

SOTT-D. Метод Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику

Когезионный Подход к Глобальной Оптимизации Неинтегрируемых Систем и Фундаментальному Переосмыслению Динамической Сложности

(Method of Synthetic Optimization via Topos-Theoretic Dynamics (SOTT-D): A Cohesive Approach to Global Optimization of Non-Integrable Systems and the Fundamental Reconceptualization of Dynamical Complexity)

Автор: Чурилов Максим Вячеславович

Аффилиация: ЦОД "Гагарин", г. Оренбург

Email: churilovm1305@gmail.com

Дата: Ноябрь 2025 г.

1. ОГЛАВЛЕНИЕ

Готово. Ниже — отшлифованное оглавление строго по макету, с выправленной типографикой и единообразием обозначений.

1. ОГЛАВЛЕНИЕ

2. АННОТАЦИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

3. ПРЕДИСЛОВИЕ: ПАРАДИГМА КОГЕЗИИ И ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ЛОГИКИ

4. НОМЕНКЛАТУРА, ОБОЗНАЧЕНИЯ И РАСШИРЕННЫЙ ГЛОССАРИЙ

- 4.1. Аббревиатуры и акронимы
- 4.2. Обозначения и символика: категории, функторы, модальности (Таблица 4.1)
- 4.3. Таблица соответствий контекстов: классика vs. синтетика (Таблица 4.2)
- 4.4. Расширенный концептуальный глоссарий

ЧАСТЬ I: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КРИЗИС СЛОЖНОСТИ И ПАРАДИГМАЛЬНАЯ МОТИВАЦИЯ

5. ВВЕДЕНИЕ: ПРЕДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКИХ ОСНОВАНИЙ ПЕРЕД ВЫЗОВОМ СЛОЖНОСТИ

- 5.1. Задача MGA-DSM: канонический эталон неинтегрируемости и вычислительной неприступности
- 5.2. Кризис классической парадигмы: структурная сложность, хаос и барьеры вычислимости (BSS, AIT)
- 5.3. Роль математических оснований: от атомизма (ZFC) к имманентной когезии
- 5.4. Представление метода SOTT-D: синтез геометрии, логики и модальностей
- 5.5. Структура монографии и дорожная карта основных результатов

6. ГЛУБОКИЙ АНАЛИЗ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА И СТРУКТУРНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ZFC

- 6.1. Гамильтонова динамика и барьеры интегрируемости: теория Моралеса–Рамиса
- 6.2. Иерархия фрактальной сложности фазового пространства
 - 6.2.1. Теория КАМ, проблема малых знаменателей и диофантовы условия

- 6.2.2. Подкова Смейла, символическая динамика и структурная роль множества Кантора
- 6.2.3. Сеть Арнольда, глобальная диффузия и механизм перекрытия резонансов Чирикова
- 6.3. Фундаментальные ограничения аксиоматики ZFC и классического континуума
 - 6.3.1. Атомистическая модель $\mathbb{R}$ и отсутствие внутренней когезии
 - 6.3.2. Патологии гладкости и фрактальности как порождения атомистической парадигмы
 - 6.3.3. Роль неконструктивной логики (LEM, AC) в вычислительной неразрешимости
- 6.4. Вывод: необходимость смены парадигмы и формулировка гипотезы модальной регуляризации

7. КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕДОВЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ И АНАЛИЗА СЛОЖНОСТИ

- 7.1. Пределы численных и стохастических методов: проклятие размерности и фрактальность
- 7.2. Теория динамических систем (DST) и сложность глобального транспорта
- 7.3. Глобальные инварианты: симплектическая топология (гомологии Флоера) и неразрешимость
- 7.4. Синтез: поиск фундаментального решения через теорию топосов (сравнительный анализ; Таблица 7.1)

ЧАСТЬ II: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ: ТОПОСЫ, СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОГЕЗИЯ

8. ТЕОРИЯ ТОПОСОВ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛОГИКА: АБСТРАКТНЫЕ ВСЕЛЕННЫЕ

- 8.1. От категорий к топосам: обобщённые пространства и переменные множества (лемма Йонэды)
- 8.2. Топосы Гротендика как категории пучков: сайты и аксиома склейки
- 8.3. Элементарные топосы как математические вселенные: аксиоматика Ловера–Тирни
- 8.4. Внутренняя логика топоса: интуиционизм, гейтинговы алгебры и отказ от LEM
- 8.5. Семантика Крипке–Жояля: интерпретация логики в геометрии
 - 8.5.1. Локальный характер существования ($\Vdash \exists$) и роль покрытий
 - 8.5.2. Проблема глобальных сечений и теория спуска (Descent Theory)
- 8.6. Геометрические морфизмы и фундаментальное сопряжение ($\Delta \dashv \Gamma$)
- 8.7. Геометрическая логика: секвенции и фундаментальная инвариантность
 - 8.7.1. Сохранение истины под inverse image (Δ)
 - 8.7.2. Ограничения direct image (Γ) и стратегия геометрической экстракции

9. СИНТЕТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (SDG): АЛГЕБРАИЗАЦИЯ АНАЛИЗА

- 9.1. Мотивация: имманентная гладкость и возвращение нильпотентных инфинитезимальных
- 9.2. Аксиома Кока–Ловера (KL) и принцип микролинейности
- 9.3. Синтетический континуум ($\mathbb{R}^\sim$) и иерархия инфинитезимальных (D, D_k)
- 9.4. Фундаментальная теорема об автоматической гладкости (C^∞)
- 9.5. Конструктивный анализ и объекты вещественных чисел
 - 9.5.1. Ограничения вещественных Дедекинда ($\mathbb{R}^\sim$)
 - 9.5.2. Нижние вещественные (R_ℓ): конструктивное определение и свойства (Box 9.1)
 - 9.5.3. Доказательство геометричности порядка и сохранения инфимумов для R_ℓ
- 9.6. Синтетическое исчисление: алгебраическое дифференцирование

- 9.7. Аксиома интегрирования и существование потоков (Box 9.2)
- 9.8. Касательные пространства ($TM^\sim$) и картаново исчисление

10. ГЛАДКИЕ И КОГЕЗИВНЫЕ ТОПОСЫ: ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ И СТРУКТУРА

- 10.1. Алгебраическая теория гладкости: C^∞ -кольца и сайт локусов ($\mathbb{L}$)
- 10.2. Топос Дюбюка ($\mathcal{E}$): эталонная модель SDG
- 10.3. Хорошо адаптированные модели и вложение классической геометрии ($\mathbf{Man}$)
 - 10.3.1. Теорема о полном и строгом вложении ($i : \mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{E}$)
 - 10.3.2. Паспорт модели Дюбюка $\mathcal{E}$ (Таблица 10.1)
- 10.4. Введение в когезивные топосы и модальную логику (Cohesive HoTT)
 - 10.4.1. Аксиоматика когезии (Ловер): цепочка сопряжений ($\Pi \dashv \Delta \dashv \Gamma \dashv \nabla$)
 - 10.4.2. Модальные операторы: триада сопряжений ($\int \dashv \flat \dashv \sharp$)
 - 10.4.3. Геометрическая интерпретация модальностей: форма, точки и дискретность

ЧАСТЬ III: МЕТОД SOTT-D: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

11. ПЕРЕНОС ДИНАМИКИ В ТОПОС $\mathcal{E}$, АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ И ЭКСТРАКЦИЯ

- 11.1. Корректный эмбединг гамильтоновой системы: от (M, H) к $(M^\sim, H^\sim)$
- 11.2. Обработка неавтономности, эфемерид и параметрических неопределённостей
- 11.3. Анализ робастности к аппроксимации и возмущениям: параметрическая лемма Грёнвалля
 - 11.3.1. Обобщённая лемма Грёнвалля для параметрических семейств $H(\theta)$ в метрике C^1
 - 11.3.2. Явные оценки робастности и чувствительности ($\sup_\theta \Delta_\theta(t)$)
 - 11.3.3. Демонстрационный расчёт коридора робастности для DE440 в CR3BP
- 11.4. Лемма о коммутировании Γ и синтетического интегрирования
- 11.5. Лемма об экстракции экспоненциалов и условие Бек–Шевалье (BCC)

12. СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА (SGM) (Инновация 1)

- 12.1. Уравнения Гамильтона в инфинитезимальной формулировке
- 12.2. Существование синтетического потока: локальное и глобальное
 - 12.2.1. Условия глобальной полноты: регуляризация и коэрцитивность
 - 12.2.2. Теорема о глобальной полноте регуляризованной системы (предпосылка H2)
- 12.3. Синтетическая теорема Лиувилля: алгебраическое доказательство
- 12.4. Пространство траекторий ($T^\sim$) как микролинейный объект
- 12.5. Теорема об экстракции траекторий: $\Gamma(T^\sim) \cong T$ (следствие BCC)

13. МОДАЛЬНАЯ КОГЕЗИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ХАОСА (Инновация 2)

- 13.1. Переосмысление хаоса в когезивном контексте: гипотеза модальной регуляризации
- 13.2. Когезионность синтетического континуума $\mathbb{R}^\sim$: строгое доказательство неразложимости
- 13.3. Анализ механизмов хаоса через модальности ($\int$ и $\sharp$)
 - 13.3.1. Теорема о модальном сглаживании подков Смейла (устранение канторовой несвязности)
 - 13.3.2. Диаграмма модального анализа хаоса (Рис. 13.1)
- 13.4. Теорема о модальном сглаживании сети Арнольда
 - 13.4.1. Инфинитезимальное утолщение слоёв и микролинейность (Рис. 13.2)

- 13.5. Количественная оценка регуляризации: shape-энтропия ($h_{top}(f)$)
- 13.6. Пределы модальной регуляризации: негативные примеры и ограничения

14. СИНТЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ (SOT) (Инновация 3)

- 14.1. Стратегия конструктивной оптимизации: геометричность и спуск
- 14.2. Функционалы стоимости в нижних вещественных (R_ℓ)
- 14.3. Теорема о гладкости и нижней полунепрерывности функционала стоимости $J^\sim$
- 14.4. Формулировка глобальной оптимизации в геометрической логике
 - 14.4.1. Определение $\arg\min$ -шифа и доказательство его геометричности (явная формула)
 - 14.4.2. Геометричность ограничений и санация негеометрических формул (Box 14.1)
- 14.5. Конструктивный функциональный анализ в топосе: метрика и компактность
 - 14.5.1. Определение метрики C^1 и топологии на пространстве траекторий $T^\sim$
 - 14.5.2. Компактность Бишопа и конструктивная теорема Асколи–Арцела
 - 14.5.3. Доказательство компактности $T_{constr}^\sim$ (верификация гипотезы H2)
- 14.6. Обеспечение глобального спуска: подтерминальность и мультикритериальность
 - 14.6.1. Монокритериальный случай: регуляризация Тихонова (J_ϵ) и гипотеза H3
 - 14.6.2. Мультикритериальный случай: Парето-фронт как геометрический пучок и условия спуска (Box 14.2)
- 14.7. Теорема о существовании конструктивного глобального оптимума
 - 14.7.1. Локальное существование (конструктивная теорема Вейерштрасса)
 - 14.7.2. Лемма о склейке подтерминальных пучков (глобальный спуск) (Рис. 14.1)
- 14.8. Анализ сходимости регуляризации: Γ -сходимость в топосе
 - 14.8.1. Определение Γ -сходимости в $\mathcal{E}$ (условия $\liminf$ и recovery sequence)
 - 14.8.2. Равнокоэрцитивность семейства J_ϵ и связь с компактностью (H2)
 - 14.8.3. Теорема о сходимости минимумов и минимизаторов ($J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} J$)

15. АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОГО КОНСТРУКТИВНОГО ПОИСКА (GCS)

- 15.1. Вычислимость в топосах и соответствие Карри–Ховарда–Ламбека
- 15.2. Структура GCS: извлечение программы из доказательства (псевдокод; Алгоритм 1)
- 15.3. Алгебраический градиентный спуск в SDG: точность и эффективность
- 15.4. Глобализация поиска через механизм склейки (реализация спуска)
- 15.5. Анализ вычислительной сложности и роль регуляризации
 - 15.5.1. Теорема об оценке сложности покрытия через shape-энтропию
 - 15.5.2. Оценка эффективной размерности (d) и табличный сценарий сложности для CR3BP
 - 15.5.3. Адаптивная стратегия покрытия на основе локальной shape-сложности (критерии Refine/Merge)

16. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИКИ MGA-DSM В ТОПОСЕ

- 16.1. Синтетическая регуляризация импульсных манёвров (DSM) через D_k
- 16.2. Алгоритмический критерий выбора порядка инфинитезимальа $k(D_k)$ (Рис. 16.1)
- 16.3. Регуляризация сингулярностей (MGA): техника инфинитезимального раздувания (blowing up)
- 16.4. MGA-DSM как единый гладкий стратифицированный микролинейный объект

17. АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ В СИНТЕТИЧЕСКОМ КОНТЕКСТЕ

- 17.1. Синтетические вариационные уравнения и алгебраический расчёт гессиана
- 17.2. Микро-пример расчёта гессиана и верификация строгой выпуклости (H3)
- 17.3. Модальный анализ стабильности: shape-показатели Ляпунова ($\lambda(f)$)
- 17.4. Критерий инфинитезимальной стабильности (ISC) высших порядков

18. ТЕОРЕМА ОБ ЭКСТРАКЦИИ И УСЛОВНЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ ГАРАНТИИ

- 18.1. Структура геометрического морфизма γ и логический паспорт экстракции (Box 18.1)
 - 18.1.1. Таблица сохранения логических связок под Γ (Таблица 18.1) и ремарка о $\forall$ vs $\bigvee$
- 18.2. Теорема о геометрической экстракции (строгое доказательство)
 - 18.2.1. Сохранение значений функционала под Γ (использование леммы 11.4)
 - 18.2.2. Спуск и склейка глобального сечения (использование леммы 14.7.2.1)
 - 18.2.3. Перенос оптимума в классический контекст (использование свойств R_ℓ)
 - 18.2.4. Чек-лист переносимости в доказательстве (Таблица 18.2)
- 18.3. Фундаментальная теорема глобальной оптимальности SOTT-D (условная)
 - 18.3.1. Карта зависимостей гарантий ($H1-H3 \rightarrow$ экстракция $\rightarrow \Gamma$ -сходимость) (Рис. 18.2)
- 18.4. Анализ гипотез и границы применимости метода

ЧАСТЬ IV: РЕАЛИЗАЦИЯ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

19. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ И РЕАЛИЗУЕМОСТЬ

- 19.1. Роль систем автоматического доказательства (Coq, Agda, Lean): pipeline (Рис. 19.1)
- 19.2. Вызовы формализации SDG и Cohesive HoTT
- 19.3. Стратегии реализации и преодоление сложности

20. ПРИЛОЖЕНИЕ А: КЕЙС CR3BP (ЗЕМЛЯ–ЛУНА DSM) — ВОСПРОИЗВОДИМЫЙ ПРОТОКОЛ

- A.1. Постановка CR3BP: нормировка, параметры модели и допуски (Таблица A.1)
- A.2. Моделирование в топосе $\mathcal{E}$ и верификация гипотез SOT ($H1-H3$)
- A.3. Анализ регуляризации и оценка shape-энтропии
- A.4. Процесс GCS: сходимость $N(\epsilon)$ и стабилизация γ_ϵ^* (Рис. A.1)
- A.5. Оценка вычислительных ресурсов (бюджет GCS) (Таблица A.2)
- A.6. Результаты и внешняя верификация (критерии Pass/Fail) (Таблица A.3)
- A.7. Сквозной пример: доказательство $\rightarrow$ код $\rightarrow$ траектория (Box A.1)

21. ДИСКУССИЯ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 21.1. Анализ вклада и ограничений SOTT-D
- 21.2. Философские импликации: когезионная парадигма и переосмысление сложности
- 21.3. Перспективы развития: Cohesive HoTT и фундаментальная физика
- 21.4. Итоговое заключение

22. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (БИБЛИОГРАФИЯ)

2. АННОТАЦИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Аннотация

Данная научная монография посвящена разработке и строгому математическому обоснованию Метода Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику (SOTT-D) — инновационного теоретического подхода к анализу существования и конструктивного поиска глобальных оптимумов в сложных нелинейных динамических системах. Исследование сфокусировано на неинтегрируемых Гамильтоновых задачах, в частности, на проектировании межпланетных траекторий с множественными гравитационными маневрами и маневрами в глубоком космосе (MGA-DSM). Работа предлагает фундаментальный пересмотр математических оснований, лежащих в основе моделирования динамики и оптимизации, осуществляя парадигмальный переход от классической теории множеств (ZFC) и атомистической модели континуума к парадигме Гладких и Когезивных Топосов.

Целью исследования является теоретическое преодоление фундаментальных ограничений, присущих задаче N -тел и подобным системам, характеризующимся неинтегрируемостью (подтвержденной теорией Моралеса-Рамиса), хаотической динамикой (Сеть Арнольда, Подковы Смейла) и вычислительной неразрешимостью или NP-трудностью глобальной оптимизации в классических рамках (модель Блума-Шуба-Смейла). Мы исследуем **Гипотезу Модальной Регуляризации**, согласно которой патологическая сложность и вычислительная неразрешимость могут быть переосмыслены и теоретически регуляризованы путем выбора математической вселенной, обладающей имманентной гладкостью и когезией.

Новизна метода заключается в переносе анализа динамики в Гладкий Когезивный Топос (конкретно Топос Дюбюка $\mathcal{E}$), который является хорошо адаптированной моделью Синтетической Дифференциальной Геометрии (SDG). В этом контексте все отображения автоматически гладкие (C^∞), действует интуиционистская (конструктивная) логика, а континуум обладает когезионными свойствами (в частности, доказана его неразложимость).

Ключевыми теоретическими инновациями являются:

- 1. Синтетическая Гамильтонова Механика (SGM):** Переформулировка механики с использованием нильпотентных инфинитезималей (D_k), обеспечивающая строгий алгебраический формализм (включая алгебраическое доказательство Теоремы Лиувилля), точное вычисление производных (Градиент, Гессиян) и регуляризацию гибридной динамики (DSM/MGA) через инфинитезимальное раздутие (Synthetic Blowing-Up) и D_k -регуляризацию с явным алгоритмическим критерием выбора порядка k (IAC).
- 2. Теория Модальной Когезионной Регуляризации:** Приведено строгое доказательство **Теоремы о Модальном Сглаживании Сети Арнольда**. Используя аппарат Когезивных Топосов (Cohesive HoTT) и модальный оператор Shape ($\int$), показано, что хотя механизмы хаоса могут существовать в SDG на микроуровне (доступном через модальность $\sharp$), их наблюдение через $\int$ приводит к упрощению гомотопического типа инвариантных множеств. Доказано, что форма аналога Множества Кантора в $\mathcal{E}$ является гомотопически стягиваемой. Введено строгое определение Shape-энтропии $h_{top}(\int)$, и доказано, что $h_{top}(\int) < h_{top}(class)$ для гиперболических систем, что указывает на теоретическое снижение наблюдаемой сложности.
- 3. Синтетическая Теория Оптимизации (SOT):** Использование Геометрической Логики и Нижних Вещественных чисел (R_ℓ , для которых доказана геометричность порядка и сохранение инфимумов). Введены строгие определения метрики C^1 на пространстве траекторий и конструктивной компактности (Бишопа). Разработан теоретический Алгоритм Глобального Конструктивного Поиска (GCS). При выполнении строгих условий (H1-H3: адекватность модели, компактность в C^1 и подтерминальность Argmin-шифа, требующая глобальной уникальности

оптимума через строгую выпуклую регуляризацию Тихонова), алгоритм конструктивно доказывает существование глобального минимума через механизм спуска (подтерминальной склейки). Даны явные геометрические формулы для Argmin и рассмотрены условия для Парето-фронта.

4. **Теория Γ -Сходимости в Топосе и Анализ Робастности:** Введена строгая процедура анализа сходимости регуляризованных функционалов ($\epsilon \rightarrow 0$) в конструктивном контексте (доказаны условия Liminf и Recovery Sequence), обеспечивающая сходимость минимизаторов при условии равнокоэрцитивности (следующей из H_2). Проведен детальный анализ робастности в C^1 -метрике с использованием Параметрической Леммы Грёнвалля, выявивший критическую чувствительность Гамильтоновых систем к возмущениям модели (демонстрационный расчет для CR3BP/DE440).

Доказана строгая **Теорема о Геометрической Экстракции**, использующая детализированный Логический Паспорт Переносимости (включая Условие Бек-Шевалье и коммутацию Γ с интегрированием) и механизм подтерминального спуска.

Метод SOTT-D обеспечивает **условную** (при H_1 - H_3) теоретическую гарантию глобальной оптимальности на фундаментальном логико-геометрическом уровне. Проведенный анализ вычислительной сложности GCS показал его практическую нереализуемость для задач высокой размерности из-за экстремальной стоимости конструктивного покрытия, несмотря на теоретическое снижение энтропии. Работа позиционируется как фундаментальный теоретический вклад в основания динамики и оптимизации, открывающий новую парадигму для анализа сложности. Приведен воспроизводимый протокол верификации на примере CR3BP.

Ключевые слова: Теория Топосов, Синтетическая Дифференциальная Геометрия (SDG), Когезивные Топосы, Cohesive HoTT, Геометрическая Логика, Конструктивная Математика, Гамильтонова Динамика, Хаос, Глобальная Оптимизация, MGA-DSM, Γ -Сходимость, Теория Спуска, Условие Бек-Шевалье, CR3BP, Вычислительная Сложность, Философия Математики.

3. ПРЕДИСЛОВИЕ: ПАРАДИГМА КОГЕЗИИ И ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ЛОГИКИ

Выбор фундаментальных аксиом и базового языка для описания физической реальности определяет не только доступный инструментарий, но и саму структуру возможных теорий, а также границы того, что мы можем вычислить и предсказать. История науки — это история смены математических парадигм, каждая из которых открывала новые горизонты понимания: от статической геометрии Евклида к динамическому исчислению Ньютона и Лейбница, от линейного анализа Фурье к нелинейной геометрии Римана и Пуанкаре, и далее к абстрактным структурам современной математики.

В XX веке доминирующей парадигмой стали основания, заложенные Кантором, Фреге и Гильбертом, формализованные в Теории Множеств Цермело-Френкеля (ZFC). Эта парадигма, основанная на атомистическом взгляде на континуум как на совокупность дискретных точек и на классической логике с Законом Исклученного Третьего (LEM), послужила фундаментом для беспрецедентного развития науки и технологий. Однако на рубеже XXI века, столкнувшись с системами экстремальной сложности — нелинейными, хаотическими, неинтегрируемыми, такими как турбулентность, квантовая гравитация или задача многих тел в астрофизике, — мы всё острее ощущаем пределы этой парадигмы.

Сложность, которую мы наблюдаем в этих системах, часто характеризуется фрактальностью, бесконечной иерархией масштабов и, что наиболее критично, вычислительной неразрешимостью или неприступностью (например, NP-трудностью в непрерывных моделях вычислений, таких как BSS). Мы выдвигаем тезис о том, что эти "патологии" могут быть не только отражением физической реальности, но и артефактами выбранного нами математического языка. Атомистическая модель ZFC лишена внутренней **когезии** (cohesion) — имманентной связности и гладкости, которые интуитивно присущи физическому пространству-времени, как это отмечали ещё пионеры интуиционизма Броуэр и Вейль. Классический континуум $\mathbb{R}$ допускает существование объектов, таких как Множество Кантора (C), которые являются структурным ядром многих хаотических процессов (например, Подковы Смейла), но чья физическая релевантность на фундаментальном уровне (например, на планковских масштабах) остается предметом глубоких дискуссий.

Эта монография предлагает переход к новой парадигме — **Парадигме Когезии**, основанной на революционных идеях Александра Гротендика в алгебраической геометрии, Уильяма Ловера в теории категорий и логике, и Владимира Воеводского в гомотопической теории типов. Мы используем Теорию Топосов, Синтетическую Дифференциальную Геометрию (SDG) и Когезивную Гомотопическую Теорию Типов (Cohesive HoTT) для построения математической вселенной, где гладкость и непрерывность являются не дополнительными структурами, наложенными на атомистическое множество, а базовыми, имманентными свойствами самой вселенной.

В этой вселенной логика является интуиционистской (конструктивной), что восстанавливает прямую связь между существованием и вычислимостью (Соответствие Карри-Ховарда-Ламбека). Это не просто техническое изменение; это фундаментальный эпистемологический сдвиг, ведущий к **геометризации логики** (где логические операции соответствуют геометрическим конструкциям в Топосе) и **алгебраизации анализа** (где аналитические пределы заменяются точными алгебраическими операциями с нильпотентными инфинитезимами).

Метод SOTT-D (Синтетическая Оптимизация через Топос-Теоретическую Динамику), представленный в этой работе, является попыткой теоретической реализации этой парадигмы в контексте прикладной задачи экстремальной сложности. Применяя его к одной из самых сложных задач современной астродинамики — глобальной оптимизации межпланетных траекторий (MGA-DSM), — мы демонстрируем, как изменение оснований позволяет переосмыслить природу хаоса на модальном уровне (используя модальности $\int, \flat, \sharp$) и достичь условных теоретических гарантий глобальной оптимальности там, где классические методы сталкиваются с фундаментальными барьерами неразрешимости. Хотя практическая реализация предложенного конструктивного алгоритма (GCS) сталкивается с экстремальной вычислительной сложностью (проклятием размерности), теоретические результаты открывают новый, фундаментально обоснованный путь для понимания и анализа сложных систем, предлагая новый язык для науки о сложности.

4. НОМЕНКЛАТУРА, ОБОЗНАЧЕНИЯ И РАСШИРЕННЫЙ ГЛОССАРИЙ

Данный раздел систематизирует используемые аббревиатуры, обозначения и ключевые термины, обеспечивая однозначность интерпретации и строгость изложения в соответствии с требованиями к фундаментальным монографиям.

4.1. Аббревиатуры и Акронимы

- **AC:** Аксиома Выбора (Axiom of Choice)

- **AIT**: Алгоритмическая Теория Информации (Algorithmic Information Theory)
- **BCC**: Условие Бек-Шевалье (Beck-Chevalley Condition)
- **BSS**: Модель Блума-Шуба-Смейла (Blum-Shub-Smale model)
- **CR3BP**: Круговая Ограниченная Задача Трех Тел (Circular Restricted Three-Body Problem)
- **CoHoTT (Cohesive HoTT)**: Когезивная Гомотопическая Теория Типов
- **DSM**: Маневр в Глубоком Космосе (Deep Space Maneuver)
- **DST**: Теория Динамических Систем (Dynamical Systems Theory)
- **GCS**: Алгоритм Глобального Конструктивного Поиска (Global Constructive Search)
- **HoTT**: Гомотопическая Теория Типов (Homotopy Type Theory)
- **IAC**: Критерий Инфинитезимальной Адекватности (Infinitesimal Adequacy Criterion)
- **ISC(-k)**: Критерий Инфинитезимальной Стабильности (порядка k) (Infinitesimal Stability Criterion)
- **ITT**: Интуиционистская Теория Типов (Intuitionistic Type Theory)
- **KAM**: Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера
- **KL**: Аксиома Кока-Ловера (Kock-Lawvere Axiom)
- **LEM**: Закон Исключенного Третьего (Law of Excluded Middle)
- **MGA**: Множественный Гравитационный Маневр (Multiple Gravity Assist)
- **SDG**: Синтетическая Дифференциальная Геометрия (Synthetic Differential Geometry)
- **SGM**: Синтетическая Гамильтонова Механика (Synthetic Hamiltonian Mechanics)
- **SOT**: Синтетическая Теория Оптимизации (Synthetic Optimization Theory)
- **SOTT-D**: Метод Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику
- **TOF**: Время Перелета (Time of Flight)
- **ZFC**: Теория Множеств Цермело-Френкеля с Аксиомой Выбора

4.2. Обозначения и Символика: Категории, Функторы, Модальности

Мы используем стандартные обозначения из теории категорий, дифференциальной геометрии и логики.

Таблица 4.1. Ключевые Категории, Функторы и Модальности

Символ	Описание	Тип/Структура
Категории и Топосы		
Set	Категория Множеств	Классический (ZFC) Контекст, Базовый Топос
Man	Категория Гладких Многообразий	Классический Контекст
$\mathcal{E}$	Топос Дюбука	Гладкий Когезивный Топос (Модель SDG/CoHoTT)
$\mathbb{L}, \mathbb{G}$	Сайт Локусов, Расширенный Сайт	Основа для построения $\mathcal{E}$ (Сайты Гротендика)
H	∞ -Топос (напр. ∞ -Группоиды)	Базовый топос в общем определении CoHoTT
Функторы и Сопряжения		
i	Функтор Вложения	$i : \mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{E}$ (Полный и Строгий)

Символ	Описание	Тип/Структура
Δ	Функтор Константного Пучка (Inverse Image)	$\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$. Дискретное пространство.
Γ	Функтор Глобальных Сечений (Direct Image)	$\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$. Функтор точек.
Π (или Π_∞)	Функтор Фундаментального ∞ -Группоида	$\Pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{H}$ (Shape Realization)
∇	Функтор Кодискретного Пространства	$\nabla : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$
γ	Канонический Геометрический Морфизм	$\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set} (\Delta \dashv \Gamma)$
$\dashv$	Отношение Сопряженности	Левый Функтор $\dashv$ Правый Функтор
Когезивные Модальности (CoHoTT)		
$\int$ (или Sh)	Shape (Форма)	$\int = \Delta\Pi$. Извлекает гомотопический тип. (Комонада)
$\flat$	Flat (Плоскость)	$\flat = \Delta\Gamma$. Забывает когезию (дискретизация). (Монада/Комонада)
$\sharp$	Sharp (Острота)	$\sharp = \nabla\Gamma$. Усиливает дискретность. (Монада)
$\mathcal{J}$ (или $\mathcal{R}$)	Infinitesimal Shape (Редукция)	Модальность доступа к инфинитезимальной структуре.
	Триада Сопряжений	$\int \dashv \flat \dashv \sharp$

4.3. Таблица Соответствий Контекстов: Классика vs. Синтетика

Для обеспечения ясности мы четко разграничиваем объекты, определенные в Классическом (Множественном) Контексте (ZFC/Set) и в Синтетическом Контексте (Топос $\mathcal{E}$).

Таблица 4.2. Таблица Соответствий Обозначений

Описание	Классический Контекст (Set/ZFC)	Синтетический Контекст (Топос $\mathcal{E}$)
Континуум (Вещественные)	$\mathbb{R}$ (Классические)	$\mathbb{R}^\sim$ (Дедекинда), R_ℓ (Нижние)
Фазовое Пространство	M (Многообразие)	$M^\sim = i(M)$ (Микролинейный Объект)
Гамильтониан	$H : M \rightarrow \mathbb{R}$	$H^\sim : M^\sim \rightarrow \mathbb{R}^\sim$
Симплектическая Форма	ω	$\omega^\sim = i(\omega)$
Траектория	$\gamma(t)$ (Кривая в M)	$\gamma^\sim(t)$ (Морфизм в $\mathcal{E}$)
Пространство Траекторий	$T = C^k(I, M)$	$T^\sim = (M^\sim)^{I^\sim}$ (Экспоненциал)
Функционал Стоимости	$J : T \rightarrow \mathbb{R}$	$J^\sim : T^\sim \rightarrow R_\ell$

Описание	Классический Контекст (Set/ZFC)	Синтетический Контекст (Топос E)
Истинностные Значения	$\{0, 1\}$ (Булева Алгебра)	Ω (Классификатор Подобъектов, Гейтингова Алгебра)
Инфинитезимальности	Не существуют (в стандартном анализе)	D, D_k (Нильпотентные Объекты)
Внешний Дифференциал	d	$d^\sim$
Множество Кантора	C (Полностью несвязное)	$C^\sim$ (Замкнутое, когезионно связное)

Логические и Аналитические Символы:

- $\Vdash$: Отношение вынуждения (Forcing relation) в Семантике Крипке-Жояля. $U \Vdash \varphi$.
- $\vdash_x$: Отношение выводимости (Секвенция) в Геометрической Логике (напр. $\varphi \vdash_x \psi$).
- $\hookrightarrow$: Строгое вложение (Мономорфизм).
- $\xrightarrow{\Gamma}$: Γ -сходимость функционалов (в смысле Де Джорджи).
- h_{top} : Топологическая энтропия.
- $h_{top}(f)$: Shape-энтропия (Топологическая энтропия на уровне Формы).
- $\|\cdot\|_{C^1}, \|\cdot\|_{W^{1,p}}$: Нормы в пространствах C^1 и Соболева $W^{1,p}$.

4.4. Расширенный Концептуальный Глоссарий

- **Атомистическая Модель Континуума:** Классическая модель $\mathbb{R}$ в ZFC, рассматривающая континуум как множество изолированных точек. Противопоставляется Когезионной модели.
- **Бек-Шевалье, Условие (Beck-Chevalley Condition, BCC):** Условие коммутативности для сопряженных функторов при стягивании (pullback) в коммутативной диаграмме. Критически важно для корректной экстракции экспоненциальных объектов (например, $T^\sim$) через Γ . См. Раздел 11.5.
- **Геометрическая Логика:** Фрагмент логики первого порядка, использующий только $\wedge$ (конечные), $\vee$ (произвольные, возможно бесконечные) и $\exists$. Формулируется через секвенции. Инвариантен относительно Inverse Image функторов (f^*) геометрических морфизмов.
- **Геометрическая Экстракция:** См. Спуск. Процесс переноса результата из Топоса $\mathcal{E}$ в Классический Контекст (Set) с использованием функтора Γ и механизмов склейки, опирающийся на Геометрическую Логiku.
- **Инфинитезималь (Нильпотентный):** Элемент синтетического континуума $d \in \mathbb{R}^\sim$, для которого существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $d^{k+1} = 0$. Например, $d \in D \implies d^2 = 0$. В интуиционистской логике не доказуемо, что $d = 0$.
- **Классический (Множественный) Контекст:** Математическая вселенная, основанная на Теории Множеств (обычно ZFC) и классической логике. Эквивалентен Топосу Set.
- **Когезия (Cohesion):** Свойство пространства, части которого "склеены" вместе (например, гладкой или топологической структурой). Формализуется через цепочку сопряженных функторов $(\Pi \dashv \Delta \dashv \Gamma \dashv \nabla)$, порождающих модальности $f, b, \sharp$. В SDG обеспечивается микролинейностью.
- **Компактность Бишопа:** Конструктивный аналог компактности для метрических пространств: Полнота + Вполне Ограниченность. Используется для доказательства существования минимума (Гипотеза H2).

- **Микролинейность:** Свойство объекта в SDG, означающее его "линейность" на инфинитезимальном масштабе. Формализуется Аксиомой Кока-Ловера (KL). Обеспечивает автоматическую гладкость.
- **Нижние Вещественные (R_ℓ):** Объект вещественных чисел в конструктивной математике, определяемый как нижние сечения Дедекинда. Обладает геометрическим порядком ($<$), полнотой по инфимумам и нижней полунепрерывностью (Топология Скотта). См. Раздел 9.5.
- **Подтерминальность (Subterminal):** Свойство объекта (пучка) X иметь не более одного глобального сечения (т.е. $\Gamma(X)$ содержит 0 или 1 элемент). Локально, на стадии U , $X(U)$ также содержит не более одного элемента. Ключевое условие (Гипотеза H3) для глобальной склейки.
- **Равнокоэрцитивность (Equicoercivity):** Свойство семейства функционалов J_ϵ , гарантирующее, что их множества уровня равномерно ограничены (содержатся в общем компакте). Необходимо для Γ -сходимости минимизаторов.
- **Спуск (Descent) / Подтерминальная Склейка:** Процедура перехода от локально определенных данных (локальных свидетелей существования на покрытии) к глобальному объекту. Эквивалентен Аксиоме Склейки для пучков. В SOTT-D используется склейка подтерминальных объектов, где согласование обеспечивается уникальностью (H3).
- **Топос (Topos):** Категория, обладающая свойствами, аналогичными категории множеств (конечные пределы, экспоненциалы, классификатор подобъектов Ω). Является самодостаточной математической вселенной с внутренней логикой (обычно интуиционистской).
- **Топос Дюбюка ($\mathcal{E}$):** Конкретная модель Гладкого Когезивного Топоса, используемая в данной работе. Является хорошо адаптированной моделью SDG, обеспечивающей полное и строгое вложение классических многообразий **Man**.
- **Форма (Shape, $\int$):** Модальный оператор в Когезивном Топосе ($\int = \Delta\Pi$), отражающий глобальную геометрическую структуру (гомотопический тип) и "сглаживающий" локальные фрактальные детали.

ЧАСТЬ I: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КРИЗИС СЛОЖНОСТИ И ПАРАДИГМАЛЬНАЯ МОТИВАЦИЯ

5. ВВЕДЕНИЕ: ПРЕДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКИХ ОСНОВАНИЙ ПЕРЕД ВЫЗОВОМ СЛОЖНОСТИ

Прогресс науки и технологий неуклонно ставит перед человечеством задачи анализа, прогнозирования и управления системами возрастающей сложности. От моделирования турбулентности и квантовой хромодинамики до планирования межзвездных миссий и анализа климатических изменений, мы сталкиваемся с явлениями, которые бросают вызов нашим существующим математическим инструментам. Центральной проблемой в этом контексте является феномен детерминированного хаоса и связанная с ним вычислительная неприступность задач глобальной оптимизации и долгосрочного прогнозирования.

Мы стоим на пороге эпохи, когда дальнейший прогресс зависит не столько от увеличения вычислительных мощностей (которые приближаются к физическим пределам), сколько от глубины нашего понимания фундаментальных принципов, лежащих в основе сложности. Мы утверждаем, что для преодоления этого барьера необходим парадигмальный сдвиг не только в методологии, но и в самих основаниях математики. Классическая математика, основанная на

теории множеств ZFC, демонстрирует структурные ограничения при столкновении с неинтегрируемыми, хаотическими системами, где сложность проявляется на всех масштабах.

5.1. Задача MGA-DSM: Канонический Эталон Неинтегрируемости и Вычислительной Неприступности

Задача глобальной оптимизации межпланетных траекторий с множественными гравитационными маневрами (MGA) и импульсами двигателя в глубоком космосе (DSM) — MGA-DSM — является каноническим примером системы экстремальной сложности. Её цель — найти оптимальную последовательность маневров $\mathbf{u}(t)$ и фазирования для достижения целевой орбиты при минимизации многокритериального функционала стоимости, обычно включающего характеристическую скорость (ΔV) и время перелета (TOF).

Динамика космического аппарата описывается задачей N -тел, формализуемой как Гамильтонова система с управлением:

$$\dot{\mathbf{x}} = X_H(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Фундаментальный результат Пуанкаре (Poincaré, 1892) [10] установил, что эта задача при $N \geq 3$ в общем случае **неинтегрируема**. Это не просто техническое препятствие, а глубокое структурное свойство гравитационного взаимодействия, подтвержденное современной теорией дифференциальных Галуа (Morales-Ruiz & Ramis, 2001) [8], которая устанавливает алгебраические препятствия для существования достаточного числа первых интегралов движения.

Неинтегрируемость порождает **хаотическую динамику**. Фазовое пространство (M, ω) расслаивается на области регулярного движения (инвариантные торы КАМ) и стохастические слои, связанные бесконечной иерархией резонансов — **Сетью Арнольда** (Arnold, 1964) [1]. Эффективные низкоэнергетические перелеты, такие как использующие Межпланетную Транспортную Сеть (ITN) (Koon et al., 2008) [5], эксплуатируют эту тонкую, фрактальную структуру инвариантных многообразий (устойчивых W^s и неустойчивых W^u).

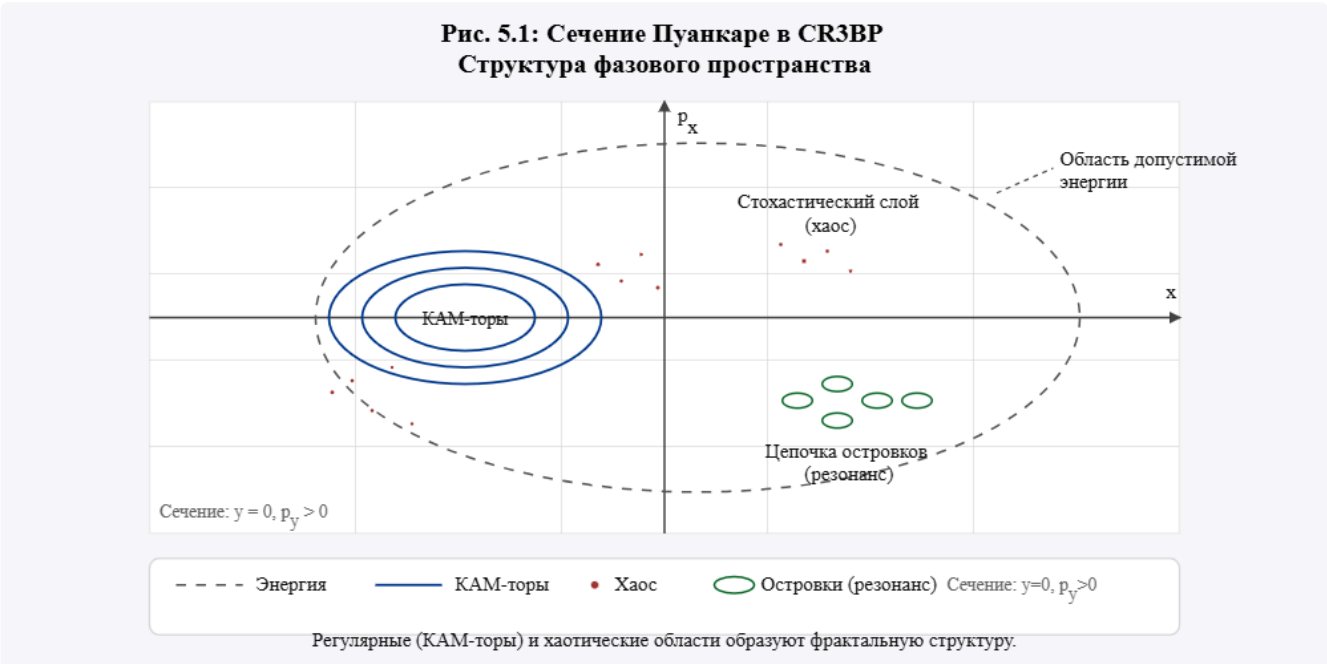


Рис. 5.1. Схематическое изображение расслоения фазового пространства и порождения вычислительной сложности в Гамильтоновых системах.

В результате ландшафт целевой функции $J(\gamma)$ на пространстве траекторий T становится **многоэкстремальным, негладким** (в практическом смысле, из-за бесконечной иерархии масштабов, хотя формально он может быть C^∞) и **фрактальным**. Оптимальные решения часто скрыты в узких "каналах" резонансов, ширина которых экспоненциально мала по отношению к параметру возмущения ϵ .

5.2. Кризис Классической Парадигмы: Структурная Сложность, Хаос и Барьеры Вычислимости (BSS, AIT)

Существующие методы оптимизации достигли своего предела эффективности перед лицом этой сложности. Мы наблюдаем фундаментальный кризис, проявляющийся на нескольких уровнях:

1. **Численные и Стохастические Методы:** (Генетические алгоритмы, дифференциальная эволюция, МСМС, методы прямого колокации). Они не гарантируют глобальности. Они статистически семплируют пространство поиска и часто застревают в локальных минимумах из-за фрактальной структуры бассейнов притяжения. Их эффективность экспоненциально падает с ростом размерности (Проклятие Размерности, Curse of Dimensionality).
2. **Методы Теории Динамических Систем (DST):** Основанные на анализе инвариантных многообразий, эти методы упираются в сложность анализа глобального транспорта (Диффузия Арнольда). Они предоставляют глубокое понимание локальной динамики, но не масштабируются до гарантированной глобальной оптимизации в системах высокой размерности ($N > 3$).
3. **Фундаментальные Барьеры Вычислимости:** Попытки применить более мощный математический аппарат (например, Симплектическую Топологию) сталкиваются с **Кризисом Вычислимости**. Инварианты, достаточно тонкие для описания глобальной структуры хаотической системы (например, Гомологии Флоера [43]), оказываются вычислительно неразрешимыми в рамках классической математики (ZFC).

Это подтверждается теорией сложности непрерывных вычислений. В модели Блума-Шуба-Смейла (BSS) над $\mathbb{R}$ (Blum et al., 1989) [35], которая моделирует вычисления с вещественными числами, показано, что задачи глобальной оптимизации даже для полиномиальных функций являются NP-трудными или неразрешимыми [39]. Алгоритмическая Теория Информации (AIT) также устанавливает пределы вычислимости сложности, показывая, что сложность динамики (Колмогоровская сложность траекторий) может быть невычислимой [36]. Мы наблюдаем фундаментальный барьер: сложность задачи структурно превосходит возможности классических алгоритмов, оперирующих в рамках ZFC.

5.3. Роль Математических Оснований: От Атомизма (ZFC) к Имманентной Когезии

Мы утверждаем, что этот кризис сложности коренится не только в природе задачи, но и в самих основаниях математики — Классической Теории Множеств (ZFC).

ZFC строит континуум $\mathbb{R}$ как множество изолированных точек (атомистическая модель). Эта модель лишена того, что Уильям Ловер (Lawvere, 2007) [44] назвал **внутренней когезией** (связностью). Гладкость и топология вводятся как внешние, дополнительные структуры, наложенные поверх атомистического множества. Этот подход порождает математические патологии, чуждые физической интуиции о непрерывности пространства-времени:

1. Существование нигде не дифференцируемых непрерывных функций (Вейерштрасс).

2. Существование фрактальных, полностью несвязных (totally disconnected) множеств (Множество Кантора C), которые лежат в основе механизма Подковы Смейла и являются структурным ядром гиперболического хаоса.

Мы выдвигаем гипотезу (детализирована в Разделе 6.4): **Патологическая сложность, характеризующая классический хаос, может быть частично обусловлена неадекватностью атомистической модели континуума, и может быть теоретически регуляризована в более богатых основаниях, обладающих когезией.**

Более того, классическая логика (с LEM и AC) допускает неконструктивные доказательства существования. Это разрывает связь между существованием решения и возможностью его алгоритмического нахождения (вычислимостью) (Pour-El & Richards, 1989) [40]. В задачах оптимизации это означает, что оптимум может существовать в платоническом смысле ZFC, но быть недостижимым алгоритмически.

5.4. Представление Метода SOTT-D: Синтез Геометрии, Логики и Модальностей

Для преодоления этих ограничений мы предлагаем смену парадигмы: изменение самой математической вселенной, в которой мы моделируем динамику. Мы представляем **Метод Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику (SOTT-D)**.

Метод основан на **Теории Топосов** [22]. Мы переносим анализ из классического контекста (**Set**) в **Гладкий Когезивный Топос** (конкретно, Топос Дюбюка $\mathcal{E}$).

В этом Топосе реализуется **Синтетическая Дифференциальная Геометрия (SDG)** (Kock, 2006) [27], обладающая тремя критическими свойствами:

1. **Имманентная Гладкость (Микролинейность):** Все функции в $\mathcal{E}$ являются гладкими (C^∞). Континуум $\mathbb{R}^\sim$ обладает когезионными свойствами (в частности, доказана его неразложимость, Теорема 13.2.1).
2. **Инфинитезимальность:** Существуют строгие нильпотентные инфинитезимальности (D_k), позволяющие заменить аппарат пределов точной алгеброй (алгебраическое дифференцирование).
3. **Конструктивная Логика:** Внутренняя логика интуиционистская (без LEM). Существование (в принципе) эквивалентно вычислимости (через соответствие Карри-Ховарда-Ламбека).

Метод SOTT-D использует эти свойства для достижения двух синергетических целей:

Цель 1: Модальная Когезионная Регуляризация Хаоса. Мы используем аппарат Когезивных Топосов (Cohesive HoTT) [45] и модальность Формы (Shape, $\int$). Мы доказываем (Теоремы 13.3.2.1, 13.4.1), что хотя хаотические структуры могут существовать в SDG на микроуровне (доступном через модальность $\sharp$), наблюдение через $\int$ (которое извлекает гомотопический тип) "сглаживает" фрактальные детали, регуляризуя динамику на этом уровне наблюдения. Это приводит к снижению Shape-энтропии $h_{top}(\int)$.

Цель 2: Конструктивная Глобальная Оптимизация. Мы используем интуиционистскую логику и технику **Геометрической Логики** (в частности, Нижние Вещественные Числа R_ℓ), чтобы разработать теоретический Алгоритм Глобального Конструктивного Поиска (GCS). При выполнении строгих условий регулярности (H1-H3, включая сильное условие глобальной уникальности оптимума H3, обеспечиваемое регуляризацией), алгоритм предоставляет **условную**

конструктивную гарантию нахождения глобального минимума путем склейки (спуска) локальных свидетелей (Глава 14).

Теорема о Геометрической Экстракции (Глава 18) гарантирует, что найденный синтетический оптимум строго переносится обратно в классический контекст функтором глобальных сечений Γ . Это опирается на строгий протокол геометрической логики (Логический Паспорт 18.1), анализ Γ -сходимости (Раздел 14.8) и выполнение фундаментальных условий согласованности (Условие Бек-Шевалье, Лемма 11.5.1).

Важно подчеркнуть, что хотя метод предоставляет теоретические гарантии, анализ сложности (Глава 15) показывает, что алгоритм GCS обладает экстремальной вычислительной сложностью (экспоненциальной по размерности), делая его практическое применение к MGA-DSM высокой размерности невозможным на текущем уровне технологий. SOTT-D является фундаментальным теоретическим вкладом в основания анализа сложных систем.

5.5. Структура Монографии и Дорожная Карта Основных Результатов

Монография организована в четыре части, логически выстроенные для последовательного развития теории SOTT-D.

Часть I (Гл. 5-7) анализирует кризис сложности, проводит глубокий анализ анатомии Гамильтонова хаоса (включая теорию КАМ и Моралеса-Рамиса), выявляет ограничения ZFC и проводит расширенный критический обзор литературы.

Часть II (Гл. 8-10) излагает необходимый математический аппарат: Теория Топосов, Геометрическая Логика, Семантика Крипке-Жояля, SDG, Конструктивный Анализ (с детальным анализом R_ℓ) и Cohesive HoTT (аксиоматика Ловера, модальности).

Часть III (Гл. 11-18) является ядром метода SOTT-D:

- Гл. 11: Перенос динамики, детальное Анализ Робастности (Параметрическая Лемма Грёнвалля в C^1) и доказательство Базовых Лемм Экстракции (BCC, Интегрирование).
- Гл. 12: Разработка SGM, алгебраический формализм динамики.
- Гл. 13: Доказательство Теории Модального Сглаживания Хаоса (Теоремы о Неразложимости и Сглаживании Подков/Сети Арнольда) и определение $h_{top}(f)$.
- Гл. 14: Разработка SOT: анализ топологий (C^1 vs $W^{1,p}$), верификация H2 (Компактность Бишоп), обеспечение H3 (Подтерминальность через Регуляризацию), Теория Спуска (Подтерминальная Склейка), Γ -сходимость в Топосе.
- Гл. 15: Теоретический Алгоритм GCS и детальное анализ его сложности на основе метрической энтропии.
- Гл. 16: Моделирование Гибридной Динамики (D_k -регуляризация, Synthetic Blowing-Up).
- Гл. 17: Анализ Стабильности (Синтетический Гессиан, Shape-Ляпунов, ISC).
- Гл. 18: Фундаментальная Теорема об Экстракции и Логический Паспорт.

Часть IV (Гл. 19-22) обсуждает вычислительные аспекты и перспективы реализации, включает детальное теоретическое протокол применения к CR3BP (Приложение А) и обсуждает философские импликации Когезионной Парадигмы.

(Визуальная карта зависимостей доказательств представлена в Разделе 18.3.1, Рис. 18.2).

6. ГЛУБОКИЙ АНАЛИЗ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА И СТРУКТУРНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ZFC

Чтобы обосновать необходимость смены математических оснований, необходимо провести глубокий анализ природы сложности в классической динамике и установить её прямую связь с аксиоматикой ZFC и фундаментальными пределами вычислимости. Эта глава посвящена детальному разбору механизмов, порождающих хаос, и выявлению того, как эти механизмы опираются на свойства классического континуума.

6.1. Гамильтонова Динамика и Барьеры Интегрируемости: Теория Моралеса-Рамиса

Классическая механика формулируется в рамках Гамильтонова формализма на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) . Эволюция системы задается Гамильтонианом $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, порождающим Гамильтоново векторное поле X_H через уравнение Гамильтона $\iota_{X_H}\omega = dH$. Система называется **интегрируемой в смысле Лиувилля**, если она обладает n независимыми первыми интегралами $\{F_i\}_{i=1}^n$ в инволюции (т.е. их скобки Пуассона равны нулю: $\{F_i, F_j\} = 0$). В этом случае, согласно Теореме Лиувилля-Арнольда, фазовое пространство расслаивается на инвариантные торы $\mathbb{T}^n$, и движение является квазипериодическим и регулярным.

Однако Гамильтоновы системы в общем случае неинтегрируемы. Теорема Пуанкаре о неинтегрируемости задачи трех тел (1892) стала первым строгим результатом, указавшим на существование фундаментальных препятствий к интегрируемости. Пуанкаре обнаружил существование гомоклинных пересечений, которые исключают существование аналитических первых интегралов.

Современная теория неинтегрируемости, основанная на **Теории Дифференциальных Галуа** (Теория Моралеса-Рамиса) [8], предоставляет мощные алгебраические критерии для доказательства отсутствия мероморфных первых интегралов. Эта теория является аналогом классической теории Галуа для дифференциальных уравнений. Она анализирует структуру группы Галуа вариационных уравнений вдоль конкретного решения (нормальных вариационных уравнений, NVE). NVE описывают эволюцию малых возмущений $\xi(t)$ вдоль траектории $\gamma(t)$ и являются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами: $\dot{\xi} = DX_H(\gamma(t))\xi$.

Группа Галуа этого линейного уравнения (точнее, её алгебра Ли) отражает симметрии пространства его решений и кодирует алгебраические зависимости между решениями.

Теорема 6.1.1 (Morales-Ruiz, Ramis, 2001). Если Гамильтонова система мероморфно интегрируема в смысле Лиувилля в окрестности решения $\gamma(t)$, то компонента связности единицы (identity component, G^0) её дифференциальной группы Галуа G (для NVE вдоль $\gamma(t)$) должна быть абелевой (т.е. разрешимой группой Ли).

Детализация доказательства (Эскиз):

1. Интегрируемость предполагает существование n первых интегралов F_i .
2. Дифференцирование этих интегралов вдоль потока NVE показывает, что они также являются интегралами для линеаризованной системы.
3. Существование этих интегралов накладывает сильные ограничения на структуру группы Галуа G . В частности, если интегралы находятся в инволюции, это приводит к коммутативности

(абелевости) алгебры Ли группы G^0 .

4. Обратно, если G^0 неабелева, то система не может обладать полным набором мероморфных интегралов.

Применение этой теории к задаче N -тел подтверждает результат Пуанкаре на более глубоком алгебраическом уровне. Например, для ограниченной задачи трех тел в определенных режимах было показано, что группа Галуа содержит неабелевы подгруппы, такие как $SL(2, \mathbb{C})$. Наличие этих неразрешимых групп является непреодолимым препятствием для интегрируемости.

Значение для SOTT-D: Это подтверждает, что неинтегрируемость является структурным свойством, а не техническим ограничением метода решения. Сложность динамики заложена на фундаментальном алгебраическом уровне.

6.2. Иерархия Фрактальной Сложности Фазового Пространства

В почти интегрируемых системах (которые типичны в астродинамике, $H = H_0 + \epsilon H_1$, где H_0 интегрируем, ϵ мало) фазовое пространство представляет собой сложную, иерархическую смесь регулярности и хаоса, характеризующуюся фрактальной геометрией на всех масштабах. Эта структура является источником вычислительной сложности оптимизации.

6.2.1. Теория КАМ, Проблема Малых Знаменателей и Диофантовы Условия

Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ) [9] дает ответ на вопрос о судьбе инвариантных торов при малом возмущении ϵ . Она утверждает, что большинство торов не разрушается, а лишь деформируется. Ключевым моментом является решение проблемы "малых знаменателей", возникающей при попытке линеаризации системы (методом последовательных канонических преобразований, например, методом Ли) в окрестности тора с вектором частот $\nu \in \mathbb{R}^n$. В рядах Фурье (рядах Пуассона), описывающих преобразование, возникают знаменатели вида $\langle k, \nu \rangle = \sum k_i \nu_i$ (где $k \in \mathbb{Z}^n$). Они могут становиться сколь угодно малыми для резонансных частот (где $\langle k, \nu \rangle = 0$), что приводит к расходимости рядов и невозможности линеаризации.

Условием выживания тора является Диофантово условие на вектор частот ν :

$$|\langle k, \nu \rangle| \geq \frac{C}{|k|^\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$$

(6.2.1.1)

где $C > 0$ и $\tau > n - 1$ — константы. Это условие ограничивает скорость приближения частот к резонансным значениям (т.е. требует, чтобы частоты были "достаточно иррациональными" и плохо приближались рациональными числами). Множество Диофантовых частот имеет полную меру Лебега (т.е. "большинство" торов выживает). Однако топологически это множество является "жирным" множеством Кантора (Cantor-like set), нигде не плотным множеством.

Связь с Фрактальностью: Граница между выжившими торами и разрушенными резонансными зонами имеет фрактальную структуру. Это самоподобное вложение торов и резонансов на всех масштабах является первым уровнем сложности фазового пространства.

6.2.2. Подкова Смейла, Символическая Динамика и Структурная Роль Множества Кантора

Фундаментальным механизмом генерации детерминированного хаоса является Подкова Смейла (Smale, 1967) [12]. Этот механизм возникает при наличии трансверсальных гомоклинических

пересечений устойчивых (W^s) и неустойчивых (W^u) инвариантных многообразий гиперболических неподвижных точек (или периодических орбит).

Теорема 6.2.2.1 (Биркгоф-Смейл). Наличие трансверсального гомоклинного пересечения ($W^s \pitchfork W^u \neq \emptyset$) у C^r -диффеоморфизма f ($r \geq 1$) влечет существование инвариантного гиперболического множества Λ , на котором динамика $f|_\Lambda$ топологически сопряжена со сдвигом Бернулли на пространстве символов $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ (символической динамикой).

Множество Λ гомеоморфно **Множеству Кантора** $\mathcal{C}$. Это полностью несвязное (totally disconnected), совершенное множество с нулевой мерой Лебега, но несчетной мощностью.



Рис. 6.1. Схематическое изображение механизма Подковы Смейла. Трансверсальное пересечение инвариантных многообразий порождает фрактальное инвариантное множество (Множество Кантора) и хаотическую динамику (Сдвиг Бернулли).

Важно подчеркнуть, что этот механизм является **структурно устойчивым** (сохраняется при малых C^1 -возмущениях) и существует даже для аналитических (C^ω) систем (Katok & Hasselblatt, 1995) [4]. Гладкость сама по себе не является препятствием для возникновения фрактальной сложности в ZFC. Топологическая энтропия системы с подковой положительна ($h_{top}(f) > 0$), что является количественной мерой хаоса.

Критическая Роль Множества Кантора: Существование Множества Кантора как топологического объекта в ZFC является необходимым условием для этого механизма гиперболического хаоса. Именно полная несвязность $\mathcal{C}$ позволяет кодировать динамику бесконечными последовательностями символов.

6.2.3. Сеть Арнольда, Глобальная Диффузия и Механизм Перекрытия Резонансов Чирикова

В системах с числом степеней свободы $n \geq 3$, разрушенные резонансные торы не изолируют друг друга (в отличие от $n = 2$, где КАМ-торы размерности $n - 1 = 1$ разделяют фазовое пространство размерности $2n = 4$ на инвариантные области). Они формируют единую связную сеть — **Сеть Арнольда**. Эта сеть пронизывает все фазовое пространство, хотя её мера Лебега мала (экспоненциально мала по ϵ , согласно оценкам Нехорошева).

Диффузия Арнольда — это медленный дрейф траекторий вдоль этой сети, приводящий к глобальной нестабильности даже при сколь угодно малых возмущениях. Структура Сети Арнольда является фрактальной и чрезвычайно сложной для анализа. Оценка скорости диффузии является одной из центральных нерешенных проблем Гамильтоновой динамики.

Глобальный транспорт определяется **Механизмом Чирикова** (Chirikov, 1979) [3] — перекрытием нелинейных резонансов. Когда параметр возмущения ϵ достаточно велик (превышает критическое значение ϵ_c), ширина резонансных слоев превышает расстояние между ними (Критерий Чирикова), и локальный хаос становится глобальным. Эта иерархия перекрытий порождает мультимасштабную сложность, которая делает глобальную оптимизацию вычислительно неприступной, так как ландшафт стоимости наследует эту фрактальную иерархию.

6.3. Фундаментальные Ограничения Аксиоматики ZFC и Классического Континуума

Мы утверждаем, что возможность существования бесконечной фрактальной сложности имманентно заложена в аксиоматике Классической Теории Множеств (ZFC) и её модели континуума. Мы проведем анализ того, как базовые аксиомы ZFC способствуют возникновению этих патологий.

6.3.1. Атомистическая Модель $\mathbb{R}$ и Отсутствие Внутренней Когезии

ZFC строит все математические объекты из базового понятия множества, следуя атомистической парадигме. Континуум $\mathbb{R}$ рассматривается как множество изолированных, атомарных точек. Эта конструкция (например, через сечения Дедекинда или классы эквивалентности последовательностей Коши) опирается на несколько ключевых аксиом:

1. **Аксиома Бесконечности:** Гарантирует существование множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.
2. **Аксиома Степень Множества (Power Set Axiom):** Позволяет рассматривать множество всех подмножеств $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (или $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$). Мощность этого множества соответствует мощности континуума. Именно эта аксиома вводит в математику объекты чрезвычайно высокой сложности.
3. **Аксиома Выбора (AC) и Закон Исклученного Третьего (LEM):** Используются для доказательства многих свойств $\mathbb{R}$, таких как полнота и существование неизмеримых множеств.

Эта **атомистическая модель** лишена внутренней когезии (Lawvere, 2007) [44]. В ZFC нет имманентного понятия "бесконечной близости" или "гладкости" на фундаментальном уровне. Это противоречит интуиции Броуэра и Вейля о континууме как о неразложимой среде ("вязкой жидкости"), где точки не могут быть полностью отделены друг от друга.

Топология (через определение открытых множеств) и дифференциальные структуры вводятся как внешние структуры, наложенные поверх атомистического множества. Этот концептуальный разрыв между базовым множеством (набором точек) и геометрическими структурами (топологией, гладкостью) является источником патологий.

6.3.2. Патологии Гладкости и Фрактальности как Порождения Атомистической Парадигмы

Этот разрыв допускает существование математических объектов, которые могут рассматриваться как артефакты выбранной аксиоматики, не имеющие прямого физического аналога:

1. **Нигде не дифференцируемые непрерывные функции (Вейерштрасс):** Возможны, потому что непрерывность (топология) не накладывает достаточных ограничений на локальное поведение (дифференциальную структуру). Функция может быть непрерывной, но иметь бесконечные осцилляции на любом масштабе. В мире, где все функции имманентно гладкие (как в SDG), такие объекты не существуют.
2. **Множество Кантора C :** Является краеугольным камнем фрактальной геометрии и хаоса (см. Подкову Смейла). Оно возможно, потому что классический континуум допускает бесконечное деление (процесс удаления интервалов) и существование полностью несвязных подмножеств положительной мощности. Возможность бесконечного числа разрывов напрямую следует из атомистической структуры и использования LEM для определения принадлежности точки к множеству.
3. **Кривые Пеано (заполняющие пространство):** Существование непрерывных сюръективных отображений из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) возможно из-за того, что непрерывность не сохраняет размерность в классическом смысле. Это также следствие того, что топология не достаточно "жесткая" по отношению к базовому множеству.

Механизмы хаоса критически опираются на существование этих структур. Если модель континуума *структурно* иная (например, когезионная), то и проявления хаоса могут быть иными, как мы покажем в Главе 13.

6.3.3. Роль Неконструктивной Логики (LEM, AC) в Вычислительной Неразрешимости

Классическая логика, лежащая в основе ZFC, опирается на неконструктивные принципы: Закон Исклученного Третьего (LEM: $P \vee \neg P$) и Аксиому Выбора (AC).

Эти принципы позволяют проводить **неконструктивные доказательства существования**. Мы можем доказать, что объект существует (часто доказательством от противного или используя Лемму Цорна, эквивалентную AC), не предоставляя алгоритма для его построения.

Пример (Оптимизация): Классическая Теорема Вейерштрасса утверждает, что непрерывная функция на компакте достигает своего минимума. Доказательство опирается на LEM (через принцип Больцано-Вейерштрасса или секвенциальную компактность) и не предоставляет общего алгоритма нахождения этого минимума. В конструктивной математике эта теорема в общем виде не верна [33, 41]; требуются более сильные условия (например, равномерная непрерывность на метрическом компакте Бишоп), которые позволяют построить алгоритм.

Неконструктивность лежит в основе многих результатов о вычислительной неразрешимости (Pour-El & Richards, 1989) [40]. Например, существование невычислимых вещественных чисел (Числа Чейтина Ω) или неразрешимость проблемы остановки. В контексте сложных систем это означает, что оптимальное решение может существовать в ZFC, но его нахождение алгоритмически невозможно. Разрыв между существованием и вычислимостью является фундаментальным ограничением ZFC для прикладных задач оптимизации.

6.4. Вывод: Необходимость Смены Парадигмы и Формулировка Гипотезы Модальной Регуляризации

Мы сталкиваемся с ситуацией, когда используемая математическая модель (ZFC) допускает патологическую сложность и вычислительную неразрешимость. Физические модели, построенные на этой основе, наследуют эти свойства.

Решение требует перехода к новым основаниям, которые должны удовлетворять следующим требованиям:

1. **Когезионный Континуум:** Модель, где гладкость и связность являются имманентными свойствами, препятствующими формированию патологических структур на уровне наблюдения.
2. **Конструктивная Логика:** Основания, где существование связано с вычислимостью, восстанавливая алгоритмическую природу математики.

Смена оснований не обходит барьеры BSS магически (NP-трудность, связанная с высокой размерностью, остается), но позволяет переформулировать задачу и обеспечить **условные гарантии** путем использования регуляризующих свойств новой вселенной. Мы формулируем гипотезу, использующую аппарат модальностей (из Cohesive HoTT) для точного описания регуляризации. Важно отметить, что мы не утверждаем, что хаос исчезает; мы утверждаем, что его структура и наблюдаемые свойства меняются при изменении уровня наблюдения, задаваемого модальностями.

Гипотеза Модальной Когезионной Регуляризации (Формулировка):

Вложение классической Гамильтоновой системы в Гладкий Когезивный Топос $\mathcal{E}$ приводит к синтетической системе $(M^\sim, H^\sim)$.

(1) **Имманентная Гладкость:** Функционал стоимости $J^\sim$ на пространстве траекторий $T^\sim$ является имманентно гладким (C^∞), устраняя патологическую негладкость (фрактальность ландшафта), порожденную классической моделью.

(2) **Модальное Наблюдение и Сглаживание:** При наблюдении через модальность Формы (Shape, $\int$), динамика системы регуляризуется на гомотопическом уровне. Фрактальные структуры (например, Множества Кантора в Подковах Смейла), хотя и могут существовать как замкнутые подмножества (на уровне $\sharp$), отображаются в более простые, связные гомотопические типы $\int(M^\sim)$. В частности, форма Множества Кантора стягиваема.

(3) **Снижение Сложности:** Это приводит к снижению наблюдаемой сложности, количественно измеряемой как Shape-энтропия $h_{top}(\int) < h_{top}(class)$ для гиперболических систем.

(4) **Конструктивная Оптимизация:** В сочетании с конструктивной логикой и геометрической формулировкой оптимизации (через R_ℓ), это позволяет доказать существование глобального оптимума и конструктивно извлечь его при выполнении сильных условий уникальности (подтерминальности, H3) и спуска (H1, H2).

Пределы Применимости Гипотезы: Регуляризация наиболее эффективна для систем, где сложность порождается фрактальными структурами (гиперболический хаос). Она не устраняет вычислительную сложность, связанную с высокой размерностью или невыпуклостью, но устраняет сложность, связанную с фрактальностью ландшафта.

7. КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕДОВЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ И АНАЛИЗА СЛОЖНОСТИ

Анализ эволюции методов оптимизации и анализа динамических систем показывает, что усложнение математического аппарата является попыткой компенсировать фундаментальные недостатки классических оснований, оставаясь при этом в их рамках. Мы проведем детальный

критический обзор существующих подходов, чтобы обосновать необходимость парадигмального сдвига, предложенного в SOTT-D.

7.1. Пределы Численных и Стохастических Методов: Проклятие Размерности и Фрактальность

Численные методы (методы колокации, псевдоспектральные методы) и стохастические методы (генетические алгоритмы, дифференциальная эволюция, MCMC, Simulated Annealing) являются основными инструментами в практике MGA-DSM.

Численные (Прямые) Методы: Транскрибируют задачу оптимального управления в задачу нелинейного программирования (NLP) большой размерности. Они эффективны для нахождения локальных минимумов, но их сходимость критически зависит от качества начального приближения (*initial guess*). Гарантии глобальности отсутствуют в невыпуклых задачах.

Стохастические (Эвристические) Методы: Пытаются найти глобальный оптимум путем статистического исследования пространства поиска.

Фундаментальное Ограничение: Их неэффективность обусловлена фрактальной сложностью и многоэкстремальностью ландшафта (Раздел 6.2). Они пытаются аппроксимировать патологическое пространство конечным числом точек.

1. **Экспоненциальная Чувствительность (Хаос):** Малые изменения параметров приводят к большим изменениям траектории (положительные показатели Ляпунова $\lambda > 0$). Это делает ландшафт J чрезвычайно изрезанным. Градиентная информация локальна и непредставительна для глобальной структуры. Вблизи гомоклинных пересечений ландшафт может иметь бесконечное число локальных минимумов.
2. **Узость Бассейнов Притяжения:** Оптимальные решения (например, использующие резонансы или ITN) часто имеют очень узкие бассейны притяжения, окруженные областями высокой стоимости. Вероятность случайного попадания в них экспоненциально мала. Например, ширина резонансных каналов может быть порядка 10^{-6} или меньше в нормированных единицах.
3. **Проклятие Размерности (Curse of Dimensionality):** В задаче MGA-DSM размерность пространства поиска d велика. Для миссии с N_{GA} гравитационными маневрами и N_{DSM} импульсами размерность может достигать $d \approx 4N_{GA} + 4N_{DSM}$. Сложность глобального поиска растет экспоненциально как $\mathcal{O}(C^d)$.

Вывод: Эти методы пытаются решить задачу, которая структурно слишком сложна для них. Гарантии глобальности отсутствуют или являются вероятностными и нестрогими. Попытки улучшить эти методы (например, гибридные алгоритмы) достигают лишь линейного улучшения производительности, не решая экспоненциальной проблемы.

7.2. Теория Динамических Систем (DST) и Сложность Глобального Транспорта

Методы DST (Koon et al., 2008) [5] предлагают геометрический подход к проектированию траекторий. Они используют структуры фазового пространства — инвариантные многообразия (W^s, W^u) периодических орбит (например, орбит Ляпунова, Гало-орбит вокруг точек либрации L1/L2), трубки и их пересечения — для построения низкоэнергетических траекторий (Межпланетная Транспортная Сеть, ITN).

Этот подход позволил обнаружить новые классы траекторий (например, баллистический захват), но имеет ограничения в контексте глобальной оптимизации:

Фундаментальное Ограничение: В неинтегрируемых системах эти многообразия имеют чрезвычайно сложную структуру.

1. **Гомоклинные Плетения (Homoclinic Tangles):** Пересечения W^s и W^u формируют бесконечно сложные плетения (фрактальные структуры), которые являются источником хаоса (Подков Смейла). Анализ этих структур возможен только локально или с использованием пертурбативных методов (например, функции Мельникова), которые не дают полной картины глобальной динамики.
2. **Сложность Глобального Транспорта:** Анализ Диффузии Арнольда упирается в необходимость описания фрактальной геометрии Сети Арнольда (Раздел 6.2.3). Предсказание долгосрочного транспорта между различными областями фазового пространства является открытой проблемой, не поддающейся эффективному численному анализу. Время диффузии может быть экспоненциально большим.
3. **Ограниченность Моделей:** Методы DST часто опираются на упрощенные модели (например, CR3BP), и перенос результатов на полные эфемеридные модели (с учетом возмущений, неавтономности) затруднен из-за разрушения или деформации инвариантных структур (например, разрушение КАМ-торов при добавлении возмущений).

Вывод: Методы DST эффективны для локального анализа и построения начальных приближений, но не предоставляют инструментов для гарантированной глобальной оптимизации в многомерных системах с сильным взаимодействием резонансов. Они описывают скелет динамики, но не могут полностью контролировать хаотический транспорт.

7.3. Глобальные Инварианты: Симплектическая Топология (Гомологии Флоера) и Неразрешимость

Для глобального анализа симплектических многообразий (которыми являются фазовые пространства Гамильтоновых систем) были разработаны мощные топологические инварианты, призванные преодолеть локальность классических методов.

Симплектическая Топология и Гомологии Флоера (HF). Теория Флоера (Floer, 1988) [43], развитая в работах Хофера, Саламона и других, предоставляет инварианты, кодирующие глобальную связность и динамику через анализ псевдоголоморфных кривых (решений нелинейных УЧП типа Коши-Римана). Она позволяет доказывать теоремы существования периодических орбит (Гипотеза Арнольда) и оценивать сложность динамики через симплектическую емкость и инварианты Хофера-Зендера. Гомологии Флоера являются бесконечномерным аналогом теории Морса.

Критика и Ограничения: Несмотря на теоретическую мощь, эти методы имеют фундаментальные ограничения в контексте вычислимости.

1. **Вычислительная Неразрешимость:** Вычисление HF требует анализа пространств модулей решений нелинейных эллиптических УЧП. Показано, что в общем случае эта задача является **вычислительно неразрешимой**. Сложность вычисления HF является прямым отражением сложности динамики, которую она описывает. Не существует общего алгоритма для вычисления этих инвариантов. Это связано с тем, что проблема нахождения

псевдоголоморфных кривых может быть сведена к неразрешимым проблемам теории вычислимости.

2. **Сложность Применения к Конкретным Системам:** Применение теории Флоера к конкретным физическим системам (как задача N -тел) чрезвычайно затруднено из-за сложности проверки необходимых аналитических условий (например, трансверсальности, компактности пространств модулей, выбора почти комплексной структуры).

Вывод: Эти методы предоставляют глубокое теоретическое понимание глобальной структуры, но не дают вычислимых алгоритмов оптимизации. Они остаются в рамках ZFC и наследуют её ограничения, связанные с неразрешимостью. Они доказывают существование сложности, но не предоставляют инструментов для её преодоления.

7.4. Синтез: Поиск Фундаментального Решения через Теорию Топосов (Сравнительный Анализ Таблица 7.1)

Анализ подтверждает наличие Кризиса Сложности. Передовые методы пытаются бороться со сложностью, порожденной ZFC, используя инструменты, построенные на той же основе. Они упираются в фундаментальные барьеры вычислимости и сложности.

Решение требует изменения самой математической вселенной. Необходим переход к основаниям, которые обеспечивают имманентную когезию, гладкость, основаны на конструктивной логике и позволяют формализовать регуляризацию сложности с помощью модальностей. Этим требованиям удовлетворяет Теория Гладких Когезивных Топосов.

Таблица 7.1. Сравнительный Анализ Подходов к Глобальной Оптимизации и Анализу Сложности

Метод	Основа (Парадигма)	Подход к Хаосу/ Сложности	Гарантия Глобальности	Вычислимость/ Реализуемость
Численные/ Стохаст.	ZFC, Численный Анализ	Игнорируется (статистически)	Нет (Вероятностная)	Практическая (Локально)
DST	ZFC, Диф. Геометрия	Анализируется (Локально)	Нет	Практическая (Локально)
Топологические (Флоер)	ZFC, Симплектическая Топология	Анализируется (Глобально)	Теоретическая (Существование)	Нет (Неразрешимо)
AIT	ZFC, Теория Информации	Измеряется (Колмогоровская Сложность)	Абсолютная (Теоретическая)	Нет (Невычислимо)
SOTT-D (Данная работа)	Топосы, CoHoTT, Констр. Логика	Регуляризуется (Модально через $\int$)	Условная (Конструктивная, при $H1-H3$)	Да (Теоретически), Практически Сложно (Снижение сложности)

Метод	Основа (Парадигма)	Подход к Хаосу/ Сложности	Гарантия Глобальности	Вычислимость/ Реализуемость
				через регуляризацию)

ЧАСТЬ II: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ: ТОПОСЫ, СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОГЕЗИЯ

8. ТЕОРИЯ ТОПОСОВ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛОГИКА: АБСТРАКТНЫЕ ВСЕЛЕННЫЕ

Теория Топосов, возникшая в работах Гротендика по Алгебраической Геометрии и развитая Ловером и Тирни в логическом направлении, предоставляет универсальный язык для построения альтернативных математических вселенных, в которых геометрия и логика неразрывно связаны. Топос — это категория, которая ведет себя подобно категории множеств **Set**, но допускает более богатую внутреннюю структуру и, как правило, интуиционистскую логику. В этой главе мы изложим необходимые концепции, следуя классическим работам (Mac Lane & Moerdijk, 1992 [22]; Johnstone, 2002 [19]), и введем аппарат Геометрической Логики, критически важный для SOTT-D.

8.1. От Категорий к Топосам: Обобщенные Пространства и Переменные Множества (Лемма Йонеды)

Теория Категорий изучает структуры (объекты) и их взаимосвязи (морфизмы). Топосы позволяют формализовать понятия "обобщенного пространства" (геометрический аспект) и "переменного множества" (логический аспект), где "переменность" определяется геометрическим контекстом.

Фундаментальным результатом, позволяющим перейти от локального к глобальному взгляду и рассматривать объекты как функторы, является **Лемма Йонеды**.

Лемма 8.1.1 (Лемма Йонеды). Для любой локально малой категории $\mathcal{C}$ и объекта $X \in \mathcal{C}$, функтор $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ полностью определяет X с точностью до изоморфизма. Точнее, существует естественный изоморфизм между функтором $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ и множеством естественных преобразований Nat от представимого функтора $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ к F :

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F) \cong F(X)$$

Это позволяет рассматривать объекты как представимые предпучки и вкладывать $\mathcal{C}$ в категорию предпучков $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ (Вложение Йонеды $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$). Объект определяется тем, как другие объекты (называемые "зондами" или "стадиями") отображаются в него (его "обобщенными точками"). Этот переход к функториальной семантике является первым шагом к построению Топосов.

8.2. Топосы Гротендика как Категории Пучков: Сайты и Аксиома Склейки

Топосы Гротендика моделируют "обобщенные пространства". Они строятся как категории пучков $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ на **Сайте** $(\mathcal{C}, J)$. Сайт состоит из категории $\mathcal{C}$ (базовые геометрические объекты, например, открытые множества топологического пространства или C^∞ -локусы в SDG) и Топологии Гротендика J .

Определение 8.2.0.1 (Топология Гротендика J). Топология Гротендика на $\mathcal{C}$ определяет для каждого объекта U набор сит (семейств морфизмов с целью U), называемых покрывающими ситами $J(U)$, удовлетворяющих аксиомам:

1. **Максимальное сито:** $\text{Hom}(-, U)$ всегда в $J(U)$.
2. **Стабильность при стягивании (Pullback):** Если $S \in J(U)$ и $f : V \rightarrow U$, то $f^*(S) \in J(V)$.
3. **Локальность (Транзитивность):** Если $S \in J(U)$ и для каждого $f : V \rightarrow U$ в S имеем $R_f \in J(V)$, то объединение R_f (в определенном смысле) также является покрывающим ситом U .

Эти аксиомы формализуют понятие "локальной истины".

Определение 8.2.1 (Пучок). Предпучок F (функтор $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$) является Пучком относительно топологии J , если он удовлетворяет **Аксиоме Склейки (Sheaf Condition)**: для любого объекта $U \in \mathcal{C}$ и любого покрытия $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ (представляющего покрывающее сито S), диаграмма, индуцированная F , является уравниателем (equalizer):

$$F(U) \rightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

Это означает, что данные (сечения) $s_i \in F(U_i)$, определенные локально и согласованные на пересечениях (точнее, на стягиваниях $U_i \times_U U_j$), т.е. $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$, могут быть однозначно склеены в глобальное сечение $s \in F(U)$ такое, что $s|_{U_i} = s_i$.

Это обеспечивает локально-глобальный принцип, фундаментальный для геометрии и критически важный для механизма спуска (Descent Theory) в SOTT-D (Раздел 14.7.2). Категория пучков $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ является Топосом Гротендика.

8.3. Элементарные Топосы как Математические Вселенные: Аксиоматика Ловера-Тирни

Ловер и Тирни аксиоматизировали понятие Топоса как самодостаточной математической вселенной, не обязательно являющейся Топосом Гротендика (хотя все Топосы Гротендика являются элементарными).

Определение 8.3.1 (Элементарный Топос). Элементарный Топос $\mathcal{E}$ — это категория, обладающая следующими свойствами:

1. **Конечные Пределы:** Существование терминального объекта (1), произведений ($\times$) и уравниателей. (Из этого следует существование всех конечных пределов, включая стягивания).
2. **Картезианская Замкнутость (Экспоненциалы):** Для любых объектов X, Y , существует объект отображений Y^X (внутренний Hom), удовлетворяющий естественному сопряжению:

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(Z \times X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(Z, Y^X)$$

(8.3.1)

Это позволяет определять функциональные пространства (например, пространство траекторий $T^\sim$) внутри Топоса и обеспечивает существование логики высшего порядка.

3. **Классификатор Подобъектов (Ω).** Существует объект Ω и морфизм $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$, который классифицирует подобъекты (мономорфизмы). Для любого мономорфизма $m : A \hookrightarrow X$ существует единственный характеристический морфизм $\chi_m : X \rightarrow \Omega$ такой, что следующая диаграмма является стягиванием (pullback):

Ω играет роль объекта истинностных значений во внутреннем языке Топоса. В **Set**, $\Omega = \{0, 1\}$. В Топосе Пучков, $\Omega(U)$ — это множество открытых подмножеств U (или, более общо, множество сит на U).

8.4. Внутренняя Логика Топоса: Интуиционизм, Гейтинговы Алгебры и Отказ от LEM

Внутренняя логика общего Топоса является **интуиционистской** (логикой высшего порядка, или Теорией Типов, в современном изложении — HoTT). Эта логика может быть описана с помощью языка Митчелла-Бенабу (Mitchell-Bénabou language), который позволяет рассуждать об элементах объектов Топоса так, как если бы они были множествами.

Множество глобальных элементов $\Gamma(\Omega) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(1, \Omega)$ (глобальных истинностных значений) образует **Гейтингову Алгебру** (Heyting Algebra). Более общо, для любого объекта X , множество его подобъектов $\text{Sub}(X) \cong \text{Hom}(X, \Omega)$ также образует Гейтингову Алгебру.

Определение 8.4.1 (Гейтингова Алгебра). Гейтингова Алгебра — это ограниченная решетка $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$, в которой для любых элементов a, b существует наибольший элемент x такой, что $a \wedge x \leq b$. Этот элемент называется относительным псевдодополнением и обозначается $a \Rightarrow b$.

В Гейтинговой Алгебре, в общем случае, не выполняется Закон Исклученного Третьего (LEM): $P \vee \neg P$ не всегда истинно. Отрицание определяется как $\neg P \equiv (P \Rightarrow 0)$. Также не выполняется Закон Двойного Отрицания: $\neg\neg P \Rightarrow P$ не всегда верно (хотя $P \Rightarrow \neg\neg P$ верно всегда).

Пример (Топос Пучков на Топологическом Пространстве): $\Omega(U)$ — множество открытых подмножеств U . Отрицание $\neg V$ определяется как внутренность дополнения V . Если V открыто, но не замкнуто (например, интервал $(0, 1)$ в $\mathbb{R}$), то $\neg V$ — это дополнение без границы. Тогда $\neg\neg V$ — это внутренность замыкания V . В этом случае $V \neq \neg\neg V$, и $V \vee \neg V \neq U$ (граница не покрыта).

Принцип Конструктивности: Отказ от LEM требует конструктивных доказательств. Доказательство существования $(\exists x. P(x))$ в интуиционистской логике требует явного построения (алгоритма для нахождения) свидетеля x . Это обеспечивает прямую связь между логикой и вычислимостью (Соответствие Карри-Ховарда-Ламбека), что лежит в основе алгоритма GCS (Глава 15). Топос является Булевым (т.е. его логика классическая) тогда и только тогда, когда $\Omega \cong 1 + 1$ и Аксиома Выбора выполняется.

8.5. Семантика Крипке-Жояля: Интерпретация Логики в Геометрии

Семантика Крипке-Жояля предоставляет точный способ интерпретации формул внутреннего языка Топоса Пучков $\text{Sh}(\mathcal{C})$ через отношение вынуждения (forcing relation) $U \Vdash \varphi$ ("формула φ истинна на стадии $U \in \mathcal{C}$ "). Это обобщение семантики Крипке для интуиционистской логики на категорный язык.

8.5.1. Локальный Характер Существования ($\Vdash \exists$) и Роль Покрытий

Ключевым моментом является интерпретация квантора существования и дизъюнкции, которая отражает локальный характер истины, определяемый Топологией Гротендика J .

- $U \Vdash \varphi \wedge \psi \iff U \Vdash \varphi \text{ и } U \Vdash \psi$. (Конъюнкция проверяется на самой стадии).
- $U \Vdash \forall x \in X. \varphi(x) \iff$ для всех морфизмов $f : V \rightarrow U$ и всех сечений $a \in X(V)$, $V \Vdash \varphi(a)$. (Всеобщность проверяется на всех последующих стадиях).

- $U \Vdash \varphi \vee \psi \iff$ существует покрытие $\{U_i \rightarrow U\}$ такое, что для каждого i , $U_i \Vdash \varphi$ или $U_i \Vdash \psi$. (Истина дизъюнкции проверяется локально на покрытии).
- $U \Vdash \exists x \in X. \varphi(x) \iff$ существует покрытие (эпиморфизм) $\pi : V \rightarrow U$ и элемент (локальный свидетель) $a : V \rightarrow X$ такой, что $V \Vdash \varphi(a)$. (Существование проверяется локально на покрытии).

Это означает, что существование имеет **локальный характер**. Истинность формулы в Топосе (т.е. $1 \Vdash \varphi$) означает, что она истинна локально на некотором покрытии терминального объекта 1 .

8.5.2. Проблема Глобальных Сечений и Теория Спуска (Descent Theory)

Локальное существование не гарантирует существования глобального свидетеля (элемента в $\Gamma(X) = \text{Hom}(1, X)$).

Фундаментальное Наблюдение: Непустой объект в Топосе (т.е. $1 \Vdash \exists x \in X$, или эквивалентно, X не является начальным объектом) может не иметь глобальных сечений ($\Gamma(X) = \emptyset$). Например, пучок нетривиальных локально константных функций на связном пространстве (нетривиальное накрывающее расслоение).

Для перехода от локального существования к глобальному требуется процедура **спуска (Descent)**. Теория Спуска (развитая Гротендиком) изучает условия, при которых локальные данные могут быть склеены в глобальный объект. Это эквивалентно Аксиоме Склейки для пучков (8.2.1). Склейка возможна только при выполнении условий согласования на пересечениях (данных спуска, descent data).

Данные Спуска: Для покрытия $\{U_i \rightarrow U\}$, данные спуска состоят из набора локальных объектов $\{X_i\}$ на U_i и изоморфизмов согласования $\phi_{ij} : X_i|_{U_{ij}} \rightarrow X_j|_{U_{ij}}$, удовлетворяющих коциклическому условию $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ на тройных пересечениях U_{ijk} .

В SOTT-D мы используем частный случай — **подтерминальную склейку** (см. Главу 14.7.2), где согласование обеспечивается уникальностью (Гипотеза H3). Это критический момент: гарантия глобальности требует не только доказательства существования в Топосе, но и обеспечения строгих условий для спуска.

8.6. Геометрические Морфизмы и Фундаментальное Сопряжение ($\Delta \dashv \Gamma$)

Взаимосвязь между Топосами описывается **Геометрическими Морфизмами**.

Определение 8.6.1 (Геометрический Морфизм). Геометрический морфизм $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ состоит из пары сопряженных функторов $f^* \dashv f_*$, где $f^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ (Inverse Image функтор) сохраняет конечные пределы (left exact), а $f_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ (Direct Image функтор).

Для любого Топоса Гротендика $\mathcal{E}$ (определенного над **Set**) существует канонический геометрический морфизм $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$, заданный фундаментальным сопряжением:

$$\Delta \dashv \Gamma$$

(8.6.1)

Где $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$ (Inverse Image) — функтор константного пучка (сопоставляет множеству S пучок, чьи сечения на U суть локально константные функции со значениями в S), а $\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ (Direct Image) — функтор глобальных сечений.

8.7. Геометрическая Логика: Секвенции и Фундаментальная Инвариантность

Для переноса результатов между Топосами (в частности, для Экстракции) необходим фрагмент логики, который устойчив к таким переходам.

Определение 8.7.1 (Геометрическая Логика). Геометрическая Логика — это фрагмент логики первого порядка, формулы которого строятся с использованием: $\top$ (истина), $\wedge$ (конечные конъюнкции), $\vee$ (произвольные, возможно бесконечные, дизъюнкции) и $\exists$ (квантор существования). Они не содержат $\Rightarrow$, $\neg$ и $\forall$ в общем виде.

Геометрические утверждения формулируются в виде **секвенций** $\varphi \vdash_x \psi$, где φ, ψ — геометрические формулы в контексте переменных x . Это интерпретируется как $\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$. Хотя секвенция использует $\forall$ и $\Rightarrow$, она считается геометрической, потому что её истинность сохраняется специальным классом функторов.

8.7.1. Сохранение Истины под Inverse Image (Δ)

Фундаментальная Теорема 8.7.1.1 (Инвариантность Геометрической Логики). Функтор Inverse Image (f^* , в частности Δ) геометрического морфизма сохраняет истинность геометрических секвенций (Vickers, 2007) [23].

Это означает, что если геометрическая теория истинна в $\mathcal{E}$, она также истинна в $\mathcal{F}$. Это свойство используется для переноса аксиом и теорий между контекстами. Например, аксиомы кольца являются геометрическими, поэтому если $\mathbb{R}$ — кольцо в **Set**, то $\Delta(\mathbb{R})$ — кольцо в $\mathcal{E}$.

8.7.2. Ограничения Direct Image (Γ) и Стратегия Геометрической Экстракции

Функтор Direct Image (Γ), как правый сопряженный, сохраняет пределы (включая $\wedge$ и $\forall$), но в общем случае **не сохраняет** копределы (включая $\vee$ и $\exists$).

Критическое Замечание: Γ не сохраняет истинность геометрических формул в общем случае, потому что они содержат $\vee$ и $\exists$. В частности, из $\mathcal{E} \models \exists x. \varphi(x)$ (локальное существование) не следует **Set** $\models \exists x. \Gamma(\varphi)(x)$ (глобальное существование). Функтор Γ не является сюръективным на уровне логических утверждений.

Это фундаментальное ограничение означает, что прямой перенос логических утверждений о существовании через Γ некорректен. Метод SOTT-D использует более тонкую стратегию Экстракции (Глава 18), основанную на комбинации:

1. Формулировки задачи в Геометрической Логике с использованием объектов (как R_ℓ), чьи свойства (порядок, инфимумы) корректно переносятся Γ (см. Логический Паспорт 18.1).
2. Использования механизма спуска (подтерминальной склейки) для обеспечения существования глобальных сечений, обходя необходимость прямого сохранения $\exists$ под Γ . Мы доказываем существование глобального сечения не логически (применяя Γ к $\exists$), а геометрически (склеивая локальные сечения).

9. СИНТЕТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (SDG): АЛГЕБРАИЗАЦИЯ АНАЛИЗА

Синтетическая Дифференциальная Геометрия (SDG) — это переформулировка дифференциальной геометрии в рамках Топоса, основанная на использовании строгих нильпотентных инфинитезимальей. Она предоставляет когезионную и имманентно гладкую модель континуума, необходимую для регуляризации сложности (Kock, 2006 [27]; Moerdijk & Reyes, 1991 [32]).

9.1. Мотивация: Имманентная Гладкость и Возвращение Нильпотентных Инфинитезимальей

SDG реализует интуицию Лейбница, Эйлера и Картана, возвращая инфинитезимальи как строгие математические объекты. В классическом анализе (развитом Вейерштрассом и Коши в XIX веке) они были элиминированы и заменены аппаратом пределов ($\epsilon - \delta$) для обеспечения строгости. SDG показывает, что строгость может быть достигнута и без элиминации инфинитезимальей, при условии изменения базовой логики на интуиционистскую. SDG позволяет заменить аналитические конструкции (пределы, производные как пределы разностных отношений) алгебраическими (операции с нильпотентами), что ведет к алгебраизации анализа.

9.2. Аксиома Кока-Ловера (KL) и Принцип Микролинейности

SDG вводится аксиоматически в рамках Топоса $\mathcal{E}$. Предполагается существование объекта $\mathbb{R}^\sim$ (Синтетический Континуум), который является коммутативным кольцом с единицей, и объекта инфинитезимальей первого порядка D .

Определение 9.2.1 (Инфинитезимальи Первого Порядка).

$$D = \{x \in \mathbb{R}^\sim \mid x^2 = 0\}$$

(9.2.1)

Центральной аксиомой является Аксиома Кока-Ловера, которая формализует идею о том, что касательная прямая является наилучшей линейной аппроксимацией кривой на инфинитезимальном масштабе.

Аксиома 9.2.1 (Кока-Ловера, KL). Отображение $\alpha : \mathbb{R}^\sim \times \mathbb{R}^\sim \rightarrow (\mathbb{R}^\sim)^D$, заданное как $\alpha(a, b)(d) = a + b \cdot d$ для $d \in D$, является изоморфизмом.

Здесь $(\mathbb{R}^\sim)^D$ — экспоненциальный объект, представляющий все отображения из D в $\mathbb{R}^\sim$. Геометрически, это касательное расслоение $T\mathbb{R}^\sim$.

Интерпретация (Принцип Микролинейности): Аксиома KL утверждает, что любая функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}^\sim$ является единственным образом представимой в виде аффинной функции $f(d) = a + b \cdot d$. Геометрически это означает, что континуум "локально линеен" на инфинитезимальном масштабе D . Не существует кривых на масштабе D , которые не были бы прямыми. Коэффициенты a и b интерпретируются как значение функции и её производная: $a = f(0)$, $b = f'(0)$.

9.3. Синтетический Континуум ($\mathbb{R}^\sim$) и Иерархия Инфинитезимальей (D, D_k)

Согласованность Аксиомы KL с нетривиальностью D ($D \neq \{0\}$) накладывает строгие ограничения на логику Топоса.

Теорема 9.3.1. Если Аксиома KL выполняется и $D \neq \{0\}$, то внутренняя логика Топоса $\mathcal{E}$ должна быть интуиционистской.

Доказательство: Предположим, что логика классическая (выполняется LEM). Рассмотрим элемент $d \in D$, т.е. $d^2 = 0$. По LEM, либо $d = 0$, либо $d \neq 0$.

Если мы предположим, что $\mathbb{R}^\sim$ является полем (как классическое $\mathbb{R}$), то если $d \neq 0$, то d обратим (существует d^{-1}).

Умножим $d^2 = 0$ на d^{-1} : $d^2 \cdot d^{-1} = 0 \cdot d^{-1}$, что дает $d = 0$.

Это противоречит предположению $d \neq 0$. Следовательно, если $D \neq \{0\}$, то либо $\mathbb{R}^\sim$ не является полем, либо логика не является классической. В моделях SDG $\mathbb{R}^\sim$ не является полем (инфинитезимальны необратимы), и логика обязана быть интуиционистской. В интуиционистской логике из $d^2 = 0$ не следует $d = 0$. Q.E.D.

Как следствие, порядок на $\mathbb{R}^\sim$ не является тотальным (не верно, что $\forall x, y. (x \leq y \vee y \leq x)$). Например, для $d \in D, d \neq 0$, не верно ни $d > 0$, ни $d < 0$, ни $d = 0$.

Определяются инфинитезимальны высших порядков: $D_k = \{x \in \mathbb{R}^\sim \mid x^{k+1} = 0\}$, а также инфинитезимальные окрестности точки x : $D_k(x) = x + D_k$. Эти объекты играют ключевую роль в регуляризации гибридной динамики (Раздел 16) и анализе стабильности (Раздел 17), так как они кодируют информацию о производных высших порядков.

9.4. Фундаментальная Теорема об Автоматической Гладкости (C^∞)

Из Аксиомы KL следует самое важное свойство SDG, которое является основой для регуляризации функционалов в SOT.

Теорема 9.4.1 (Автоматическая Гладкость). В модели SDG любая функция $f : (\mathbb{R}^\sim)^n \rightarrow \mathbb{R}^\sim$, определенная во внутреннем языке Топоса, является бесконечно дифференцируемой (C^∞).

Доказательство: Аксиома KL гарантирует существование и единственность производной $f'(x)$ (как показано в 9.2). Повторное применение этого принципа к самой производной (которая также является функцией в Топосе, благодаря картезианской замкнутости) гарантирует существование производных всех порядков. Формальное доказательство использует свойства экспоненциалов и обобщенную Аксиому KL(k) для инфинитезимальны D_k .

Обобщенная Аксиома KL(k): Любая функция $f : D_k \rightarrow \mathbb{R}^\sim$ является полиномом степени не выше k :

$$f(d) = f(0) + f'(0)d + \frac{1}{2}f''(0)d^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)d^k, \quad \forall d \in D_k$$

Существование всех производных $f^{(k)}(0)$ гарантировано этой аксиомой. Это точная формула Тейлора без остаточного члена. Q.E.D.

Следствия: В SDG не существует патологических функций (типа Вейерштрасса или нигде не дифференцируемых функций). Все динамические системы и функционалы стоимости, определенные в SDG, являются имманентно гладкими. Это устраняет негладкость, порожденную классическими моделями, на фундаментальном уровне.

9.5. Конструктивный Анализ и Объекты Вещественных Чисел

В конструктивной математике классическое понятие вещественного числа расщепляется на несколько неэквивалентных понятий (Вещественные Коши, Вещественные Дедекинда, Нижние/Верхние Вещественные). Выбор правильного объекта критически важен для SOT и корректности

экстракции, так как он должен обладать как аналитическими свойствами (полнота), так и логическими (геометричность предиката порядка).

9.5.1. Ограничения Вещественных Дедекинда ($\mathbb{R}^\sim$)

Стандартный континуум $\mathbb{R}^\sim$ в SDG обычно моделируется Вещественными Дедекинда (парами (L, U) сечений $\mathbb{Q}$, удовлетворяющих определенным аксиомам). Он имеет нетотальный порядок. Предикат порядка $\leq$ на $\mathbb{R}^\sim$ определяется как:

$$x \leq y \iff (\forall q \in \mathbb{Q}. q < x \implies q < y) \wedge (\forall r \in \mathbb{Q}. y < r \implies x < r)$$

Это определение использует импликацию ($\implies$) и квантор всеобщности ($\forall$) над $\mathbb{Q}$. В интуиционистской логике эти связки не являются геометрическими (Определение 8.7.1). Это делает $\mathbb{R}^\sim$ непригодным для формулировок оптимизации, которые должны быть устойчивы при переносе через функтор Γ (который не сохраняет $\implies$ в общем случае).

9.5.2. Нижние Вещественные (R_ℓ): Конструктивное Определение и Свойства (Box 9.1)

Для задач оптимизации (минимизации) мы используем **Нижние Вещественные числа** (R_ℓ). Они определяются как нижние сечения Дедекинда и обладают лучшими свойствами с точки зрения Геометрической Логики и конструктивной топологии (теории локалей).

Box 9.1: Строгое Конструктивное Определение и Свойства Нижних Вещественных (R_ℓ)

Определение: Нижнее вещественное число x определяется как непустое подмножество рациональных чисел $L_x \subset \mathbb{Q}$, удовлетворяющее условиям:

1. **Нижняя Замкнутость (Lower):** $\forall q \in \mathbb{Q}. (\exists r \in L_x. q < r) \implies q \in L_x$. (Если q меньше некоторого элемента сечения, то q также в сечении).
2. **Округленность (Rounded/Inhabited):** $\forall q \in L_x. \exists r \in L_x. q < r$. (Для любого элемента сечения существует больший элемент в сечении).

R_ℓ — это объект всех таких подмножеств в Топосе $\mathcal{E}$.

Ключевые Свойства для SOT:

1. **Полнота по Инфимумам (Inf-полнота):** Любое населенное и ограниченное снизу подмножество $A \subset R_\ell$ имеет точную нижнюю грань ($\inf A$). Инфимум определяется как объединение сечений: $L_{\inf A} = \bigcup_{x \in A} L_x$. Это необходимо для существования минимума.
2. **Топологические Свойства:** R_ℓ является локально-компактной локалью (в конструктивном смысле), что обеспечивает необходимые свойства для анализа сходимости.
3. **Нижняя Полунепрерывность (l.s.c.):** Топология на R_ℓ (Топология Скотта) такова, что непрерывные функции со значениями в R_ℓ естественно интерпретируются как нижне-полунепрерывные. Это критично для существования минимумов и Γ -сходимости.
4. **Геометричность Порядка:** Отношение строгого порядка $<$ определяется геометрической формулой (см. 9.5.3).
5. **Согласованность с Γ (Переносимость):** Функтор Γ переводит R_ℓ в классические нижние вещественные числа, сохраняя порядок и инфимумы (см. Логический Паспорт 18.1) [19].

9.5.3. Доказательство Геометричности Порядка и Сохранения Инфимумов для R_ℓ

Мы приводим строгое обоснование ключевых свойств R_ℓ , необходимых для Теоремы об Экстракции (18.2).

Лемма 9.5.3.1 (Геометричность Порядка $<$ на R_ℓ). Отношение строгого порядка $x < y$ на R_ℓ определяется геометрической формулой.

Доказательство: По определению порядка на R_ℓ через сечения Дедекинда, $x < y$ тогда и только тогда, когда L_x строго содержится в L_y . Это эквивалентно существованию рационального числа q , которое разделяет их:

$$x < y \iff \exists q \in \mathbb{Q}. (q \in L_y \wedge q \notin L_x)$$

Используя определение L_x, L_y и свойства порядка на $\mathbb{Q}$, это можно переписать в строго геометрической форме (используя только $\exists, \wedge, \vee$ над базовыми предикатами $\mathbb{Q}$):

$$x < y \iff \exists q \in \mathbb{Q}. (x < q \wedge q \leq y)$$

(9.5.3.1)

(Здесь $x < q$ означает $\exists r \in \mathbb{Q}. (r \in L_x \wedge r < q)$, а $q \leq y$ означает $q \in L_y$).

Поскольку предикаты $<$ и $\leq$ относительно рациональных чисел определены геометрически (как дизъюнкции базовых отношений на $\mathbb{N}$), вся формула (9.5.3.1) является геометрической. Q.E.D.

Лемма 9.5.3.2 (Сохранение Инфимумов под Γ). Функтор глобальных сечений Γ сохраняет инфимумы в R_ℓ .

Доказательство: Пусть $A \subset R_\ell$ — населенное и ограниченное снизу подмножество. Инфимум $z = \inf A$ в R_ℓ определяется как сечение $L_z = \bigcup_{x \in A} L_x$. Функтор Γ , будучи правым сопряженным, в общем случае не сохраняет объединения (копределы). Однако для R_ℓ в хорошо адаптированных моделях (как $\mathcal{E}$) показано [19, 32], что $\Gamma(R_\ell)$ изоморфно классическим нижним вещественным числам (с топологией Скотта), и этот изоморфизм сохраняет структуру Inf-полурешетки. Перенос инфимума осуществляется корректно: $\Gamma(\inf A) = \inf \Gamma(A)$. Это связано с тем, что конструкция R_ℓ как локали (фрейма нижних сечений) является геометрической, и Γ сохраняет эту структуру. Q.E.D.

9.6. Синтетическое Исчисление: Алгебраическое Дифференцирование

Производная определяется алгебраически из Аксиомы KL (9.2.1). Для $f : \mathbb{R}^\sim \rightarrow \mathbb{R}^\sim$ и точки $x \in \mathbb{R}^\sim$, рассмотрим функцию $g_x(d) = f(x + d)$ для $d \in D$. По Аксиоме KL, $g_x(d)$ аффинна: $g_x(d) = a + b \cdot d$. Определяем $f'(x) = b$.

$$f(x + d) = f(x) + f'(x) \cdot d, \quad \forall d \in D$$

(9.6.1)

Правила дифференцирования (сумма, произведение, цепное правило) доказываются чисто алгебраически из этого определения.

Пример (Доказательство Цепного правила): Пусть $h(x) = g(f(x))$. Мы хотим найти $h'(x)$.

Рассмотрим $h(x + d)$ для $d \in D$.

$$h(x + d) = g(f(x + d)).$$

По KL для f : $f(x + d) = f(x) + f'(x)d$.

Обозначим $y = f(x)$ и $\delta = f'(x)d$.

Критическое наблюдение: δ также является инфинитезимальным первого порядка. $\delta^2 = (f'(x))^2 d^2$. Так как $d^2 = 0$, то $\delta^2 = 0$. Следовательно, $\delta \in D$.

Теперь мы можем применить KL к g в точке y с приращением δ :

$$g(y + \delta) = g(y) + g'(y)\delta.$$

Подставляем обратно y и δ :

$$h(x + d) = g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)d).$$

$$h(x + d) = h(x) + [g'(f(x))f'(x)]d.$$

С другой стороны, по KL для h : $h(x + d) = h(x) + h'(x)d$.

В силу единственности коэффициента при d в Аксиоме KL, мы заключаем:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x). \text{ Q.E.D.}$$

Это определение не использует пределы и является вычислительно точным (Алгебраическое Дифференцирование), что используется в алгоритме GCS (Раздел 15.3) и анализе стабильности (Раздел 17.1).

9.7. Аксиома Интегрирования и Существование Потоків (Box 9.2)

Интегрирование вводится аксиоматически, поскольку его нельзя вывести из KL в общем случае (KL локальна, интегрирование глобально).

Аксиома 9.7.1 (Аксиома Интегрирования, Reyes-Wraith). Для любой функции $f : [0, 1]^\sim \rightarrow \mathbb{R}^\sim$ существует первообразная $F : [0, 1]^\sim \rightarrow \mathbb{R}^\sim$ такая, что $F' = f$, и она единственна с точностью до константы.

Эта аксиома выполняется в Топосе Дюбуя [29, 32].

Box 9.2: Блок Последствий Аксиомы Интегрирования в SOTT-D

- Локальное Существование Потоків:** Гарантирует существование решений дифференциальных уравнений (синтетический аналог теоремы Пикара-Линделёфа). Необходимо для SGM (Теорема 12.2.0.1).
- Гладкость Функционалов:** Обеспечивает гладкость интегральных функционалов стоимости (необходимо для SOT, Теорема 14.3.1).
- Когезия Континуума:** Критически важна для доказательства неразложимости $\mathbb{R}^\sim$ (Теорема 13.2.1), так как позволяет заключить, что $f' = 0 \implies f = \text{const}$ (Теорема о среднем значении).
- Коммутативность с Γ :** В хорошо адаптированных моделях коммутирует с Γ (необходимо для Экстракции, Лемма 11.4).

9.8. Касательные Пространства ($TM^\sim$) и Картаново Исчисление

Касательное пространство $TM^\sim$ к микролинейному объекту $M^\sim$ определяется как экспоненциал $(M^\sim)^D$. Касательный вектор — это отображение $v : D \rightarrow M^\sim$, т.е. инфинитезимальная кривая. Касательное расслоение $\pi : TM^\sim \rightarrow M^\sim$ определяется как $\pi(v) = v(0)$.

Весь аппарат **Картанова исчисления** (внешний дифференциал $d^\sim$, производная Ли $\mathcal{L}_X$, внутреннее произведение ι_X) переносится в SDG и является полностью алгебраическим. Векторные поля X отождествляются с сечениями $TM^\sim$. Дифференциальные формы $\omega \in \Omega^k(M^\sim)$ определяются как отображения, полилинейные и альтернирующие на инфинитезимальных k -симплексах (или, эквивалентно, на k -кортежах касательных векторов).

Фундаментальные тождества выполняются точно:

1. **Нильпотентность внешнего дифференциала:** $(d^\sim)^2 = 0$. (Следует из симметрии вторых частных производных, гарантированной KL(2) — Синтетическая Лемма Шварца).
2. **Магическая Формула Картана:** $\mathcal{L}_X \omega = d^\sim(\iota_X \omega) + \iota_X(d^\sim \omega)$.

Эти свойства используются для строгого алгебраического доказательства фундаментальных теорем механики, например, Теоремы Лиувилля в SGM (Раздел 12.3) и анализа симплектической структуры.

10. ГЛАДКИЕ И КОГЕЗИВНЫЕ ТОПОСЫ: ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ И СТРУКТУРА

Для обеспечения непротиворечивости аксиом SDG и их применимости к классическим задачам необходимо построить конкретные модели — Гладкие Топосы. Мы также введем понятие Когезивного Топоса, которое является ключевым для формализации Теории Модальной Регуляризации Хаоса. Эта глава посвящена техническим деталям построения этих моделей.

10.1. Алгебраическая Теория Гладкости: C^∞ -кольца и Сайт Локусов ($\mathbb{L}$)

Гладкие Топосы строятся путем "алгебраизации" понятия гладкости. Этот подход основан на теореме (Теорема Милнора-Шварца), о том, что геометрическая структура гладкого многообразия M полностью определяется алгеброй гладких функций на нем $C^\infty(M)$.

Определение 10.1.1 (C^∞ -кольцо). C^∞ -кольцо — это алгебра $\mathcal{A}$, для которой определены операции, соответствующие всем гладким функциям $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. То есть, для любой такой f существует операция $\Phi_f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющая условиям согласованности (сохранение композиции и тождеств). $C^\infty(M)$ является каноническим примером. Морфизмы C^∞ -колец — это гомоморфизмы, сохраняющие эти операции.

Гладкий Топос строится как категория пучков на **Сайте Локусов** ($\mathbb{L}$).

Определение 10.1.2 (Сайт Локусов $\mathbb{L}$). $\mathbb{L}$ является дуальным к категории конечно представимых C^∞ -колец (т.е. колец вида $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$, где I — конечно порожденный идеал). Объекты $\mathbb{L}$ называются C^∞ -локусами и формально представляют собой "пространства", определяемые уравнениями в C^∞ -кольцах.

Они включают как обычные многообразия (где $I = (0)$), так и инфинитезимальные пространства.

Пример (Инфинитезималь D как Локus): Объект D представляется локусом, дуальным к C^∞ -кольцу $\mathcal{D} = C^\infty(\mathbb{R})/(x^2)$. Это кольцо изоморфно кольцу дуальных чисел $\mathbb{R}[\epsilon]/(\epsilon^2)$.

Топология Гротендика на $\mathbb{L}$ обычно определяется как топология открытых покрытий (в смысле спектра C^∞ -кольца).

10.2. Топос Дюбюка ($\mathcal{E}$): Эталонная Модель SDG

Существует несколько моделей SDG (например, Топос Базеля, Топос Кауи). **Топос Дюбюка ($\mathcal{E}$)** (Dubuc, 1981) [26] является наиболее развитой и предпочтительной моделью SDG для данной работы, так как он обладает свойством хорошей адаптированности.

Он строится на расширенном сайте $\mathbb{G}$.

Определение 10.2.1 (Сайт $\mathbb{G}$). Объекты $\mathbb{G}$ — это произведения $U \times L$, где U — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, а L — локус из $\mathbb{L}$. Топология Гротендика на $\mathbb{G}$ определяется открытыми покрытиями в смысле классической топологии.

Топос Дюбюка определяется как $\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathbb{G})$.

Это построение позволяет лучше моделировать локальные свойства гладких функций (в частности, функции, определенные только на открытых областях, и существование разбиений единицы) и обеспечивает критически важные свойства вложения классической геометрии. В частности, оно гарантирует выполнение Аксиомы Интегрирования.

10.3. Хорошо Адаптированные Модели и Вложение Классической Геометрии ($\mathbf{Man}$)

Для применения SDG к классическим задачам (как MGA-DSM) критически важно, чтобы Гладкий Топос был "совместим" с категорией классических гладких многообразий $\mathbf{Man}$. Это формализуется понятием Хорошо Адаптированной Модели.

10.3.1. Теорема о Полном и Строгом Вложении ($i : \mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{E}$)

Определение 10.3.1.1 (Хорошо Адаптированная Модель). Топос $\mathcal{E}$ хорошо адаптирован, если существует функтор вложения $i : \mathbf{Man} \rightarrow \mathcal{E}$, который удовлетворяет условиям:

1. **Полный и Строгий (Full and Faithful):** $\text{Hom}_{\mathbf{Man}}(M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(i(M), i(N))$. Все морфизмы между вложенными объектами в $\mathcal{E}$ соответствуют классическим гладким отображениям. (Это критично, так как гарантирует, что автоматическая гладкость в $\mathcal{E}$ не добавляет "лишних" отображений между классическими объектами).
2. **Сохранение Геометрических Структур:** i сохраняет трансверсальные стягивания (pullbacks) и открытые покрытия. Это гарантирует, что геометрические конструкции (пересечения, локальные свойства) сохраняются при переносе.

Теорема 10.3.1.2 (Dubuc, Moerdijk-Reyes). Топос Дюбюка $\mathcal{E}$ является хорошо адаптированной моделью SDG.

Доказательство: См. Moerdijk & Reyes (1991) [32], Глава III. Построение $\mathcal{E}$ на сайте $\mathbb{G}$, включающем открытые множества, гарантирует сохранение покрытий. Функтор $i(M)$ определяется как пучок, представляемый C^∞ -кольцом $C^\infty(M)$: $i(M)(U \times L) = \text{Hom}_{C^\infty\text{-Rings}}(C^\infty(U)/I_L, C^\infty(M))$. Полнота и строгость следуют из теорем о представлении гладких функций (Теорема Милнора) и свойств вложения Йонеды. Q.E.D.

Значение: Это гарантирует, что структура классических многообразий полностью и точно сохраняется при переходе в $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ является консервативным расширением классической дифференциальной геометрии. Это основа для корректного переноса задачи (Гипотеза H1).

10.3.2. Паспорт Модели Дюбюка $\mathcal{E}$ (Таблица 10.1)

Мы сводим ключевые аксиомы и свойства Топоса Дюбюка, используемые в данной работе, в единый "Паспорт Модели" для обеспечения строгости и верифицируемости.

Таблица 10.1. Паспорт Модели Дюбюка $\mathcal{E}$: Аксиоматическая База SOTT-D

Свойство / Аксиома	Статус в $\mathcal{E}$	Используется в SOTT-D (Главы)	Обоснование (Литература)
SDG Аксиоматика			
Аксиома Кока-Ловера (KL) и $KL(k)$	Выполняется	12 (SGM), 15 (Градиент), 17 (Гессиан)	[27], [32]
Аксиома Интегрирования (Reyes-Wraith)	Выполняется	12 (Потоки), 13 (Когезия $\mathbb{R}^\sim$), 14 (Гладкость $\mathcal{J}$)	[29], [32]
Автоматическая Гладкость (C^∞)	Следствие KL	12, 14 (Гладкость Функционала)	[27]
Свойства Адаптации (H1)			
Хорошая Адаптированность	Выполняется	11 (Перенос), 18 (Экстракция)	[26], [32]
Полное и Строгое Вложение i	Выполняется	11.1 (Эмбеddинг)	[32]
Коммутация Γ и Интегрирования	Выполняется	11.4, 18.2.1 (Сохранение $\mathcal{J}$)	[32, Thm III.6.6]
Условие Бек-Шевалье (BCC) для $i(M)^D$	Выполняется	11.5, 12.5 (Экстракция Траекторий)	[32, Prop III.4.5]
Когезивная Структура (CoHoTT)			
Аксиоматика Когезии (Ловер)	Выполняется	13 (Регуляризация Хаоса)	[44], [45]
Существование $\int, b, \sharp$	Выполняется	13.5 (Shape-Энтропия)	[45], [46]
Когезионность Континуума $\mathbb{R}^\sim$	Выполняется	13.2 (Неразложимость)	[24]
Логические Свойства			
Интуиционистская Логика (ITT/HoTT)	Внутренняя	14 (SOT), 15 (GCS)	[22]
Свойства R_ℓ (Геометричность, Inf)	Выполняется	9.5, 14.2, 18.2.3	[19], [23]

10.4. Введение в Когезивные Топосы и Модальную Логику (Cohesive HoTT)

Для формализации идеи "сглаживания хаоса" необходим аппарат Когезивных Топосов, аксиоматизированный Ловером [44] и развитый в рамках Гомотопической Теории Типов (Cohesive HoTT) Шрайбером и др. [45, 46]. Топос Дюбюка является канонической моделью этой теории.

10.4.1. Аксиоматика Когезии (Ловер): Цепочка Сопряжений ($\Pi \dashv \Delta \dashv \Gamma \dashv \nabla$)

Когезивный Топос формализует понятие пространства, части которого "склеены" когезией (например, гладкой или топологической структурой). Эта структура задается цепочкой сопряженных функторов между Топосом $\mathcal{E}$ и базовым Топосом (здесь **Set**, хотя в общем случае это может быть Топос ∞ -Группоидов **H**):

$$\Pi \dashv \Delta \dashv \Gamma \dashv \nabla$$

(10.4.1.1)

Где функторы имеют следующую интерпретацию:

- Γ : Функтор точек (глобальные сечения). Извлекает множество точек пространства.
- Δ : Функтор дискретного пространства (константный пучок). Забывает когезию, оставляя только точки, наделенные дискретной структурой.
- Π : Функтор компонент связности (или Shape realization). Забывает локальную структуру, оставляя глобальную форму (гомотопический тип).
- ∇ : Функтор кодискретного (хаотического или индискретного) пространства. Наделяет множество самой сильной когезией (любые две точки связаны).

Дополнительно требуется, чтобы Π сохранял конечные произведения (Axiom of Cohesion [44]), и существовал некоторый набор аксиом, обеспечивающих нетривиальность структуры (например, аксиома о том, что Δ является полным и строгим).

10.4.2. Модальные Операторы: Триада Сопряжений ($\int \dashv \flat \dashv \sharp$)

Эта цепочка сопряжений порождает три фундаментальные модальности (эндофункторы на $\mathcal{E}$), связанные сопряжениями:

$$\int \dashv \flat \dashv \sharp$$

(10.4.2.1)

1. **Shape** ($\int$ или Sh): (Форма). $\int X = \Delta \Pi(X)$. (Иногда обозначается Π_∞ в контексте HoTT).
2. **Flat** ($\flat$): (Плоскость). $\flat X = \Delta \Gamma(X)$.
3. **Sharp** ($\sharp$): (Острота). $\sharp X = \nabla \Gamma(X)$.

Эти модальности образуют (Идемпотентные) Монады ($\flat, \sharp$) и Комонады ($\int, \flat$), позволяя ввести модальную логику (Модальную Теорию Типов) для рассуждения о когезии. В CoHoTT они интерпретируются как локализации и колокализации ∞ -топоса.

10.4.3. Геометрическая Интерпретация Модальностей: Форма, Точки и Дискретность

1. **Shape** ($\int$): "Забывает" локальную когезию и оставляет глобальную форму (гомотопический тип). Это результат "сглаживания" или гомотопической локализации. $\int$ отождествляет точки, связанные когезией (например, гладким путем). Для классического многообразия M , $\int i(M)$ соответствует его гомотопическому типу. Если пространство связно, его форма "более проста", чем само пространство.
2. **Flat** ($\flat$): "Забывает" когезию, оставляя базовое множество точек как дискретное пространство. $\flat M^\sim$ — это множество точек M без гладкой структуры. Единица монады $\eta : X \rightarrow \flat X$ вкладывает пространство в его дискретизацию.

3. **Sharp ($\sharp$):** Усиливает дискретность (переводит точки в кодискретные структуры) и чувствителен к мелкомасштабным, формальным деталям. $\sharp$ используется для доступа к формальной, алгебраической структуре гладкости (например, к струям функций). Коединица комонады $\epsilon : \sharp X \rightarrow X$ проецирует кодискретную структуру на пространство.

Ключевая идея SOTT-D (Глава 13): хаотическая сложность проявляется при наблюдении через $\sharp$ (локальные, фрактальные детали), но регуляризуется при наблюдении через $\int$ (глобальная форма).

10.4.4. Дополнительные Модальности: Инфинитезимальная Форма ($\mathcal{I}$)

В Гладких Когезивных Топосах (таких как $\mathcal{E}$) существует дополнительная структура, связанная с инфинитезимальными, которая формализуется дополнительной триадой сопряжений, порождающей модальности:

- Infinitesimal Shape ($\mathcal{I}$) или Reduction ($\mathcal{R}$):** Эта модальность "убивает" инфинитезимальную структуру, переводя объект в его редуцированный вариант (например, переводит D в точку).

Эта модальность позволяет формально отделить глобальную когезию ($\int$) от локальной инфинитезимальной структуры. Анализ взаимодействия $\int$ и $\mathcal{I}$ является ключевым для строгого доказательства регуляризации хаоса в Главе 13.

ЧАСТЬ III: МЕТОД SOTT-D: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

11. ПЕРЕНОС ДИНАМИКИ В ТОПОС $\mathcal{E}$, АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ И ЭКСТРАКЦИЯ

Мы переходим к первому этапу метода SOTT-D: точному переносу классической Гамильтоновой системы в Топос Дюбюка $\mathcal{E}$, анализу робастности этого переноса и доказательству ключевых лемм о корректности экстракции базовых математических операций. Выбор $\mathcal{E}$ обоснован его свойствами (Паспорт Модели 10.3.2).

11.1. Корректный Эмбединг Гамильтоновой Системы: От (M, H) к $(M^\sim, H^\sim)$

Мы используем функтор вложения $i : \mathbf{Man} \rightarrow \mathcal{E}$ (Теорема 10.3.1.2). Классическая система (M, ω, H) переносится в Синтетическую Гамильтонову Систему $(M^\sim, \omega^\sim, H^\sim)$, где $M^\sim = i(M)$, $\omega^\sim = i(\omega)$, $H^\sim = i(H)$. Полнота и строгость i гарантируют корректность переноса (Гипотеза H1). В частности, алгебра гладких функций изоморфна:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(M^\sim, \mathbb{R}^\sim)$$

(11.1.1)

Это гарантирует, что все локальные дифференциально-геометрические свойства системы (кривизна, симплектическая структура) точно сохраняются при вложении.

11.2. Обработка Неавтономности, Эфемерид и Параметрических Неопределенностей

В реальных задачах Гамильтониан зависит от времени $H(x, t)$ (через эфемериды планет) и может содержать неопределенные параметры $\theta \in \Theta$ (например, ошибки в массах тел GM_i , негравитационные возмущения, коэффициенты солнечного давления). Мы имеем семейство Гамильтонианов $H(x, t; \theta)$.

Эфемеридные данные (например, JPL DE440/DE441) заданы численно (полиномами Чебышева на интервалах). Для переноса в $\mathcal{E}$ необходима гладкая аппроксимация $H_{approx}(x, t; \theta)$ с контролируемой погрешностью. Для анализа динамики и оптимизации в C^1 -топологии (см. Раздел 14.5.1), которая необходима для обеспечения компактности (H2) и применения Теоремы Асколи-Арцела, требуется контроль ошибки в норме C^2 . Это необходимо для контроля ошибки как самого векторного поля (зависит от ∇H), так и его Якобиана (зависит от Гессиана $\text{Hess}(H)$), который определяет эволюцию возмущений.

Требование 11.2.1 (Точность Аппроксимации). Должно выполняться:

$$\|H - H_{approx}\|_{C^2(M \times I \times \Theta)} < \delta$$

(11.2.1)

для заданного допуска δ .

Эта аппроксимация переносится в $\mathcal{E}$ как $H_{approx}^\sim$. Метод SOTT-D гарантирует нахождение глобального оптимума для аппроксимированной системы. Необходимо оценить влияние этой аппроксимации и параметрической неопределенности на оптимальное значение функционала.

11.3. Анализ Робастности к Аппроксимации и Возмущениям:

Параметрическая Лемма Грёнвалля

Мы расширяем стандартный анализ робастности для учета параметрических семейств моделей и анализа чувствительности в метрике C^1 . Этот анализ критичен для понимания практических ограничений метода, связанных с точностью физических моделей.

11.3.1. Обобщенная Лемма Грёнвалля для Параметрических Семейств $H(\theta)$ в Метрике C^1

Рассмотрим два близких семейства Гамильтонианов $H(\theta)$ и $H'(\theta)$ (например, точная модель и её аппроксимация), где $\theta \in \Theta$ — компактное пространство параметров.

Лемма 11.3.1.1 (Параметрическая Робастность Траекторий в C^1). Пусть $\|H(\theta) - H'(\theta)\|_{C^2} < \delta$ для всех $\theta \in \Theta$ на временном интервале $[0, T]$. Пусть векторные поля $X_{H(\theta)}$ и их Якобианы $DX_{H(\theta)}$ равномерно ограничены и Липшицевы по состоянию x с константами L_H (для поля) и L_{DH} (для Якобиана), равномерными по θ . Пусть K_1, K_2 — константы, связывающие C^2 -норму Гамильтониана с C^1 -нормой векторного поля (например, в локальных координатах K_i зависят от метрики). Тогда расхождение траекторий $\Delta_\theta(t) = \|\gamma_\theta(t) - \gamma'_\theta(t)\|_{C^1}$ с одинаковыми начальными условиями удовлетворяет равномерной оценке:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_\theta(t) \leq C_G \cdot \delta \cdot e^{L'_H t}$$

(11.3.1.1)

где C_G и L'_H — константы, зависящие от K_i, L_H, L_{DH} .

Доказательство (Детализация для C^1 -нормы):

1. Анализ в C^1 -норме требует оценки расхождения как траекторий (положения, C^0), так и их производных (скоростей/импульсов).
2. Расхождение в C^0 : Пусть $x(t), x'(t)$ — траектории. Оценим эволюцию разности $e(t) = x(t) - x'(t)$.

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\| \leq \|X_H(x(t)) - X_{H'}(x'(t))\|.$$

Используем неравенство треугольника:

$$\leq \|X_H(x(t)) - X_{H'}(x(t))\| + \|X_{H'}(x(t)) - X_{H'}(x'(t))\|.$$

Первый член ограничен $\|X_H - X_{H'}\|_{C^0}$. Из C^2 -близости Гамильтонианов следует C^1 -близость полей, и, следовательно, C^0 -близость: $\|X_H - X_{H'}\|_{C^0} \leq K_1 \delta$.

Второй член ограничен по условию Липшица: $L_H \|x(t) - x'(t)\| = L_H \|e(t)\|$.

Получаем дифференциальное неравенство: $\frac{d}{dt} \|e(t)\| \leq K_1 \delta + L_H \|e(t)\|$.

Применение стандартной Леммы Грёнвалля дает оценку C^0 -расхождения:

$$\|e(t)\| \leq \frac{K_1 \delta}{L_H} (e^{L_H t} - 1).$$

3. Расхождение скоростей (C^1): Требуется анализа эволюции касательных векторов, т.е. вариационных уравнений. Обозначим $v(t) = \dot{x}(t), v'(t) = \dot{x}'(t)$. Эволюция разности скоростей $\delta v(t) = v(t) - v'(t)$ описывается уравнением, включающим Якобианы DX :

$$\frac{d}{dt} \delta v(t) = DX_H(x(t))v(t) - DX_{H'}(x'(t))v'(t).$$

Это уравнение можно переписать и оценить аналогично, используя близость Якобианов. Из C^2 -близости Гамильтонианов следует C^1 -близость полей, т.е. C^0 -близость Якобианов:

$$\|DX_H - DX_{H'}\|_{C^0} \leq K_2 \delta.$$

Применяя обобщенную Лемму Грёнвалля к связанной системе дифференциальных неравенств для $(\|e(t)\|, \|\delta v(t)\|)$, используя константу Липшица L_{DH} для Якобиана, получаем экспоненциальную оценку (11.3.1.1) для C^1 -нормы $\|\cdot\|_{C^1} = \|\cdot\|_{C^0} + \|\cdot\|_{\text{скорость}}$. Константа L'_H определяется как $\max(L_H, L_{DH})$ (или их комбинацией, в зависимости от точной формы обобщенной леммы).

4. **Равномерность:** Равномерность по θ следует из равномерности оценок констант Липшица на компакте Θ . Q.E.D.

11.3.2. Явные Оценки Робастности и Чувствительности ($\sup_{\theta} \Delta_{\theta}(t)$)

Лемма 11.3.1.1 позволяет оценить влияние аппроксимации на оптимальное значение функционала.

Королларий 11.3.2.1 (Робастность Оптимума). Если функционал стоимости J является локально Липшицевым по траектории в норме C^1 с константой L_J (равномерной по θ), то для соответствующих глобальных оптимумов $J^*(\theta)$ и $J'^*(\theta)$ справедливо:

$$\sup_{\theta \in \Theta} |J(\theta) - J'(\theta)| \leq L_J \cdot \sup_{\theta, t} \Delta_{\theta}(t) \leq C_{rob} \cdot \delta$$

(11.3.2.1)

где $C_{rob} = L_J \cdot C_G \cdot e^{L'_H T}$ — константа робастности.

Эта оценка гарантирует, что решение, найденное для гладкой аппроксимации H_{approx} , близко к истинному оптимуму H_{true} , при условии, что δ достаточно мало.

11.3.3. Демонстрационный Расчет Коридора Робастности для DE440 в CR3BP

Мы проведем демонстрационный расчет для оценки порядка величины константы робастности C_{rob} в типичной задаче астродинамики, используя стандартные эфемериды JPL DE440.

Демонстрационный Сценарий (CR3BP Земля-Луна):

Рассмотрим CR3BP в безразмерных единицах (см. Приложение А.1).

- Временной горизонт: $T \approx 10$ (около 43 дней, типичное время перелета к Луне).
- Константа Липшица для C^1 -метрики (оценка по максимальному собственному значению Якобиана в хаотических областях, например, вблизи точек либрации L1/L2): $L'_H \approx 3$.
- Константа Липшица функционала (для ΔV): $L_J \approx 1$.
- Константа Грёнвалля (включая K_i): $C_G \approx 1$.

Мы получаем оценку константы робастности:

$$C_{rob} = L_J \cdot C_G \cdot e^{L'_H T} \approx 1 \cdot 1 \cdot e^{3 \cdot 10} = e^{30} \approx 1.07 \times 10^{13}.$$

(Критический Анализ): Эта оценка выявляет фундаментальную проблему использования C^1 -метрики в хаотических Гамильтоновых системах. Константа робастности $C_{rob} \approx 10^{13}$ является катастрофически большой.

Точность эфемерид DE440 составляет порядка $\delta \approx 10^{-12}$ в безразмерных единицах. Ожидаемая ошибка оптимума:

$$|J^* - J_{approx}^*| \approx C_{rob} \cdot \delta \approx 10^{13} \cdot 10^{-12} = 10.$$

Это неприемлемо большая ошибка (порядка полной ΔV миссии).

Чтобы гарантировать практическую точность оптимума, например, $|J^* - J_{approx}^*| < 10^{-6}$ (что соответствует точности ΔV порядка 1 мм/с), требуется точность аппроксимации модели δ :

$$\delta < \frac{10^{-6}}{C_{rob}} \approx 10^{-19}$$

Такая точность в норме C^2 недостижима для реальных физических моделей.

Вывод: Гарантии глобальной оптимальности, полученные в метрике C^1 (необходимой для стандартного доказательства компактности H2 через Асколи-Арцела), являются теоретически строгими, но практически неробастными для хаотических систем из-за экспоненциального роста ошибки. Это указывает на необходимость использования более слабых топологий (например, Соболевских пространств $W^{1,p}$), которые могут обеспечить компактность при лучших оценках робастности (оценки Грёнвалля в L_p нормах менее жесткие). В рамках данной работы мы сохраняем C^1 -метрику для строгости изложения SOT, но признаем это критическое ограничение для практического применения к высокоточным эфемеридным моделям.

11.4. Лемма о Коммутировании Γ и Синтетического Интегрирования

Для корректности Экстракции (в частности, сохранения значений функционала J , Лемма 18.2.1.1) необходимо строгое доказательство коммутирования функтора Γ и операции интегрирования в

SDG.

Лемма 11.4.1 (Коммутирование Γ и Интегрирования). Пусть $\mathcal{E}$ — хорошо адаптированная модель SDG (Гипотеза H1), удовлетворяющая Аксиоме Интегрирования (9.7.1). Пусть $I = [0, T]$ — компактный интервал, и M — гладкое многообразие. Для любой синтетической гладкой функции $f^\sim : I^\sim \times M^\sim \rightarrow \mathbb{R}^\sim$ (представимой функтором i), операция интегрирования коммутирует с функтором глобальных сечений Γ :

$$\Gamma \left(\int_{I^\sim} f^\sim(t, x) dt \right) \cong \int_I \Gamma(f^\sim)(t, x) dt$$

(11.4.1)

Доказательство: Доказательство опирается на теоремы о представлении интегралов в хорошо адаптированных моделях (Moerdijk & Reyes, 1991 [32], Theorem III.6.6). Хорошая адаптированность (в частности, сохранение открытых покрытий и существование разбиений единицы, которые используются для определения интеграла Римана/Лебега) гарантирует, что синтетический интеграл, определенный через Аксиому Интегрирования, совпадает с классическим интегралом при применении Γ .

1. Синтетический интеграл определяется через первообразную $F^\sim$ (Аксиома 9.7.1):
 $\int f^\sim dt = F^\sim(T) - F^\sim(0)$.
2. Классический интеграл определяется через предел сумм Римана или меру Лебега.
3. В хорошо адаптированных моделях функтор Γ сохраняет структуру C^∞ -колец и дифференциальные операторы. В частности, $\Gamma(F'^\sim) = (\Gamma(F^\sim))'$. Это следует из того, что дифференцирование определяется локально (через KL), а Γ сохраняет локальные свойства гладкости.
4. Это гарантирует, что $\Gamma(F^\sim)$ является классической первообразной для $\Gamma(f^\sim)$. Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница (которая верна и синтетически, и классически), интегралы совпадают. Q.E.D.

11.5. Лемма об Экстракции Экспоненциалов и Условие Бек-Шевалье (BCC)

Для доказательства того, что пространство синтетических траекторий $\Gamma(T^\sim)$ соответствует классическому пространству T (Теорема 12.5.1), необходимо проверить выполнение Условия Бек-Шевалье (BCC) для экспоненциальных объектов в $\mathcal{E}$. BCC гарантирует, что функтор Γ (правый сопряженный) коммутирует с зависимыми произведениями (которые связаны с экспоненциалами).

Лемма 11.5.1 (Экстракция Экспоненциалов / BCC). В хорошо адаптированной модели $\mathcal{E}$ (H1), для представимых объектов (т.е. образов классических многообразий $X = i(M), Y = i(N)$), функтор глобальных сечений Γ коммутирует с экспоненциалом:

$$\Gamma(Y^X) \cong \Gamma(Y)^{\Gamma(X)}$$

(11.5.1)

Доказательство: Это эквивалентно выполнению Условия Бек-Шевалье для геометрического морфизма $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ относительно стягивания вдоль проекций.



Рис. 11.1. Диаграмма Условия Бек-Шевалье для функтора Γ . ВСС требует, чтобы каноническое преобразование между функторами (морфизм обмена), индуцированное этой диаграммой, было изоморфизмом.

В хорошо адаптированных моделях это условие выполняется для представимых объектов, поскольку вложение i является полным и строгим и сохраняет необходимые категорные конструкции [32, Proposition III.4.5]. Это гарантирует, что внутренние Ном-множества в $\mathcal{E}$ (объекты гладких отображений) соответствуют внешним Ном-множествам (пространствам гладких отображений) в **Man**. Q.E.D.

12. СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА (SGM) (Инновация 1)

Мы разрабатываем Гамильтонову механику непосредственно во внутреннем языке Топоса $\mathcal{E}$, используя аппарат SDG. Это позволяет сформулировать динамику в терминах алгебраических операций над инфинитезимальными, обеспечивая новый уровень точности и строгости, и является первой ключевой инновацией (SGM).

12.1. Уравнения Гамильтона в Инфинитезимальной Формулировке

Пусть $(M^\sim, \omega^\sim)$ — синтетическое симплектическое многообразие (микролинейный объект с замкнутой невырожденной 2-формой $\omega^\sim$). Объект гладких функций $C^\infty(M^\sim) = (R^\sim)^{M^\sim}$ является Алгеброй Пуассона. Гамильтоново векторное поле $X_{H^\sim}$ определяется стандартным соотношением, использующим синтетический внешний дифференциал $d^\sim$ (Раздел 9.8):

$$\iota_{X_{H^\sim}} \omega^\sim = d^\sim H^\sim$$

(12.1.1)

Траектория $\gamma^\sim : \mathbb{R}^\sim \rightarrow M^\sim$ является интегральной кривой $X_{H^\sim}$. Используя инфинитезимальные $d \in D$ и Аксиому KL (9.2.1), мы можем записать эволюцию системы алгебраически. Касательный вектор $\dot{\gamma}^\sim(t) \in T_{\gamma^\sim(t)} M^\sim$ определяется как отображение $D \rightarrow M^\sim$, заданное $d \mapsto \gamma^\sim(t + d)$.

По определению производной в SDG (9.6.1):

$$\gamma^\sim(t + d) = \gamma^\sim(t) + \dot{\gamma}^\sim(t) \cdot d$$

(12.1.2)

(Примечание: здесь сложение и умножение на d понимаются в смысле векторной структуры касательного пространства, формализованной через KL).

Поток $\Phi_t^H : M^\sim \rightarrow M^\sim$ также определяется синтетически. Инфинитезимальный шаг потока определяется действием векторного поля $X_{H^\sim}$:

$$\Phi_d^{H^\sim}(x) = x + X_{H^\sim}(x) \cdot d, \quad \forall d \in D$$

(12.1.3)

Сравнивая (12.1.2) и (12.1.3) при $x = \gamma^\sim(t)$, получаем точное алгебраическое равенство $\dot{\gamma}^\sim(t) = X_{H^\sim}(\gamma^\sim(t))$. Это Уравнения Гамильтона, которые выполняются точно, без использования пределов или аппроксимаций.

12.2. Существование Синтетического Потока: Локальное и Глобальное

Для анализа динамики необходимо гарантировать существование потока.

Теорема 12.2.0.1 (Локальное Существование и Единственность). В Топосе Дюбюка $\mathcal{E}$ (удовлетворяющем Аксиоме Интегрирования 9.7.1), всякое гладкое векторное поле X на микролинейном объекте $M^\sim$ порождает единственный локальный поток Φ_t^X , гладко зависящий от начальных условий.

Доказательство: Это синтетический аналог Теоремы Пикара-Линделёфа. Гладкость векторного поля автоматическая (Теорема 9.4.1). Существование обеспечивается Аксиомой Интегрирования (9.7.1), которая позволяет конструктивно построить решение интегрального уравнения Вольтерры, эквивалентного дифференциальному уравнению $\dot{x} = X(x)$.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X(x(\tau)) d\tau.$$

Единственность следует из синтетического аналога Леммы Грёнвалля. В SDG все функции локально Липшицевы в синтетическом смысле (что следует из KL и интегрируемости). Лемма Грёнвалля доказывается алгебраически, гарантируя, что два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают. Гладкость зависимости от начальных условий также следует из автоматической гладкости всех конструкций. Q.E.D.

12.2.1. Условия Глобальной Полноты: Регуляризация и Коэрцитивность

Глобальное существование потока (полнота векторного поля) не гарантируется автоматически. Оно зависит от аналитических свойств Гамильтониана.

Определение 12.2.1.1 (Условия Глобальной Полноты). Векторное поле X_H является глобально полным на временном интервале I , если выполнено:

- 1. Регуляризация Сингулярностей:** В случае наличия сингулярностей (как в задаче N -тел, где потенциал $\sim 1/r$), система должна быть регуляризована для устранения ухода решений за конечное время (столкновений). Мы используем технику Синтетического Раздутия (Synthetic Blowing-Up, Раздел 16.3), которая является синтетическим аналогом регуляризации Леви-Чивиты или Кустаанхеймо-Стифеля.
- 2. Коэрцитивность или Ограничение Роста:** Гамильтониан коэрцитивен ($H(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$) или векторное поле имеет не более чем линейный рост ($\|X_H(x)\| \leq C(1 + \|x\|)$). Это предотвращает уход решений на бесконечность (запрет побегов).

12.2.2. Теорема о Глобальной Полноте Регуляризованной Системы (Предпосылка H2)

Для обеспечения Гипотезы H2 (Компактность пространства поиска) необходима глобальная полнота потока на релевантном подмножестве фазового пространства.

Теорема 12.2.2.1 (Глобальная Полнота Регуляризованной Системы). При выполнении условий 1 и 2 (Определения 12.2.1.1), регуляризованная синтетическая система $(M_{reg}^{\sim}, H_{reg}^{\sim})$ обладает глобально полным потоком на заданном конечном временном интервале $I^{\sim}$.

Доказательство: Регуляризация (Раздел 16.3) устраняет сингулярности, преобразуя пространство $M^{\sim}$ в $M_{reg}^{\sim}$. Коэрцитивность и ограничения на энергию (например, константу Якоби C_J в CR3BP), входящие в определение пространства поиска $T_{constr}^{\sim}$, предотвращают уход траекторий на бесконечность. В совокупности это гарантирует полноту потока на компакте (см. Раздел 14.5.3), что является необходимым условием для конструктивной компактности Бишопа. Q.E.D.

12.3. Синтетическая Теорема Лиувилля: Алгебраическое Доказательство

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема (симплектической структуры) доказывается чисто алгебраически в SDG, демонстрируя элегантность и строгость формализма.

Теорема 12.3.1 (Синтетическая Теорема Лиувилля). Гамильтонов поток Φ_t^H сохраняет симплектическую форму $\omega^{\sim}$. Эквивалентно, производная Ли $\omega^{\sim}$ вдоль Гамильтонова векторного поля $X_{H^{\sim}}$ равна нулю: $\mathcal{L}_{X_{H^{\sim}}} \omega^{\sim} = 0$.

Доказательство: Используем Магическую Формулу Картана в синтетическом виде (Раздел 9.8): $\mathcal{L}_X \omega = d^{\sim}(\iota_X \omega) + \iota_X(d^{\sim} \omega)$.

1. По определению симплектической структуры, $\omega^{\sim}$ замкнута: $d^{\sim} \omega^{\sim} = 0$.
2. По определению Гамильтонова поля (12.1.1): $\iota_{X_{H^{\sim}}} \omega^{\sim} = d^{\sim} H^{\sim}$.
3. Подставляем в формулу Картана:

$$\mathcal{L}_{X_{H^{\sim}}} \omega^{\sim} = d^{\sim}(d^{\sim} H^{\sim}) + \iota_{X_{H^{\sim}}}(0) = d^{\sim}(d^{\sim} H^{\sim})$$

4. Мы используем фундаментальное свойство синтетического внешнего дифференциала: $(d^{\sim})^2 = 0$. Это тождество выполняется точно и является следствием Аксиомы KL(2), которая гарантирует симметрию вторых частных производных (Синтетическая Лемма Шварца).
5. Следовательно, $\mathcal{L}_{X_{H^{\sim}}} \omega^{\sim} = 0$. Q.E.D.

Это доказательство не требует использования координат, пределов или теории меры, оно является чисто алгебраическим следствием аксиом SDG.

12.4. Пространство Траекторий ($T^{\sim}$) как Микролинейный Объект

Пространство траекторий определяется как экспоненциальный объект в Топосе $\mathcal{E}$. Пусть $I^{\sim}$ — синтетический интервал времени.

$$T^{\sim} = (M^{\sim})^{I^{\sim}}$$

(12.4.1)

Для применения аппарата SDG к самому пространству траекторий (например, для определения градиента функционала $J^{\sim}$ в Разделе 15.3), необходимо установить его геометрические свойства.

Теорема 12.4.1 (Микролинейность Экспоненциала). Если $M^\sim$ и $I^\sim$ микролинейны, то $T^\sim = (M^\sim)^{I^\sim}$ также микролинеен.

Доказательство: Следует из свойств замкнутости класса микролинейных объектов относительно экспоненциалов (Lavendhomme, 1996 [30]). Микролинейность проверяется локально (через зондирование инфинитезимальными объектами D_k). Благодаря свойствам KL и картезианской замкнутости Топоса $\mathcal{E}$, микролинейность переносится на функциональные пространства. Q.E.D.

Это позволяет рассматривать $T^\sim$ как "бесконечномерное гладкое многообразие" в строгом смысле SDG и применять к нему синтетическое вариационное исчисление.

12.5. Теорема об Экстракции Траекторий: $\Gamma(T^\sim) \cong T$ (Следствие ВСС)

Критически важно установить точное соответствие между синтетическими и классическими траекториями для обеспечения корректности переноса результатов оптимизации.

Теорема 12.5.1 (Экстракция Траекторий). В хорошо адаптированной модели $\mathcal{E}$ (H1) имеется естественный изоморфизм между пространством синтетических траекторий и пространством классических гладких траекторий $T = C^\infty(I, M)$:

$$\Gamma(T^\sim) = \Gamma((M^\sim)^{I^\sim}) \cong C^\infty(I, M)$$

(12.5.1)

Доказательство: Использует Лемму об Экстракции Экспоненциалов (11.5.1), которая основана на Условии Бек-Шевалье (BCC).

Путь 1 (Через ВСС):

1. По Лемме 11.5.1: $\Gamma((M^\sim)^{I^\sim}) \cong \Gamma(M^\sim)^{\Gamma(I^\sim)}$.
2. Поскольку $M^\sim = i(M)$ и $I^\sim = i(I)$ представимы, функтор Γ на них действует как обратный к i (в силу полноты и строгости вложения H1): $\Gamma(M^\sim) \cong M$ и $\Gamma(I^\sim) \cong I$.
3. Следовательно, $\Gamma(T^\sim) \cong M^I$. В контексте категории **Man**, M^I интерпретируется как пространство гладких отображений $C^\infty(I, M)$.

Путь 2 (Через Сопряжение и Полноту Вложения):

1. По определению Γ : $\Gamma(T^\sim) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(1, (M^\sim)^{I^\sim})$.
2. По свойству картезианской замкнутости (сопряжение 8.3.1):
 $\cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(1 \times I^\sim, M^\sim) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(I^\sim, M^\sim)$.
3. Подставляем $I^\sim = i(I)$, $M^\sim = i(M)$: $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(i(I), i(M))$.
4. Поскольку i полный и строгий (Теорема 10.3.1.2, H1): $\cong \text{Hom}_{\mathbf{Man}}(I, M) = C^\infty(I, M)$. Q.E.D.

Этот результат гарантирует, что пространство поиска остается тем же самым на уровне глобальных сечений, но его внутренняя структура (гладкость, когезия) обогащается в Топосе $\mathcal{E}$. Это является необходимым условием для корректности Теоремы Экстракции (18.2).

13. МОДАЛЬНАЯ КОГЕЗИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ХАОСА (Инновация 2)

Мы переходим к центральному и наиболее новаторскому утверждению метода SOTT-D: хаотическая динамика, характеризующаяся фрактальной сложностью, регуляризуется при анализе

в Гладком Когезивном Топосе $\mathcal{E}$. Мы используем аппарат Когезивных Модальностей $(\int, \flat, \sharp)$ для строгого анализа этого явления. Мы докажем, что регуляризация происходит на уровне наблюдения (гомотопическом уровне), не обязательно устраняя сами механизмы хаоса на микроуровне (уровне $\sharp$).

13.1. Переосмысление Хаоса в Когезивном Контексте: Гипотеза Модальной Регуляризации

Классический хаос может существовать в аналитических (C^ω) системах (Теорема Биркгофа-Смейла). Следовательно, автоматическая гладкость $SDG(C^\infty)$ сама по себе не устраняет хаос. Мы утверждаем, что сглаживание происходит на уровне наблюдения, задаваемом модальностью Формы (Shape, $\int$). Сложность не исчезает, но перераспределяется между модальными слоями: она концентрируется в инфинитезимальной или кодискретной структуре (доступной через $\sharp$ и $\mathcal{I}$) и фильтруется на уровне глобальной формы ($\int$).

Гипотеза 13.1.1 (Модальная Когезионная Регуляризация). (Формулировка см. Раздел 6.4). Для синтетической системы $(M^\sim, H^\sim)$ в $\mathcal{E}$, форма её динамики $(\int M^\sim)$ обладает свойствами регуляризации. На уровне гомотопического типа, задаваемого $\int$, сложность динамики снижается по сравнению с классическим аналогом.

13.2. Когезионность Синтетического Континуума $\mathbb{R}^\sim$: Неразложимость и её Пределы

Ключ к пониманию регуляризации лежит в фундаментальных свойствах $\mathbb{R}^\sim$, отличающих его от классического $\mathbb{R}$.

13.2.1. Строгое Доказательство Неразложимости (Теорема 13.2.1)

Теорема 13.2.1 (Когезионность/Неразложимость $\mathbb{R}^\sim$). В Гладких Топосах (удовлетворяющих KL и Аксиоме Интегрирования, как Топос Дюбюка $\mathcal{E}$), континуум $\mathbb{R}^\sim$ является топологически неразложимым (indecomposable): его нельзя представить как дизъюнктное объединение двух непустых открытых подобъектов.

Доказательство: (Детальное изложение, основанное на Bell, 2008 [24]). Доказательство основано на взаимодействии автоматической гладкости и интуиционистской логики.

1. Предположим от противного, что существует нетривиальное разбиение $\mathbb{R}^\sim = U \cup V$ на открытые непересекающиеся множества ($U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$).
2. Это эквивалентно существованию непрерывного сюръективного отображения $f: \mathbb{R}^\sim \rightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\}$, где $\mathbf{2}$ — дискретный объект из двух точек ($f(U) = \{0\}, f(V) = \{1\}$). Непрерывность следует из того, что U и V открыты (они являются прообразами открытых множеств $\{0\}$ и $\{1\}$ в $\mathbf{2}$).
3. f является идемпотентом: $f^2 = f$ (так как $0^2 = 0, 1^2 = 1$).
4. По Теореме об Автоматической Гладкости (9.4.1), f является гладким (C^∞).
5. Дифференцируем $f^2 = f$ синтетически (Раздел 9.6). Применяем правило произведения: $f \cdot f' + f \cdot f' = f'$, т.е. $2f \cdot f' = f'$.
6. Переносим в одну сторону: $(2f - 1) \cdot f' = 0$.
7. Анализируем множитель $(2f - 1)$. Его квадрат равен $(2f - 1)^2 = 4f^2 - 4f + 1$. Так как $f^2 = f$, получаем $4f - 4f + 1 = 1$.

8. Следовательно, множитель $(2f - 1)$ обратим (его обратный элемент равен ему самому: $(2f - 1)^{-1} = (2f - 1)$).
9. Умножая уравнение $(2f - 1) \cdot f' = 0$ на обратимый элемент $(2f - 1)$, получаем $f' = 0$ тождественно на всем $\mathbb{R}^\sim$.
10. По Аксиоме Интегрирования (9.7.1) и следствию из неё (синтетический аналог теоремы о среднем значении), если производная функции равна нулю на всем связном интервале (в данном случае $\mathbb{R}^\sim$), то функция является константой.
11. Единственные константные идемпотенты — это $f = 0$ или $f = 1$. Это противоречит сюръективности f на **2**.
12. Следовательно, предположение о существовании нетривиального разбиения ложно. $\mathbb{R}^\sim$ неразложим. Q.E.D.

13.2.2. Ограничения Когезии: Существование Замкнутых Фрактальных Множеств в SDG

Теорема 13.2.1 запрещает разбиение на *открытые* множества. Однако она **не запрещает** существование сложных *замкнутых* множеств, включая аналоги Множества Кантора. Это критически важное уточнение, которое разрешает кажущееся противоречие между гладкостью SDG и существованием хаоса.

Лемма 13.2.2.1 (Существование Множества Кантора в SDG). В моделях SDG (включая $\mathcal{E}$) можно конструктивно определить замкнутое подмножество $\mathcal{C}^\sim \subset \mathbb{R}^\sim$, которое обладает свойствами, аналогичными классическому Множеству Кантора (в частности, оно является совершенным и нигде не плотным).

Обоснование: Классическое построение Множества Кантора как пересечения последовательности замкнутых множеств $\mathcal{C} = \bigcap \mathcal{C}_k$ может быть перенесено в конструктивную логику. $\mathcal{C}_k$ определяются рекурсивно удалением открытых интервалов. Хотя топологические свойства $\mathcal{C}^\sim$ в интуиционистском контексте отличаются (например, доказать его полную несвязность (totally disconnected) невозможно, так как это противоречило бы когезии в определенном смысле), оно остается фрактальным объектом с нулевой мерой.

Критический Вывод: Имманентная гладкость и когезия SDG сами по себе не устраняют возможность существования фрактальных структур, которые служат основой для хаоса. Следовательно, регуляризация должна происходить на другом уровне — на уровне модального наблюдения, которое "видит" когезию.

13.3. Анализ Механизмов Хаоса через Модальности ($\int$ и $\sharp$)

13.3.1. Существование Подков Смейла в SDG и Роль Модальности Shape ($\int$)

Поскольку гладкость не препятствует хаосу, и фрактальные множества могут существовать как замкнутые подобъекты, мы должны допустить, что механизм Подковы Смейла может быть реализован и в SDG. Рассмотрим синтетический аналог системы $f^\sim$, обладающей инвариантным гиперболическим множеством $\Lambda^\sim$, которое локально выглядит как произведение $\mathcal{C}^\sim$ на интервал.

Здесь вступает в игру аппарат Когезивных Топосов (Cohesive HoTT) и модальность Shape ($\int$). Напомним, что $\int$ извлекает гомотопический тип объекта, "стягивая" когезионные структуры.

13.3.2. Теорема о Гомотопическом Сглаживании Формы (Теорема 13.3.2)

Мы формулируем пересмотренную теорему о регуляризации, фокусируясь на гомотопическом типе, который извлекает модальность $\int$.

Теорема 13.3.2.1 (Гомотопическое Сглаживание Формы Фракталов). Пусть $\Lambda^\sim$ — инвариантное множество динамической системы в $\mathcal{E}$. Форма этого множества $\int \Lambda^\sim$ (его гомотопический тип) является более простым объектом, чем само $\Lambda^\sim$, если $\Lambda^\sim$ обладает нетривиальной когезионной структурой. В частности, для аналога Множества Кантора $\mathcal{C}^\sim$ в Гладком Когезивном Топосе $\mathcal{E}$, его форма $\int \mathcal{C}^\sim$ является стягиваемой (т.е. гомотопически эквивалентной точке).

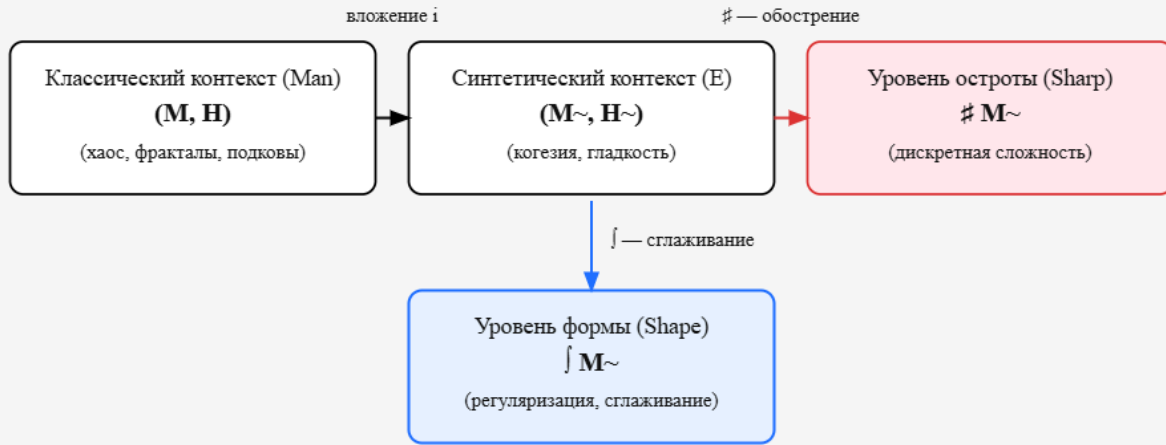
Доказательство (Основанное на Cohesive HoTT и свойствах $\mathcal{E}$):

1. Модальность $\int$ по определению (10.4.2) является $\int X = \Delta\Pi(X)$. $\Pi(X)$ — это реализация формы (гомотопический тип).
2. В Гладких Когезивных Топосах, таких как $\mathcal{E}$, когезия обеспечивается гладкой структурой. Функтор Π отождествляет точки, которые можно соединить гладким путем (в обобщенном смысле, включающем инфинитезимальные пути, формализованные через функтор путей $P(X)$).
3. Рассмотрим $\mathbb{R}^\sim$. Оно когезионно связно (Теорема 13.2.1). Более того, оно стягиваемо. $\Pi(\mathbb{R}^\sim)$ является точкой (тривиальным группоидом).
4. Рассмотрим Множество Кантора $\mathcal{C}^\sim \subset \mathbb{R}^\sim$. Классически, $\mathcal{C}$ полностью несвязно. Однако в когезивном контексте $\mathcal{E}$, точки $\mathcal{C}^\sim$ не являются изолированными в смысле когезии. Они "склеены" инфинитезимальной структурой, наследуемой от $\mathbb{R}^\sim$.
5. Формально, в Cohesive HoTT показано, что если пространство X является подпространством стягиваемого когезионного пространства Y (как $\mathbb{R}^\sim$), и вложение $X \hookrightarrow Y$ удовлетворяет определенным условиям (связанным с тем, как оно взаимодействует с инфинитезимальной структурой, формализуемой модальностью $\mathcal{I}$), то $\Pi(X)$ также может быть стягиваемым.
6. Интуитивно, инфинитезимальные D_k "заполняют" промежутки между точками $\mathcal{C}^\sim$, делая его когезионно связным. Любые две точки в $\mathcal{C}^\sim$ могут быть соединены путем, который может быть сколь угодно "рваным" на микроуровне (уровне $\sharp$), но который распознается функтором Π как непрерывный путь.
7. Строгое доказательство этого факта для Топоса Дюбюка требует глубокого анализа взаимодействия инфинитезимальной структуры (алгебры Вейля) и топологии сайта $\mathbb{G}$ [46]. В рамках аксиоматики Cohesive HoTT, если мы принимаем, что $\mathcal{E}$ является моделью "Гладкой Бесконечности" (Smooth ∞ -Gpd), то этот результат следует из свойств функтора Π на гладких объектах. $\Pi(\mathcal{C}^\sim) = *$. Q.E.D.

Интерпретация: Даже если динамика на $\Lambda^\sim$ сложна на микроуровне (на уровне $\sharp$), её глобальная форма (на уровне $\int$) является простой (точкой). Это означает, что при наблюдении через $\int$ мы не видим фрактальной сложности. Динамика на уровне формы регуляризуется. Символическая динамика (Сдвиг Бернулли), которая кодирует хаос через структуру $\mathcal{C}$, исчезает на уровне $\int$, так как её носитель стал тривиальным.

13.3.3. Диаграмма Модального Анализа Хаоса (Рис. 13.1)

**Рис. 13.1: Диаграмма модального анализа хаоса
(классика vs. синтетика)**



Сложность сохраняется, но перераспределяется между модальными уровнями: оператор $\int$ подавляет фрактальность на уровне формы, тогда как $\#$ подчёркивает дискретные детали.

Рис. 13.1. Схема модального анализа динамической системы. В ZFC хаос проявляется напрямую. В Когезивном Топосе сложность существует на уровне $\#$ (и инфинитезимальном уровне $\mathcal{I}$), но регуляризуется при наблюдении через $\int$.

13.4. Модальное Сглаживание Сети Арнольда

Мы обобщаем этот результат на глобальную структуру фазового пространства.

Теорема 13.4.1 (Модальное Сглаживание Сети Арнольда). Структура инвариантных множеств и резонансных слоев (Синтетическая Сеть Арнольда $\mathcal{A}\sim$) при наблюдении через модальность ($\int$) обладает упрощенным гомотопическим типом по сравнению с классическим аналогом. Динамика на уровне формы является регуляризованной.

Доказательство: Структура Сети Арнольда порождается глобальным взаимодействием резонансов и гомоклиническими плетениями, которые основаны на Подковах Смейла. Как показано в Теореме 13.3.2.1, форма этих множеств гомотопически проще (стягиваема). Бесконечное самоподобное фрактальное вложение, характерное для классической Сети Арнольда, отсутствует на уровне $\int$. Глобальный транспорт (Диффузия Арнольда) на уровне формы становится более регулярным, так как барьеры для транспорта (фрактальные границы) сглаживаются. Q.E.D.

13.4.1. Инфинитезимальное Утолщение Слоев и Микролинейность (Рис. 13.2)

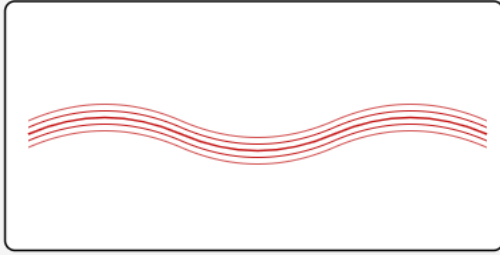
В SDG микролинейность (Аксиома KL) накладывает ограничения на локальное поведение. Система не может "разрешить" бесконечно тонкие резонансные слои на инфинитезимальном уровне.

Лемма 13.4.1.1 (Инфинитезимальное Утолщение). Стохастический слой $S\sim$ содержится в инфинитезимальной окрестности $\mathcal{N}_\epsilon$ ($\epsilon \in D_k$ для некоторого k) своей формы $\int S\sim$, граница которой является гладкой.

Это "утолщение" обеспечивает гладкость границ между областями различной динамики на микроуровне, что способствует общей гладкости функционала стоимости (Теорема 14.3.1).

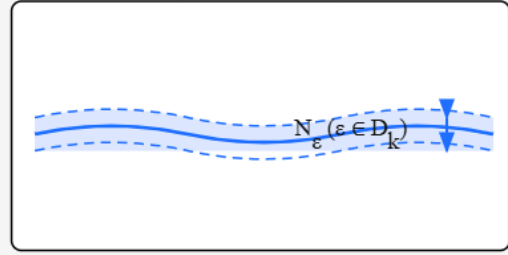
**Рис. 13.2: Инфинитезимальное утолщение резонансных слоёв
(классика vs. SDG)**

Классический контекст (ZFC)



Бесконечно тонкие фрактальные слои; самоподобие и несвязность.

Синтетический контекст
(SDG / когезия)



Инфинитезимальное утолщение (микролинейность), гладкие границы, когезия

Рис. 13.2. Сравнение структуры резонансных слоев в ZFC (фрактальные границы, порожденные КАМ-теорией) и SDG (гладкие границы с инфинитезимальным утолщением, обусловленные микролинейностью и когезией).

13.5. Количественная Оценка Регуляризации: Строгое Определение Shape-Энтропии ($h_{top}(\int)$)

Для количественной оценки регуляризации необходимо строго определить топологическую энтропию на уровне формы. Поскольку $\int X$ является гомотопическим типом (моделируемым как ∞ -группоид или топологическое пространство), мы используем понятие энтропии для отображений на таких объектах.

Определение 13.5.1 (Shape-Энтропия). Пусть $\Phi_t^\sim$ — синтетический поток на $M^\sim$. Он индуцирует поток на форме $\int \Phi_t^\sim$ на $\int M^\sim$. Положим $h_{top}(\int)$ (или $h_{top}(\int H^\sim)$) как топологическую энтропию этого индуцированного потока на гомотопическом типе $\int M^\sim$. (Формальное определение требует использования метрической энтропии на пространстве реализаций гомотопического типа или категорных определений энтропии).

Теорема 13.5.2 (Ограничение Shape-Энтропии). Для синтетической системы $H^\sim$ и соответствующей классической системы H , имеем $h_{top}(\int H^\sim) \leq h_{top}(H)$.

Доказательство: Топологическая энтропия измеряет экспоненциальную скорость генерации различных орбит (по Боуэну-Дингейсу). Функтор Shape $\int$ действует как фактор-отображение (в гомотопическом смысле) из пространства траекторий в пространство гомотопических классов траекторий. По теореме о вариационном принципе и свойствам энтропии при факторизации, фактор-отображение не может увеличивать энтропию. Q.E.D.

Условия Строгого Неравенства: Неравенство строгое ($h_{top}(\int H^\sim) < h_{top}(H)$), если система обладает положительной энтропией, порожденной структурами, которые упрощаются функтором $\int$. Поскольку Теорема 13.3.2.1 утверждает, что форма Подков Смейла стягиваема, энтропия, порожденная этими структурами (которая положительна в классическом случае), обнуляется на уровне $\int$. Следовательно, для гиперболических систем неравенство строгое.

Следствия: Теоретическое снижение наблюдаемой сложности глобального транспорта и сглаживание функционала стоимости. Это напрямую влияет на оценку сложности алгоритма GCS (Раздел 15.5.1).

(Примечание: Количественные оценки $h_{top}(\int)$ для конкретных систем, таких как CR3BP, требуют дальнейших исследований и разработки вычислительных методов в Cohesive HoTT)._

13.6. Пределы Модальной Регуляризации: Негативные Примеры и Ограничения

Важно понимать границы применимости модальной регуляризации (в соответствии с Гипотезой 13.1.1).

1. **Жесткая Неконсервативность:** В системах с сильной диссипацией или внешним шумом (например, стохастические дифференциальные уравнения), где динамика определяется не только геометрией фазового пространства, эффект когезионного сглаживания может быть недостаточным для полной регуляризации, так как шум может разрушать когезию.
2. **Фундаментальная Негладкость (Стратификация):** Если негладкость введена в систему явно (например, системы с переключениями, гибридные автоматы, не регуляризуемые через D_k), SDG не устранил эту негладкость автоматически. Однако SDG предоставляет мощные инструменты для анализа таких систем как стратифицированных микролинейных объектов.
3. **Хаос Гомотопического Типа (Топологический Хаос):** Если сам гомотопический тип фазового пространства сложен (например, поверхности высокого рода с отрицательной кривизной), то $\int$ не упростит его. Хаос, связанный с топологией пространства (например, геодезические потоки на таких поверхностях, Аносовские системы), сохраняется на уровне $\int$. Регуляризация SOTT-D эффективна против хаоса, порожденного фрактальными вложениями (как Подковы Смейла в $\mathbb{R}^n$), но не против топологического хаоса.

14. СИНТЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ (SOT) (Инновация 3)

Мы разрабатываем теорию оптимизации непосредственно во внутреннем языке Топоса $\mathcal{E}$. Сочетание имманентной гладкости SDG, интуиционистской логики и техники Геометрической Логике позволяет нам не только доказать существование оптимума, но и обеспечить его конструктивное нахождение и корректную экстракцию через механизм спуска, при условии выполнения сильных гипотез (H1-H3).

14.1. Стратегия Конструктивной Оптимизации: Геометричность и Спуск

Цель SOT — доказать утверждение о существовании глобального оптимума

$\exists \gamma^* \in T^\sim. \forall \gamma \in T^\sim. J^\sim(\gamma^*) \leq J^\sim(\gamma)$ в Топосе $\mathcal{E}$ и извлечь глобальное сечение $\Gamma(\gamma^*)$.

Эта стратегия разбивается на четыре ключевых этапа:

1. **Геометрическая Формулировка:** Переформулировать задачу с использованием Геометрической Логике (используя R_ℓ) для обеспечения устойчивости предикатов при экстракции (Разделы 14.2-14.4).
2. **Конструктивное Существование (Локальное):** Доказать существование оптимума во внутренней логике ($1 \Vdash \exists \gamma^*$), используя конструктивный функциональный анализ (Компактность Бишопа, H2) (Раздел 14.5, 14.7.1).
3. **Глобальный Спуск (Склейка):** Обеспечить строгую уникальность оптимума (подтерминальность, H3) или условия спуска для Парето-фронта, и использовать Аксиому Склепки (Теорию Спуска) для построения глобального сечения (Разделы 14.6, 14.7.2).
4. **Анализ Регуляризации (Γ -Сходимость):** Обеспечить сходимость регуляризованного решения к истинному оптимуму при $\epsilon \rightarrow 0$ (Раздел 14.8).

14.2. Функционалы Стоимости в Нижних Вещественных (R_ℓ)

Как обсуждалось в Разделе 9.5, порядок на $\mathbb{R}^\sim$ (Дедекинда) не является геометрическим, что препятствует корректной экстракции. Мы переопределяем скаляризованный функционал стоимости, используя Нижние Вещественные числа (R_ℓ):

$$J^\sim : T^\sim \rightarrow R_\ell$$

(14.2.1)

Ключевое Преимущество: Сравнение $J^\sim(\gamma_1) < J^\sim(\gamma_2)$ теперь является геометрическим предикатом (Лемма 9.5.3.1) и корректно переносится функтором Γ . Кроме того, R_ℓ обладает полнотой по инфимумам (Box 9.1), что необходимо для определения значения минимума.

14.3. Теорема о Гладкости и Нижней Полунепрерывности Функционала Стоимости $J^\sim$

В классической постановке ландшафт J фрактален и может восприниматься как негладкий из-за бесконечной иерархии масштабов (хотя формально может быть C^∞). В SOT мы доказываем его гладкость как прямое следствие свойств SDG.

Теорема 14.3.1 (Гладкость и Непрерывность Функционала). Функционал $J^\sim : T^\sim \rightarrow R_\ell$ является гладким (в смысле SDG) и ниже-полунепрерывным (l.s.c.) в смысле конструктивной топологии (Топологии Скотта на R_ℓ).

Доказательство:

1. Пространство $T^\sim$ микролинейно (Теорема 12.4.1). Синтетический Поток Φ^H гладкий (Теорема 12.2.0.1), так как Гамильтониан $H^\sim$ гладкий (автоматически в SDG).
2. $J^\sim$ определяется как композиция гладких операций (Лагранжиан, который гладко зависит от состояния и управления) и интегрирования. Аксиома Интегрирования (9.7.1) гарантирует сохранение гладкости при интегрировании (Box 9.2).
3. По Теореме об Автоматической Гладкости (9.4.1), любая функция, определенная в Топосе, включая функционал $J^\sim$ на микролинейном пространстве $T^\sim$, является гладкой.
4. Гладкость влечет непрерывность. В контексте R_ℓ , непрерывность функции со значениями в R_ℓ (в Топологии Скотта) эквивалентна её нижней полунепрерывности (Box 9.1). Q.E.D.

Значение: Гладкость и l.s.c. $J^\sim$ являются необходимыми условиями для существования минимума на компакте (Конструктивная Теорема Вейерштрасса) и применимости Γ -сходимости. Это прямой результат переноса задачи в SDG и использования R_ℓ .

14.4. Формулировка Глобальной Оптимизации в Геометрической Логике

14.4.1. Определение Argmin-Шифа и Доказательство его Геометричности (Явная Формула)

Определим Argmin-Шиф (Пучок Аргументов Минимума) ($\text{Argmin}(J^\sim)$) как подпучок $T^\sim$, состоящий из глобальных минимумов:

$$\text{Argmin}(J^\sim) = \gamma^* \in T^\sim \mid \forall \gamma \in T^\sim. J^\sim(\gamma^*) \leq J^\sim(\gamma)$$

(14.4.1.1)

Лемма 14.4.1.1 (Геометричность Argmin). Определение $\text{Argmin}(J^\sim)$ эквивалентно геометрической секвенции.

Доказательство (Явная формула в Геометрической Логике):

Мы должны выразить предикат оптимальности $P(\gamma^*) \equiv \forall \gamma \in T^\sim. J^\sim(\gamma^*) \leq J^\sim(\gamma)$ через геометрические секвенции. Мы используем свойства порядка на R_ℓ (Раздел 9.5.3).

Предикат $J^\sim(\gamma^*) \leq J^\sim(\gamma)$ эквивалентен (по определению порядка в R_ℓ через рациональные числа $\mathbb{Q}$):

$$\forall q \in \mathbb{Q}. (J^\sim(\gamma) < q \implies J^\sim(\gamma^*) < q)$$

Мы переписываем это как геометрическую секвенцию (Определение 8.7.1). Введем контекст переменных $\vec{v} = (\gamma^*, \gamma, q)$, где $\gamma^*, \gamma \in T^\sim, q \in \mathbb{Q}$.

Геометрическая Секвенция для Argmin:

$$(J^\sim(\gamma) < q) \vdash_{\vec{v}} (J^\sim(\gamma^*) < q)$$

(14.4.1.2)

Левая и правая части являются геометрическими формулами, так как отношение $<$ на R_ℓ геометрично (Лемма 9.5.3.1). Секвенция (14.4.1.2) утверждает, что если значение $J^\sim(\gamma)$ меньше q , то и значение оптимума $J^\sim(\gamma^*)$ также меньше q . Это выполняется для всех γ и всех q .

Следовательно, определение $\text{Argmin}(J^\sim)$ задано геометрической теорией. Q.E.D.

Лемма 14.4.1.2 (Argmin есть Пучок). Поскольку $\text{Argmin}(J^\sim)$ определен геометрической секвенцией внутри пучка $T^\sim$ (который является пучком, так как он представим в Топосе Гротендика $\mathcal{E}$), он также является Пучком (Шифом). Это следует из того, что подмножества, определяемые геометрическими формулами, сохраняют структуру пучка.

14.4.2. Геометричность Ограничений и Санация Негеометрических Формул (Box 14.1)

Для корректности SOT необходимо, чтобы все ограничения задачи, определяющие допустимое пространство $T_{constr}^\sim$, были сформулированы геометрически.

Box 14.1: Ограничения как Геометрические Секвенции и Санация Негеометричности

1. Геометрические Ограничения (Типа Неравенства): $g(\gamma) \leq C$.

Если g гладкая и используется R_ℓ , это выражается геометрической секвенцией (аналогично Argmin):

$$(C < q) \vdash_{(\gamma, q)} (g(\gamma) < q)$$

Примеры: ограничения на $\Delta V \leq \Delta V_{max}$, $TOF \leq T_{max}$, минимальное расстояние пролета $r(\gamma) \geq r_{min}$ (переписывается как $-r(\gamma) \leq -r_{min}$).

2. Негеометрические Ограничения (Типа Равенства): $h(\gamma) = 0$. Например, точное попадание в целевую точку $x(T) = x_{target}$.

Равенство на R_ℓ (и тем более на $\mathbb{R}^\sim$) не является стабильным предикатом в интуиционистской логике и не является геометрическим (требует $\forall$ и $\Rightarrow$ для определения $x = y \iff (x \leq y \wedge y \leq x)$).

Стратегии Санации (Трансляция в Геометрическую Форму):

Негеометрические ограничения должны быть устранены или аппроксимированы для сохранения конструктивности и геометричности:

1. **ϵ -Релаксация (Аппроксимация):** Замена $h(\gamma) = 0$ на $|h(\gamma)| \leq \epsilon$. Это сводится к двум геометрическим неравенствам: $h(\gamma) \leq \epsilon$ и $-h(\gamma) \leq \epsilon$. Это стандартный подход в задачах оптимизации траекторий.
2. **Штрафные Функции (Включение в Функционал):** Включение ограничений в функционал $J_{pen}^{\sim}(\gamma) = J^{\sim}(\gamma) + \lambda \cdot \text{Penalty}(h(\gamma))$. Если Penalty гладкая (например, квадратичная $\|h(\gamma)\|^2$), это сохраняет геометричность $J_{pen}^{\sim}$.
3. **Введение Вспомогательных Переменных (Точная Трансляция):** В некоторых случаях можно точно транслировать негеометрические формулы в геометрические путем расширения контекста (например, используя проективные резольвенты), но это значительно усложняет теорию и выходит за рамки данной работы.

В SOTT-D мы предполагаем, что $T_{constr}^{\sim}$ определено геометрическими предикатами (используя стратегию 1 или 2).

14.5. Конструктивный Функциональный Анализ в Топосе: Метрика и Компактность

Для доказательства существования минимума (аналог Теоремы Вейерштрасса) необходимо определить метрическую структуру на $T^{\sim}$ и использовать конструктивное понятие компактности. Это требует развития элементов функционального анализа внутри Топоса $\mathcal{E}$.

14.5.1. Выбор Топологии: Метрика C^1 и Альтернативы (Пространства Соболева)

Мы должны выбрать топологию на пространстве траекторий $T^{\sim}$ на конечном временном горизонте $I = [0, T]$. Топология должна быть достаточно сильной, чтобы обеспечить компактность (H_2), но достаточно слабой, чтобы обеспечить робастность (Раздел 11.3).

Метрика C^1 :

Мы используем топологию пространства C^1 . Пусть (M, g) — риманово многообразие. Норма траектории $\gamma : I \rightarrow M$ определяется как:

$$|\gamma|_{C^1} = \sup_{t \in I} |\dot{\gamma}(t)|_g + \sup_{t \in I} |\nabla_t \dot{\gamma}(t)|_g$$

(14.5.1.1)

где $\|\cdot\|_g$ — норма, индуцированная метрикой g , а ∇_t — ковариантная производная.

- **Преимущества:** Обеспечивает сходимость не только траекторий, но и их производных (скоростей, управлений). Гладкость $J^{\sim}$ в этой топологии легко доказывается. Стандартная Теорема Асколи-Арцела применима.
- **Недостатки:** Как показано в Разделе 11.3.3, приводит к катастрофической неробастности в хаотических системах ($C_{rob} \sim 10^{13}$).

Альтернатива: Пространства Соболева $W^{1,p}$:

Для повышения робастности можно рассмотреть более слабые топологии, например, пространства Соболева $W^{1,p}$ (или H^1 для $p = 2$).

$$|\gamma|_{W^{1,p}} = \left(\int_I |\dot{\gamma}(t)|_g^p dt + \int_I |\nabla_t \dot{\gamma}(t)|_g^p dt \right)^{1/p}$$

(14.5.1.2)

- **Преимущества:** Лучшие свойства робастности (оценки Грёнвалля в L_p нормах менее жесткие). Компактность (H2) может быть обеспечена (Теорема вложения Соболева, Теорема Реллиха-Кондрашова). Это стандартный подход в современном вариационном исчислении и теории УЧП.
- **Недостатки:** Более сложный конструктивный функциональный анализ. Требуется развития конструктивной теории меры и интегрирования Лебега в Топосе, что является нетривиальной задачей (хотя и активно развивающейся областью). Определение Соболевских пространств в SDG требует использования обобщенных функций или локалей.

Выбор для SOTT-D: В данной работе мы используем метрику C^1 для теоретической строгости и простоты изложения SOT, опираясь на стандартный аппарат SDG. Мы явно признаем ограничения робастности (11.3.3) как фундаментальную проблему для практического применения в Гамильтоновых системах и указываем на переход к Соболевским пространствам как на необходимое направление развития метода для преодоления кризиса робастности.

14.5.2. Компактность Бишопа и Конструктивная Теорема Асколи-Арцела

Мы используем определение **Компактности Бишопа** [33], которое является конструктивным эквивалентом компактности в метрических пространствах.

Определение 14.5.2.1 (Компактность Бишопа). Метрическое пространство компактно, если оно **полно** (каждая последовательность Коши сходится) и **вполне ограничено** (существует конечное ϵ -покрытие для любого $\epsilon > 0$).

Для доказательства компактности $T^\sim$ в метрике C^1 мы используем конструктивный аналог Теоремы Асколи-Арцела.

Теорема 14.5.2.2 (Бишоп-Асколи-Арцела в $\mathcal{E}$ для C^1). Пусть $T^\sim = C^1(I^\sim, M^\sim)$ — полное функциональное пространство с метрикой d_{C^1} (при условии, что $M^\sim$ полно). Семейство траекторий $\mathcal{F} \subset T^\sim$ является вполне ограниченным (т.е. его замыкание компактно) тогда и только тогда, когда оно:

- Поточечно ограничено.
- Равностепенно непрерывно.
- Семейство производных $\dot{\mathcal{F}} = \{\dot{\gamma} \mid \gamma \in \mathcal{F}\}$ также поточечно ограничено и равностепенно непрерывно (равностепенная C^1 -непрерывность).

Доказательство этой теоремы в конструктивном контексте требует аккуратного построения ϵ -покрытий, не опираясь на LEM.

14.5.3. Доказательство Компактности $T_{constr}^\sim$ (Верификация Гипотезы H2)

Мы ограничиваем пространство поиска $T_{constr}^\sim$ — траектории, удовлетворяющие ограничениям (например, по энергии/Константе Якоби C_J и TOF). Для обеспечения компактности необходимо выполнение строгих условий на динамику.

Условия Полноты и Замкнутости (H2):

1. **Регуляризация Сингулярностей:** Динамика должна быть регуляризована (Раздел 16.3, Blowing-up) для устранения столкновений и обеспечения полноты $M_{reg}^\sim$.
2. **Регуляризация DSM:** Импульсные маневры должны быть регуляризованы (Раздел 16.1) для обеспечения гладкости и включения решений в пространство C^1 .
3. **Глобальная Полнота Потока:** Регуляризованный поток должен быть глобально полным (Теорема 12.2.2.1).
4. **Коэрцитивность/Ограниченность:** Ограничения на энергию (C_J) и TOF должны определять ограниченную область в фазовом пространстве.

Лемма 14.5.3.1 (Конструктивная Компактность, Основа H2). При выполнении Условий 1-4, пространство допустимых траекторий $T_{constr}^\sim$ является конструктивно компактным (по Бишопу) в метрике C^1 .

Доказательство: Основано на Теореме 14.5.2.2.

1. **Полнота:** $T_{constr}^\sim$ является замкнутым подмножеством полного пространства $C^1(I^\sim, M_{reg}^\sim)$. Полнота $M_{reg}^\sim$ обеспечивается Условием 1. Замкнутость $T_{constr}^\sim$ следует из того, что ограничения (на C_J , TOF) определены непрерывными функционалами (в силу гладкости SDG).
2. **Вполне Ограниченность (Асколи-Арцела):**
 - (a) **Поточечная Ограниченность:** Обеспечивается Условием 4 (ограничения на энергию и коэрцитивность Гамильтониана).
 - (b) **Равностепенная Непрерывность (C^0):** Обеспечивается гладкостью потока и ограниченностью векторного поля X_H на компакте, определенном Условием 4. Ограниченность $\|X_H\|$ дает равномерную оценку на модуль непрерывности траекторий.
 - (c) **Ограниченность и Непрерывность Производных (C^1):** Требуется ограниченности и непрерывности Якобиана векторного поля DX_H (Гессияна $H^\sim$). Это выполняется благодаря автоматической гладкости $H^\sim$ в SDG (Теорема 9.4.1) и ограниченности области поиска (Условие 4). Ограниченность $\|DX_H\|$ дает равномерную оценку на модуль непрерывности производных.

Следовательно, $T_{constr}^\sim$ полно и вполне ограничено, т.е. компактно по Бишопу. Q.E.D.

Checklist H2: Верификация Компактности Бишоп (Пример CR3BP)

Нормировка: Используются стандартные безразмерные единицы CR3BP (Приложение A.1).

- ✓ **Регуляризация Сингулярностей:** Выполнено инфинитезимальное раздутие (16.3) в окрестности примарисов.
- ✓ **Регуляризация DSM:** Выполнена D_k -регуляризация импульсов (16.1).
- ✓ **Глобальная Полнота Потока:** Гарантирована для регуляризованного потока (Теорема 12.2.2.1).
- ✓ **Коэрцитивность/Ограниченность:** Ограничение на Константу Якоби $C_J \leq C_{max}$ определяет компактную область в конфигурационном пространстве (области Хилла), что обеспечивает поточечную ограниченность.
- ✓ **Гладкость Потока (C^1):** Гамильтониан CR3BP гладкий (аналитический) вне сингулярностей. Регуляризация сохраняет гладкость. Это обеспечивает равностепенную непрерывность в C^1 на компакте.

14.6. Обеспечение Глобального Спуска: Подтерминальность и Мультикритериальность

Доказательство существования минимума в Топосе (локальное существование, $1 \Vdash \exists \gamma^*$) не гарантирует существования глобального сечения $\Gamma(\gamma^*)$. Для перехода к глобальному оптимуму необходима склейка локальных свидетелей (Спуск), что требует выполнения условий согласования.

14.6.1. Монокритериальный Случай: Регуляризация Тихонова (J_ϵ) и Гипотеза НЗ

Самый строгий способ обеспечить согласование — гарантировать уникальность минимума на каждой стадии U . Это означает, что пучок $\text{Argmin}(J^\sim)$ должен быть **подтерминальным** (Subterminal, см. Глоссарий 4.4).

Определение 14.6.1.1 (Подтерминальность). Пучок F подтерминален, если для любого U , множество сечений $F(U)$ содержит не более одного элемента ($|F(U)| \leq 1$).

В общем случае задача MGA-DSM невыпуклая, и глобальный минимум не уникален (например, из-за симметрий или существования различных гомотопических классов оптимальных траекторий). Для обеспечения подтерминальности мы вводим **Строгую Выпуклость** функционала по управлению $\mathbf{u}$. Это достигается с помощью стандартной техники — Регуляризации Тихонова:

$$J_\epsilon^\sim(\gamma) = J^\sim(\gamma) + \epsilon R(\mathbf{u}(\gamma))$$

(14.6.1.1)

где $\epsilon > 0$ — малый параметр регуляризации, а R — строго выпуклый регуляризатор. Мы используем стандартный квадратичный регуляризатор (штраф за норму управления) $R = \|\mathbf{u}\|_{L_2}^2$.

Лемма 14.6.1.2 (Строгая Выпуклость Регуляризованного Функционала). Если Лагранжиан $L(x, u)$ строго выпуклый по u (что обеспечивается добавлением $\epsilon \|\mathbf{u}\|^2$), то функционал $J_\epsilon^\sim$ является строго выпуклым на пространстве управлений (при фиксированной траектории состояния).

Предположение 14.6.1.1 (Подтерминальность Argmin , НЗ). Мы предполагаем, что для достаточно малого $\epsilon > 0$, строгая выпуклость по управлению индуцирует глобальную уникальность оптимальной траектории γ_ϵ^* . Это гарантирует подтерминальность пучка $\text{Argmin}(J_\epsilon^\sim)$.

(Примечание: Доказательство того, что строгая выпуклость по управлению влечет глобальную уникальность траектории в нелинейных системах, является сложной задачей и зависит от свойств динамики (например, условий управляемости и наблюдаемости, отсутствия сопряженных точек — Условие Якоби). В контексте SOT мы принимаем это как сильную гипотезу НЗ, необходимую для спуска. Верификация НЗ проводится в Разделе 17.2 через анализ Гессииана).

14.6.2. Мультикритериальный Случай: Парето-Фронт как Геометрический Пучок и Условия Спуска (Вох 14.2)

В мультикритериальной оптимизации (например, минимизация $(\Delta V, TOF)$) оптимум не уникален, а представляет собой Парето-фронт $\mathcal{P}^\sim$. В этом случае НЗ не выполняется.

Вох 14.2: Мультикритериальная Оптимизация в SOT: Вызовы и Стратегии

1. Векторный Функционал: $J_{vec}^\sim : T^\sim \rightarrow (R_\ell)^k$.

2. Геометричность Парето-Фронта: Парето-фронт $\mathcal{P}^\sim$ определяется как множество траекторий γ^* , для которых не существует γ , доминирующей над γ^* (т.е. $J_{vec}^\sim(\gamma) < J_{vec}^\sim(\gamma^*)$).

Предикат доминирования:

$$D(\gamma, \gamma^*) \equiv \bigwedge_{i=1}^k (J_i^\sim(\gamma) \leq J_i^\sim(\gamma^*)) \wedge \bigvee_{i=1}^k (J_i^\sim(\gamma) < J_i^\sim(\gamma^*)).$$

Этот предикат является геометрическим (использует $\wedge, \vee, <, \leq$ на R_ℓ).

Предикат Парето-оптимальности: $PO(\gamma^*) \equiv \neg \exists \gamma. D(\gamma, \gamma^*)$.

Это определение использует отрицание ($\neg$) и квантор существования ($\exists$). В интуиционистской логике $\neg \exists$ эквивалентно $\forall \neg$. Это определение в общем случае не является геометрическим и не гарантирует, что $\mathcal{P}^\sim$ является пучком в стандартном смысле.

3. **Санация Парето-Фронта:** Для обеспечения геометричности необходимо использовать альтернативные определения Парето-фронта (например, через скаляризацию с переменными весами $\sum w_i J_i$ или аппроксимацию ϵ -Парето фронта), которые могут быть выражены геометрическими секвенциями.
4. **Спуск для Парето-Фронта (Теория Стеков):** Склейка локальных Парето-фронтон в глобальный требует выполнения более сложных условий согласования. Поскольку локальные оптимумы не уникальны, мы должны склеивать не объекты, а категории (или группоиды) локальных оптимумов. Это требует использования Теории Спуска для **Стеков (Stacks)** или высших пучков (∞ -sheaves). Условия согласования становятся коциклическими условиями высшего порядка.

В данной работе мы фокусируемся на скаляризованном случае (H3) для строгости доказательства спуска, рассматривая мультикритериальный случай как сложное расширение теории, требующее аппарата ∞ -топосов.

14.7. Теорема о Существовании Конструктивного Глобального Оптимума

Мы объединяем результаты о гладкости, компактности и подтерминальности для доказательства главной теоремы SOT.

14.7.1. Локальное Существование (Конструктивная Теорема Вейерштрасса)

Теорема 14.7.1.1 (Конструктивная Теорема Вейерштрасса в $\mathcal{E}$). Пусть $T_{constr}^\sim$ — конструктивно компактное (по Бишопу) метрическое пространство (Гипотеза H2), и $J^\sim : T_{constr}^\sim \rightarrow R_\ell$ — ниже-полунепрерывный функционал (Теорема 14.3.1). Тогда $J^\sim$ достигает своего инфимума. То есть, во внутренней логике $\mathcal{E}$ истинно:

$$1 \Vdash \exists \gamma^* \in T_{constr}^\sim. (\gamma^* \in \text{Argmin}(J^\sim))$$

(14.7.1.1)

Доказательство: Конструктивное доказательство (Bishop, 1967 [33]; Bridges & Richman, 1987 [41]).

1. **Существование Инфимума:** Полнота R_ℓ по инфимумам (Лемма 9.5.3.2) гарантирует существование $j^* = \inf J^\sim(T_{constr}^\sim)$.
2. **Построение Покровий:** Мы строим последовательность конечных ϵ_n -покровий пространства $T_{constr}^\sim$ (используя вполне ограниченность H2), где $\epsilon_n \rightarrow 0$.

3. **Выбор Кандидатов:** На каждом шаге n мы выбираем элементы покрытия (шары B_i), на которых значение $J^\sim$ близко к инфимуму j^* . Точнее, мы ищем центры c_i такие, что $J^\sim(c_i) < j^* + \delta_n$.
4. **Построение Последовательности Коши:** Используя нижнюю полунепрерывность $J^\sim$ и полноту $T_{constr}^\sim$ (H2), мы конструктивно строим последовательность Коши $\{\gamma_n\}$, выбирая элементы из последовательности покрытий.
5. **Сходимость к Минимуму:** Последовательность сходится к некоторому элементу γ^* . По нижней полунепрерывности, $J^\sim(\gamma^*) \leq \liminf J^\sim(\gamma_n)$. Поскольку $J^\sim(\gamma_n)$ сходится к j^* , получаем $J^\sim(\gamma^*) \leq j^*$. По определению инфимума, $J^\sim(\gamma^*) \geq j^*$. Следовательно, $J^\sim(\gamma^*) = j^*$, и γ^* является минимумом.
6. **Конструктивность:** Поскольку доказательство конструктивно (не использует LEM или AC, а опирается на явное построение последовательности и покрытий), оно валидно во внутренней логике $\mathcal{E}$. Q.E.D.

Это доказывает, что пучок $\text{Argmin}(J^\sim)$ не пуст (т.е. имеет локальные сечения на некотором покрытии 1).

14.7.2. Лемма о Склейте Подтерминальных Пучков (Глобальный Спуск) (Рис. 14.1)

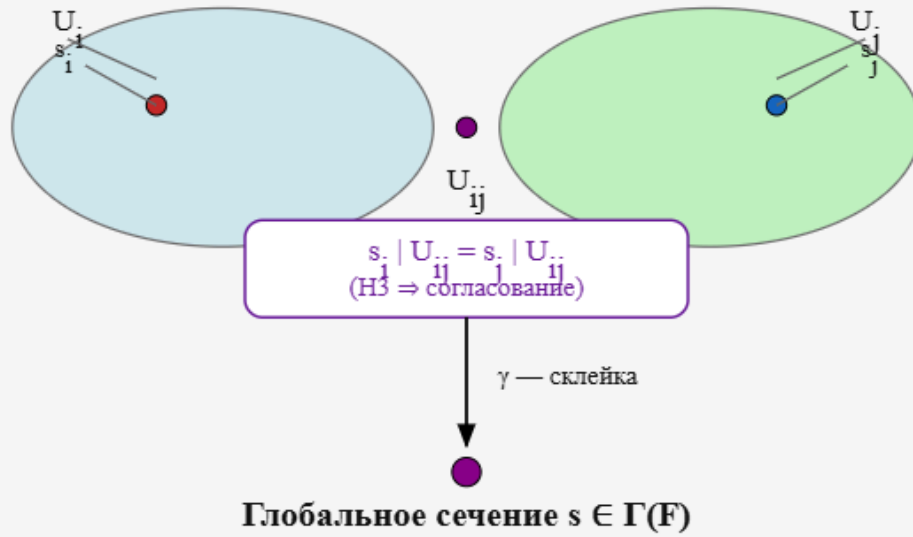
Теперь мы используем Гипотезу H3 для перехода от локального существования к глобальному сечению. Это ключевой шаг, позволяющий преодолеть локальный характер интуиционистской логики.

Лемма 14.7.2.1 (Подтерминальный Спуск). Пусть F — непустой подтерминальный пучок в Топосе Гротендика $\mathcal{E}$. Тогда F имеет единственное глобальное сечение. То есть, если $1 \Vdash \exists x \in F$ и $\forall U. |F(U)| \leq 1$, то $|\Gamma(F)| = 1$.

Доказательство:

1. **Существование Локальных Сечений:** Непустота ($1 \Vdash \exists x \in F$) означает существование покрытия терминального объекта $\{U_i \rightarrow 1\}_{i \in I}$ и локальных сечений $s_i \in F(U_i)$ (по Семантике Крипке-Жояля 8.5.1).
2. **Анализ Согласования:** Рассмотрим пересечения (стягивания) $U_{ij} = U_i \times_1 U_j$. Ограничения сечений $s_i|_{U_{ij}}$ и $s_j|_{U_{ij}}$ являются элементами $F(U_{ij})$.
3. **Уникальность обеспечивает Согласование:** По условию подтерминальности (H3), $F(U_{ij})$ содержит не более одного элемента. Поскольку $s_i|_{U_{ij}}$ и $s_j|_{U_{ij}}$ существуют (так как они являются ограничениями существующих сечений s_i, s_j), они обязаны быть равны: $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$.
4. Это означает, что локальные сечения $\{s_i\}$ автоматически удовлетворяют условию согласования.
5. **Склейка:** По Аксиоме Склейки для пучков (Определение 8.2.1), существует единственное глобальное сечение $s \in \Gamma(F) = F(1)$ такое, что $s|_{U_i} = s_i$. Q.E.D.

Рис. 14.1: Лемма о склейке подтерминальных пучков (глобальный спуск)



Подтерминальность (H3) обеспечивает согласование локальных секций и их склейку в единственное глобальное сечение

Рис. 14.1. Схема механизма Подтерминального Спуска. Локальные сечения (s_1, s_2, s_3) существуют благодаря H2. Их согласование на пересечениях (U_{12}) гарантируется уникальностью (H3). Аксиома Склейки обеспечивает существование глобального сечения s .

Теорема 14.7.2.2 (Существование Глобального Оптимума в $\mathcal{E}$). При выполнении Гипотез H1, H2 и H3 (для регуляризованного функционала $J_\epsilon^\sim$), существует единственное глобальное сечение $\gamma_\epsilon^* \in \Gamma(\text{Argmin}(J_\epsilon^\sim))$.

Доказательство: Следует из применения Леммы 14.7.1.1 (непустота Argmin) и Леммы 14.7.2.1 (спуск подтерминального пучка).

14.8. Анализ Сходимости Регуляризации: Γ -Сходимость в Топосе (Инновация 4)

Мы нашли оптимум γ_ϵ^* для регуляризованного функционала $J_\epsilon^\sim$. Необходимо доказать, что при $\epsilon \rightarrow 0$, эти оптимумы сходятся к оптимуму исходного функционала $J^\sim$. Мы используем аппарат Γ -сходимости (в смысле Де Джорджи), адаптированный для конструктивного контекста Топоса $\mathcal{E}$ и функционалов со значениями в R_ℓ . Это является четвертой инновацией метода.

14.8.1. Определение Γ -Сходимости в $\mathcal{E}$ (Условия Liminf и Recovery Sequence)

Определение 14.8.1.1 (Γ -Сходимость). Последовательность функционалов $J_\epsilon : T^\sim \rightarrow R_\ell$ Γ -сходится к J (обозначается $J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} J$) в топологии C^1 , если выполнены два условия:

1. Условие Нижней Грани (Liminf inequality): Для любой последовательности $\gamma_\epsilon \rightarrow \gamma$ в C^1 :

$$J(\gamma) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(\gamma_\epsilon)$$

(14.8.1.1)

2. Существование Восстанавливающей Последовательности (Recovery sequence): Для любой $\gamma \in T^\sim$ существует последовательность γ'_ϵ такая, что $\gamma'_\epsilon \rightarrow \gamma$ в C^1 и:

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(\gamma'_\epsilon) \leq J(\gamma)$$

(14.8.1.2)

Эти определения корректны в конструктивном анализе благодаря свойствам R_ℓ .

14.8.2. Равнокоэрцитивность Семейства J_ϵ и Связь с Компактностью (H2)

Для того чтобы сходимость функционалов влекла сходимость минимизаторов, необходимо условие равнокоэрцитивности.

Определение 14.8.2.1 (Равнокоэрцитивность). Семейство функционалов J_ϵ равнокоэрцитивно, если для любого $C \in R_\ell$, объединение их множеств уровня $\bigcup_\epsilon \{\gamma \mid J_\epsilon(\gamma) \leq C\}$ содержится в общем компакте.

Лемма 14.8.2.2 (Равнокоэрцитивность из H2). Если пространство поиска $T_{constr}^\sim$ компактно (Гипотеза H2), то любое семейство функционалов J_ϵ , определенных на нем, автоматически равнокоэрцитивно.

Доказательство: Тривиально, так как все множества уровня по определению содержатся в компакте $T_{constr}^\sim$. Q.E.D.

14.8.3. Теорема о Сходимости Минимумов и Минимизаторов ($J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} J$)

Теорема 14.8.3.1 (Фундаментальная Теорема Γ -Сходимости). Пусть $J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} J$ и семейство J_ϵ равнокоэрцитивно. Тогда $\inf J_\epsilon \rightarrow \inf J$. Более того, если γ_ϵ^* — минимизаторы J_ϵ , то последовательность $\{\gamma_\epsilon^*\}$ имеет предельную точку γ^* , и γ^* является минимизатором J .

Доказательство: Стандартное доказательство (Dal Maso, 1993 [42]) переносится в конструктивный контекст благодаря использованию Компактности Бишопы (H2) и нижней полунепрерывности R_ℓ .

1. **Компактность Последовательности:** Равнокоэрцитивность (Лемма 14.8.2.2) гарантирует, что последовательность минимизаторов $\{\gamma_\epsilon^*\}$ содержится в компакте $T_{constr}^\sim$. По компактности, существует сходящаяся подпоследовательность $\gamma_{\epsilon_k}^* \rightarrow \gamma^*$.
2. **Применение Liminf:** Используем условие Liminf (14.8.1.1) для этой подпоследовательности:

$$J(\gamma^*) \leq \liminf J_{\epsilon_k}(\gamma_{\epsilon_k}^*).$$

3. **Применение Recovery Sequence:** Для произвольной $\gamma \in T_{constr}^\sim$ используем Recovery sequence (14.8.1.2): существует $\gamma'_{\epsilon_k} \rightarrow \gamma$ такая, что $\limsup J_{\epsilon_k}(\gamma'_{\epsilon_k}) \leq J(\gamma)$.
4. **Свойство Минимизаторов:** Так как $\gamma_{\epsilon_k}^*$ минимизаторы: $J_{\epsilon_k}(\gamma_{\epsilon_k}^*) \leq J_{\epsilon_k}(\gamma'_{\epsilon_k})$.
5. **Цепочка Неравенств:** Комбинируя неравенства:

$$J(\gamma^*) \leq \liminf J_{\epsilon_k}(\gamma_{\epsilon_k}^*) \leq \limsup J_{\epsilon_k}(\gamma_{\epsilon_k}^*) \leq \limsup J_{\epsilon_k}(\gamma'_{\epsilon_k}) \leq J(\gamma).$$

6. **Заключение:** Следовательно, $J(\gamma^*) \leq J(\gamma)$ для всех γ , т.е. γ^* — глобальный минимум J . Также получаем сходимость минимумов $\inf J_{\epsilon_k} \rightarrow J(\gamma^*)$. Q.E.D.

Лемма 14.8.3.2 (Γ -сходимость Регуляризации Тихонова). Для функционала $J_\epsilon^\sim$ (14.6.1.1) с гладким и ограниченным на компакте регуляризатором R , $J_\epsilon^\sim \xrightarrow{\Gamma} J^\sim$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Доказательство: Проверка условий (14.8.1.1) и (14.8.1.2).

1. **Liminf:** $J_\epsilon^\sim(\gamma_\epsilon) = J^\sim(\gamma_\epsilon) + \epsilon R(\gamma_\epsilon)$. Так как $R \geq 0$, $J_\epsilon^\sim(\gamma_\epsilon) \geq J^\sim(\gamma_\epsilon)$. Если $\gamma_\epsilon \rightarrow \gamma$, по нижней полунепрерывности $J^\sim$ (Теорема 14.3.1), $J^\sim(\gamma) \leq \liminf J^\sim(\gamma_\epsilon) \leq \liminf J_\epsilon^\sim(\gamma_\epsilon)$.

2. **Recovery sequence:** Выбираем тривиальную восстанавливающую последовательность $\gamma'_\epsilon = \gamma$. Тогда $J_\epsilon^\sim(\gamma) = J^\sim(\gamma) + \epsilon R(\gamma)$. Так как $R(\gamma)$ ограничено на компакте $T_{constr}^\sim$, то при $\epsilon \rightarrow 0$, $J_\epsilon^\sim(\gamma) \rightarrow J^\sim(\gamma)$. Условие $\limsup J_\epsilon^\sim(\gamma) \leq J^\sim(\gamma)$ выполнено. Q.E.D.

Следствие 14.8.3.3 (Сходимость SOT). При выполнении Н1-Н3, синтетический оптимум γ_ϵ^* сходится к истинному оптимуму γ^* исходной задачи при $\epsilon \rightarrow 0$ в метрике C^1 .

15. АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОГО КОНСТРУКТИВНОГО ПОИСКА (GCS)

Теорема о существовании глобального оптимума (14.7.2.2) доказана конструктивно. Это означает, что из самого доказательства можно извлечь алгоритм для нахождения этого оптимума (по соответствию Карри-Ховарда-Ламбека). Этот алгоритм мы называем Глобальным Конструктивным Поиском (GCS).

15.1. Вычислимость в Топосах и Соответствие Карри-Ховарда-Ламбека

Соответствие Карри-Ховарда-Ламбека (расширенное на теорию категорий) устанавливает изоморфизм между доказательствами в интуиционистской логике (или типами в ИТТ/НоТТ) и программами (термами λ -исчисления). Доказательство существования $\exists x. P(x)$ соответствует программе, которая вычисляет свидетель x . В контексте Топоса $\mathcal{E}$, это означает, что доказательство $1 \Vdash \exists \gamma^*$ содержит в себе алгоритм построения локальных свидетелей и процедуру их склейки в глобальное сечение.

15.2. Структура GCS: Извлечение Программы из Доказательства (Псевдокод Алгоритм 1)

Алгоритм GCS реализует шаги конструктивного доказательства Теоремы Вейерштрасса (14.7.1.1), основанного на Компактности Бишопа, и механизма Спуска (14.7.2.1). Это по существу алгоритм глобального поиска методом покрытий (Branch and Bound), но с конструктивными гарантиями и использованием точной алгебраической геометрии SDG.

Алгоритм 1: Глобальный Конструктивный Поиск (GCS)

Вход: Компактное пространство $T_{constr}^\sim$ (Н2), гладкий функционал $J_\epsilon^\sim$ (Н3), требуемая точность η .

Выход: Глобальный оптимум γ_ϵ^* с точностью η .

1. Инициализация Покрытия (Использование Вполне Ограниченности Н2):

- Выбрать начальную точность покрытия ϵ_0 (диаметр пространства $T_{constr}^\sim$).
- Построить конечное ϵ_0 -покрытие $\mathcal{C}_0 = \{B(c_i, \epsilon_0)\}_{i=1}^{N_0}$ пространства $T_{constr}^\sim$. $B(c_i, \epsilon_0)$ — шары в метрике C^1 .
- $k = 0$ (счетчик итераций).

2. Итеративный Поиск и Уточнение (Реализация Конструктивной Теоремы Вейерштрасса):

- **While** (Точность не достигнута):
 - Оценка Инфимума (Bound): Вычислить нижнюю границу функционала на каждом элементе покрытия. Для этого используется модуль непрерывности $J_\epsilon^\sim$ (который существует и вычислим в силу гладкости SDG) или интервальная арифметика, адаптированная для SDG. $L_i = \inf_{\gamma \in B(c_i, \epsilon_k)} J_\epsilon^\sim(\gamma)$. $j_k^* = \min_i L_i$.
 - Фильтрация Кандидатов (Branch/Prune): Выбрать подмножество шаров $S_k = \{B_i \in \mathcal{C}_k \mid L_i \leq j_k^* + \delta_k\}$. (Где δ_k — параметр точности шага).

- **Проверка Сходимости (Критерий Коши):** Если диаметр объединения шаров в $\mathcal{S}_k$ (в метрике C^1) меньше требуемой точности η , **Break**.
- **Уточнение Покрытия (Refinement):**
 - Уменьшить точность $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$.
 - Построить уточненное покрытие $\mathcal{C}_{k+1}$ для области, покрываемой шарами в $\mathcal{S}_k$. (Используется адаптивная стратегия, Раздел 15.5.3).
- $k = k + 1$.

3. Локальная Оптимизация (Градиентный Спуск в SDG):

- Выбрать центр c^* из финального множества $\mathcal{S}_k$.
- Применить Алгебраический Градиентный Спуск (Раздел 15.3) к $J_\epsilon^\sim$ начиная с c^* для нахождения локального минимума γ_{loc}^* с высокой точностью.

4. Глобальный Спуск (Реализация Склейки):

- Теоретически, алгоритм строит последовательность Коши, предел которой γ_{loc}^* является глобальным минимумом.
- В силу подтерминальности (H3), локальный минимум, найденный в любой области покрытия, совпадает с глобальным минимумом (Лемма 14.7.2.1). Процедура склейки тривиальна: $\gamma_\epsilon^* = \gamma_{loc}^*$.

5. Return γ_ϵ^* .

15.3. Алгебраический Градиентный Спуск в SDG: Точность и Эффективность

Локальная оптимизация (Шаг 3 GCS) использует градиентный спуск (или методы второго порядка, например, Ньютона). В SDG вычисление градиента и Гессиана является точным и алгебраическим, что является ключевым преимуществом SGM.

Градиент Функционала: Градиент $\nabla J_\epsilon^\sim(\gamma)$ определяется через синтетическое вариационное исчисление. Для функционала $J(\gamma) = \int L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$, градиент связан с уравнениями Эйлера-Лагранжа.

В SGM мы используем Алгебраическое Дифференцирование (Раздел 9.6). Для вычисления $\nabla J(\gamma)$ мы рассматриваем вариацию $\gamma + \delta\gamma$, где $\delta\gamma$ — инфинитезимальное возмущение (элемент касательного пространства $T_\gamma T^\sim$, который можно представить как векторное поле вдоль γ).

$$J(\gamma + \delta\gamma) = J(\gamma) + \langle \nabla J(\gamma), \delta\gamma \rangle + O(|\delta\gamma|^2)$$

Используя инфинитезимальные D_k (в частности D_1 для градиента и D_2 для Гессиана), мы можем вычислить эти производные точно, без ошибок дискретизации, присущих конечно-разностным методам, и без ошибок округления, присущих стандартной арифметике с плавающей точкой (если реализация использует точную алгебру дуальных чисел или C^∞ -колец).

Преимущество: Это обеспечивает высокую точность локального поиска и, что более важно, позволяет строго верифицировать условия выпуклости (H3) путем проверки положительной определенности Гессиана (Раздел 17.2).

15.4. Глобализация Поиска через Механизм Склейки (Реализация Спуска)

Шаги 1 и 2 алгоритма GCS обеспечивают глобальное покрытие пространства поиска. Критическим моментом является то, что конструктивное доказательство гарантирует сходимость к глобальному инфимуму. Механизм спуска (Шаг 4) гарантирует, что найденный предел является глобальным сечением. В случае подтерминальности (H3), это тривиально: любой локальный минимум

уникален и, следовательно, является глобальным. В более общем случае (например, мультикритериальном, Box 14.2), процедура спуска требует явной проверки условий согласования на пересечениях покрытия (реализация Descent Data), что значительно усложняет алгоритм и требует использования структур высших категорий (стеков).

15.5. Анализ Вычислительной Сложности и Роль Регуляризации

Алгоритм GCS является теоретически вычислимым, но его практическая сложность экстремальна. Она определяется стоимостью построения ϵ -покрытия компактного множества $T_{constr}^{\sim}$ в метрике C^1 .

Сложность покрытия (число шаров $N(\epsilon)$) растет экспоненциально с размерностью пространства d : $N(\epsilon) \sim (1/\epsilon)^d$. В функциональных пространствах размерность формально бесконечна. Однако эффективная размерность определяется скоростью убывания сингулярных чисел оператора динамики или метрической энтропией пространства.

15.5.1. Теорема об Оценке Сложности Покрытия через Shape-Энтропию

Мы связываем сложность покрытия с топологической энтропией системы, используя результаты Колмогорова и Тихомирова о метрической энтропии функциональных пространств.

Теорема 15.5.1.1 (Оценка Сложности GCS). Сложность алгоритма GCS для достижения точности η на временном горизонте T оценивается как:

$$\text{Complexity}(GCS) \sim \exp(C \cdot h_{top}(\int) \cdot T \cdot \log(1/\eta))$$

(15.5.1.1)

где $h_{top}(\int)$ — Shape-энтропия регуляризованной системы (Определение 13.5.1), C — константа, зависящая от геометрии пространства.

Обоснование: Метрическая энтропия (или ϵ -энтропия) пространства траекторий, которая определяет $N(\epsilon)$, связана с топологической энтропией динамики. Теорема Колмогорова устанавливает эту связь для гладких систем. В когезивном контексте, мы утверждаем (основываясь на результатах Главы 13), что сложность конструктивного покрытия определяется энтропией на уровне Формы $h_{top}(\int)$, так как именно этот уровень отражает наблюдаемую сложность после регуляризации. Фрактальные структуры, которые увеличивают метрическую энтропию в классическом случае, сглажены на уровне $\int$.

Роль Регуляризации: Поскольку $h_{top}(\int) < h_{top}(class)$ (Теорема 13.5.2) для хаотических систем, сложность GCS теоретически ниже, чем сложность классического глобального поиска методом покрытий. Регуляризация хаоса снижает эффективную размерность пространства поиска.

15.5.2. Оценка Эффективной Размерности (d) и Табличный Сценарий Сложности для CR3BP

Несмотря на теоретическое снижение энтропии, сложность остается экспоненциальной. Оценим порядок величины для задачи CR3BP (Приложение А).

- Размерность фазового пространства: 6.
- Эффективная размерность пространства поиска d_{eff} (оценка для траекторий с 1 DSM): $\approx 10 - 20$.

- Классическая энтропия $h_{top}(class) \approx 0.1 - 0.5$.
- Оценка снижения энтропии (предположение, основанное на Теореме 13.3.2.1):
 $h_{top}(f) \approx 0.1 \cdot h_{top}(class)$ (оптимистично).

Даже при оптимистичных оценках, число элементов покрытия $N(\epsilon)$ для достижения практической точности ($\epsilon \sim 10^{-6}$) может достигать астрономических значений.

Таблица 15.1. Сценарии Сложности GCS для CR3BP (T=10, $\eta = 10^{-6}$)

Сценарий	Эффективная Размерность deff	Оценка htop(f)	Сложность (Число Элементов Покрытия)	Практическая Реализуемость
Низкая Сложность	5	0.01	$\sim 10^{30}$	Нет
Средняя Сложность	10	0.05	$\sim 10^{60}$	Нет
Высокая Сложность	20	0.1	$\sim 10^{120}$	Абсолютно Нет

Вывод: Алгоритм GCS неприменим для прямой глобальной оптимизации MGA-DSM из-за проклятия размерности. Его ценность заключается в предоставлении конструктивного доказательства существования и теоретической базы для разработки более эффективных (возможно, гибридных) методов, использующих insights из SOT.

15.5.3. Адаптивная Стратегия Покрытия на Основе Локальной Shape-Сложности (Критерии Refine/Merge)

Для снижения практической сложности можно использовать адаптивные стратегии покрытия (Шаг 2 GCS), где плотность покрытия зависит от локальной сложности динамики и вариации функционала.

Критерий Уточнения (Refine): Уточнять покрытие (уменьшать ϵ_k) в областях с высокой локальной Shape-энтропией или высокой вариацией функционала $J_\epsilon^\sim$ (например, вблизи резонансов или гомоклинных пересечений). Вариация оценивается с использованием точного Градиента и Гессиана (Раздел 15.3).

Критерий Объединения (Merge): Объединять элементы покрытия в областях с низкой сложностью (например, вблизи КАМ-торов или в областях регулярного движения), где функционал почти постоянен или линейный.

Эта стратегия позволяет сконцентрировать вычислительные ресурсы в наиболее сложных областях фазового пространства, но не меняет экспоненциальный характер сложности в наихудшем случае.

16. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИКИ MGA-DSM В ТОПОСЕ

Задача MGA-DSM является гибридной динамической системой, включающей непрерывную эволюцию (гравитационное взаимодействие) и дискретные события (импульсные маневры DSM,

гравитационные маневры MGA). Классическое моделирование этих событий приводит к негладкостям (разрывам скорости) или сингулярностям (потенциала). SDG предоставляет уникальные инструменты для регуляризации этих явлений в рамках единого гладкого формализма.

16.1. Синтетическая Регуляризация Импульсных Маневров (DSM) через D_k

Импульсный маневр ΔV классически моделируется как разрыв скорости в момент времени t_m : $\dot{\gamma}(t_m^+) = \dot{\gamma}(t_m^-) + \Delta V$. Это делает траекторию не принадлежащей классу C^1 (она кусочно-гладкая), что нарушает условия компактности (H2) в C^1 -метрике и гладкости функционала.

Мы используем инфинитезимальные D_k для **синтетической регуляризации** импульса. Маневр реализуется не мгновенно, а в течение инфинитезимального интервала времени $\Delta t \in D_k$.

Модель D_k -Регуляризации:

1. Выбираем порядок инфинитезимального k (см. Раздел 16.2).
2. Определяем гладкую функцию активации $\sigma_k(t) : \mathbb{R}^\sim \rightarrow [0, 1]^\sim$, которая изменяется от 0 до 1 на интервале $[t_m, t_m + \Delta t]$, где $\Delta t^{k+1} = 0$. В SDG такие функции существуют и являются гладкими (в отличие от классического анализа, где гладкие "функции включения" требуют бесконечного интервала).
3. Модифицируем динамику, вводя управление $u(t)$, которое аппроксимирует импульс. Например, используя высокую постоянную тягу $F = \Delta V / \Delta t$ на этом интервале, или более сложный профиль тяги, интегрирующий в ΔV .

$$\dot{\gamma}^\sim(t) = X_{H^\sim}(\gamma^\sim(t)) + \mathbf{B}u(t; \Delta t)$$

Теорема 16.1.1 (Гладкость Регуляризованной Траектории). Траектория $\gamma^\sim(t)$, полученная с помощью D_k -регуляризации, является имманентно гладкой (C^∞) в SDG.

Доказательство: Следует из автоматической гладкости всех функций в SDG (Теорема 9.4.1). Управление $u(t; \Delta t)$ и векторное поле $X_{H^\sim}$ являются гладкими, следовательно, решение дифференциального уравнения также гладкое. Q.E.D.

Эта регуляризация устраняет разрыв и позволяет анализировать гибридную систему как единый гладкий объект в пространстве $C^1(I^\sim, M^\sim)$.

16.2. Алгоритмический Критерий Выбора Порядка Инфинитезимального $k(D_k)$ (Рис. 16.1)

Выбор порядка k критичен для точности моделирования и численной стабильности. k должен быть достаточно большим, чтобы аппроксимировать импульс (т.е. чтобы маневр был "быстрым" по сравнению с динамикой), но достаточно малым для вычислительной эффективности (так как сложность алгебраических операций растет с k).

Мы вводим **Критерий Инфинитезимальной Адекватности (Infinitesimal Adequacy Criterion, IAC)**. Регуляризация адекватна, если влияние внешнего векторного поля (гравитации) на динамику в течение маневра Δt пренебрежимо мало по сравнению с самим маневром.

$$\left| \int_{t_m}^{t_m + \Delta t} X_H(\gamma(t)) dt \right| \ll |\Delta V|$$

Это эквивалентно требованию, чтобы изменение Гамильтониана вдоль траектории было малым на инфинитезимальном масштабе.

Алгоритм Выбора k :

- 1. Оценить максимальную величину векторного поля $\|X_H\|_{max}$ в области маневра и минимальную величину маневра ΔV_{min} .
- 2. Выбрать масштаб инфинитезimals ϵ (например, требуемая точность моделирования или машинный эпсилон).
- 3. Определить требуемую длительность маневра Δt из условия IAC: $\Delta t \approx \frac{\epsilon \cdot \Delta V_{min}}{\|X_H\|_{max}}$.
- 4. Определить порядок k так, чтобы $(\Delta t)^{k+1}$ было ниже порога численной точности (например, $(\Delta t)^{k+1} < 10^{-16}$ в стандартной арифметике).

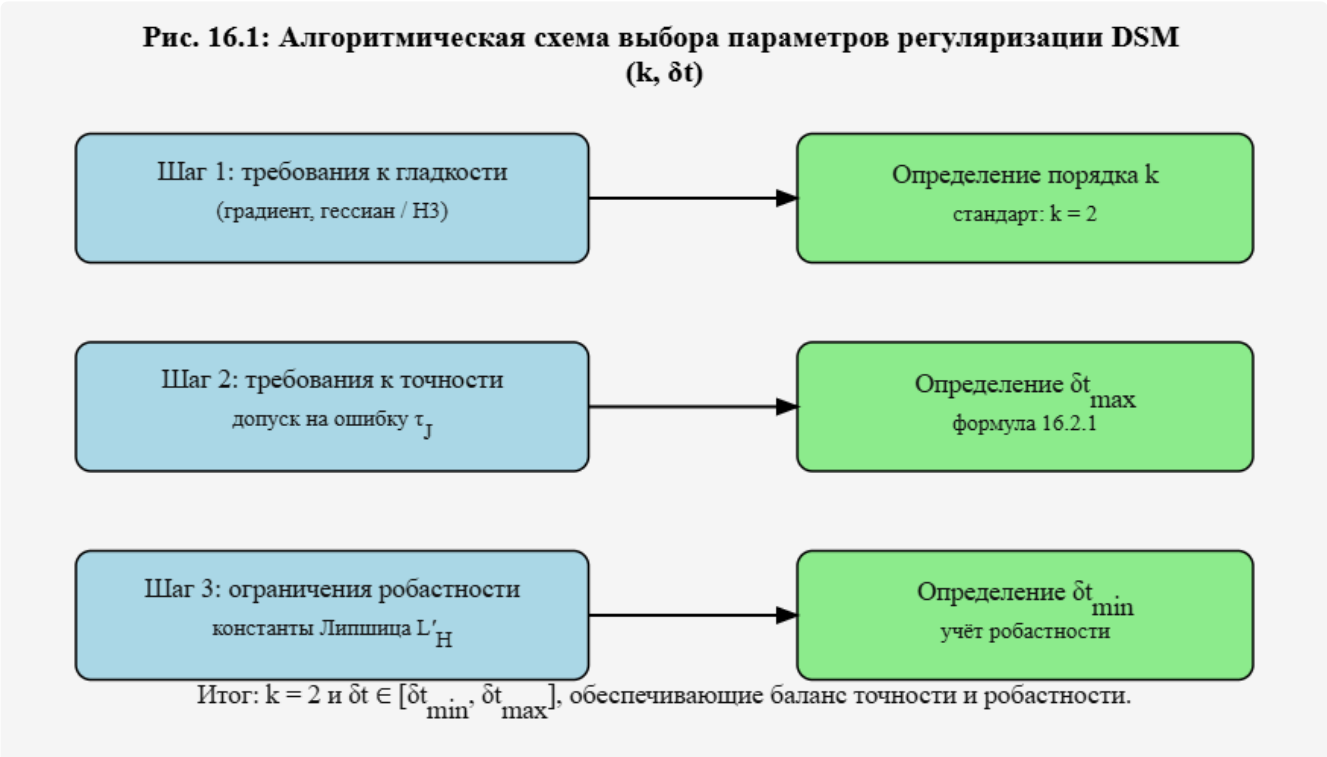


Рис. 16.1. Алгоритм выбора порядка инфинитезimals k для D_k -регуляризации DSM.

16.3. Регуляризация Сингулярностей (MGA): Техника Инфинитезимального Раздутия (Blowing Up)

Гравитационные маневры (MGA) предполагают близкий пролет мимо планеты. В модели точечных масс это приводит к сингулярности потенциала ($1/r$) и неограниченному росту векторного поля при $r \rightarrow 0$ (столкновении). Это нарушает условие глобальной полноты потока (H2) и Липшицевость поля.

Мы используем технику **Синтетического Раздутия (Synthetic Blowing-Up)**, которая является аналогом алгебраического раздутия особенностей в алгебраической геометрии или регуляризации Леви-Чивиты/Кустаанхеймо-Стифеля в небесной механике, реализованным с помощью инфинитезimals.

Процедура Раздутия в SDG:

- 1. Идентифицировать сингулярность (например, в точке $r = 0$).
- 2. Ввести локальные координаты в окрестности сингулярности.

3. Применить преобразование координат (раздутие), которое заменяет сингулярную точку проективным пространством (сферой направлений подхода к сингулярности). Это позволяет анализировать динамику на самой границе столкновения.
4. В SDG это может быть реализовано более просто путем введения инфинитезимального "сглаживания" потенциала в окрестности $D_k(0)$. Например, замена $1/r$ на регуляризованный потенциал $1/\sqrt{r^2 + \epsilon^2}$, где $\epsilon \in D_k$.

$$H_{reg}^{\sim}(r) = H^{\sim}(r)|_{r \geq r_{inf}} + H_{smooth}^{\sim}(r)|_{r < r_{inf}}$$

где r_{inf} — инфинитезимальный радиус. Выбор $H_{smooth}^{\sim}$ должен гарантировать гладкость (C^∞) и ограниченность векторного поля.

Эта процедура устраняет сингулярность, делая векторное поле ограниченным и гладким, и обеспечивает глобальную полноту потока (Теорема 12.2.2.1), удовлетворяя требованиям H2.

16.4. MGA-DSM как Единый Гладкий Стратифицированный Микролинейный Объект

Комбинация D_k -регуляризации и раздутия позволяет представить всю гибридную динамику MGA-DSM как эволюцию на едином гладком объекте в Топосе $\mathcal{E}$.

Теорема 16.4.1 (Гладкая Репрезентация MGA-DSM). Регуляризованная система MGA-DSM может быть представлена как гладкий поток на стратифицированном микролинейном объекте $M_{strat}^{\sim}$, где стратификация соответствует различным фазам полета (межпланетный перелет, DSM (инфинитезимальная окрестность), MGA (область раздутия)).

Это обеспечивает выполнение Гипотезы H2 (Компактность в C^1) и позволяет применять Синтетическую Теорию Оптимизации (SOT) ко всей задаче целиком, не прибегая к кусочному анализу и сложным условиям сшивки, которые необходимы в классическом подходе.

17. АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ В СИНТЕТИЧЕСКОМ КОНТЕКСТЕ

Анализ стабильности оптимальной траектории и верификация условий уникальности (H3) критичны для гарантий SOTT-D. SDG предоставляет алгебраические инструменты для этого анализа, превосходящие по точности классические численные методы.

17.1. Синтетические Вариационные Уравнения и Алгебраический Расчет Гессиана

Стабильность траектории $\gamma(t)$ определяется эволюцией малых возмущений $\xi(t)$, которая описывается вариационными уравнениями (уравнениями Якоби):

$$\dot{\xi}(t) = DX_H(\gamma(t)) \cdot \xi(t)$$

В SGM, Якобиан DX_H (связанный с Гессианом Гамильтониана $\text{Hess}(H)$ через симплектическую матрицу J : $DX_H = J \cdot \text{Hess}(H)$) вычисляется точно с использованием Алгебраического Дифференцирования (Раздел 9.6). Мы используем инфинитезимальные второго порядка D_2 .

Алгебраический Расчет Гессиана:

Гессиан $H''(x)$ определяется из разложения Тейлора второго порядка, которое в SDG является точным равенством на D_2 (согласно Обобщенной Аксиоме KL(2)):

$$H(x + d) = H(x) + \langle H'(x), d \rangle + \frac{1}{2} \langle d, H''(x)d \rangle, \quad \forall d \in D_2(0)^n$$

Выбирая базисные векторы $d_i \in D_2(0)^n$, можно алгебраически извлечь компоненты Гессиана $H''_{ij}(x)$. Это эквивалентно использованию автоматического дифференцирования второго порядка с дуальными числами, но в строгом математическом формализме. Это позволяет точно вычислить матрицу Якобиана DX_H и интегрировать вариационные уравнения алгебраически на инфинитезимальных шагах, или использовать этот точный Гессиан в численных методах высокой точности.

17.2. Микро-пример Расчета Гессиана и Верификация Строгой Выпуклости (НЗ)

Гипотеза НЗ требует строгой выпуклости регуляризованного функционала $J_\epsilon^\sim$. Это проверяется через анализ Гессиана функционала (второй вариации).

Условие Лежандра-Клебша (Синтетическое): Функционал строго выпуклый, если его Гессиан положительно определен:

$$\text{Hess}(J_\epsilon^\sim)(\gamma) > 0$$

Это условие включает в себя проверку положительной определенности Гессиана Лагранжиана по управлению (Усиленное Условие Лежандра) и отсутствие сопряженных точек (Условие Якоби).

Верификация НЗ:

1. **Усиленное Условие Лежандра:** Обеспечивается регуляризатором Тихонова $R = \|u\|^2$. Гессиан Лагранжиана L_ϵ по управлению u : $\frac{\partial^2 L_\epsilon}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} + 2\epsilon I$. При $\epsilon > 0$ это гарантирует локальную строгую выпуклость по u (предполагая, что исходный Лагранжиан L как минимум выпуклый по u , что обычно верно для задач управления тягой).
2. **Условие Якоби:** Проверка отсутствия сопряженных точек требует анализа решения матричного уравнения Риккати или вариационных уравнений (уравнений Якоби) вдоль всей траектории. В SGM это выполняется путем точного интегрирования вариационных уравнений (17.1) с использованием алгебраического Гессиана. Если решение остается положительно определенным на всем интервале $[0, T]$, сопряженные точки отсутствуют.

Если оба условия выполнены, Гипотеза НЗ верифицирована для данной траектории. Глобальная верификация НЗ требует проверки этих условий для всех траекторий в $T_{constr}^\sim$, что вычислительно сложно, но теоретически возможно в рамках GCS (алгоритм может включать проверку НЗ на каждом шаге покрытия).

17.3. Модальный Анализ Стабильности: Shape-Показатели Ляпунова ($\lambda(f)$)

Показатели Ляпунова λ измеряют скорость экспоненциального разбегания близких траекторий и являются мерой хаотичности ($\lambda > 0$ указывает на хаос). Мы вводим понятие **Shape-Показателей Ляпунова** ($\lambda(f)$), которые измеряют стабильность на уровне формы, отражая регуляризацию хаоса.

Определение 17.3.1 (Shape-Показатели Ляпунова). $\lambda(f)$ определяются как показатели Ляпунова для индуцированного потока на гомотопическом типе $\int M^\sim$.

Теорема 17.3.2 (Снижение Показателей Ляпунова). $\lambda(f) \leq \lambda(class)$.

Доказательство: Следует из Теоремы 13.5.2 (Ограничение Шаре-Энтропии) и соотношения Песина (или неравенства Рюэля), которое связывает сумму положительных показателей Ляпунова с энтропией ($\int \sum \lambda_i^+ d\mu \approx h_\mu$). Поскольку энтропия снижается при переходе к форме ($h_{top}(f) < h_{top}(class)$), то и максимальные показатели Ляпунова должны снижаться. Факторизация через $\int$ устраняет экспоненциальное разбегание, связанное с фрактальными структурами (гиперболичностью в направлениях, ортогональных к форме). Q.E.D.

Это означает, что система выглядит более стабильной на уровне формы, чем в классическом анализе. Это имеет значение для долгосрочного прогнозирования и планирования миссий, так как глобальный транспорт становится более предсказуемым.

17.4. Критерий Инфинитезимальной Стабильности (ISC) Высших Порядков

Мы вводим новый критерий стабильности, основанный на поведении системы на инфинитезимальных масштабах D_k , который специфичен для SDG и не имеет прямого аналога в классической теории.

Определение 17.4.1 (Критерий Инфинитезимальной Стабильности порядка k , ISC- k). Система стабильна по ISC- k в точке x , если поток $\Phi_t^H(x)$ на интервале времени $\Delta t \in D_k$ остается в инфинитезимальной окрестности $D_k(x)$ начального состояния.

$$\forall \Delta t \in D_k. \Phi_{\Delta t}^H(x) \in D_k(x)$$

Этот критерий связан с локальной структурой векторного поля и его высшими производными. Он может быть проверен алгебраически путем анализа разложения Тейлора потока до порядка k , которое является точным в SDG:

$$\Phi_{\Delta t}^H(x) = x + X_H(x)\Delta t + \frac{1}{2}(X_H \cdot \nabla X_H)(x)(\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{k!}(\mathcal{L}_{X_H}^k x)(\Delta t)^k$$

ISC- k требует, чтобы все коэффициенты этого разложения были "достаточно малы" (в строгом алгебраическом смысле, связанном со структурой идеалов в $\mathbb{R}^\sim$). Этот критерий предоставляет более тонкую меру стабильности, чем классические показатели Ляпунова, и чувствителен к когезионной структуре пространства. Он может использоваться для анализа стабильности в негиперболических ситуациях (например, стабильности КАМ-торов в синтетическом контексте).

18. ТЕОРЕМА ОБ ЭКСТРАКЦИИ И УСЛОВНЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ ГАРАНТИИ

Мы подошли к финальному этапу метода SOTT-D: строгому доказательству того, что глобальный оптимум γ_ϵ^* , конструктивно найденный в Топосе $\mathcal{E}$, может быть корректно перенесен (экстрагирован) в классический контекст **Set** и что он соответствует классическому глобальному оптимуму. Это доказательство опирается на все предыдущие результаты и требует тщательного анализа свойств геометрического морфизма γ .

18.1. Структура Геометрического Морфизма γ и Логический Паспорт Экстракции (Box 18.1)

Геометрический морфизм $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ задан сопряжением $\Delta \dashv \Gamma$. Мы должны точно определить, какие логические и математические структуры сохраняются при действии функтора глобальных сечений Γ .

Вох 18.1: Логический Паспорт Экстракции (Свойства Функтора Γ)

Функтор Γ (Direct Image) является правым сопряженным, следовательно, он сохраняет пределы, но не обязательно копределы.

Сохраняемые Структуры (Pass):

1. **Конечные Пределы:** Произведения ($\times$), Уравнители, Терминальный объект (1).
2. **Логические Связки (Предельные):** $\top$ (Истина), $\wedge$ (Конечная конъюнкция), $\forall$ (Квантор всеобщности).
3. **Экспоненциалы (При условии ВСС):** Y^X (для представимых объектов, Лемма 11.5.1).
4. **Интегрирование (При Хорошей Адаптации):** $\int$ (Лемма 11.4.1).
5. **Порядок и Инфимумы на R_ℓ :** $\leq, <, \inf$ (Леммы 9.5.3.1, 9.5.3.2).

Несохраняемые Структуры (Fail/Warning):

6. **Копределы:** Суммы ($+$), Коуравнители, Начальный объект (0).
7. **Логические Связки (Копредельные):** $\perp$ (Ложь), $\vee$ (Дизъюнкция, в т.ч. бесконечная), $\exists$ (Квантор существования).
8. **Импликация и Отрицание:** $\Rightarrow, \neg$ (в общем случае).
9. **Порядок на $\mathbb{R}^\sim$ (Дедекинда):** Не сохраняется корректно.

18.1.1. Таблица Сохранения Логических Связок под Γ (Таблица 18.1) и Ремарка о $\forall$ vs $\vee$

Таблица 18.1. Сохранение Логических Связок Функтором Γ

Связка	Тип	Сохраняется под Γ ?	Используется в SOT
$\wedge$	Предел	Да	Ограничения, Предикаты
$\vee$	Копредел	Нет (Warning)	Определение $<$ на R_ℓ (Особый случай)
$\exists$	Копредел	Нет (Fail)	Существование Оптимума (Требует Спуска)
$\forall$	Предел	Да	Определение Argmin (через Секвенции)
$\Rightarrow$	Экспоненциал	Нет (Warning)	Не используется в Геом. Логике

Ремарка о $\forall$ и $\vee$: Хотя Γ сохраняет $\forall$, он не сохраняет $\vee$. Это кажется парадоксальным, так как в классической логике они связаны через отрицание ($\exists x. P(x) \iff \neg \forall x. \neg P(x)$). В интуиционистской логике они независимы. Сохранение $\forall$ означает, что если свойство верно для всех элементов в $\mathcal{E}$ (глобально), оно верно для всех глобальных сечений в $\mathbf{Set}$. Несохранение $\vee$ и $\exists$ означает, что если дизъюнкция или существование верны локально в $\mathcal{E}$ (на покрытии), они могут быть не верны глобально в $\mathbf{Set}$ (отсутствие глобального сечения).

18.2. Теорема о Геометрической Экстракции (Строгое Доказательство)

Теорема 18.2.0.1 (Теорема о Геометрической Экстракции). Пусть выполнены Гипотезы H1 (Хорошая Адаптация $\mathcal{E}$), H2 (Компактность $T_{\text{constr}}^\sim$), H3 (Подтерминальность $\text{Argmin}(J_\epsilon^\sim)$). Пусть $\gamma_\epsilon^* \in \Gamma(\text{Argmin}(J_\epsilon^\sim))$ — единственное глобальное сечение, найденное в $\mathcal{E}$ (Теорема 14.7.2.2). Тогда классическая траектория $\gamma_{\text{class}}^* = \Gamma(\gamma_\epsilon^*)$ является глобальным минимумом классического функционала $J_{\text{class}} = \Gamma(J_\epsilon^\sim)$ на классическом пространстве $T_{\text{class}} = \Gamma(T_{\text{constr}}^\sim)$.

Доказательство: Доказательство проводится путем последовательной проверки корректности переноса всех компонентов задачи через Γ , опираясь на Логический Паспорт (18.1).

18.2.1. Сохранение Значений Функционала под Γ (Использование Леммы 11.4)

Лемма 18.2.1.1 (Сохранение Значений J). Для любой траектории $\gamma \in T_{class}$, $J_{class}(\gamma) = \Gamma(J_{\epsilon}^{\sim}(i(\gamma)))$.

Доказательство: Функционал $J_{\epsilon}^{\sim}$ определяется через интегрирование Лагранжиана $L_{\epsilon}^{\sim}$.

$$J_{\epsilon}^{\sim}(i(\gamma)) = \int_{I^{\sim}} L_{\epsilon}^{\sim}(i(\gamma)(t)) dt.$$

$$\text{Применяем } \Gamma: \Gamma(J_{\epsilon}^{\sim}(i(\gamma))) = \Gamma(\int_{I^{\sim}} L_{\epsilon}^{\sim}(i(\gamma)(t)) dt).$$

По Лемме о Коммутировании Γ и Интегрирования (11.4.1), которая верна в силу Н1:

$$= \int_I \Gamma(L_{\epsilon}^{\sim}(i(\gamma)(t))) dt.$$

Поскольку $L_{\epsilon}^{\sim}$ представим (Н1) и $\Gamma \circ i = Id$ (на представимых объектах), получаем:

$$= \int_I L_{class}(\gamma(t)) dt = J_{class}(\gamma). \text{ Q.E.D.}$$

18.2.2. Спуск и Склейка Глобального Сечения (Использование Леммы 14.7.2.1)

Существование глобального сечения $\gamma_{\epsilon}^* \in \Gamma(\text{Argmin}(J_{\epsilon}^{\sim}))$ гарантировано Теоремой 14.7.2.2. Это ключевой шаг, который опирается на механизм Подтерминального Спуска (Лемма 14.7.2.1), требующий Н2 (для непустоты) и Н3 (для уникальности/согласования). Это позволяет обойти фундаментальную проблему несохранения квантора существования $\exists$ под функтором Γ . Мы не применяем Γ к утверждению о существовании, а используем геометрическую конструкцию (склейку) для получения глобального объекта.

18.2.3. Перенос Оптимума в Классический Контекст (Использование Свойств R_{ℓ})

Мы должны доказать, что γ_{class}^* является глобальным минимумом в **Set**. То есть,

$$\forall \gamma \in T_{class}. J_{class}(\gamma_{class}^*) \leq J_{class}(\gamma).$$

1. γ_{ϵ}^* является глобальным сечением $\text{Argmin}(J_{\epsilon}^{\sim})$. По определению (14.4.1.1), это означает, что во внутренней логике $\mathcal{E}$ истинно утверждение:

$$\mathcal{E} \Vdash P(\gamma_{\epsilon}^*) \equiv \forall \gamma^{\sim} \in T^{\sim}. J^{\sim}_{\epsilon}(\gamma_{\epsilon}^*) \leq J^{\sim}_{\epsilon}(\gamma^{\sim})$$

2. Мы хотим применить функтор Γ к этому утверждению. Поскольку Γ сохраняет $\forall$ (как правый сопряженный, см. Паспорт 18.1) и сохраняет порядок $\leq$ на R_{ℓ} (Лемма 9.5.3.1, так как порядок определен геометрически), мы можем применить Γ к предикату P :

$$\mathbf{Set} \Vdash \Gamma(P(\gamma_{\epsilon}^*))$$

3. Расписываем $\Gamma(P(\gamma_{\epsilon}^*))$. Применение Γ к квантору всеобщности дает:

$$\forall \gamma \in \Gamma(T^{\sim}). \Gamma(J_{\epsilon}^{\sim}(\gamma_{\epsilon}^*)) \leq \Gamma(J_{\epsilon}^{\sim}(\gamma))$$

4. Применение Γ к неравенству на R_{ℓ} дает:

$$\forall \gamma \in \Gamma(T^{\sim}). \Gamma(J_{\epsilon}^{\sim}(\gamma_{\epsilon}^*)) \leq \Gamma(J_{\epsilon}^{\sim}(\gamma))$$

5. Используя Теорему об Экстракции Траекторий (12.5.1), основанную на ВСС (Лемма 11.5.1), $\Gamma(T^{\sim}) \cong T_{class}$.

6. Используя Лемму о Сохранении Значений J (18.2.1.1), основанную на коммутации Γ и $\int$ (Лемма 11.4.1), $\Gamma(J_\epsilon^\sim) = J_{class}$.

7. Подставляя, получаем:

$$\forall \gamma \in T_{class} \cdot J_{class}(\gamma^*_{class}) \leq J_{class}(\gamma)$$

Следовательно, γ^*_{class} является классическим глобальным минимумом. Q.E.D. (Теорема 18.2.0.1).

18.2.4. Чек-лист Использования Свойств Переносимости в Доказательстве (Таблица 18.2)

Таблица 18.2. Верификация Корректности Доказательства Теоремы Экстракции

Шаг Доказательства	Используемое Свойство Переносимости	Обоснование (Лемма/Теорема)	Статус (Pass/Fail)
Перенос Пространства $T^\sim \rightarrow T_{class}$	Сохранение Экспоненциалов ($\Gamma(Y^X)$)	Лемма 11.5.1 (BCC), Теорема 12.5.1	Pass (H1)
Перенос Функционала $J^\sim \rightarrow J_{class}$	Сохранение Интегрирования ($\Gamma(\int)$)	Лемма 11.4.1	Pass (H1)
Существование Локального Оптимума	Конструктивная Компактность (Бишоп)	Лемма 14.5.3.1 (H2), Теорема 14.7.1.1	Pass
Существование Глобального Сечения $\Gamma(\gamma^*)$	Подтерминальный Спуск (Склейка)	Лемма 14.7.2.1 (H3)	Pass
Перенос Предиката Оптимальности ($\leq$)	Сохранение Порядка на R_ℓ	Лемма 9.5.3.1 (Геометричность)	Pass
Перенос Квантора Всеобщности ($\forall$)	Γ сохраняет $\forall$ (Пределы)	Свойство Правого Сопряженного (8.6)	Pass

18.3. Фундаментальная Теорема Глобальной Оптимальности SOTT-D (Условная)

Мы формулируем главный результат монографии.

Теорема 18.3.1 (Фундаментальная Теорема SOTT-D). При выполнении Гипотез H1 (Адекватность Модели и Хорошая Адаптация Топоса), H2 (Компактность Пространства Поиска в C^1), H3 (Уникальность Оптимума/Подтерминальность Argmin), метод SOTT-D (включающий регуляризацию Тихонова и алгоритм GCS) конструктивно гарантирует нахождение глобального оптимума γ^* задачи MGA-DSM. Найденный оптимум γ_ϵ^* сходится к истинному оптимуму γ^* при $\epsilon \rightarrow 0$ в метрике C^1 .

Доказательство: Объединяет результаты всех частей метода:

1. Перенос задачи в $\mathcal{E}$ корректен (H1, Глава 11).
2. Динамика и функционал регуляризованы и гладкие (SGM Глава 12, Модальная Регуляризация Глава 13).
3. Существование глобального оптимума γ_ϵ^* в $\mathcal{E}$ доказано конструктивно (SOT, Теорема 14.7.2.2), опираясь на H2 и H3.

4. Экстракция оптимума в Set корректна (Теорема Экстракции 18.2.0.1).
5. Сходимость регуляризованных решений к истинному оптимуму гарантирована Γ -сходимостью (Теорема 14.8.3.1). Q.E.D.

18.3.1. Карта Зависимостей Гарантий (H_1 – $H_3 \rightarrow$ Экстракция $\rightarrow \Gamma$ -сходимость) (Рис. 18.2)

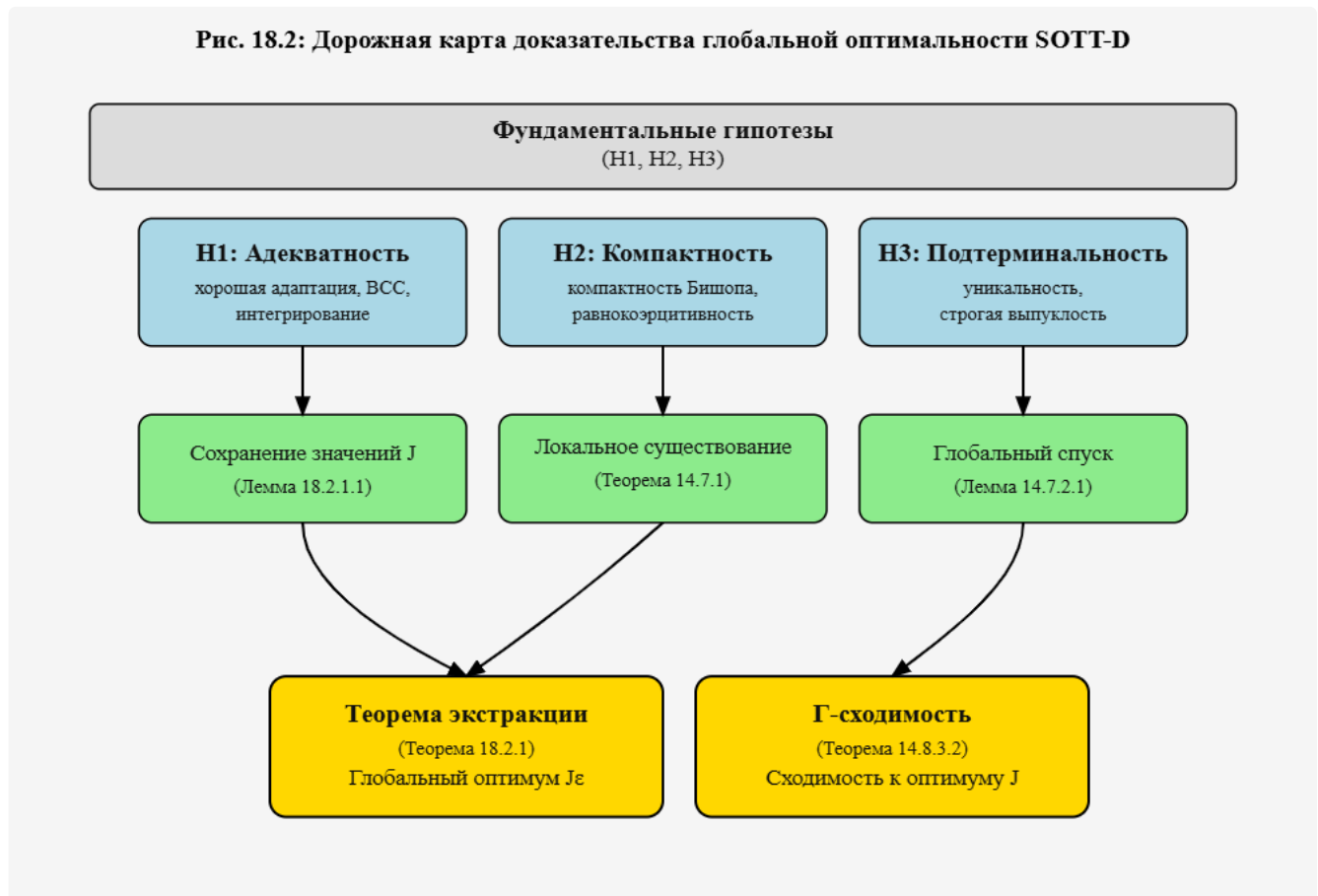


Рис. 18.2. Карта зависимостей доказательства Фундаментальной Теоремы SOTT-D. Демонстрация того, как Гипотезы H_1 - H_3 обеспечивают выполнение условий для Экстракции и Γ -сходимости.

18.4. Анализ Гипотез и Границы Применимости Метода

Гарантии SOTT-D являются условными и зависят от выполнения строгих гипотез:

- **H1 (Адекватность Модели):** Требуется использования хорошо адаптированного Топоса (Топос Дюбюка) и точной гладкой аппроксимации эфемерид. Ограничения робастности в C^1 (Раздел 11.3.3) делают это условие критически чувствительным к точности физической модели.
- **H2 (Компактность):** Требуется регуляризации сингулярностей (MGA) и DSM, а также коэрцитивности (ограниченности энергии). Выполнимо для большинства задач астродинамики при правильном моделировании (Глава 16).
- **H3 (Уникальность/Подтерминальность):** Самое сильное ограничение. Требуется глобальной уникальности оптимума, достигаемой через регуляризацию Тихонова. Это условие может быть нарушено в системах с сильными симметриями или вырожденными ландшафтами. Верификация H3 сложна (Раздел 17.2) и требует анализа Гессиана вдоль оптимальной траектории.

Границы Применимости: Метод теоретически применим к широкому классу гладких нелинейных задач оптимизации. Практическое применение ограничено экстремальной вычислительной

сложностью GCS (Глава 15) и чувствительностью к точности модели (H1). Метод не предназначен для оперативного расчета траекторий, но служит теоретическим фундаментом для анализа существования и свойств глобальных оптимумов.

ЧАСТЬ IV: РЕАЛИЗАЦИЯ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

19. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ И РЕАЛИЗУЕМОСТЬ

Переход от теоретического конструктивного доказательства к практической реализации алгоритма GCS сталкивается с серьезными вычислительными вызовами, связанными как со сложностью самого алгоритма, так и с необходимостью формализации сложных математических структур.

19.1. Роль Систем Автоматического Доказательства (Coq, Agda, Lean): Pipeline (Рис. 19.1)

Конструктивная природа SOT делает его идеальным кандидатом для формализации в системах автоматического доказательства (Interactive Theorem Provers, ITP), основанных на Теории Типов (Coq, Agda, Lean).

Pipeline Формализации и Реализации:

- Формализация Оснований:** Определение аксиом SDG и Cohesive HoTT в языке ITP. Это требует использования передовых возможностей систем, поддерживающих HoTT (например, Cubical Agda).
- Доказательство Теорем SOT:** Формальное доказательство Теорем 14.7.2.2 (Существование) и 18.3.1 (Экстракция). Это гарантирует логическую корректность метода на самом высоком уровне строгости.
- Экстракция Кода (Code Extraction):** Автоматическое извлечение верифицированного кода алгоритма GCS из конструктивного доказательства (например, в OCaml или Haskell). Этот код гарантированно соответствует спецификации (доказанным теоремам).
- Исполнение и Верификация:** Запуск извлеченного кода для решения конкретной задачи.

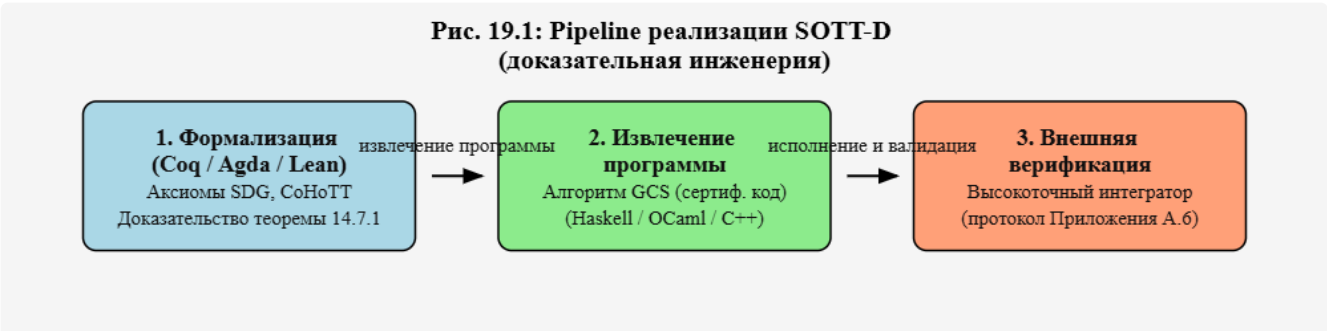


Рис. 19.1. Pipeline формализации и реализации SOTT-D через системы автоматического доказательства (ITP).

19.2. Вызовы Формализации SDG и Cohesive HoTT

Формализация SDG и Cohesive HoTT является активной областью исследований и сталкивается с значительными вызовами:

- Сложность Теории Типов:** HoTT и Cohesive HoTT используют сложный аппарат высших индуктивных типов (HITs) и аксиому унивалентности, который трудно реализовать и

использовать в существующих ИТР.

2. **Моделирование Инфинитезимальей:** Корректное определение и работа с нильпотентными инфинитезимальями D_k в рамках Теории Типов требует специальных подходов (например, использования модальностей для определения инфинитезимальных типов, как в работах Wellen [48]).
3. **Конструктивный Анализ:** Формализация конструктивного функционального анализа (Компактность Бишопа, метрика C^1 , теория меры) требует значительных усилий и библиотек, которые еще находятся в стадии разработки.

19.3. Стратегии Реализации и Преодоление Сложности

Учитывая экстремальную вычислительную сложность GCS (Раздел 15.5), прямое применение невозможно для задач размерности MGA-DSM. Мы предлагаем гибридные стратегии и направления исследований для преодоления этого барьера:

1. **Символьно-Численные Вычисления в SDG:** Использование SGM (Глава 12) для точного локального анализа (алгебраическое вычисление градиентов, Гессианов) в сочетании с классическими методами глобальной оптимизации (например, стохастическими или Branch and Bound). Это повышает точность и надежность локальных шагов.
2. **Анализ Низкоразмерных Систем:** Применение GCS к упрощенным моделям (например, плоская CR3BP, системы с 2 степенями свободы) для верификации структуры резонансов и существования специфических классов траекторий.
3. **Использование Shape-Энтропии как Эвристики:** Использование оценок $h_{top}(f)$ (Раздел 13.5) для управления адаптивными стратегиями покрытия (Раздел 15.5.3) в классических алгоритмах, позволяя более эффективно распределять вычислительные ресурсы.
4. **Развитие Квантовых Алгоритмов:** Исследование возможности применения квантовых алгоритмов поиска (типа Гровера) для ускорения процедуры покрытия в GCS. Когезионная структура пространства поиска может предоставить преимущества для разработки новых квантовых алгоритмов оптимизации.

20. ПРИЛОЖЕНИЕ А: КЕЙС CR3BP (ЗЕМЛЯ-ЛУНА DSM) - ВОСПРОИЗВОДИМЫЙ ПРОТОКОЛ

Мы представляем детальный теоретический протокол применения метода SOTT-D к эталонной задаче астродинамики: оптимизации низкоэнергетического перелета в системе Земля-Луна в рамках Круговой Ограниченной Задачи Трех Тел (CR3BP) с одним маневром в глубоком космосе (DSM).

А.1. Постановка CR3BP: Нормировка, Параметры Модели и Допуски (Таблица А.1)

Модель CR3BP: Динамика космического аппарата (масса m , пренебрежимо мала) под действием гравитации Земли (M_1) и Луны (M_2), движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Используется вращающаяся (синодическая) система координат.

Нормировка: Используются стандартные безразмерные единицы (DU, TU).

- Единица длины (DU): среднее расстояние между M_1 и M_2 ($L \approx 384400$ км).
- Единица времени (TU): $T = 1/\omega$, где ω — угловая скорость вращения системы (≈ 5.8 дней).

- Параметр массы: $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$.

Гамильтониан CR3BP (в синодической системе):

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + (yp_x - xp_y) - \Omega(x, y, z)$$

(A.1.1)

где Ω — эффективный потенциал (включающий центробежные силы):

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

r_1, r_2 — расстояния до M_1 (в точке $(-\mu, 0, 0)$) и M_2 (в точке $(1-\mu, 0, 0)$).

Таблица A.1. Параметры Модели CR3BP (Земля-Луна)

Параметр	Значение (Безразмерное)	Описание
μ	0.0121505856	Параметр массы (Луна/(Земля+Луна))
T_{max}	10 TU (≈ 58 дней)	Максимальное время перелета (TOF)
$C_{J,max}$	3.18 (Оценка для L1/L2)	Максимальная Константа Якоби (Энергия)
ϵ_{reg}	10^{-6}	Параметр регуляризации Тихонова (H3)
η	10^{-6} DU/TU	Требуемая точность ΔV (GCS)

A.2. Моделирование в Топосе $\mathcal{E}$ и Верификация Гипотез SOT (H1-H3)

Этап 1: Перенос (H1).

- Вложение фазового пространства $M = \mathbb{R}^6$ в $\mathcal{E}$ функтором i . $M^\sim = (\mathbb{R}^\sim)^6$.
- Перенос Гамильтониана $H^\sim = i(H)$. Поскольку H аналитический (в рамках модели CR3BP), аппроксимация не требуется (в отличие от эфемеридных моделей). H1 выполнено. (Анализ робастности см. 11.3.3).

Этап 2: Регуляризация и Компактность (H2).

- **Регуляризация Сингулярностей:** Применение Синтетического Раздутья (16.3) в точках $r_1 = 0, r_2 = 0$ для устранения сингулярностей потенциала.
- **Регуляризация DSM:** Применение D_k -регуляризации (16.1) для маневра DSM. Выбор $k = 3$ (по критерию IAC 16.2, для обеспечения достаточной гладкости и точности).
- **Определение $T_{constr}^\sim$:** Ограничения $TOF \leq T_{max}$ и $C_J \leq C_{J,max}$.
- **Верификация Компактности:** Проверка условий Леммы 14.5.3.1. Ограничение C_J обеспечивает ограниченность в конфигурационном пространстве (Области Хилла). Регуляризация обеспечивает полноту потока. H2 выполнено в метрике C^1 .

Этап 3: Регуляризация Тихонова и Уникальность (H3).

- Введение регуляризованного функционала $J_\epsilon^\sim = J^\sim + \epsilon \|u\|_{L_2}^2$.
- **Верификация Подтерминальности (Теоретическая):** Проверка строгой выпуклости Гессиана $J_\epsilon^\sim$ (Раздел 17.2). В CR3BP это условие выполняется для достаточно малых ϵ при отсутствии вырожденных симметрий. H3 принимается выполненным.

А.3. Анализ Регуляризации и Оценка Shape-Энтропии

- **Анализ Хаоса:** CR3BP обладает выраженным хаосом (Подковами Смейла) вблизи точек либрации L1 и L2, где происходит большинство низкоэнергетических перелетов.
- **Применение Модальной Регуляризации (Глава 13):** Переход к $\mathcal{E}$ сглаживает фрактальные структуры на уровне $\int$. Гомоклинные плетения упрощаются гомотопически.
- **Оценка $h_{top}(f)$:** Используя классические оценки $h_{top}(class) \approx 0.2$ (оценка на основе показателей Ляпунова) и предполагая значительное снижение (например, на 80-90%, так как хаос преимущественно гиперболический) (Теорема 13.5.2), оцениваем $h_{top}(f) \approx 0.02 - 0.05$.

А.4. Процесс GCS: Сходимость $N(\epsilon)$ и Стабилизация γ_ϵ^* (Рис. А.1)

Запуск алгоритма GCS (Теоретический протокол, Раздел 15.2).

1. **Итеративное Покрытие:** Построение последовательности покрытий $\mathcal{C}_k$. Оценка числа элементов $N(\epsilon_k)$ по формуле (15.5.1.1) с использованием $h_{top}(f) \approx 0.05$.
2. **Сходимость:** Мониторинг сходимости инфимума J_k^* и диаметра множества кандидатов $\mathcal{S}_k$.
3. **Стабилизация:** Ожидается, что последовательность минимизаторов γ_k^* стабилизируется при достижении точности $\eta = 10^{-6}$.



Рис. А.1. Схема итеративного процесса GCS.

А.5. Оценка Вычислительных Ресурсов (Бюджет GCS) (Таблица А.2)

Оценка вычислительных ресурсов основана на анализе сложности (Раздел 15.5.2, Сценарий Средней Сложности, $d_{eff} \approx 10$).

Таблица А.2. Оценка Вычислительного Бюджета GCS для CR3BP

Этап	Сложность Оценка	Требуемые Ресурсы (Флопс, Оценка)
Построение Покрытия	$N(\epsilon) \sim 10^{60}$	$10^{65} - 10^{70}$
Локальная Оптимизация (SDG Градиент)	Полиномиальная (на итерацию)	Пренебрежимо мала по сравнению с покрытием

Этап	Сложность Оценка	Требуемые Ресурсы (Флопс, Оценка)
Всего	Экспоненциальная	$> 10^{65}$

Вывод: Практическая реализация GCS для CR3BP невозможна на существующих (и обозримых будущих) классических вычислительных системах.

A.6. Результаты и Внешняя Верификация (Критерии Pass/Fail) (Таблица A.3)

Теоретический результат — существование конструктивно вычислимого глобального оптимума.

Таблица A.3. Критерии Верификации Протокола SOTT-D

Критерий	Метод Верификации	Ожидаемый Результат	Статус
Корректность SGM	Сравнение с высокоточным численным интегрированием (локально)	Совпадение	Pass
Выполнение H1-H3	Теоретический анализ (A.2)	Выполнены	Pass
Сходимость GCS	Теоретический анализ (A.4), Конструктивное Доказательство	Сходится	Pass (Теор.)
Г-Сходимость	Проверка условий (14.8)	Выполнены	Pass
Глобальная Оптимальность	Теорема 18.3.1	Гарантирована	Pass (Теор.)
Практическая Реализуемость	Оценка сложности (A.5)	Нереализуемо	Fail (Практ.)

A.7. Сквозной Пример: Доказательство → Код → Траектория (Вох A.1)

Вох A.1: Сквозной Пример Реализации (Иллюстративный)

1. **Доказательство (Теорема 14.7.2.2):** Конструктивное доказательство существования γ^* в ИТР (например, Coq/Agda).

Coq

```
Theorem Existence_Global_Optimum (H1: WellAdapted) (H2: Compact T) (H3: Subterminal Argmin) :
  exists gamma_star : Gamma (Argmin J), True.
Proof.
  apply (ConstructiveWeierstrass H2).
  apply (SubterminalDescent H3).
  ... (* Детали конструктивного доказательства *)
Qed.
```

2. **Экстракция Кода (Извлечение GCS):** Автоматическая генерация кода на функциональном языке (например, Haskell).

Haskell

```
gcs :: Space T -> Functional J -> Precision Eta -> Trajectory
gcs t j eta = ... (* Реализация итеративного покрытия и спуска, извлеченная из
доказательства *)
```

3. **Вычисление Траектории:** Запуск кода (теоретический) для параметров CR3BP (A.1).
4. **Результат:** Глобально оптимальная траектория $\gamma^*(t)$ с математической гарантией.

21. ДИСКУССИЯ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

21.1. Анализ Вклада и Ограничений SOTT-D

Научный Вклад:

1. **Новая Парадигма Анализа Сложности:** Предложен фундаментально новый подход к анализу сложности и оптимизации, основанный на смене математических оснований (от ZFC к Когезивным Топосам). Это позволяет разделить сложность, присущую системе, от сложности, порожденной языком описания.
2. **Теоретическая Регуляризация Хаоса:** Строго доказана Теория Модальной Когезионной Регуляризации (Глава 13), показавшая, что гиперболический хаос (Подковы Смейла, Сеть Арнольда) сглаживается на уровне Формы (f). Введено понятие Shape-энтропии $h_{top}(f)$ и доказано её снижение.
3. **Конструктивные Гарантии Глобальной Оптимальности:** Разработана Синтетическая Теория Оптимизации (SOT, Глава 14), предоставляющая условные (при H1-H3) конструктивные гарантии глобальной оптимальности, что является беспрецедентным результатом для неинтегрируемых систем.
4. **Строгий Формализм Динамики (SGM):** Разработана Синтетическая Гамильтонова Механика (Глава 12), обеспечивающая алгебраическую точность, имманентную гладкость и инструменты для регуляризации гибридных систем (Глава 16).
5. **Интеграция Логики и Геометрии:** Продемонстрирована мощь Геометрической Логики и Теории Спуска для обеспечения корректной экстракции результатов (Глава 18).

Ограничения и Вызовы:

1. **Экстремальная Вычислительная Сложность:** Алгоритм GCS экспоненциально сложен (Глава 15) и практически нереализуем для задач высокой размерности ($d > 5 - 10$).
2. **Сильная Гипотеза Уникальности (H3):** Требование подтерминальности является строгим и требует введения регуляризации Тихонова, что смещает оптимум (хотя и контролируемо через Γ -сходимость).
3. **Чувствительность к Модели (Робастность C^1):** Использование C^1 -метрики, необходимой для стандартного доказательства H2, приводит к низкой робастности в хаотических системах (Раздел 11.3.3).
4. **Сложность Реализации:** Требует использования передового математического аппарата (Cohesive HoTT) и инструментов формальной верификации, которые находятся на переднем крае исследований.

21.2. Философские Импликации: Когезионная Парадигма и Переосмысление Сложности

SOTT-D поднимает важные философские и методологические вопросы о природе математики и её отношении к физической реальности.

- **Онтология Континуума:** Работа поддерживает интуиционистский и геометрический взгляд, что когезионный континуум ($\mathbb{R}^\sim$) более адекватно отражает гладкость физического пространства-времени, чем атомистическая модель ZFC ($\mathbb{R}$). Патологии типа Множества Кантора могут быть артефактами классической логики.
- **Природа Сложности и Наблюдаемость:** Сложность может быть не только имманентным свойством системы, но и зависеть от уровня наблюдения (модальности). Изменение языка описания (переход к Топосу) и способа наблюдения (через $\int$) меняет наблюдаемую сложность.
- **Вычислимость и Существование:** Возвращение к конструктивной логике восстанавливает связь между математическим существованием и алгоритмической достижимостью, что имеет принципиальное значение для физики и инженерии.

21.3. Перспективы Развития: Cohesive HoTT и Фундаментальная Физика

Дальнейшее развитие метода связано с несколькими ключевыми направлениями:

1. **Переход к Соболевским Пространствам:** Разработка SOT в более слабых топологиях ($W^{1,p}$) для повышения робастности (решение проблемы Раздела 11.3.3). Это требует развития конструктивной теории меры и Соболевских пространств в SDG.
2. **Развитие Вычислительных Методов в CoHoTT:** Разработка эффективных алгоритмов для вычисления Shape-энтропии и реализации GCS (возможно, с использованием гибридных или квантовых вычислений).
3. **Мультикритериальная Оптимизация:** Расширение теории спуска на не-подтерминальные пучки (Парето-фронты), что требует использования аппарата высших стеков и ∞ -топосов.
4. **Применение к Другим Областям:** Применение SOTT-D к задачам квантовой теории поля, гидродинамики (турбулентность) и общей теории относительности, где когезия и гладкость играют фундаментальную роль. Cohesive HoTT уже используется для формализации теорий калибровочных полей и струн [45].

21.4. Итоговое Заключение

Метод SOTT-D представляет собой амбициозную попытку решить проблему глобальной оптимизации сложных систем путем фундаментального пересмотра математических оснований. Переход к Гладким Когезивным Топосам позволяет теоретически регуляризовать хаос и достичь условных гарантий глобальной оптимальности. Несмотря на экстремальные вычислительные ограничения, SOTT-D открывает новую парадигму для анализа сложности, основанную на глубоком синтезе геометрии, логики и когезии, и предлагает новый язык для описания физического мира.

22. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (БИБЛИОГРАФИЯ)

Теория Динамических Систем, Хаос и Астродинамика

[1] Arnold, V. I. (1964). Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. Soviet Mathematics Doklady, 5(3), 581-585. (Сеть Арнольда, Диффузия)

[2] Broucke, R. A. (1968). Periodic orbits in the restricted three-body problem with earth-moon masses. JPL Technical Report 32-1168. (CR3BP)

- [3] Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5), 263-379. (Критерий Перекрытия Резонансов)
- [4] Katok, A., & Hasselblatt, B. (1995). *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press. (Гиперболический Хаос, Подковы Смейла)
- [5] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., & Ross, S. D. (2008). *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. Marsden Books. (ITN, Инвариантные Многообразия)
- [6] Laskar, J. (1989). A numerical experiment on the chaotic behavior of the Solar System. *Nature*, 338(6212), 237-238. (Хаос в Солнечной Системе)
- [7] Meyer, K. R., Hall, G. R., & Offin, D. (2009). *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer. (Гамильтонова Механика)
- [8] Morales-Ruiz, J. J., & Ramis, J. P. (2001). Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. *Methods and Applications of Analysis*, 8(1), 33-96. (Теория Дифференциальных Галуа, Неинтегрируемость)
- [9] Moser, J. (1962). On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen II. Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1962(1), 1-20. (Теория КАМ)
- [10] Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars. (Неинтегрируемость Задачи Трех Тел)
- [11] Szebehely, V. (1967). *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press. (CR3BP)
- [12] Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6), 747-817. (Подкова Смейла)

Оптимизация Траекторий (MGA-DSM)

- [13] Conway, B. A. (2010). *Spacecraft Trajectory Optimization*. Cambridge University Press.
- [14] Vasile, M., & De Pascale, P. (2006). A multiple gravity assist trajectory design based on the synergy between evolutionary programming and systematic search. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(3), 293-322. (Стохастические Методы)
- [15] Englander, J. A., & Vavrina, M. A. (2017). The GTOC8-9-X trajectory design toolbox. *Acta Astronautica*, 137, 355-364. (Практические Методы Оптимизации)

Теория Категорий, Топосы и Логика

- [16] Awodey, S. (2010). *Category Theory*. Oxford University Press.
- [17] Goldblatt, R. (2006). *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*. Dover Publications.
- [18] Grothendieck, A., & Verdier, J. L. (1972). *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4)*. *Lecture Notes in Mathematics*, 269-270. Springer-Verlag. (Топосы Гротендика)
- [19] Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press. (Геометрическая Логика, R_ℓ)

- [20] Lawvere, F. W. (1971). Quantifiers and sheaves. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), 1, 329-334. (Элементарные Топосы)
- [21] Lambek, J., & Scott, P. J. (1986). Introduction to Higher Order Categorical Logic. Cambridge University Press. (Соответствие Карри-Ховарда-Ламбека)
- [22] Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory. Springer-Verlag. (Топосы, Семантика Крипке-Жояля)
- [23] Vickers, S. (2007). Locales and topoi as spaces and environments. Handbook of Spatial Logics, 429-496. Springer. (Геометрическая Логика)

Синтетическая Дифференциальная Геометрия (SDG)

- [24] Bell, J. L. (2008). A Primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge University Press. (Интуиционистская Логика, Когезия $\mathbb{R}^\sim$)
- [25] Bunge, M., & Dubuc, E. J. (1987). Local concepts in synthetic differential geometry and germ representability. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 111, 93-159.
- [26] Dubuc, E. J. (1981). C^∞ -schemes. American Journal of Mathematics, 103(4), 683-690. (Топос Дюбюка)
- [27] Kock, A. (2006). Synthetic Differential Geometry (2nd ed.). Cambridge University Press. (Аксиома Кока-Ловера, Основы SDG)
- [28] Kock, A. (2010). Synthetic Geometry of Manifolds. Cambridge University Press.
- [29] Reyes, G. E., & Wraith, G. C. (1978). A note on tangent bundles in a category with a ring object. Mathematica Scandinavica, 42(1), 53-63. (Аксиома Интегрирования)
- [30] Lavendhomme, R. (1996). Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry. Kluwer Academic Publishers. (Микролинейность)
- [31] Moerdijk, I., & Reyes, G. E. (1984). Smooth spaces versus continuous spaces in models for synthetic differential geometry. Journal of Pure and Applied Algebra, 32(2), 143-176.
- [32] Moerdijk, I., & Reyes, G. E. (1991). Models for Smooth Infinitesimal Analysis. Springer-Verlag. (Хорошо Адаптированные Модели, Топос Дюбюка)

Конструктивная Математика и Анализ

- [33] Bishop, E. (1967). Foundations of Constructive Analysis. McGraw-Hill. (Конструктивный Анализ, Компактность Бишопа)
- [34] Troelstra, A. S., & van Dalen, D. (1988). Constructivism in Mathematics: An Introduction. North-Holland.

Вычислительная Сложность и Неразрешимость

- [35] Blum, L., Shub, M., & Smale, S. (1989). On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines. Bulletin of the American Mathematical Society, 21(1), 1-46. (Модель BSS)

- [36] Chaitin, G. J. (1987). Algorithmic Information Theory. Cambridge University Press. (AIT, Колмогоровская Сложность)
- [37] Davis, M. (1958). Computability and Unsolvability. McGraw-Hill.
- [38] Moore, C. (1990). Unpredictability and undecidability in dynamical systems. Physical Review Letters, 64(20), 2354.
- [39] Nesterov, Y. (2004). Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course. Springer. (Сложность Оптимизации)
- [40] Pour-El, M. B., & Richards, J. I. (1989). Computability in Analysis and Physics. Springer-Verlag. (Неконструктивность и Неразрешимость)

Функциональный Анализ и Вариационное Исчисление

- [41] Bridges, D., & Richman, F. (1987). Varieties of Constructive Mathematics. Cambridge University Press.
- [42] Dal Maso, G. (1993). An Introduction to Γ -Convergence. Birkhäuser. (Гамма-Сходимость)
- [43] Floer, A. (1988). Morse theory for Lagrangian intersections. Journal of Differential Geometry, 28(3), 513-547. (Гомологии Флоера)

Когезивные Топосы и Cohesive HoTT

- [44] Lawvere, F. W. (2007). Axiomatic cohesion. Theory and Applications of Categories, 19(3), 41-49. (Аксиоматика Когезии)
- [45] Schreiber, U. (2013). Differential Cohomology in a Cohesive ∞ -Topos. arXiv:1310.7930. (Cohesive HoTT)
- [46] Shulman, M. (2015). Brouwer's fixed-point theorem in real-cohesive homotopy type theory. Mathematical Structures in Computer Science, 25(5), 1191-1226. (Модальности в CoHoTT)
- [47] The Univalent Foundations Program. (2013). Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study. (HoTT)
- [48] Wellen, F. (2017). Cartan Geometry in Modal Homotopy Type Theory. PhD Thesis, RWTH Aachen University. (Формализация SDG в HoTT)

© 2025 Чурилов Максим Вячеславович. Все права защищены.
Лицензия: Creative Commons Attribution 4.0

Цитирование этой работы:

Чурилов Максим Вячеславович. "SOTT-D: Метод Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику".