u - D}{\sqrt{r_1^2 - 2Dr_1 u + D^2}} du.$$

Сделаем подстановку $t = r_1^2 + D^2 - 2r_1Du \Rightarrow dt = -2r_1D du$, пределы $u = -1 \Rightarrow t = (r_1 + D)^2$, $u = 1 \Rightarrow t = (r_1 - D)^2$. Тогда

$$J_1(r_1) = \frac{1}{4r_1D} \int_{(r_1-D)^2}^{(r_1+D)^2} \frac{r_1^2 - D^2 - t}{\sqrt{t}} dt.$$

Вычисление первообразной даёт:

$$\int \frac{r_1^2 - D^2 - t}{\sqrt{t}} dt = 2(r_1^2 - D^2)\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2}.$$

Подставляем пределы $(r_1 - D)^2$ и $(r_1 + D)^2$:

$$J_1(r_1) = \frac{1}{2r_1D^2} \left[(r_1^2 - D^2)((r_1 + D) - |r_1 - D|) - \frac{1}{3}((r_1 + D)^3 - |r_1 - D|^3) \right].$$

Разбиваем по областям:

$$\begin{cases} r_1 < D : & J_1(r_1) = -2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right), \\ r_1 > D : & J_1(r_1) = -\frac{4}{3} \frac{D}{r_1}. \end{cases}$$

Объёмная часть

Умножаем на $2\pi r_1^2$ для меры объёма:

$$A_1(r_1) = 2\pi r_1^2 J_1(r_1) = \begin{cases} -4\pi r_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right), & r_1 < D, \\ -\frac{8\pi}{3} D r_1, & r_1 > D. \end{cases}$$

Разделение интеграла по функции Хевисайда

С учётом внутренней и внешней частей $\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1)$ получаем одномерный интеграл:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \int_0^{R'_1} A_1(r_1) dr_1 - \frac{R_1'^4}{3} \int_{R'_1}^{\infty} \frac{A_1(r_1)}{r_1^4} dr_1.$$

Разбиение интеграла $I_{\mathbb{R}_1^3}$ по положению R_1 относительно D

Случай 1: $R_1 < D$

1. Внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_1} A_1(r_1) dr_1 &= \int_0^{R_1} -4\pi r_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right) dr_1 \\ &= -4\pi \left(\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^5}{15D^2} \right). \end{aligned}$$

2. Внешний интеграл:

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{\infty} \frac{A_1(r_1)}{r_1^4} dr_1 &= \int_{R_1}^D -4\pi \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{3D^2} \right) dr_1 + \int_D^{\infty} -\frac{8\pi D}{3 r_1^3} dr_1 \\ &= -4\pi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3D} + \frac{R_1}{3D^2} \right).\end{aligned}$$

3. Собираем $I_{\mathbb{R}_1^3}$:

$$\begin{aligned}I_{\mathbb{R}_1^3} &= \rho_1 \left[-4\pi \left(\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^5}{15D^2} \right) - \frac{R_1^4}{3} \left(-4\pi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3D} + \frac{R_1}{3D^2} \right) \right) \right] \\ &= \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{45D^2} (8R_1 - 15D), \quad R_1 < D.\end{aligned}$$

Случай 2: $R_1 \geq D$

1. Внутренний интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^{R_1} A_1(r_1) dr_1 &= \int_0^D -4\pi r_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{3D^2} \right) dr_1 + \int_D^{R_1} -\frac{8\pi D}{3} dr_1 \\ &= -\frac{8\pi D}{9} R_1^2 + \frac{4\pi}{15} D^3.\end{aligned}$$

2. Внешний интеграл:

$$\int_{R_1}^{\infty} \frac{A_1(r_1)}{r_1^4} dr_1 = \int_{R_1}^{\infty} -\frac{8\pi D}{3 r_1^3} dr_1 = -\frac{4\pi D}{3R_1^2}.$$

3. Собираем $I_{\mathbb{R}_1^3}$:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \rho_1 \frac{4\pi D}{45} (3D^2 - 10R_1^2), \quad R_1 \geq D.$$

Итоговое выражение для интеграла

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \begin{cases} \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{45D^2} (8R_1 - 15D), & R_1 < D, \\ \rho_1 \frac{4\pi D}{45} (3D^2 - 10R_1^2), & R_1 \geq D. \end{cases}$$

9.3 Вычисление интеграла $I_{\mathbb{R}_2^3}$ из соображений симметрии должно выполняться соотношение $J_2 = -J_1$

, проверим это

Рассмотрим интеграл по второму подпространству:

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) \frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} d^3 r_2,$$

где

$$\Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) = \rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2).$$

Переход к сферическим координатам

$$r_{z_2} = r_2 \cos \theta_2, \quad d^3 r_2 = r_2^2 \sin \theta_2 dr_2 d\theta_2 d\varphi_2,$$

$$\frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} = \frac{r_2 \cos \theta_2 + D}{\sqrt{r_2^2 + 2Dr_2 \cos \theta_2 + D^2}}.$$

Интегрирование по φ_2 даёт множитель 2π . Определяем угловую функцию:

$$J_2(r_2) = \int_0^\pi \frac{r_2 \cos \theta_2 + D}{\sqrt{r_2^2 + 2Dr_2 \cos \theta_2 + D^2}} \sin \theta_2 d\theta_2 = \int_{-1}^1 \frac{r_2 u + D}{\sqrt{r_2^2 + 2Dr_2 u + D^2}} du,$$

где $u = \cos \theta_2$.

Вычисление $J_2(r)$

Положим $t = r^2 + D^2 + 2rDu \Rightarrow dt = 2rD du$. При $u = -1 \Rightarrow t = (r - D)^2$, при $u = 1 \Rightarrow t = (r + D)^2$. Тогда

$$J_2(r) = \frac{1}{2rD} \int_{(r-D)^2}^{(r+D)^2} \frac{t - (r^2 - D^2)}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4rD} \int_{(r-D)^2}^{(r+D)^2} \frac{t - (r^2 - D^2)}{\sqrt{t}} dt.$$

Взяв первообразную:

$$\int \frac{t - (r^2 - D^2)}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - 2(r^2 - D^2)\sqrt{t},$$

подставляем пределы:

$$J_2(r) = \frac{1}{2rD^2} \left[\frac{1}{3} ((r + D)^3 - |r - D|^3) - (r^2 - D^2)((r + D) - |r - D|) \right].$$

Разбиение по областям

- Для $r < D$, $|r - D| = D - r$:

$$J_2(r) = 2 \left(1 - \frac{r^2}{3D^2} \right).$$

- Для $r > D$, $|r - D| = r - D$:

$$J_2(r) = \frac{4}{3} \frac{D}{r}.$$

Сравнивая с ранее вычисленным $J_1(r)$:

$$J_1(r) = \begin{cases} -2 \left(1 - \frac{r^2}{3D^2} \right), & r < D, \\ -\frac{4}{3} \frac{D}{r}, & r > D, \end{cases}$$

получаем

$$\boxed{J_2(r) = -J_1(r)}.$$

Вычисление радиальной части интеграла $I_{\mathbb{R}_2^3}$

Подставляем угловую часть $J_2(r_2)$ в интеграл по радиусу:

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = 2\pi \int_0^\infty r_2^2 dr_2 \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] J_2(r_2).$$

Введём функцию объёмной меры:

$$A_2(r_2) = 2\pi r_2^2 J_2(r_2) = -A_1(r_2),$$

где $A_1(r_1)$ использовалась для интеграла $I_{\mathbb{R}_1^3}$. Тогда

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \int_0^{R'_2} A_2(r_2) dr_2 - \frac{R_2'^4}{3} \int_{R'_2}^\infty \frac{A_2(r_2)}{r_2^4} dr_2.$$

Разбивка по положению R_2 относительно D

Случай 1: $R_2 < D$

$$\begin{aligned} \int_0^{R_2} A_2(r_2) dr_2 &= \int_0^{R_2} -A_1(r_2) dr_2 = - \int_0^{R_2} A_1(r_2) dr_2, \\ \int_{R_2}^\infty \frac{A_2(r_2)}{r_2^4} dr_2 &= - \int_{R_2}^\infty \frac{A_1(r_2)}{r_2^4} dr_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = -I_{\mathbb{R}_1^3} = \rho_2 \frac{4\pi R_2^4}{45D^2} (15D - 8R_2), \quad R_2 < D.$$

Случай 2: $R_2 \geq D$

$$\int_0^{R_2} A_2(r_2) dr_2 = - \int_0^{R_2} A_1(r_2) dr_2, \quad \int_{R_2}^\infty \frac{A_2(r_2)}{r_2^4} dr_2 = - \int_{R_2}^\infty \frac{A_1(r_2)}{r_2^4} dr_2,$$

тогда

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = -I_{\mathbb{R}_1^3} = \rho_2 \frac{4\pi D}{45} (10R_2^2 - 3D^2), \quad R_2 \geq D.$$

Из полученных интегральных вычислений мы видим, что действительно $J_2 = -J_1$.

Итоговое выражение для второго интеграла

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = \begin{cases} \rho_2 \frac{4\pi R_2^4}{45D^2} (15D - 8R_2), & R_2 < D, \\ \rho_2 \frac{4\pi D}{45} (10R_2^2 - 3D^2), & R_2 \geq D. \end{cases}$$

9.4 На основании полученных вычислений найдем окончательное выражение для перекрёстного члена $W_{21}^\times$ для случая $D > R_1, R_2$

Развёртывание скобок для $I_{R_1^3}$ при $D > R_1$

$$I_{R_1^3} = \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{45D^2} (8R_1 - 15D) = \rho_1 \frac{32\pi R_1^5}{45D^2} - \rho_1 \frac{4\pi R_1^4}{3D}.$$

Аналогично для $I_{R_2^3}$ при $D > R_2$

$$I_{R_2^3} = \rho_2 \frac{32\pi R_2^5}{45D^2} - \rho_2 \frac{4\pi R_2^4}{3D}.$$

Выражение через заряды Q_1, Q_2

$$Q_1 = \rho_1 \frac{4\pi R_1^3}{3}, \quad Q_2 = \rho_2 \frac{4\pi R_2^3}{3},$$

$$I_{R_1^3} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D}, \quad I_{R_2^3} = \frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} - \frac{Q_2 R_2}{D}.$$

Перекрёстный член $W_{21}^\times$

$$W_{21}^\times = \frac{1}{\rho_0} I_{R_1^3} I_{R_2^3} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} - \frac{Q_2 R_2}{D} \right).$$

Компактное выражение

$$W_{21}^\times = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{8Q_1 R_1^2}{15D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{8Q_2 R_2^2}{15D^2} - \frac{Q_2 R_2}{D} \right), \quad D > R_1, R_2.$$

После перемножения скобок получаем выражение:

$$W_{21}^\times = \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{8Q_1 R_1^2}{15D^2} \right) \left(\frac{8Q_2 R_2^2}{15D^2} \right) - \left(\frac{8Q_1 R_1^2}{15D^2} \right) \left(\frac{Q_2 R_2}{D} \right) - \left(\frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{8Q_2 R_2^2}{15D^2} \right) + \left(\frac{Q_1 R_1}{D} \right) \left(\frac{Q_2 R_2}{D} \right) \right].$$

После приведения подобных членов получаем окончательное выражение для количества возмущения плотности пространства, создаваемого двумя сгустками, находящимися на расстоянии D

$$W_{21}^{\times} = \frac{64Q_1Q_2R_1^2R_2^2}{225\rho_0D^4} - \frac{8Q_1Q_2R_1^2R_2}{15\rho_0D^3} - \frac{8Q_1Q_2R_1R_2^2}{15\rho_0D^3} + \frac{Q_1Q_2R_1R_2}{\rho_0D^2} \quad (9)$$

Х. Вычисление количества возмущения $W_{21}^{(1)}$, $W_{21}^{(2)}$ разделение оператора взаимодействия по трёхмерным подпространствам

При интегрировании трёхмерной функции, принадлежащей только одному 3D-подпространству, по всему 5D-пространству с учётом обратного оператора T_{21} взаимодействия между двумя трёхмерными подпространствами, мы сталкиваемся с проблемой расходимости. Это связано с тем, что некорректно интегрировать какую-либо из частей оператора взаимодействия по всему подпространству без функции, описывающей распределение изменения плотности относительно ρ_0 по этому подпространству.

Для устранения этой проблемы предлагается применять “половинные” операторы свёртки (T_2) и (T_1), что позволяет корректно разделить взаимодействие и выделить количество возмущения, создаваемое каждым зарядом отдельно на противоположное подпространство.

10.1 Метод разделения операторов

Для $W_{21}^{(1)}$

- Берём интеграл **только по $\mathbf{r}_1$** , по трёхмерному пространству заряда 1.
- Применяем оператор T_2 — половину от обратного оператора T_{21} , оставляя только компоненту $\mathbf{r}_2/|\mathbf{r}_2|$.
- В результате получаем потенциал, создаваемый зарядом 1, обозначаемый $W_2^{(1)}$.

Для $W_{21}^{(2)}$

- Берём интеграл **только по $\mathbf{r}_2$** , по трёхмерному пространству заряда 2.
- Применяем оператор T_1 — половину от обратного оператора T_{21} , оставляя только компоненту $\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|$.
- В результате получаем потенциал, создаваемый зарядом 2, обозначаемый $W_1^{(2)}$.

Таким образом, вместо бесконечных $W_{21}^{(1)}$, $W_{21}^{(2)}$ мы получаем **конечные выражения** $W_2^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$, которые физически соответствуют потенциальному количеству возмущения, которое окажет один из зарядов на другое подпространство при размещении там второго заряда. Это соответствует физическому смыслу потенциала заряда или создаваемого им поля.

10.2 Вычисление потенциалов

Потенциал заряда 2: $W_2^{(1)}$

Интеграл по $\mathbf{r}_1$ с оператором T_2 :

$$W_2^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \frac{r_{z_1} - D}{|\mathbf{r}_1 - D|} d^3 r_1$$

Для случая $D > R_1$ подставляем ранее вычисленный интеграл $I_{\mathbb{R}_1^3}$:

$$I_{\mathbb{R}_1^3} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D}$$

Таким образом:

$$\boxed{W_2^{(1)} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D}} \quad (10)$$

Потенциал заряда 1: $W_1^{(2)}$

Интеграл по $\mathbf{r}_2$ с оператором T_1 :

$$W_1^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho_2 H(R'_2 - r_2) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3r_2^4} H(r_2 - R'_2) \right] \frac{r_{z_2} + D}{|\mathbf{r}_2 + D|} d^3 r_2$$

Для случая $D > R_2$, с учётом связи $A_2 = -A_1$ и ранее вычисленного $I_{\mathbb{R}_2^3}$:

$$I_{\mathbb{R}_2^3} = -\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D}$$

Следовательно:

$$\boxed{W_1^{(2)} = -\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D}} \quad (11)$$

10.3 Полное количество возмущения

Окончательное выражение для полного количества возмущения принимает вид:

$$W_{\text{total}} = \left(\frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) + \left(-\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D} \right)$$

$$+ \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{64}{225} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2^2}{D^4} - \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2}{D^3} - \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2^2}{D^3} + \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2}{D^2} \right)$$

Первые два члена дают ноль при условии, что $q_1 = Q_1 R_1 = q_2 = Q_2 R_2$, если принять, что наши сгустки плотности (элементарные заряды) равны. По этой причине для одноимённых зарядов первые два члена будут давать ноль, а для разноимённых — значения этих выражений будут одинаковы по знаку.

Таким образом, первые два члена в выражении для полного количества возмущения плотности, создаваемого двумя сгустками плотности, очень напоминают выражение для потенциала поля, создаваемого элементарным зарядом. Последний член можно представить как $1/\rho_0$ от произведения потенциалов.

XI. Физический смысл членов интеграла суммарного возмущения плотности

В нашем подходе интеграл от суммарного возмущения плотности $\Delta\rho_{\text{total}}$ в 5D-пространстве имеет несколько ключевых составляющих, каждая из которых несёт отдельную физическую интерпретацию.

Физический смысл первых двух членов в полной формуле возмущения

В рамках нашей модели первые два члена в выражении для полного количества возмущения имеют глубокий физический смысл. Они представляют собой **потенциал заряда** или, точнее, **потенциал создаваемого им поля** в пятимерном пространстве. Эти члены описывают то, как каждый сгусток плотности пространства возмущает противоположное трёхмерное подпространство, создавая своего рода “отпечаток” своего присутствия.

Математически эти потенциалы выражаются как:

$$W_2^{(1)} = \frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \quad (12)$$

$$W_1^{(2)} = -\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D} \quad (13)$$

Что особенно важно, эти члены оказываются **конечными** — в отличие от классической самоэнергии точечного заряда, которая расходится. В традиционной электродинамике собственная энергия заряда стремится к бесконечности, что представляет собой фундаментальную проблему теории. В нашей же модели благодаря конечным размерам сгустков плотности (R_1, R_2) и корректному разделению операторов взаимодействия мы получаем конечные, физически осмысленные выражения.

Таким образом, первые два члена можно интерпретировать как **ренормализованную самоэнергию** — ту самую величину, которая в классической теории поля расходится, но в нашей модели приобретает конечное значение благодаря геометрическим свойствам пятимерного пространства и естественному обрезанию на масштабах порядка размеров элементарных зарядов.

В полном выражении для возмущения эти члены вносят аддитивный вклад:

$$W_{\text{total}}^{\text{slow}} = W_2^{(1)} + W_1^{(2)} + \frac{1}{\rho_0} I_{\mathbb{R}_1^3} I_{\mathbb{R}_2^3}$$

где первые два слагаемых представляют собой индивидуальные вклады каждого заряда, а третье слагаемое описывает их взаимное нелинейное взаимодействие.

Перекрёстный член: реальное взаимодействие

Перекрёстный член интеграла формирует реальное взаимодействие между двумя плотностными сгустками. В 5D-модели этот член имеет вид:

$$W_{21}^{\times} = \frac{1}{\rho_0} \int_{\mathbb{R}_1^3} \int_{\mathbb{R}_2^3} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_2) T_{21} d^3 r_1 d^3 r_2,$$

где T_{21} — обратный оператор взаимодействия, учитывающий взаимное расположение двух подпространств. Этот член совпадает с произведением потенциалов двух зарядов, делённым на диэлектрическую проницаемость ρ_0 . Таким образом, перекрёстный член интеграла является **точным теоретическим обоснованием кулоновского взаимодействия**, ранее вводимого в лагранжиане лишь как эмпирическая догадка.

ХII. Экранирование и ренормализация поля

Если взять все члены интеграла, то формула W_{total} полностью описывает процесс *экранирования и ренормализации поля*. Они моделируют, как плотность пространства распределяется вокруг каждого заряда и корректирует поле на малых расстояниях, порядка 10 радиусов электронов. Именно эти члены обеспечивают плавное поведение поля при $D \sim R'_1, R'_2$ и устраняют классические парадоксы бесконечной энергии и разрывов поля.

Эти свойства можно продемонстрировать на графике зависимости поля от расстояния D между зарядами с конечным радиусом $R'_1 = R'_2 = 0.1$ (в условных единицах). На малых расстояниях $D \lesssim 10R$ поле **сглаживается** благодаря экранирующим и нормализующим членам, в то время как на больших расстояниях $D \gg R$ проявляется классическая $1/D^2$ зависимость кулоновского взаимодействия, полностью определяемая перекрёстным членом:

12.1 Итоговое понимание структуры энергии

Таким образом, интеграл в нашей модели не только даёт численное значение взаимодействия, но и **расщепляет энергию на три физических компонента**:

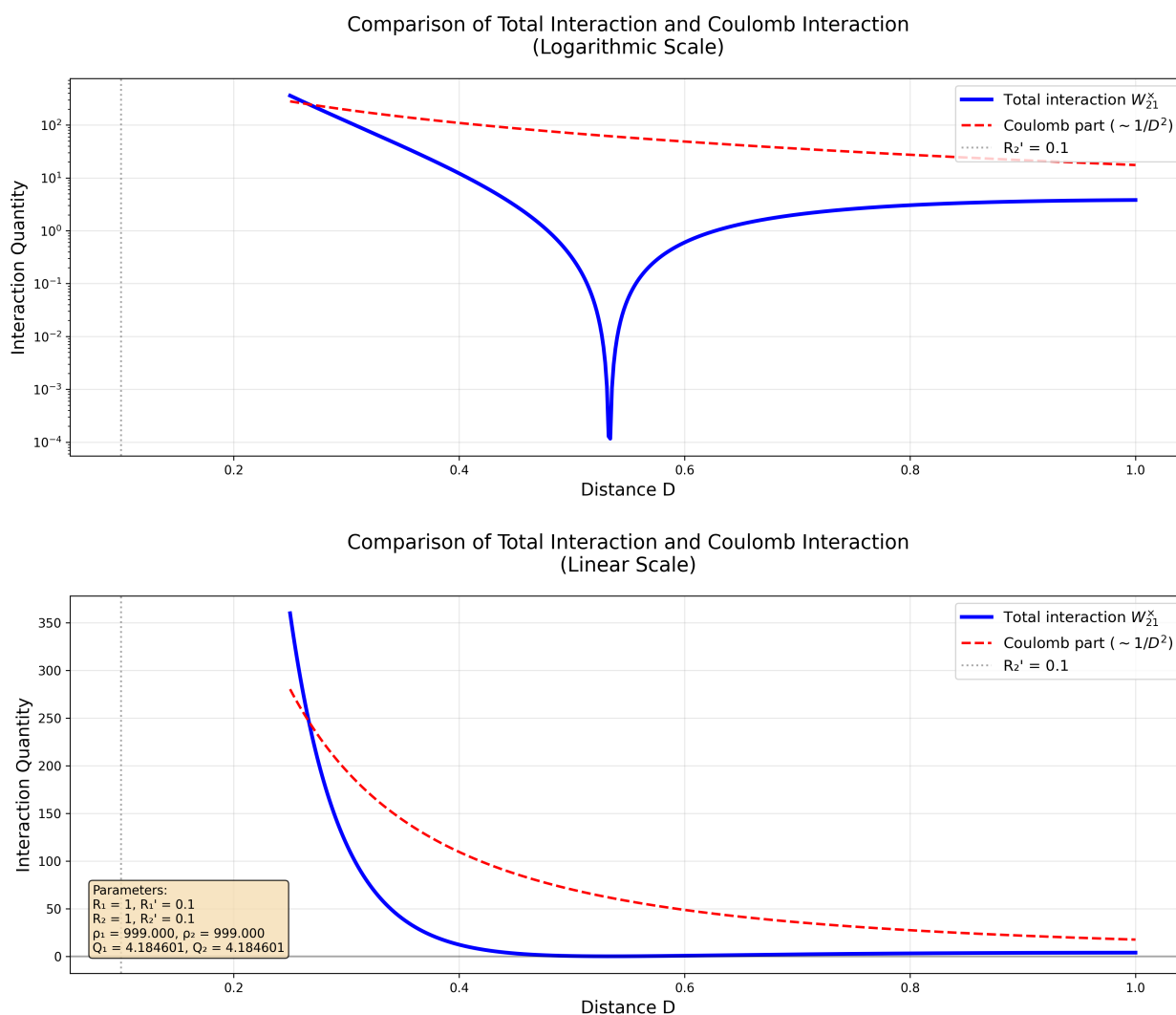


Рис. 3: Визуализация уменьшения количества взаимодействия на расстояниях соизмеримых с размерами элементарного заряда (размер заряда 0,1 в условных единицах, диапазон D до 1)

1. собственная энергия сгустков (обнуляется);
2. реальное взаимодействие двух зарядов (перекрёстный член, кулоновская энергия);
3. корректирующие члены для экранирования и перенормировки (обеспечивают физическую адекватность поля на малых расстояниях).

Эта структура позволяет строго вывести лагранжиан для двухзарядовой системы из геометрии $5D$ -пространства и распределения плотности, без дополнительных эмпирических постулатов. Кроме того, конечные радиусы зарядов R_1, R_2 создают естественное ограничение $D > R$, что устраняет проблему бесконечной энергии и делает модель полностью самосогласованной.

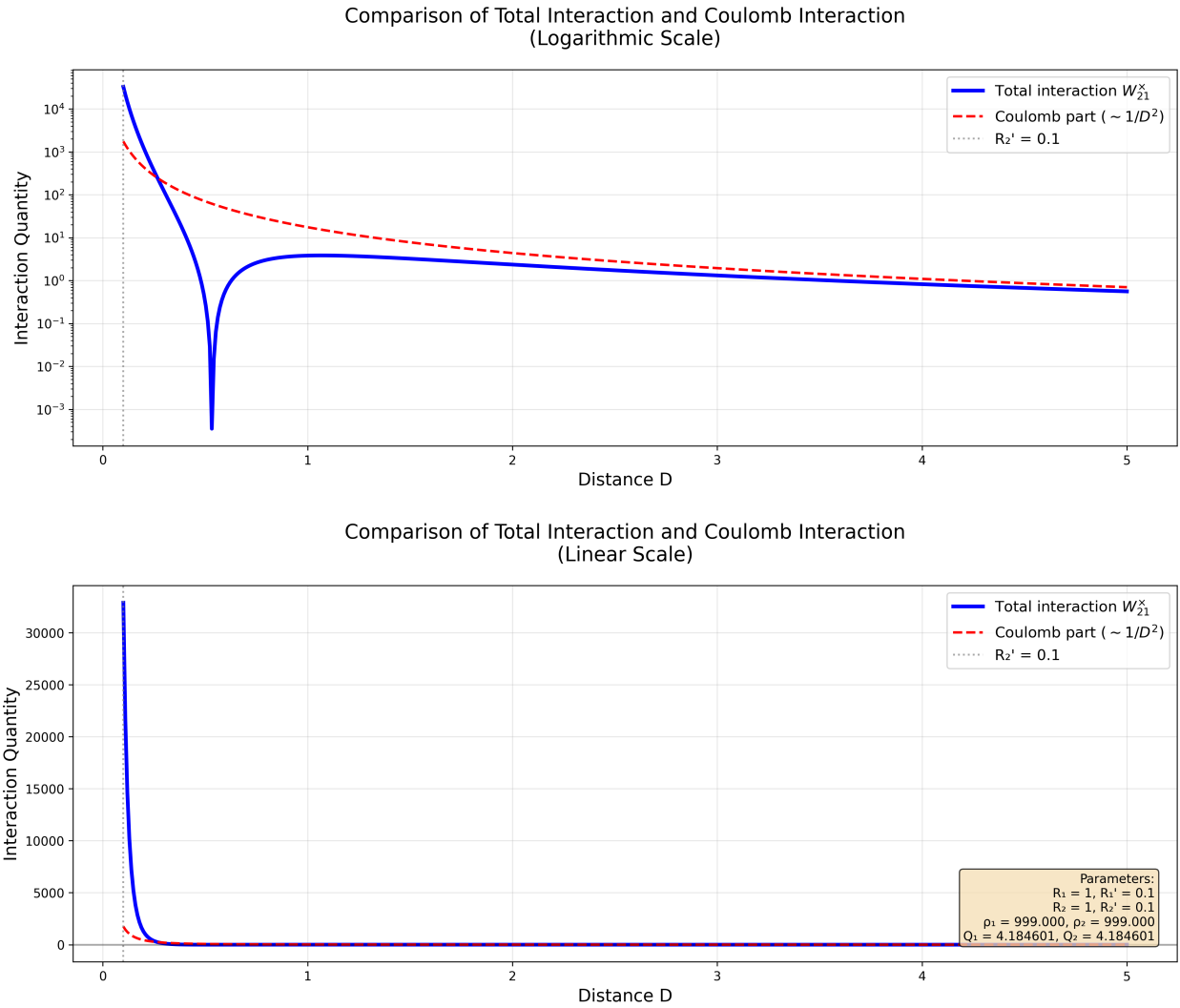


Рис. 4: Визуализация уменьшения количества взаимодействия на расстояниях соизмеримых с размерами элементарного заряда (размер заряда 0,1 в условных единицах, диапазон D до 5)

ХІІІ. Вычисление интеграла от градиента перекрёстного члена распределения плотности пространства

Аналитическое вычисление интеграла от перекрёстного члена распределения плотности пространства не представляется возможным, но применяя теорему Остроградского-Гаусса, можно вычислить интеграл от градиента, принимая во внимание, что выражение содержит разрывы за счет функций Хевисайда в выражении для $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$.

Ранее мы получили, что перекрёстный член полного распределения плотности пространства определяется как произведение возмущений от двух сгустков плотности:

$$\Delta\rho_{\text{cross}}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\rho_0} \left[\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) \right],$$

где $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$ — возмущения плотности, создаваемые первым и вторым

сгустком, и ρ_0 — опорная (фоновая) плотность пространства.

Аналитические выражения возмущений заданы через функции Хевисайда и обратные четвёртые степени:

$$\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1),$$

$$\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) = \rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2).$$

Итого,

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\text{cross}}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\rho_0} & \left[\rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1) \right] \times \\ & \left[\rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2) \right]. \end{aligned}$$

13.1 Интеграл от градиента перекрёстного члена и применение теоремы Остроградского-Гаусса

Рассматривается объёмный интеграл градиента перекрёстного члена по объёму V :

$$\mathbf{F} := \int_V \nabla \Delta\rho_{\text{cross}}(\mathbf{r}_1) dV.$$

Поскольку $\Delta\rho_{\text{cross}}$ является произведением функций, каждая из которых имеет разрыв (переход) на поверхности сферы радиуса R'_i (вследствие функций Хевисайда), градиент $\nabla \Delta\rho_{\text{cross}}$ содержит вклад, сосредоточенный на этих поверхностях.

Для функций с компактной поддержкой применима теорема Остроградского-Гаусса: объёмный интеграл градиента функции равен потоку этой функции через внешнюю границу объёма:

$$\mathbf{F} = \int_V \nabla \Delta\rho_{\text{cross}} dV = \oint_{\partial V} \Delta\rho_{\text{cross}} \mathbf{n} dS,$$

где ∂V — граница интегрируемого объёма, а $\mathbf{n}$ — наружная нормаль к ∂V .

13.2 Разбиение объёма на области с учётом разрывов Хевисайда и переход к сумме по поверхностям S_1 и S_2

Поскольку каждая из функций $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$ изменяет свою аналитическую форму именно на соответствующих сферических поверхностях $r_1 = R'_1$ и

$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| = R'_2$, естественно разбить полный объём V на подмножества, ограниченные этими поверхностями. Обозначим S_1 и S_2 соответственно поверхности перехода первой и второй функции Хевисайда.

Тогда граница объединённого объёма, содержащего все области возмущений, представима как объединение внутренних поверхностей, на которых происходят скачки, и возможной внешней границы на бесконечности (для компактной поддержки вклад на бесконечности равен нулю). Следовательно, поток через ∂V редуцируется к сумме потоков через S_1 и S_2 :

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \Delta\rho_{\text{cross}} \mathbf{n} dS = \oint_{S_1} \Delta\rho_{\text{cross}} \mathbf{n}_1 dS_1 + \oint_{S_2} \Delta\rho_{\text{cross}} \mathbf{n}_2 dS_2.$$

Причины допустимости такого разбиения:

1. **Локализация градиента:** вне областей, где меняется Хевисайда (внутри областей с постоянной аналитической формой), функция $\Delta\rho_{\text{cross}}$ гладкая и имеет нулевой вклад в поток, когда рассматривается замкнутый объём, содержащий эти области; существенный вклад даёт лишь переход на поверхностях разрыва.
2. **Компактная поддержка и исчезновение на внешней границе:** исходные возмущения заданы так, что вне некоторого конечного радиуса они убывают (или равны нулю в смысле Хевисайда и обратных степеней при интегрировании по объёму), поэтому поток через внешнюю границу на бесконечности отсутствует.
3. **Локальное применение теоремы дивергенции:** теорема Остроградского-Гаусса может быть применена по частям к каждому из простых объёмов, ограниченных S_1 и S_2 , а затем результаты суммируются. При этом ориентировки норм $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ выбираются как внешние относительно соответствующих внутренних областей.
4. **Корректность при возможном перекрытии областей:** если области, ограниченные S_1 и S_2 , пересекаются, граница объединения включает части обеих сфер и (при необходимости) линии/площади стыков; однако всякая внутренняя часть границы, общая для двух смежных объёмов, учитывается с противоположными ориентациями и аннулируется при суммировании потоков, а оставшиеся внешние части дают суммарный поток через S_1 и S_2 .

Таким образом, получаем разложение:

$$\boxed{\mathbf{F} = I_{S_1} + I_{S_2}},$$

где

$$I_{S_1} = \oint_{S_1} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) \mathbf{n}_1 dS_1,$$

$$I_{S_2} = \oint_{S_2} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}) \cdot \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) \mathbf{n}_2 dS_2.$$

Подставляя выражение для перекрёстного члена $\Delta\rho_{\text{cross}} = \frac{1}{\rho_0} \Delta\rho_1 \cdot \Delta\rho_2$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \Delta\rho_{\text{cross}}(\mathbf{r}_1) dV = \frac{1}{\rho_0} \left[\oint_{S_1} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 \right. \\ \left. + \oint_{S_2} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}) \cdot \Delta\rho_2(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \right]. \end{aligned}$$

Это выражение представляет общую форму интеграла от градиента перекрёстного члена плотности пространства через поверхностные интегралы, зависящие от возмущений.

13.3 Рассмотрение первого поверхностного интеграла I_{S_1}

Рассмотрим первый поверхностный интеграл:

$$I_{S_1} = \oint_{S_1} \Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) \mathbf{n}_1 dS_1.$$

Подставим аналитические выражения для возмущений плотности:

$$\Delta\rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R'_1 - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R'_1),$$

$$\Delta\rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) = \rho_2 H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2).$$

Произведение $\Delta\rho_1 \Delta\rho_2$ содержит четыре слагаемых. После подстановки в

интеграл имеем:

$$\begin{aligned}
I_{S_1} = & \underbrace{\rho_1 \rho_2 \oint_{S_1} H(R'_1 - r_1) H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) \mathbf{n}_1 dS_1}_{(1)} \\
& - \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{3} \oint_{S_1} H(R'_1 - r_1) \frac{H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1}_{(2)} \\
& - \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4}{3} \oint_{S_1} \frac{H(r_1 - R'_1) H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|)}{r_1^4} \mathbf{n}_1 dS_1}_{(3)} \\
& + \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4 R_2'^4}{9} \oint_{S_1} \frac{H(r_1 - R'_1) H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2)}{r_1^4 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1}_{(4)}.
\end{aligned}$$

Условия непересечения областей

Полагаем, что сферы S_1 и S_2 не пересекаются:

$$D > R'_1 + R'_2.$$

Тогда:

- Слагаемое (1) на поверхности S_1 равно нулю, так как $H(R'_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) = 0$;
- Слагаемое (3) также равно нулю.

Остаются только (2) и (4):

$$\begin{aligned}
I_{S_1}^{(2)} &= -\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{3} \oint_{S_1} H(R'_1 - r_1) \frac{H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1, \\
I_{S_1}^{(4)} &= \frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4 R_2'^4}{9} \oint_{S_1} \frac{H(r_1 - R'_1) H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R'_2)}{r_1^4 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1.
\end{aligned}$$

Упрощение на поверхности S_1

На поверхности S_1 радиус фиксирован ($r_1 = R'_1$) и вектор нормали радиальный:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{R'_1}.$$

Функции Хевисайды на границе принимают значение $H(0) = 1/2$:

$$H(R'_1 - r_1) = H(r_1 - R'_1) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интегралы упрощаются:

$$I_{S_1}^{(2)} = -\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{6} \oint_{S_1} \frac{H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1,$$

$$I_{S_1}^{(4)} = \frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{18} \oint_{S_1} \frac{H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1.$$

Суммирование вкладов

Суммируя оставшиеся слагаемые, получаем окончательное выражение:

$$I_{S_1} = -\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9} \oint_{S_1} \frac{H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_1 dS_1.$$

13.4 Рассмотрение второго поверхностного интеграла I_{S_2}

Рассмотрим второй поверхностный интеграл:

$$I_{S_2} = \oint_{S_2} \Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) \Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) \mathbf{n}_2(\mathbf{r}_1) dS_2.$$

Поверхность S_2 в системе $\mathbf{r}_1$ задаётся:

$$S_2 : |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| = R_2',$$

и выполняется условие непересечения сфер:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| > R_1', \quad D > R_1' + R_2'.$$

Подставляем аналитические выражения для возмущений:

$$\Delta \rho_1(\mathbf{r}_1) = \rho_1 H(R_1' - r_1) - \frac{\rho_1 R_1'^4}{3r_1^4} H(r_1 - R_1'),$$

$$\Delta \rho_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}) = \rho_2 H(R_2' - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) - \frac{\rho_2 R_2'^4}{3|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2').$$

Раскладывая произведение, получаем четыре слагаемых:

$$I_{S_2} = \underbrace{\rho_1 \rho_2 \oint_{S_2} H(R_1' - r_1) H(R_2' - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|) \mathbf{n}_2 dS_2}_{(1)} - \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{3} \oint_{S_2} H(R_1' - r_1) \frac{H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_2 dS_2}_{(2)} - \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4}{3} \oint_{S_2} \frac{H(r_1 - R_1') H(R_2' - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|)}{r_1^4} \mathbf{n}_2 dS_2}_{(3)}$$

$$+ \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4 R_2'^4}{9} \oint_{S_2} \frac{H(r_1 - R_1') H(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}| - R_2')}{r_1^4 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_2 dS_2}_{(4)}.$$

13.4.1 Переход в систему $\mathbf{r}_2$

Делаем замену переменной:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{D}.$$

В новой системе поверхность S_2 имеет простую форму:

$$S_2 : \quad |\mathbf{r}_2| = R_2', \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{R_2'}, \quad dS_2 = R_2'^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2.$$

Произведение функций Хевисайды и степенных членов переписывается через $\mathbf{r}_2$:

$$\begin{aligned} (1) &= \rho_1 \rho_2 \oint_{S_2} H(R_1' - |\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|) H(R_2' - r_2) \mathbf{n}_2 dS_2, \\ (2) &= -\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{3} \oint_{S_2} H(R_1' - |\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|) \frac{H(r_2 - R_2')}{r_2^4} \mathbf{n}_2 dS_2, \\ (3) &= -\frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4}{3} \oint_{S_2} \frac{H(|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}| - R_1') H(R_2' - r_2)}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_2 dS_2, \\ (4) &= \frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4 R_2'^4}{9} \oint_{S_2} \frac{H(|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}| - R_1') H(r_2 - R_2')}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|^4 r_2^4} \mathbf{n}_2 dS_2. \end{aligned}$$

13.4.2 Отбрасывание нулевых слагаемых

Используя условие непересечения сфер ($D > R_1' + R_2'$) и значения Хевисайды на границе ($r_2 = R_2'$), $H(0) = 1/2$:

- (1) = 0, так как области перекрытия нет;
- (2) симметрично относительно центра S_2 и даёт нулевой векторный поток;
- остаются (3) и (4), которые зависят от $|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|$ и дают ненулевой вклад.

13.4.3 Окончательная форма интеграла I_{S_2}

Суммируя оставшиеся слагаемые и учитывая фактор $1/2$ от Хевисайды на границе:

$$I_{S_2} = -\frac{\rho_1 \rho_2 R_1'^4}{9} \oint_{S_2} \frac{H(|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}| - R_1')}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{D}|^4} \mathbf{n}_2 dS_2.$$

Поверхность S_2 в системе $\mathbf{r}_2$ задаётся уравнением $|\mathbf{r}_2| = R_2'$, а нормаль направлена радиально наружу: $\mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_2 / R_2'$.

13.5 Решение интегралов I_{S_1} и I_{S_2}

13.5.1 1. Интеграл I_{S_1}

Для непересекающихся сфер ($D > R'_1 + R'_2$) после учёта всех слагаемых Хевисайда остаётся интеграл:

$$I_{S_1} = -\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9} \oint_{S_1} \frac{\mathbf{n}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}|^4} dS_1,$$

где поверхность S_1 задаётся радиусом $r_1 = R'_1$, а вектор нормали направлен радиально наружу:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{R'_1}, \quad dS_1 = R_1'^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1.$$

Подставляя сферические координаты:

$$\mathbf{r}_1 = R'_1 (\sin \theta_1 \cos \phi_1, \sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \theta_1),$$

интеграл принимает вид:

$$I_{S_1} = -\frac{\rho_1 \rho_2 R_2'^4 R_1'^2}{9} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\sin \theta_1 \cos \phi_1, \sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \theta_1) \sin \theta_1 d\phi_1 d\theta_1}{(R_1'^2 + D^2 - 2R'_1 D \cos \theta_1)^2}.$$

Интегрирование по ϕ_1 обнуляет x - и y -компоненты, остаётся z -компонента:

$$(I_{S_1})_z = -\frac{2\pi \rho_1 \rho_2 R_2'^4 R_1'^2}{9} \int_0^\pi \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1}{(R_1'^2 + D^2 - 2R'_1 D \cos \theta_1)^2}.$$

Вводим замену переменной $u = \cos \theta_1$, $du = -\sin \theta_1 d\theta_1$:

$$(I_{S_1})_z = -\frac{2\pi \rho_1 \rho_2 R_2'^4 R_1'^2}{9} \int_{-1}^1 \frac{u du}{(R_1'^2 + D^2 - 2R'_1 D u)^2}.$$

Используется стандартная первообразная:

$$\int \frac{u du}{(a - bu)^2} = -\frac{u}{b(a - bu)} - \frac{1}{b^2} \ln(a - bu), \quad a = R_1'^2 + D^2, \quad b = 2R'_1 D.$$

Подстановка пределов $u = -1$ и $u = 1$ даёт:

$$\int_{-1}^1 \frac{u du}{(R_1'^2 + D^2 - 2R'_1 D u)^2} = -\frac{R_1'^2 + D^2}{R'_1 D (D^2 - R_1'^2)^2} + \frac{1}{4R_1'^2 D^2} \ln \frac{(R'_1 - D)^2}{(R'_1 + D)^2}.$$

Снимаем модуль под логарифмом, учитывая, что $D > R'_1$, и получаем комплексную ветвь:

$$2 \ln(R'_1 - D) = 2 \ln(D - R'_1) + i2\pi.$$

Окончательный вид интеграла I_{S_1} :

$$I_{S_1} = -\frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_2'^4 R_1'^2}{9} \left[-\frac{R_1'^2 + D^2}{R_1' D (D^2 - R_1'^2)^2} + \frac{1}{4R_1'^2 D^2} \left(\ln \frac{D - R'_1}{R'_1 + D} + i2\pi \right) \right] \mathbf{e}_z.$$

13.5.2 2. Интеграл I_{S_2}

После подстановки радиуса $r_2 = R'_2$ и нормали $\mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_2/R'_2$, интеграл принимает вид:

$$I_{S_2} = \frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_1'^4 R_2'^2}{9} \int_0^\pi \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2 d\theta_2}{(R_2'^2 + D^2 + 2R'_2 D \cos \theta_2)^2} \mathbf{e}_z.$$

Вводим $u = \cos \theta_2$, $du = -\sin \theta_2 d\theta_2$, меняем пределы интегрирования ($u = 1 \rightarrow u = -1$):

$$I_{S_2} = \frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_1'^4 R_2'^2}{9} \int_{-1}^1 \frac{u du}{(R_2'^2 + D^2 - 2R'_2 D u)^2} \mathbf{e}_z.$$

Подстановка пределов и снятие модуля с учётом $D > R'_2$ даёт комплексную ветвь:

$$2 \ln(R'_2 - D) = 2 \ln(D - R'_2) + i2\pi.$$

Итоговое выражение интеграла I_{S_2} :

$$I_{S_2} = \frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_1'^4 R_2'^2}{9} \left[-\frac{R_2'^2 + D^2}{R_2' D (D^2 - R_2'^2)^2} + \frac{1}{4R_2'^2 D^2} \left(\ln \frac{D - R'_2}{R'_2 + D} + i2\pi \right) \right] \mathbf{e}_z.$$

13.6 Окончательное выражение для $\Delta\rho_{\text{cross}}$

С учётом вычисленных поверхностных интегралов I_{S_1} и I_{S_2} , перекрёстный член полного распределения плотности пространства в системе двух непересекающихся сфер ($D > R'_1 + R'_2$) можно записать как:

$$\Delta\rho_{\text{cross}} \approx \frac{1}{\rho_0} (I_{S_1} + I_{S_2}).$$

Подставляя полученные интегралы, имеем:

$$\Delta\rho_{\text{cross}} = -\frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_2'^4 R_1'^2}{9\rho_0} \left[-\frac{R_1'^2 + D^2}{R_1' D (D^2 - R_1'^2)^2} + \frac{1}{4R_1'^2 D^2} \left(\ln \frac{D - R'_1}{R'_1 + D} + i2\pi \right) \right] \mathbf{e}_z$$

$$+ \frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_1'^4 R_2'^2}{9\rho_0} \left[-\frac{R_2'^2 + D^2}{R_2' D (D^2 - R_2'^2)^2} + \frac{1}{4R_2'^2 D^2} \left(\ln \frac{D - R_2'}{R_2' + D} + i2\pi \right) \right] \mathbf{e}_z.$$

Комментарии:

- Первый член I_{S_1} соответствует вкладу потока через поверхность первого сгустка плотности S_1 ; его направление задаётся нормалью к сфере и указывает вдоль оси соединяющего центры сгустков $\mathbf{e}_z$.
- Второй член I_{S_2} отражает поток через поверхность второго сгустка S_2 , также вдоль $\mathbf{e}_z$.
- Оба интеграла содержат комплексный логарифмический член $i2\pi$, который отражает ветвление решения и мнимый характер плотности энергии пространства.
- Знак каждого интеграла показывает направление действия соответствующей силы; по модулю $|I_{S_1}| = |I_{S_2}|$ при $R_1' = R_2'$ и $\rho_1 = \rho_2$, а направления противоположны, как это характерно для взаимодействия по закону Кулона.
- Сумма $I_{S_1} + I_{S_2}$ даёт полный перекрёстный вклад $\Delta\rho_{\text{cross}}$ в распределение плотности пространства и соответствует силе, действующей на каждый из сгустков.

13.7 Комплексная часть перекрёстного интеграла

Выделим только мнимую часть интегралов I_{S_1} и I_{S_2} , учитывая все множители перед $i2\pi$ и ρ_0 в знаменателе:

$$\Im(I_{S_1}) = -\frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_2'^4 R_1'^2}{9\rho_0} \cdot \frac{i2\pi}{4R_1'^2 D^2} \mathbf{e}_z = -i\frac{\pi^2\rho_1\rho_2 R_2'^4}{9\rho_0 D^2} \mathbf{e}_z,$$

$$\Im(I_{S_2}) = \frac{2\pi\rho_1\rho_2 R_1'^4 R_2'^2}{9\rho_0} \cdot \frac{i2\pi}{4R_2'^2 D^2} \mathbf{e}_z = i\frac{\pi^2\rho_1\rho_2 R_1'^4}{9\rho_0 D^2} \mathbf{e}_z.$$

Комментарии:

- Комплексная часть интегралов отражает мнимый характер плотности энергии пространства.
- Модули этих векторов совпадают при $R_1' = R_2'$, но направления противоположны ($\mathbf{e}_z$ и $-\mathbf{e}_z$).
- Сумма мнимых частей $I_{S_1} + I_{S_2}$ соответствует мнимому компоненту перекрёстной силы, действующей на оба сгустка.

13.8 Потенциальная энергия сгустков через интеграл мнимой части перекрёстного интеграла

Отметим, что интеграл мнимой части перекрёстного интеграла по вектору $\mathbf{D}$ от текущего положения до бесконечности даёт скалярную потенциальную энергию каждого сгустка. Обозначим её как U_1 и U_2 для первого и второго сгустка соответственно.

С учётом ρ_0 в знаменателе и найденных комплексных частей:

$$\Im(I_{S_1}) = -i \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9 \rho_0 D^2} \mathbf{e}_z, \quad \Im(I_{S_2}) = i \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1'^4}{9 \rho_0 D^2} \mathbf{e}_z.$$

Потенциальная энергия каждого сгустка определяется как интеграл силы по вектору $\mathbf{D}$ от D до бесконечности:

$$U_1 = \int_D^\infty \Im(I_{S_1}) \cdot d\mathbf{D} = -i \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9 \rho_0} \int_D^\infty \frac{dD}{D^2},$$

$$U_2 = \int_D^\infty \Im(I_{S_2}) \cdot d\mathbf{D} = i \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1'^4}{9 \rho_0} \int_D^\infty \frac{dD}{D^2}.$$

Вычисляя стандартный интеграл $\int_D^\infty D^{-2} dD = \frac{1}{D}$, получаем окончательные выражения:

$$U_1 = -i \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9 \rho_0 D}, \quad U_2 = i \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1'^4}{9 \rho_0 D}.$$

13.9 Потенциалы сгустков через мнимую часть перекрёстного интеграла

Для определения потенциала электрического поля от каждого сгустка используем найденные мнимые энергии U_1 и U_2 , учитывая, что потенциал — это отношение энергии к ”заряду”, на который действует поле. В нашей теории ”заряд” соответствует плотности ρ_1 или ρ_2 . Умножаем на коэффициент $12/\pi$, получаем:

$$\Phi_2 = \frac{12}{\pi \rho_1} U_1 = -i \frac{12}{\pi \rho_1} \cdot \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9 \rho_0 D} = -i \frac{4\pi \rho_2 R_2'^4}{3 \rho_0 D},$$

$$\Phi_1 = \frac{12}{\pi \rho_2} U_2 = i \frac{12}{\pi \rho_2} \cdot \frac{\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1'^4}{9 \rho_0 D} = i \frac{4\pi \rho_1 R_1'^4}{3 \rho_0 D}.$$

XIV. Связь между вычислением полного количества возмущения плотности пространства в 5D и решением интеграла от градиента плотности пространства в 3D

Квадратичная часть (W_{cross}) представляет собой именно ту компоненту полной энергии системы двух сгустков плотности, которая в лагранжиане отвечает за энергию электрического поля — ту самую часть, которая в классической электродинамике выражается через интеграл квадрата суммы напряжённости полей:

$$W_{\text{field}} \propto \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dV = \int \mathbf{E}_1^2 dV + \int \mathbf{E}_2^2 dV + 2 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV.$$

Перекрёстный член $2 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV$ определяет энергию взаимодействия между двумя источниками и именно он играет роль физического аналога W_{cross} в предлагаемой модели.

В выражении полной энергии:

$$W_{\text{total}} = \left(\frac{8}{15} \frac{Q_1 R_1^2}{D^2} - \frac{Q_1 R_1}{D} \right) + \left(-\frac{8}{15} \frac{Q_2 R_2^2}{D^2} + \frac{Q_2 R_2}{D} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{64}{225} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2^2}{D^4} - \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1^2 R_2}{D^3} - \frac{8}{15} \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2^2}{D^3} + \frac{Q_1 Q_2 R_1 R_2}{D^2} \right),$$

вторая строка, пропорциональная $(1/\rho_0)$, — это и есть перекрёстная часть W_{cross} , описывающая энергию взаимодействия. Её последний член, убывающий как $1/D^2$, является доминирующим на больших расстояниях и представляет аналог кулоновского взаимодействия между двумя «зарядами» — сгустками плотности пространства.

Связь с трёхмерным интегралом от градиента

В трёхмерном анализе, основанном на интеграле от градиента перекрёстного члена плотности, были получены поверхностные интегралы I_{S_1} и I_{S_2} , мнимые части которых описывают векторные силы, действующие на каждый из сгустков. Интегрирование этих сил по направлению $\mathbf{D}$ позволило получить выражения для мнимых потенциальных энергий U_1 и U_2 , из которых были определены потенциалы поля Φ_1 и Φ_2 .

Если рассмотреть произведение потенциалов, скорректированное на фоновую плотность пространства, то именно выражение

$$\rho_0 \Phi_1 \Phi_2$$

в точности воспроизводит последний, кулоновский по характеру член в W_{cross} . Это показывает, что для соблюдения размерности энергии и физической интерпретации поля необходимо учитывать множитель ρ_0 , аналогичный ε_0 в класси-

ческой электродинамике, где энергия поля определяется как

$$W_{\text{field}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV.$$

14.0.1 Физическая интерпретация

1. ****Эквивалентность потенциалов и полевой энергии.**** Произведение $\rho_0 \Phi_1 \Phi_2$ выражает взаимодействующую часть энергии поля, аналогично тому, как в классической теории энергия взаимодействия двух зарядов выражается через $\varepsilon_0 E_1 E_2$. Это подтверждает, что потенциал, вычисленный через мнимую часть распределения плотности, действительно является физическим аналогом электрического потенциала.

2. ****Мнимая природа плотности энергии пространства.**** Появление мнимой единицы в решении указывает на то, что плотность энергии вакуума имеет мнимую составляющую, проецирующуюся в наше трёхмерное пространство из более высокой (5D) структуры. Тем самым электромагнитное взаимодействие можно рассматривать как трёхмерную проекцию многомерного обмена плотностью пространства.

3. ****Согласованность 3D и 5D решений.**** Структура членов, их зависимости от R_i , Q_i и D , а также общий множитель $(1/\rho_0)$ демонстрируют точное соответствие между результатами, полученными в трёхмерном и пятимерном анализе. Это показывает, что трёхмерное решение через мнимую часть поля не просто согласуется, но и полностью воспроизводит многомерную структуру взаимодействия.

Полученное равенство

$$W_{\text{cross}} \sim \rho_0 \Phi_1 \Phi_2$$

демонстрирует глубокую связь между трёхмерным описанием поля через потенциалы и пятимерной формой полной энергии системы. Это подтверждает, что электромагнитное взаимодействие в нашем пространстве является проявлением более фундаментальной многомерной динамики плотности пространства, а фоновая плотность ρ_0 выполняет роль универсальной «постоянной связи» между геометрией пространства и его энергетическим содержанием.

XV. Определение размерности для плотности пространства — гипотетической негеометрической «размерности» пространства

Потенциальная энергия первого заряда при минимальном расстоянии между сгустками

Рассмотрим выражение для потенциальной энергии первого сгустка U_1 , полученное ранее через интеграл от градиента мнимой части перекрёстного члена распределения плотности. Подставим минимально допустимое расстояние между центрами сгустков плотности, которое в данной постановке принимается

равным

$$D = 2R'_2.$$

Это соответствует ситуации, принятой при вычислении вкладов с помощью функций Хевисайда (граница второго сгустка расположена на расстоянии $2R'_2$ от центра первого сгустка в рассматриваемой конфигурации).

Подстановка выражения для заряда Q_2

Заряд второго сгустка выражается через его плотность и радиус как

$$Q_2 = \frac{4}{3}\pi\rho_2R'^3_2.$$

Исходное выражение для U_1 до подстановки D имеет вид

$$U_1 = \frac{\pi^2\rho_1\rho_2R'^4_2i}{9\rho_0D}.$$

Подставляя $D = 2R'_2$, получаем

$$U_1 = \frac{\pi^2\rho_1\rho_2R'^4_2i}{9\rho_0(2R'_2)} = \frac{\pi^2\rho_1\rho_2R'^3_2i}{18\rho_0}.$$

Чтобы выделить зависимость от полного «заряда» второго сгустка, представим $\rho_2R'^3_2$ через Q_2 :

$$\rho_2R'^3_2 = \frac{3Q_2}{4\pi}.$$

Подставляя это в выражение для U_1 , получаем

$$U_1 = \frac{\pi^2\rho_1}{18\rho_0} \cdot \frac{3Q_2}{4\pi} i = \frac{\pi\rho_1Q_2i}{24\rho_0}.$$

Замена заряда Q_2 через объём и фоновую плотность пространства

По определению заряд Q_2 можно записать как изменение фона плотности пространства на соответствующем объёме:

$$Q_2 = \rho_0(V(R_2) - V(R'_2)), \quad V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Подставляем это в выражение для U_1 :

$$U_1 = \frac{\pi\rho_1i}{24\rho_0} \cdot \rho_0 \left[\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R'^3_2) \right].$$

Сокращая ρ_0 , получаем

$$U_1 = \frac{\pi\rho_1i}{24} \cdot \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R'^3_2) = \frac{\pi^2\rho_1i}{18}(R_2^3 - R'^3_2).$$

Таким образом окончательное выражение для потенциальной энергии первого сгустка при $D = 2R'_2$:

$$U_1 = \frac{\pi^2 \rho_1 i}{18} (R_2^3 - R_2'^3).$$

Если в конкретной задаче считать R_2 внешний радиус второго сгустка, то разность объёмов даёт величину, использованную выше.

Анализ размерностей

1. Потенциальная энергия U_1 имеет размерность энергии:

$$[U_1] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

2. Разность объёмов $(R_2^3 - R_2'^3)$ имеет размерность L^3 .

3. Из соотношения

$$U_1 = i \frac{\pi^2 \rho_1}{18} (R_2^3 - R_2'^3)$$

получаем для множителя при объёме:

$$[i\rho_1] \cdot \text{L}^3 = \text{ML}^2\text{T}^{-2},$$

откуда

$$[i\rho_1] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}.$$

4. Следовательно, мнимая плотность пространства ρ_1 имеет размерность:

$$[\rho_1] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}.$$

Мнимая единица i в этом соотношении не изменяет числовой размерности, но маркирует, что величина ρ_1 записана в комплексной форме; сама плотность пространства трактуется как гипотетическое (негеометрическое) свойство, присутствующее как в 3D, так и в 5D.

Подстановка мнимых плотностей и возвращение к реальной силе

Возьмём исходное выражение для векторной силы (мнимой части), действующей на первый сгусток:

$$\mathbf{F}_1 = -i \frac{2\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_2'^4}{9\rho_0 D^2} \mathbf{e}_D,$$

где $\mathbf{e}_D$ — единичный вектор вдоль направления $\mathbf{D}$.

Вводим представление мнимых плотностей через действительные величины ($\rho^{\text{Д}}$):

$$\rho_1 = -i \rho_1^{\text{Д}}, \quad \rho_2 = -i \rho_2^{\text{Д}}, \quad \rho_0 = -i \rho_0^{\text{Д}}.$$

Подставим эти обозначения:

$$\mathbf{F}_1 = -i \frac{2\pi^2 (-i \rho_1^{\text{Д}}) (-i \rho_2^{\text{Д}}) R_2'^4}{9 (-i \rho_0^{\text{Д}}) D^2} \mathbf{e}_D.$$

Вычисляя произведение мнимых множителей:

- В числителе: $(-i) \cdot (-i) = -1$, значит $(-i\rho_1^D)(-i\rho_2^D) = -\rho_1^D\rho_2^D$.
- Учитывая внешний множитель $-i$, получаем в числителе i .
- В знаменателе $(-i)$ из ρ_0 .

Дробь по мнимым факторам:

$$\frac{i}{-i} = -1.$$

Следовательно, сила становится действительной:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{2\pi^2\rho_1^D\rho_2^DR_2'^4}{9\rho_0^DD^2}\mathbf{e}_D.$$

Подставляя $D = 2R_2'$, числовой коэффициент корректируется соответственно, оставляя силу действительной и с правильным знаком «минус», как для кулоновского типа взаимодействия.

XVI. Вывод уравнения для магнитного взаимодействия двух зарядов, движущихся в пространстве: теоретический вывод закона Био-Савара

Пусть два сгустка движутся со скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, а их «радиусы» плотностных кластеров одинаковы: $R_1' = R_2' = R'$. Плотность потока импульса определяется как:

$$\mathbf{P}_i = \frac{\rho_i}{c^2}\mathbf{V}_i,$$

где ρ_i — комплексная плотность энергии пространства (мнимая величина).

Кросс-член плотности потока импульса:

$$\Delta\mathbf{P}_{\text{cross}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2}\Delta\rho_1(\mathbf{r})\mathbf{V}_1 \otimes \Delta\rho_2(\mathbf{r} - \mathbf{D})\mathbf{V}_2.$$

Сила, действующая на систему, выражается через интеграл от градиента кросс-члена:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2) \cdot \oint \nabla [\Delta\rho_1(\mathbf{r}), \Delta\rho_2(\mathbf{r} - \mathbf{D})] dV.$$

Используя ранее вычисленные интегралы от градиента $I_{S_1}^{(c)}$ и $I_{S_2}^{(c)}$ и беря только их комплексную часть, получаем:

$$I_{S_1}^{(c)} = -i\frac{2\pi\rho_1\rho_2R'^4}{9D^2}\mathbf{e}_z,$$

$$I_{S_2}^{(c)} = i\frac{2\pi\rho_1\rho_2R'^4}{9D^2}\mathbf{e}_z.$$

Подставляя в выражение для силы и сохраняя мнимую единицу как множитель перед выражением, получаем:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho_0 c^2} (\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2) \cdot (I_{S_1}^{(c)} + I_{S_2}^{(c)}) = i \frac{\pi^2 R'^4}{9} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} \left[\mathbf{V}_1 (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{V}_2) - \mathbf{V}_2 (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{V}_1) \right].$$

Применяя тождество для двойного векторного произведения через единичный вектор $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}/|\mathbf{D}|$:

$$(\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{V}_2 - (\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{V}_2) \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}) - \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}),$$

получаем два отдельных векторных слагаемых для силы:

$$\mathbf{F} = i \frac{\pi^2 R'^4}{9} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} \left[\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}) - \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}) \right].$$

Направление силы определяется двойным векторным произведением скоростей сгустков и вектора, соединяющего центры сгустков $\mathbf{D}$. Модуль силы пропорционален R'^4 и $\rho_1 \rho_2 / (\rho_0 c^2 |\mathbf{D}|^2)$.

Полученное выражение описывает взаимодействие двух потоков плотности энергии пространства через интеграл от градиента плотности импульса и соответствует силе магнитного взаимодействия между двумя движущимися зарядами в пространстве.

16.1 Силы, действующие на каждый сгусток плотности энергии вакуума, закон Био-Савара для каждого из зарядов

Используя выражение для магнитного взаимодействия, получаем силы, действующие на каждый сгусток отдельно. Для двух сгустков с плотностями ρ_1 и ρ_2 , радиусами R' и скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ они имеют вид:

$$\mathbf{F}_1 = i \frac{\pi^2 R'^4}{9} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} \left[\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}) \right],$$

$$\mathbf{F}_2 = i \frac{\pi^2 R'^4}{9} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} \left[-\mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}) \right].$$

Эти силы — **локальные силы, действующие на каждый сгусток отдельно**, и они **не обнуляются по модулю для отдельного сгустка**.

То, что их сумма для пары сгустков равна нулю, отражает **закон действия и противодействия**: система в целом сохраняет импульс, но каждый сгусток испытывает свою индивидуальную силу.

В случае наших плотностных кластеров энергии пространства:

- Для первого сгустка сила направлена вдоль $\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}})$,
- Для второго — точно противоположна: $-\mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}})$.

Таким образом,

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0,$$

но

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| \neq 0.$$

Это полностью аналогично классическим кулоновским силам: два заряда испытывают равные и противоположные силы, которые **не исчезают для каждого заряда отдельно**, только их векторная сумма по всей системе равна нулю.

XVII. Физический статус вектора магнитной индукции — отказ от статуса самостоятельной сущности

Введённые обозначения

$$q_1 = 2\pi R'^2 \rho_1, \quad q_2 = 2\pi R'^2 \rho_2$$

позволяют компактно записать силы магнитного типа, действующие на отдельные сгустки:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= i \frac{q_1 q_2}{36 \rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} [\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}})], \\ \mathbf{F}_2 &= i \frac{q_1 q_2}{36 \rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} [-\mathbf{V}_2 \times (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}})]. \end{aligned}$$

На основе этих выражений вводится вектор магнитной индукции по формуле, формально аналогичной закону Лоренца:

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{V}_2 \times \mathbf{B}_2,$$

что даёт

$$\mathbf{B}_1 = i \frac{q_2}{36 \rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} (\mathbf{V}_2 \times \hat{\mathbf{D}}), \quad \mathbf{B}_2 = -i \frac{q_1}{36 \rho_0 c^2} \frac{1}{|\mathbf{D}|^2} (\mathbf{V}_1 \times \hat{\mathbf{D}}).$$

Эти формулы демонстрируют всё существенное: $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ выражаются напрямую через параметры **второго** сгустка (его «заряд» q_2 или q_1 , скорость, расстояние) и через глобальные константы среды (ρ_0, c). Следует сделать ряд принципиальных выводов — строгих, простых и полностью определяемых математикой и исходными предпосылками:

1. **Вектор $\mathbf{B}$ не существует сам по себе.** $\mathbf{B}$ определяется только как отношение вычисленной через интеграл силы к сочетанию $q\mathbf{V}$. Без второго движущегося сгустка выражение для $\mathbf{B}$ просто не возникает: интеграл перекрёстного члена равен нулю, поверхностные вклады исчезают, а «величина $\mathbf{B}$ » перестаёт быть числом. Следовательно, $\mathbf{B}$ не обладает автономной объективной существующей в природе природой — это величина, имеющая значение лишь в контексте двух (или более) источников.

2. **В — промежуточная математическая операция, а не причина взаимодействия.** Вся физика содержится в распределении плотности энергии вакуума $\rho(\mathbf{r})$ и в её потоках; сила получается как интеграл от градиента кросс-члена плотности потока импульса. Введение **В** служит лишь для компактного переписывания результата этого интеграла в форме, похожей на $q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$. Но переписывание не порождает новой физики: операция выделения **В** не добавляет механизм взаимодействия — она лишь даёт удобную графическую и вычислительную свёртку.
3. **Экспериментальная проверка простая и решающая.** Если убрать второй движущийся сгусток (или удержать его стационарным), интеграл перекрёстного члена равен нулю и результирующая сила на первый сгусток от такого перекрёстного потока отсутствует. Следовательно, «поле» **В**, которое в двухчастичной формуле выглядело как локальное свойство пространства, исчезает вместе со вторым источником — значит, оно не существует независимо. Это явный, бесспорный контрпример автономной природы **В**.
4. **«Закрученность» магнитного поля — иллюзия языковой и математической интерпретации.** Описания магнитного поля как «закрученного» или как обладающего собственным вихревым характером возникают из попыток приписать физическую материальность математической свёртке. На самом деле наблюдаемые эффекты рождаются ламинарным потоком плотности пространства вокруг движущихся сгустков: поток от одного источника, встречаясь с потоками другого, даёт результирующий интегральный эффект, который удобно записать через **В**. Но сам этот итог — след операции между потоками, а не свидетельство существования автономной закрутки.
5. **Сохранение импульса и локальные силы.** Силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ не нулевые по модулю для отдельных сгустков, но их векторная сумма равна нулю: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$. Это — прямое следствие консистентной интегральной операции и подтверждение закона действия и противодействия. Однако факт компенсации не делает каждую силу нулевой: локальные силы реальны и измеримы для каждого сгустка, они возникают из градиентов плотностных потоков, а не из действия какой-то дополнительной «магнитной материи».
6. **Практическое следствие для теории и экспериментов.** Вместо поиска «физической сущности **В**» следует менять экспериментальную и теоретическую парадигму: измеряйте и моделируйте распределения плотности энергии вакуума и их потоки (их градиенты и поверхностные вклады). Математическое выделение **В** остаётся удобным инструментом для представления результата, но не должно вводить в заблуждение о происхождении и природе силы.

XVIII. Плотность пространства как прото-материя зарядов, полей и корпускул

В изложенной выше модели вводится ключевое понятие — *плотность пространства* $\rho(\mathbf{r})$, которая является не геометрической размерностью, а физическим свойством самого пространства. На основании проведённого анализа можно сформулировать следующее определение и перечислить важнейшие свойства этой величины.

Определение

Плотность пространства $\rho(\mathbf{r})$ — это протоматерия, из которой формируются:

- локальные сгустки, которые мы воспринимаем как заряды;
- поле, которое мы традиционно называем электрическим (как интеграл от градиента распределения плотности);
- корпускулярные и квазикорпускулярные образования (локальные конфигурации плотности и её возмущений).

Анализ размерностей и физическая интерпретация

Анализ размерностей, выполненный в разделе с выводом потенциальной энергии, показывает, что по размерности $\rho(\mathbf{r})$ совпадает с плотностью энергии:

$$[\rho] \sim \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2},$$

и в нашем выводе фактически выступает как плотность энергии вакуума. Однако важная особенность: в математическом решении эта плотность проявляется как *мнимая* величина (компонента комплексного решения), то есть формально

$$\rho(\mathbf{r}) = i \rho^{\text{Д}}(\mathbf{r}),$$

и взаимодействует с такими же мнимыми возмущениями.

Ключевые свойства плотности пространства

1. **Не является эфиром в старом смысле.** Плотность пространства — это не отдельная субстанция, независимо существующая в пространстве; это свойство самой многомерной ткани пространства (включая 5D-компоненту), неотделимое от координатного континуума.
2. **Мнимая природа.** Математически плотность энергии вакуума выступает в виде мнимой величины в комплексном решении. Это не указание на фазовый сдвиг в классическом смысле, это признак того, что рассматриваемая компонента непосредственно проецируется на реальное трёхмерное наблюдаемое через специальные операции (в частности через ветвления логарифмических функций в интегралах).

3. **Способность переносить импульс.** Хотя плотность вакуума не обладает массой в смысле искривления метрики (она не «весит» так, как нормальная материя), будучи энергетической по своей природе, она способна переносить импульс. Интеграл от градиента потока этого импульса даёт наблюдаемую силу (в частности — магнитного типа), то есть

$$\mathbf{F} \sim \int_V \nabla [\text{плотность потока импульса}] dV.$$

4. **Возможность принимать отрицательные значения.** Плотность вакуума допускает локальные отрицательные значения, что отличает её от обычной барионной материи и делает её виртуальной (комплексной) по природе.
5. **Бесконечная делимость и связь с 5D.** Плотность пространства — континуальная величина, бесконечно делимая подобно координатам; её присутствие естественно в 5D-структуре пространства и проецируется на 3D в виде наблюдаемых полевых и корпускулярных эффектов.
6. **Дальность убывания и вклад в гравитации.** Локальные сгустки плотности, в том числе гравитационные объекты, тянут за собой эквивалентное распределение плотности пространства, которое убывает к бесконечности с характерным законом (в модели — примерно как $1/r^4$). Это обеспечивает конечность и согласованность вкладов в соответствующие интегралы.

Плотность пространства и электромагнитные волны

Финитная скорость передачи возмущений (скорость света c) определяет способ формирования и распространения возмущений плотности вакуума — электромагнитных волн. В данной математической модели именно движение и взаимодействие мнимых плотностных возмущений порождает волноподобные решения, которые в наблюдаемом 3D выглядят как электромагнитные поля и волны. (Детальное разворачивание этой идеи будет предметом следующей публикации.)

Объяснение результатов опытов типа Майкельсона–Морли

Классический вопрос: почему не наблюдается анизотропия при движении Земли относительно некоторой абсолютной среды? В нашей интерпретации ответ простой: плотность вакуума — свойство самого пространства, и движения зарядов, связанных с Землёй, движутся вместе с ней; если бы существовал фиксированный в пространстве «фон», это выразилось бы в анизотропных магнитных эффектах между зарядами, движущимися вместе с Землёй. Однако наблюдаемое отсутствие такой анизотропии говорит о том, что плотность пространства не является неподвижной абсолютной средой в старом понимании — она интегрирована в структуру пространства и движется/реагирует согласно локальным условиям, так что измеримые эффекты связаны с относительными конфигурациями и потоками плотности, а не с движением по отношению к «абсолютному эфирному фону».

Общий закон и связь с гравитацией

Выводится фундаментальный принцип: *количество движения плотности энергии вакуума в замкнутой системе равно нулю*. Каждый гравитационный объект также представляет собой сгусток плотности вакуума; его отсутствие электрического поля определяется равновесием положительных и отрицательных вкладов внутри сгустка. Подобно элементарным зарядам, гравитационный сгусток «таскает» за собой распределение плотности пространства, которое убывает с расстоянием, обеспечивая согласованное поведение в электромагнитных и гравитационных интегралах.

Непрерывность плотности вакуума и неквантованность электромагнитного взаимодействия

Континуальность плотности энергии вакуума — её свойство как непрерывного, бесконечно делимого измерения пространства — напрямую объясняет наблюдаемую непрерывность электромагнитного взаимодействия. Если бы «эфир» представлял собой набор дискретных квантов или «эфирных фотонов», то взаимодействие являлось бы по своей природе квантованным уже на уровне самой среды распространения; возбуждение такой дискретной среды неизбежно приводило бы к пороговым эффектам и скачкообразным откликам. Однако поскольку плотность вакуума в нашем представлении — это поле-атрибут самой ткани пространства, континуальное по определению, возмущения и их интегральные градиенты реализуются гладко: сила, поле и перенос импульса формируются без внутренних порогов, как следствие непрерывной структуры. Это вовсе не исключает существования квантов в других слоях физики (например, при взаимодействии с материальными носителями), но подчёркивает: квантование электромагнитных явлений как таковое не вытекает из дискретности среды распространения, а возникает из способов возбуждения, граничных условий и взаимодействия континуума плотности с дискретной материей. Следовательно, признание плотности вакуума прото-материей, континуальной по своей сути, снимает необходимость приписывать основную причину неквантованности электромагнитного обмена «эфирным квантам» и переводит фокус исследования на изучение гладких потоков плотности и их граничных взаимодействий с зарядами и телами.

Заключение

Плотность пространства следует рассматривать как протоматерию, из которой рождаются заряды, поля и корпускулы; это — плотность энергии вакуума с мнимой природой в математическом решении. Осознав и приняв эту сущность, становится возможным дать однозначное и непротиворечивое объяснение природе магнитного взаимодействия, роли интегралов от градиентов потоков импульса и ограничений, налагаемых законами сохранения.

XIX. Расширенные выводы: Геометрическая теория поля как фундамент новой физики

Представленная работа формирует целостную **онтологическую парадигму**, в которой электромагнитное, гравитационное и квантовое взаимодействия описываются не как взаимодействие между сущностями, а как различные формы самоорганизации **плотности энергии пространства** в расширенной 5-мерной геометрии. В отличие от классической картины, где поле постулируется как самостоятельная субстанция, здесь оно возникает как **вторичный феномен геометрического состояния пространства**, стремящегося к выполнению фундаментального принципа сохранения плотности.

Мы не отвергаем прежнюю физику — напротив, она оказывается **частным случаем более общей геометрической динамики**, в которой законы Кулона, Био–Савара, Максвелла и Шрёдингера выводятся как следствия структуры 5D-пространства и негеометрического измерения плотности энергии вакуума.

19.1 Геометризация поля: от постулата к тождеству

Классическая электродинамика вводит лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{\text{ЕМ}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu,$$

где поле $F_{\mu\nu}$ постулируется как физическая реальность, а потенциал A_μ — как вспомогательная математическая конструкция.

В нашей модели этот формализм возникает естественным образом из **внутренней геометрии пространства**, если рассматривать плотность энергии ρ как дополнительную координату, сопряжённую с метрическими компонентами 5D-пространства:

$$x^A = (x^\mu, \rho), \quad A = 0, 1, 2, 3, 5.$$

Производные по ρ дают естественные связи с четырёхмерными потенциалами:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} \sim A_\mu A_\nu, \quad \text{и} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \sim \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\rho}.$$

Тем самым поле Максвелла является **тензорной тенью деформации метрики по координате плотности энергии**.

Вариация действия

$$S = \int (R + \beta(\partial_A \rho)(\partial^A \rho) + \lambda \rho^2) \sqrt{-g} d^5x$$

по ρ и g_{AB} даёт в первом приближении систему уравнений, эквивалентную уравнениям Максвелла и Пуассона, что показывает:

Электромагнитное поле = геометрическое следствие деформации плотности пространства.

19.2 Восстановление структуры лагранжиана взаимодействия

Для двух сгустков плотности ρ_1, ρ_2 , находящихся в трёхмерных подпространствах $\mathbb{R}_1^3$ и $\mathbb{R}_2^3$, в 5D-формализме выводится:

$$W_{21}^{(x)} = \frac{1}{\rho_0} I_{\mathbb{R}_1^3} I_{\mathbb{R}_2^3} \sim \Phi_1 \Phi_2.$$

Плотность энергии взаимодействия тогда:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = -\epsilon_0 \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2$$

что является **точным аналогом классической формы лагранжиана**

Но в отличие от традиционной теории, здесь это выражение не постулируется, а **выводится из топологического взаимодействия двух деформаций плотности пространства**.

Таким образом, лагранжиан поля оказывается не произвольной конструкцией, а **геометрическим инвариантом**, возникающим при свёртке 5D-метрики на подпространство с плотностью.

19.3 Природа поля и устранение расходимостей

Классическая проблема самоэнергии точечного заряда ($U \rightarrow \infty$) устраняется естественным образом. Если рассматривать сгусток плотности как распределённую структуру радиуса R' , то собственная энергия поля:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \Phi)^2 dV$$

становится конечной, так как $\Phi(r)$ при $r < R'$ плавно переходит в ограниченную функцию.

Из закона сохранения плотности:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

следует, что собственные члены $\int E_i^2 dV$ обращаются в ноль (условие $W_{12} = 0$), а энергия системы определяется только перекрёстным взаимодействием:

$$U_{\text{взаим}} = \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV.$$

Тем самым устраняется необходимость в **перенормировке массы**, а понятие «вакуумная энергия» приобретает реальный геометрический смысл — это энергия деформации плотности фона.

19.4 Магнитное взаимодействие как динамика плотности

Классический закон Био–Савара:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'$$

в нашей модели представляет не «силовое поле», а **геометрическое выражение циркуляции плотности энергии**.

Поскольку $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, то:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A} \sim \int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV',$$

а $\mathbf{B}$ выступает оператором, отображающим ротор потока импульса:

$$\mathbf{B} \propto \nabla \times \left(\frac{\Delta \rho \mathbf{v}}{c^2} \right).$$

Следовательно, магнитное взаимодействие — это **релятивистская форма геометрического отклика плотности** при движении возмущений. Этим снимается дуализм $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$: обе величины — **разные проекции одного 5D-процесса перераспределения плотности**.

19.5 Связь с квантовой механикой: комплексность как реальность

Мнимая природа плотности $\rho = i\rho_n$ даёт прямое объяснение комплексности волновой функции:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \sim \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad |\Psi|^2 \sim |\Delta \rho|^2.$$

Таким образом, $|\Psi|^2$ соответствует плотности вероятности наблюдения вещественного следа возмущения мнимого континуума.

Уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \nabla^2 \Psi + U(\mathbf{r}) \Psi,$$

становится эффективным уравнением движения малых деформаций мнимой плотности, аналогом уравнения колебаний в слабонеоднородной среде. Квантовая неопределённость отражает **флуктуации плотности энергии вакуума**, а не фундаментальную случайность мира.

19.6 Унификация с гравитацией и динамикой метрики

Пусть 5D-метрика имеет вид:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \alpha^2 d\rho^2,$$

тогда варьирование действия:

$$S = \int (R - \beta(\nabla \rho)^2 - V(\rho)) \sqrt{-g} d^5x$$

приводит к уравнению:

$$G_{\mu\nu} = \beta \left(\partial_\mu \rho \partial_\nu \rho - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \rho)^2 \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\rho),$$

что связывает кривизну метрики и динамику плотности. В пределе слабых возмущений $V(\rho) \approx \rho^2$ получаем уравнение типа уравнений Максвелла. Таким образом, **электромагнетизм, гравитация и квантовая динамика** оказываются тремя гранями единой метагеометрической структуры.

19.7 Концептуальные последствия

1. Электродинамика перестаёт быть самостоятельной теорией и становится частным случаем общей геометрической динамики плотности.
2. Квантовая механика — не статистическая модель, а феноменологическое проявление колебаний плотности пространства.
3. Гравитация и электромагнетизм связаны общим лагранжианом, где энергия метрики и плотности — взаимные аспекты одного тензора состояния.
4. Тёмная материя и тёмная энергия естественно описываются как мнимые компоненты плотности вакуума, не взаимодействующие с вещественными возмущениями, но формирующие глобальную структуру космоса.
5. Философский принцип Оккама достигает завершённой формы: всё наблюдаемое многообразие — это самосогласованные возбуждения единственного поля — плотности пространства.

XX. Смысл и место новой парадигмы

Данная теория не противоречит классическим результатам Максвелла, Эйнштейна, Планка и Дирака; она **восстанавливает их из более фундаментальных соотношений** и устраняет искусственные постулаты, превращая их в логические следствия. Мы переходим от физики взаимодействующих объектов к **физике самосогласованных состояний континуума**, где материя, поле и пространство неразделимы.

Это не новая «версия» физики, а её **онтологическое завершение** — возвращение к идее, что природа едина и проста в своей глубинной структуре, а сложность мира есть следствие многообразия состояний одного универсального субстрата — **геометрической плотности энергии вакуума**.

Список литературы

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, Wiley, New York, 1999.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Wiley, 1997.
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th Edition, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995.

- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II, Addison-Wesley, 1964.
- [6] P. A. M. Dirac, “Quantised Singularities in the Electromagnetic Field,” *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 133, no. 821, pp. 60–72, 1931.
- [7] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, 1997.
- [8] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 769–789, 1949.
- [9] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Edition, Oxford University Press, 1958.
- [10] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 2008.
- [11] J. Schwinger, “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 416–417, 1951.
- [12] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, 1971.
- [13] C. Cohen-Tannoudji, *Atoms and Photons: Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley-VCH, 2003.
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics: 4th Edition Draft*, online draft, 2013.